Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Nagy János

Normál felület szingularitások

Szakdolgozat

Matematika MSc

Témavezető:

Némethi András, egyetemi tanár
Geometriai Tanszék

Budapest, 2016.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Némethi Andrásnak, hogy elvállalta a szakdolgozatom koordinálását, valamint, hogy kellő időt szánt arra, hogy mélyebben megismerkedhessek a dolgozatom témájával. Továbbá köszönöm minden családtagnak és barátnak, akik bárminemű támogatást nyújtottak a szakdolgozatom elkészitésében.

Tartalomjegyzék

0.1. Előszó

A normál felület szingularitások elmélete a 20. század elején alakult ki. Az elmélet alapjainak kidolgozói között olyan nevek találhatóak, mint Laufer, Lipman, Artin, Grauert. A normál felület szingularitásokat lehet vizsgálni pusztán topologikus eszközökkel. A szingularitás csomója egy gráf 3-sokaság, ami tartalmazza a szingularitás összes topologikus információját és kiszámolhatóak belőle olyan invariánsok, mint a Seiberg Witten invariáns, vagy a topologikus zeta sor. A szingularitás analitikus tipusát tanulmányozva vizsgálhatóak analóg módon kéve kohomológiák felhasználásával olyan analitikus invariánsok, mint a geometriai génusz, vagy az analitikus Poincaré sor.

Az én dolgozatom felépitése a következő: Az első fejezetben megismerkedünk az alapfogalmakkal és a szükséges kéve kohomológiai eszköz tárral. A második fejezetben a topologikus zeta sorral és analitikus Poincaré sorral foglalkozunk. Definiálunk altérelrendezéseket, melyek komplementerének Euler karakterisztikája megegyezik ezeknek a soroknak az együtthatóival. A folytatásban tovább finomitjuk a Topologikus zeta sort olyan módon, hogy beirjuk az Euler karakterisztika helyére az altérelrendezés komplementerének Grothendieck osztályát, vagy kohomologikus Poincaré sorát. A dolgozat főként Némethi András: Normal surface singularities cimű könyvére támaszkodik. A második fejezetben levő saját állitások bizonyitásához felhasználjuk a [**2**], [**3**], [**5**] forrásokat.

1. FEJEZET

Bevezetés

Ebben a fejezetben összefoglaljuk a szakdolgozathoz szükséges alapismereteket röviden a komplex felület szingularitások rezolúcióiról, illetve összegyűjtünk néhány kéveelméleti vagy egyéb állítást amit később használni fogunk.

1.1. Rezolúciók és modifikációk.

1.1.1. DEFINICIÓ. **Modifikációk és Rezolúciók[4]** *Legyen X egy komplex analitikus halmaz, melynek szinguláris pontjainak halmaza $\Sigma(X)$. Legyen $o \in \Sigma(X)$.*

Legyen $\phi : \widetilde{X} \to U$ egy proper analitikus leképezés, ahol $\widetilde{X}$ normál és U egy megfelelően kicsi környezete az o pontnak X-ben. Jelölje $E := \phi^{-1}(\Sigma(X))$.

Azt mondjuk, hogy ϕ egy lokális részleges modifikációja az (X,o) csirának, ha $\widetilde{X} \setminus E$ sűrű $\widetilde{X}$-ban és ϕ egy izomorfia egy $A \subset U$ analitikus halmazon kivül, ami tartalmazza a $\Sigma(X) \cap U$ halmazt, de nem tartalmazza egyik irreducibilis komponsét se az U-nak.

Egy ϕ modifikációt rezoluciónak hivunk, ha $\widetilde{X}$ egy sima analitikus sokaság. Egy ϕ rezoluciót erősnek hivunk, ha a $\phi : \phi^{-1}(U \setminus \Sigma(X)) \to U \setminus \Sigma(X)$ megszoritása izomorfizmus és $\phi^{-1}(U \cap \Sigma(X))$ egy normál metsző divizor $\widetilde{X}$-ben, amit kivételes divizornak hivunk a későbbiekben.

Egy erős rezoluciót jónak hivunk, ha a kivételes divizor összes komponense sima. Egy rezolució minimális, hogyha nem faktorizálódik át nem triviálisan egy másik rezolución, hasonlóan deifiniálhatjuk a minimális jó rezolució fogalmát is.

1.1.2. PÉLDA. A normalizáció $n : \widehat{X} \to X$ egy modifikáció. Ebben az esetben n egy véges leképezés, ami speciálisan azt jelenti, hogy $n^{-1}(o)$ egy véges halmaz $\{\widehat{o}_i\}_i$. Ha (X,o) egy 1–dimenziós komplex görbecsira, akkor a normalizáció egyben egy jó rezolució is. Ha (X,o) egy felületszingularitás, akkor az összes $(\widehat{X},\widehat{o}_i)$ szingularitás normális, amiből speciálisan következik hogy irreducibilis és izolált.

A normalizálás egy szingularitás kisimitásának első lépésének tekinthető, mert minden rezolució átfaktorizálodik a normalizációs leképezésen.

A következőkben kimondunk néhány alapvető állitást a rezoluciókról bizonyitás nélkül:

Tegyük fel, hogy (X,o) egy normál felület szingularitás csirája és legyen $\phi : \widetilde{X} \to U$ egy modifikáció, ami nem izomorfizmus.

1.1.3. LEMMA. *Az E kivételes divizor összefüggő, kompakt és 1–dimenziós.*

1.1.4. DEFINICIÓ. *Legyen (X,o) egy normál felület szingularitás és ϕ egy modifikáció. Az E kivételes divizor komponenseit jelölje $\{E_v\}_{v=1}^{s}$ és legyen $g_v = g(E_v)$ a geometriai génusza az E_v görbéknek amit a nem sima esetben a normalizáltjuk génuszával értelmezünk. Tegyük fel hogy ϕ egy rezolució. Ekkor a $I := (E_v, E_u)_{v,u}$ mátrixot hivjuk a ϕ leképezés metszet mátrixának. Ha adott egy $f : (X,o) \to (\mathbb{C},0)$ holomorf csira, akkor az $\widetilde{X}$ felületre visszahuzottjának a divizorát* $\mathrm{div}_E(f) + S(f)$ *alakban irhatjuk, ahol $S(f)$ a szigorú transzformáltja az f divizorának,* $\mathrm{div}_E(f)$ *pedig a divizornak az E kivételes divizorra eső része. Az előbbi a divizor nem kompakt része, az utóbbi a kompakt.*

1.1.5. ÁLLITÁS. [**4**] *Legyen (X,o) egy normálfelület szingularitás és ϕ egy rezolució, akkor az I metszetmátrix negativ definit.*

Ennek az állitásnak egyébként a forditottja is igaz, Grauert tétele szerint minden negativ definit gráfhoz létezik egy normálfelületszingularitás és annak rezolúciója, ami az adott gráfot adja.

1.1.6. **Rezolúcióhoz tartozó rács.**

Legyen (X,o) egy normál felület szingularitás és legyen $\phi : \widetilde{X} \to X$ egy nem feltétlenül jó rezolució. Jelölje $L := H_2(\widetilde{X}, \mathbb{Z})$. Könnyen látható hogy L szabadon generált az $\{E_v\}_v$ görbék homologiaosztályai által és ezen a rácson adódik egy negativ definit bilineáris forma az I metszetmátrixból. Hasonlóképp jelölje $L' := H_2(\widetilde{X}, \partial\widetilde{X}, \mathbb{Z})$ a relativ homológiát. Könnyen látható, hogy az L' rácsot szabadon generálják az E_v görbék generikus pontjaiban lévő transzverzális D_v körlapok.

Továbbá a fenti homológiák között van egy temészetes leképezés $L \to L'$, amit ha az $\{E_v\}$ and $\{D_v\}$ bázisban irunk fel, akkor a mátrixa I. Mivel a fentiek szerint I negativ definit, ezért ez a leképezés nem–degenerált, injektiv, tehát az L rács tekinthető az L' részrácsának. A továbbiakban úgy képzeljük, hogy L' egy rács a $L \otimes \mathbb{Q}$ vektrotérben és tartalmazza az L rácsot, amin levő természetes negativ definit I bilineáris forma kiterjed a $L \otimes \mathbb{Q}$ vektortérre. Jelölje ezenkivül $H := L'/L$ a két rács faktorát, ami a fentiek szerint egy véges Abel csoport. Könnyen látható, hogy ez a csoport a szingularitás valós háromdimenziós csomójának első homológia csoportjának torziórésze, melynek elemszáma $|H| = |\mathrm{coker}(I)| = |\det(I)|$.

Egy $l = \sum r_v E_v \in L'$ rácselemet akkor hivunk effektivnek, ha minden koordinátája nemnegativ, és jelölje ezek halmazát $L'_{\geq 0}$, valamint az L -beli effektiv ciklusok halmaza legyen $L_{\geq 0} := L'_{\geq 0} \cap L$. Definiálhatunk egy természetes rendezést az $L \otimes \mathbb{Q}$ vektortéren, $l_1 \geq l_2$ ha $l_1 - l_2$ minden koordinátája nemnegativ. Legyen $l_1 > l_2$ ha $l_1 \geq l_2$ és $l_1 \neq l_2$. Két vektor minimumát az $\{E_v\}$ bázisban koordinátánként definiáljuk. Ha $l' = \sum_v r_v E_v$ egy racionális ciklus, akkor jelölje a tartóját $|l'|$, ami azoknak a báziselemeknek a halmaza, aminek a koordinátája nem nulla.

Jelölje a H véges csoport $\mathrm{Hom}(H, S^1)$ Pontrjagin duálisát $\widehat{H}$, a metszetforma segitségével definiálhatunk egy $\theta : H \to \widehat{H}$ izomorfiát a $[l'] \mapsto e^{2\pi i (l', \cdot)}$ képlettel.

Vezessük be az L' rácsnak egy kézenfekvő $E_v^* = -D_v$ bázisát, ahol tehát $(E_v^*, E_w) = -1$, ha $v = w$ és 0 egyébként. Belátható hogy ennek a bázisnak minden eleme szigorúan effektiv, amit úgyis megfogalmazhatunk, hogy az $-I^{-1}$ mátrix minden eleme pozitiv.

Az E_v^* vektorok nemnegativ egész együtthatós kombinációinak halmazát jelölje $\mathscr{S}'$, aminek az elemeire tehát az teljesül, hogy $(l', E_v) \leq 0$ minden $v \in \mathscr{V}$ esetén.

Legyen ezen kivül $\mathscr{S} := \mathscr{S}' \cap L$.

A következő könnyű lemma indokolja a fenti jelöléseket:

1.1.7. LEMMA. *Legyen $f : (X, o) \to (\mathbb{C}, 0)$ egy holomorf függvény, és ϕ (X, o) szingularitás egy jó rezolúciója. Ekkor* $\mathrm{div}_E(f) \in \mathscr{S} \setminus \{0\}$.

A $\mathscr{S}'$ és $\mathscr{S}$ halmazok végesen generált félcsoportok.

1.1.8. DEFINICIÓ. *Egy Z komplex felületen levő C görbét hivjunk (-1) görbének, ha $C \cong \mathbb{P}^1$ és $(C, C) = -1$.*

A következő tétel a rezolúciók létezését garantálja:

1.1.9. TÉTEL. [**1**] *Legyen (X, o) egy normál felület szingularitás, ekkor a következők teljesülnek:*

(1) Létezik jó rezolució.
(2) Létezik egyértelmű minimális rezolúció és egyértelmű minimális jó rezolúció.
(3) Egy rezolúció akkor minimális, ha az E_v görbék egyike se (-1) görbe.
(4) Egy jó rezolúció minimális jó akkor és csak akkor ha az E_v görbék között minden (-1) görbe legalább másik 3 görbét metsz.

1.1.10. **Rezoluciós Gráf.** Egy (X, o) normál felület szingularitáshoz és annak ϕ rezolúciójához deifinálhatunk egy dekorált gráfot, amit rezolúciós gráfnak hivunk. Ennek csúcsai tartozzanak a kivételes divizor irreducibilis komponensihez, melynek halmazát $\mathscr{V}$ -vel jelöljük.

Egy $w \in \mathscr{W}$ csúcsnak két dekorációja van, a hozzá tartozó görbe $[g_w]$ génusza, illetve a görbe normál nyalábjának Euler száma e_w. Két csúcsot a rezolúciós gráfban akkor köt össze él, ha a hozzájuk tartozó görbék metszik egymást, és az összekötő élek száma megegyezik a két görbe metszés számával.

Abban az esetben, ha a szingularitás csomója egy racionális homológia gömb, akkor az összes $[g_w]$ génusz dekoráció 0 és a rezoluciós gráf egy fa.

A dolgozatban többnyire ez az eset áll elő, ekkor a $[g_w]$ dekorációkat nem jelöljük.

1.1.11. **Analitikus invariánsok.** A következőkben bevezetjük az analitikusabb jellegű invariánsokat, illetve állitásokat melyekre szükségünk lesz majd.

Rögzitsünk egy (X,o) normál felület szingularitást és annak ϕ rezolúcióját.

Ekkor legyen $K = K_{\widetilde{X}}$ a kanonikus divizor osztálya $\widetilde{X}$ Picard csoportjában, ahol tehát $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(K) = \Omega^2_{\widetilde{X}}$, vagyis K az $\widetilde{X}$ tér kotangens nyalábjának determináns nyalábjának divizorosztálya. Legyen ezen kivül $-Z_K = c_1(\Omega^2_{\widetilde{X}}) \in L'$. Ez tehát speciálisan azt jelenti hogy $-Z_K$ az $\widetilde{X}$ tér kotangens nyalábjának első Chern osztálya. A szingularitást Gorensteinnek hivjuk, ha a kotangens nyaláb determinánsnyalábja holomorfan triviális az (X,o) sima részén. Ennek a feltételnek a topologikus megfelelője hogy ez a nyaláb topologikusan triviális, ekkor a szingularitást numerikusan Gorensteinnek hivjuk és ez ekvivalens azzal hogy a Z_K eleme az L rácsnak.

A következő képlet az adjunkciós formulából következik és meghatározza a Z_K elemet:

$$(-Z_K + E_v, E_v) + 2\chi(E_v) = 0 \text{ minden } v \in \mathscr{V} \text{ csúcs esetén.}$$

A fenti képletben $\chi(E_v) = 1 - p_a(E_v) = 1 - g(E_v) - \delta(E_v)$ az E_v görbéhez tartozó triviális vonalnyaláb holomorf Euler karakterisztikája.

A fenti képlet általánosodik a Riemann-Roch formulává a következőképpen:

1.1.12. TÉTEL. **(Riemann–Roch formula)** *Vegyünk egy $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}(\widetilde{X})$ vonal nyalábot és legyen $c_1(\mathscr{L}) = l' \in L'$, valamint $k := -Z_K - 2l'$. Ekkor minden effektiv $l \in L_{>0}$ ciklus esetén tekintsük a $\mathscr{L} \otimes \mathscr{O}_l$ kévét l-en. Ekkor ennek a kévének a holomorf Euler karakterisztikája teljesiti a következő egyenletet:*

$$\chi(\mathscr{L} \otimes \mathscr{O}_l) = -(l, l+k)/2. \tag{1.1.13}$$

Ha a rezolúció minimális, akkor Z_K benne van a $\mathscr{S}'$ topologikus félcsoportban, ezen kivül $Z_K^2 + |\mathscr{V}|$ nem függ a rezolúciótól, csak a szingularitás csomójától.

1.1.14. **Kéveelméleti alapok.** A következőkben összegyűjtjük a legfontossab kéveelméleti állitásokat, exakt sorokat és eltűnési tételeket, melyeket használni fogunk.

Legyen $\mathscr{F}$ egy kéve a T topologikus téren , ekkor $\mathscr{F}$ Euler karakterisztikája $\sum_i (-1)^i h^i(\mathscr{F})$, ahol $h^i(\mathscr{F})$ a $H^i(T,\mathscr{F})$ homológia csoport dimenziója.

Legyen l_1 és l_2, tetszőleges nem–zéró effektiv ciklusok az $\widetilde{X}$ felületen és D tetszőleges divizor, ekkor a $0 \to \mathscr{O}_{l_2}(-l_1+D) \to \mathscr{O}_{l_1+l_2}(D) \to \mathscr{O}_{l_1}(D) \to 0$, illetve $0 \to \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-l_1+D) \to \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(D) \to \mathscr{O}_{l_1}(D) \to 0$ sorok exaktak.

Minden kéve rövid exakt sorhoz tartozik egy homológikus hosszú exakt sor. A mi esetünkben a második kohomológia csoport az $\widetilde{X}$ felületen már mindig nulla lesz a formális környezetek tétele miatt és a dimenzió nagysága miatt.

Ha l egy tetszőleges ciklus a $\widetilde{X}$ felületen és D tetszőleges divizor, akkor a Serre dualitás miatt $h^1(\mathscr{O}_l(D)) = h^0(\mathscr{O}_l(K+l-D))$.

Mig a holomorf Euler karakterisztikája egy vonal nyalábnak topológiai információkból könnyen kiszámolható a Riemann Roch tételből, a homológia csoportok dimenziója külön bonyolultabb analitikus invariáns, de néhány speciális esetben megfogalmazhatunk eltűnési tételeket:

1.1.15. TÉTEL. **Általánositott Grauert-Riemenschneider Tétel.**[**1**] *Vegyünk egy $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}(\widetilde{X})$ vonal nyalábot, melyre $c_1(\mathscr{L}(-K)) \in -\mathscr{S}'$. Ekkor minden $l \in L_{>0}$ ciklus esetén $h^1(l,\mathscr{L}|_l) = 0$ teljesül, amiből speciálisan a formális környezetek tétele miatt $h^1(\widetilde{X},\mathscr{L}) = 0$ is teljesül.*

Ha kikötünk az l ciklusra plusz feltételt, akkor ennél erősebb állitást is mondhatunk:

1.1.16. ÁLLITÁS. [**1**] *Legyen $l \in L_{>0}$ tetszőleges ciklus, melyre $h^1(\mathscr{O}_l) = 0$ és $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}(\widetilde{X})$ olyan vonalnyaláb, melyre $(\mathscr{L}, E_v) \geq 0$ teljesül minden olyan E_v esetén, amely benne van az l ciklus tartójában. Ekkor $h^1(l,\mathscr{L}) = 0$ teljesül.*

Ez a feltétel például minden ciklusra automatikusan teljesül, ha a szingularitás racionális, ebben az esetben tehát ahhoz hogy az első kohomológia csoportja eltűnjön egy vonal nyalábnak az $\widetilde{X}$ felületen, elég feltenni hogy a Chern osztályának az ellentettje a topologikus félcsoportban van.

1.1.17. A fejezet utolsó részében röviden deifiniáljuk a természetes vonal nyalábokat, melyekre később szükség lesz:

Könnyen látható, hogy L' izomorf a $H^2(\widetilde{X},\mathbb{Z})$ kohomológia csoporttal, ami azt jelenti hogy egy $\widetilde{X}$ felületen levő vonalnyaláb első Chern osztálya az L' rács egy elemének tekinthető. Jelölje ezt a hozzárendelést $c_1 : \mathrm{Pic}(\widetilde{X}) \to H^2(\widetilde{X},\mathbb{Z})$.

Ez a leképezés benne van az $\widetilde{X}$ felületen a kéve exponenciális rövid exakt sorhoz tartozó hosszú exakt sorában:

$$0 \to H^1(\widetilde{X},\mathbb{Z}) \xrightarrow{\iota} H^1(\widetilde{X},\mathscr{O}_{\widetilde{X}}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{Pic}(\widetilde{X}) \xrightarrow{c_1} H^2(\widetilde{X},\mathbb{Z}) \to 0. \tag{1.1.18}$$

Legyen ezenkivül $\mathrm{Pic}^0(\widetilde{X}) = H^1(\widetilde{X},\mathscr{O}_{\widetilde{X}})/H^1(\widetilde{X},\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{C}^{p_g}/H^1(E,\mathbb{Z})$, ahol p_g az (X,o) geometriai génusza.

Most legyen $\phi : (\widetilde{X},E) \to (X,o)$ egy jó rezolúció és tegyük fel a következőkben, hogy a szingularitás csomója egy racionális homológia gömb, vagyis $H^1(\widetilde{X},\mathbb{Z}) = 0$.

A fenti exakt sorban c_1 - hez tartozik egy a $L \subset L'$ egész ciklusokon értelmezett természetes szelés. Méghozzá legyen $s_L(l) := \mathscr{O}(l) := \mathscr{O}(\mathrm{div}(l)) \in \mathrm{Pic}(\widetilde{X})$, ekkor természetesen $c_1(\mathscr{O}(l)) = l$.

Az állítás az, hogy ez a s_L szelés egyértelműen kiterjed egy $s : L' \to \mathrm{Pic}(\widetilde{X})$ szeléssé a teljes L' rácsra.

1.1.19. DEFINICIÓ. *Ha $l' \in L'$ tetszőleges, akkor a $s(l')$ vonalnyalábot jelölje $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(l')$, ezek a nyalábokat hivjuk természetesnek.*

Ez az állitás formálisan könnyen belátható a fenti exakt sorból és abból, hogy a $H = L'/L$ faktorcsoport véges, valamint $\mathrm{Pic}^0(\widetilde{X}) \simeq \mathbb{C}^{p_g}$ torziómentes. A következő állitást fogalmazhatjuk meg.

1.1.20. KÖVETKEZMÉNY. *Tegyük fel, hogy $H^1(\widetilde{X},\mathbb{Z}) = 0$.*

(a) Egy $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}(\widetilde{X})$ vonal nyaláb akkor és csak akkor természetes, ha létezik olyan hatványa, amely $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(l)$ alakú valamely $l \in L$ egész ciklusra.

(b) Fenáll a $\mathrm{Pic}(\widetilde{X}) \to \mathrm{Pic}^0(\widetilde{X}) \oplus L'$ izomorfia, melyet a $\mathscr{L} \mapsto (\mathscr{L} \otimes s(c_1\mathscr{L})^{-1}, c_1\mathscr{L})$ leképezés ad meg.

A következőkben leirjuk röviden, hogy jönnek elő ezek a nyalábok az univezális Abel fedésnél.

Jelölje (X_a,o) az univerzális Abel fedését az (X,o) csirának. Ez az $X \setminus \{o\}$ sokaságnak ahhoz a fedéséhez tartozik, melyhez tartozó részcsoport a $X \setminus \{o\}$ topologikus tér fundamentális csoprtjában a $\pi_1(X \setminus \{o\}) \to H$ leképezés magja. Ez a fedés a Stein tétel miatt egyértelműen kiterjed egy $c : (X_a,o) \to (X,o)$ véges holomorf leképezéssé.

Mivel $\widetilde{X} \setminus E \approx X \setminus \{o\}$, ezért a $\pi_1(\widetilde{X} \setminus E) = \pi_1(X \setminus \{o\}) \to H$ leképezés definiál egy Galois fedését a $\widetilde{X} \setminus E$ sokaságnak.

Ennek a leképezésnek van egy egyértelmű $\widetilde{c} : Z \to \widetilde{X}$ kiterjesztése, ahol Z normális és $\widetilde{c}$ egy véges leképezés.

A $\widetilde{c}$ leképezés csak az E kivételes divizor mentén ágazik el, és a H csoport Galois fedése kiterjed Z -re is.

A Z nem feltétlenül sima, de mivel egy normál metszet divizor mentén ágazik el, ezért csak ciklikus hányados szingularitásai lehetnek.

Jelölje $r : \widetilde{Z} \to Z$ egy rezolúcióját ezeknek a szinguláris pontoknak, melyre $(\widetilde{c} \circ r)^{-1}(E)$ egy normál metszet divizor, és legyen $p := \widetilde{c} \circ r$.

A fentieket a következő diagrammban foglalhatjuk össze:

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{Z} & \xrightarrow{r} & Z & \longrightarrow & (X_a, o) \\ & & \Big\downarrow \widetilde{c} & & \Big\downarrow c \\ & & (\widetilde{X}, o) & \xrightarrow{\phi} & (X, o) \end{array} \tag{1.1.21}$$

Felirhatjuk ekkor a következő kommutativ diagrammot:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & L & \to & L' & \to & H & \to & 0 \\ & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow p^* & & \Big\downarrow p^H & & \\ 0 & \to & L_a & \to & L'_a & \to & H_a & \to & 0 \end{array} \tag{1.1.22}$$

Ennek a diagrammnak az alsó sora az (X_a, o) normál szingularitás $\widetilde{Z} \to X_a$ rezoluciójához tartozó rácsoknak az exakt sora, a függőleges leképezések pedig a p leképezés menti visszahúzások. Mivel a p^H leképezés duálisa a $p_H : H_1(X_a \setminus \{o\}, \mathbb{Z}) \to H_1(X \setminus \{o\}, \mathbb{Z})$ leképezésnek, ami az univezális Abel fedés konstrukciója miatt triviális, ezért $p^H = 0$ adódik.

Ez a fenti kommutativ diagramm miatt azt jelenti hogy $p^*(l') \in L_a$ minden $l' \in L'$ rácselemre, tehát a $\mathcal{O}_{\widetilde{Z}}(p^*(l')) \in \mathrm{Pic}(\widetilde{Z})$ vonal nyaláb jól definiált.

1.1.23. TÉTEL. [**1**] *A $\mathcal{O}_{\widetilde{Z}}(p^*(l'))$ vonal nyaláb visszahuzottja egy egyértelmű vonal nyalábnak a $\mathrm{Pic}(\widetilde{X})$ halmazból, ezt a vonal nyalábot jelölje $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(l')$. Ekkor a $s : L' \to \mathrm{Pic}(\widetilde{X})$ leképezés, amit $l' \mapsto \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(l')$ definiál, egy szelése a c_1 leképezésnek, ami kiterjeszti az s_L szelést. Továbbá a $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(l')$ vonal nyalábok definiciója független a $r : \widetilde{Z} \to Z$ rezolúció választásától.*

Megfogalmazunk még egy harmadik megjelenését a természetes nyaláboknak, melyre később szükségünk lesz.

Legyen $\phi : \widetilde{X} \to X$ egy jó rezolúció és tekintsük a $Q := \{l' \in L' : \lfloor l' \rfloor = 0\}$ halmazt. Könnyen látható, hogy minden $h \in H$ elemhez létezik egyértelmű $r_h \in Q$ reprezentáns. r_h a minimális reprezentánsa a h osztálynak a $L'_{\geq 0}$ kúpban.

1.1.24. TÉTEL. [**1**] *Tegyük fel, hogy $H^1(\widetilde{X}, \mathbb{Z}) = 0$ és tekintsük a véges $\widetilde{c} : Z \to \widetilde{X}$ leképezést. Ekkor $\widetilde{c}_* \mathcal{O}_Z$ egy vektornyaláb és a H csoport hatása szerinti sajátdekompozició:*

$$\widetilde{c}_* \mathcal{O}_Z \simeq \oplus_{\alpha \in \widehat{H}} \mathcal{L}_\alpha, \tag{1.1.25}$$

ahol $\mathscr{L}_{\theta(h)} = \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-r_h)$ *minden* $h \in H$ *osztály esetén. Ekkor természetesen* $\widetilde{c}_* \mathscr{O}_Z \simeq \oplus_{l' \in Q} \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-l')$ *teljesül.*

2. FEJEZET

Analitikus és Topologikus Zeta sorok

Legyen (X,o) egy normál felület szingularitás és $\phi : (\widetilde{X},E) \to (X,o)$ egy jó rezolúciója.

Ebben a fejezetben az (X,o) lokális gyűrűjének egy L rács szerinti filtrálását definiáljuk, valamint tekintjük ennek egy fajta ekvivariáns kiterjesztését: az (X_a,o) univerzális Abel fedés lokális gyűrűjének az L' rács szerint filtrálását. Az utóbbi esetben feltesszük, hogy a szingularitás csomója racionális homológia gömb. Ezeknek a filtrálásoknak a segitségével definiáljuk a többváltozós analitikus Hilbert és Poincaré sorokat, majd az utóbbinak a topologikus megfelelőjét, a topologikus zeta sort, amely pusztán a rezolúciós gráfból kiszámolható, azonban sok esetben megegyezik vagy valamilyen kapcsolata van az analitikus Poincaré sorral.

Ezeknek a soroknak az együtthatói megegyeznek bizonyos altér elrendezések komplementerének Euler karakterisztikájával, melyeket a topológikus esetben tovább vizsgálunk a folytatásban.

Jelölje $\mathbb{Z}[[\mathbf{t}]] := \mathbb{Z}[[t_1,\dots,t_s]]$ a formális hatványsorok gyűrűjét a $\{t_v\}_{v=1}^s$ változókban, melyek a rezolúciós gráf csúcsaihoz vannak rendelve és $s = |\mathscr{V}|$ a csúcsok száma. Ezenkivül legyen $\mathbb{Z}[[\mathbf{t}^{\pm 1}]] := \mathbb{Z}[[t_1^{\pm 1},\dots,t_s^{\pm 1}]]$, ami természetes módon egy $\mathbb{Z}[[\mathbf{t}]]$ modulus.

Ez benne van a bővebb $\mathbb{Z}[[\mathbf{t}^{\pm 1/d}]] = \mathbb{Z}[[t_1^{\pm 1/d},\dots,t_s^{\pm 1/d}]]$ modulusban, ahol $d := |H|$.

Ebben a bővebb modulusban definiáljuk a $\mathbf{t}^{l'} = t_1^{l'_1}\cdots t_s^{l'_s}$ monomokat, ahol $l' = \sum_v l'_v E_v \in L'$, és legyen $\Phi(f)(\mathbf{t}) := f(\mathbf{t}^{E_1^*},\dots,\mathbf{t}^{E_s^*})$, ahol $f(x_1,\dots,x_s) \in \mathbb{Z}[[\mathbf{x}]] = \mathbb{Z}[[x_1,\dots,x_s]]$ tetszőleges hatványsor.

2.0.26. DEFINICIÓ. *Minden $T(\mathbf{t}) = \sum_{l'} a_{l'}\mathbf{t}^{l'}$ sor egyértelműen felbomlik a következőképp:*

$$T = \sum_{h\in H} T_h, \ \text{, ahol} \ T_h = \sum_{[l']=h} a_{l'}\mathbf{t}^{l'}. \tag{2.0.27}$$

A T_h sort a T h-komponensének hivjuk.

A következő könnyű lemma fogalmazható meg:

2.0.28. LEMMA. *Legyen $F(\mathbf{t}) := \Phi(f)(\mathbf{t})$ sor valamilyen $f \in \mathbb{Z}[[\mathbf{x}]]$ esetén. Ekkor a következő (Fourier) azonosság igaz:*

$$F_h(\mathbf{t}) = \frac{1}{|H|} \cdot \sum_{\rho \in \widehat{H}} \rho(h)^{-1} \cdot f(\rho([E_1^*])\mathbf{t}^{E_1^*}, \ldots, \rho([E_s^*])\mathbf{t}^{E_s^*}).$$

A következőkben az analitikus Poincaré és Hilbert sorokat definiáljuk.

Használjuk az univerzális Abel fedésnél előforduló jelöléseket és a következő diagrammot:

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{Z} & \xrightarrow{r} & Z & \xrightarrow{\psi_a} & (X_a, o) \\ & & \big\downarrow \widetilde{c} & & \big\downarrow c \\ & & (\widetilde{X}, o) & \xrightarrow{\phi} & (X, o) \end{array} \tag{2.0.29}$$

Legyen $\phi_a = \psi_a \circ r$ és $p = \widetilde{c} \circ r$, ekkor a természetes nyalábokná leirtak szerint $p^*(l')$ egy egész ciklus a $\widetilde{Z}$ felületen minden $l' \in L'$ esetén.

2.0.30. DEFINICIÓ. *Az $\mathcal{O}_{X_a,o}$ lokális gyűrűnek egy L' szerinti filtrálását definiálhatjuk a következőképp. Legyen $l' \in L'$ tetszőleges, ekkor:*

$$\mathscr{F}(l') := \{f \in \mathcal{O}_{X_a,o} \mid \mathrm{div}(f \circ \phi_a) \geq p^*(l')\}. \tag{2.0.31}$$

Vegyük észre, hogy a H csoport hatása a (X_a, o) csirán indukál egy hatást a $\mathcal{O}_{X_a,o}$ lokális gyűrűn, ami a $\mathscr{F}(l')$ filtrálást megőrzi. Emiatt a H csoport hat a $\mathcal{O}_{X_a,o}/\mathscr{F}(l')$ véges dimenziós vektortéren is. Ha $l' \in L'$, akkor legyen $\mathfrak{h}(l')$ a $\theta([l'])$ karakterhez tartozó $(\mathcal{O}_{X_a,o}/\mathscr{F}(l'))_{\theta([l'])}$ sajátaltér dimenziója.

2.0.32. DEFINICIÓ. *Definiáljuk a $H(\mathbf{t})$ Hilbert sort a következőképpen:*

$$H(\mathbf{t}) := \sum_{l' \in L'} \mathfrak{h}(l') \cdot \mathbf{t}^{l'} \in \mathbb{Z}[[L']]. \tag{2.0.33}$$

Egy adott $l' \in L'$ esetén létezik egyértelmű minimális $s(l') \in \mathscr{S}'$ elem a topologikus félcsoportban, amelyre $[l'] = [s(l')]$. Ha $f \in \mathcal{O}_{X_a,o}$ tetszőleges függvény, akkor a $div(f \circ \phi_a)$ kivételes divizorra eső része a $\widetilde{Z}$ topologikus félcsoportjában van, amiből az adódik, hogy:

$$\mathscr{F}(l') = \mathscr{F}(s(l')). \tag{2.0.34}$$

Ez azt jelenti, hogy ha a Hilbert sornak tudjuk azokat az együtthatóit melyre l' a topologikus félcsoportban van, vagy $l' > 0$, akkor tudunk minden információt.

Legyen most $l' > 0$ tetszőlehes és $[l'] = h$. Ekkor felirhatjuk a következő exakt sort:

$$(2.0.35)\qquad 0 \to \mathscr{O}_{\widetilde{Z}}(-p^*(l')) \to \mathscr{O}_{\widetilde{Z}} \to \mathscr{O}_{p^*(l')} \to 0.$$

Ezeken a kévéken hat a H csoport és a természetes nyaláboknál irt állítások szerint, ha ennek a kéve exaktsornak a $\theta(h)$ karakter szerinti sajátkévéit tekintjük, akkor a következő exakt sort kapjuk:

$$(2.0.36)\qquad 0 \to \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-l') \to \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-r_h) \to \mathscr{O}_{l'-r_h}(-r_h) \to 0.$$

Ebből tehát azt kapjuk $l' > 0$ esetén, hogy

$$(2.0.37)\quad \mathfrak{h}(l') = \dim\left(\frac{H^0(\widetilde{Z}, \mathscr{O}_{\widetilde{Z}})}{H^0(\widetilde{Z}, \mathscr{O}_{\widetilde{Z}}(-p^*(l')))}\right)_{\theta(h)} = \dim \frac{H^0(\widetilde{X}, \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-r_h))}{H^0(\widetilde{X}, \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-l'))}.$$

Az első egyenlőség a definicióból következik, a második pedig a fenti exakt sorokból.

Ha $l' \in L$, akkor $r_h = 0$, tehát a 0-komponense a $H(\mathbf{t})$ sornak a következő alakba irható:

$$H_0(\mathbf{t}) = \sum_{l \in L} \dim \frac{\mathscr{O}_{X,o}}{\{f \in \mathscr{O}_{X,o} : \mathrm{div}_E(f \circ \phi) \geq l\}}\, \mathbf{t}^l.$$

Most definiáljuk az $\{\mathscr{F}(l')\}_{l'}$ filtráláshoz tartozó $P(\mathbf{t}) = \sum_{l' \in \mathscr{S}'} \mathfrak{p}(l')\mathbf{t}^{l'}$ Poincaré sort:

$$(2.0.38)\qquad P(\mathbf{t}) = -H(\mathbf{t}) \cdot \prod_j (1 - t_j^{-1}).$$

Az alábbi lemma fogalmazható meg:

2.0.39. LEMMA. *(a) P nem nulla együtthatójú monomjai a $\mathscr{S}'$ topologikus félcsoport elemihez tartoznak, tehát $P(\mathbf{t}) \in \mathbb{Z}[[\mathscr{S}']]$.*

(b) Egy $I \subset \mathscr{V}$ részhalmazhoz jelölje $E_I = \sum_{v \in I} E_v$. Ekkor minden $l' \in \mathscr{S}'$ esetén:

$$\mathfrak{p}(l') = \sum_{I \subset \mathscr{V}} (-1)^{|I|+1} \dim \frac{H^0(\widetilde{X}, \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-l'))}{H^0(\widetilde{X}, \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-l' - E_I))}.$$

BIZONYÍTÁS. (a) Ha $l' \notin \mathscr{S}'$ akkor létezik olyan v csúcs melyre $(l', E_v) > 0$. Ekkor könnyen látható, hogy $\mathscr{F}(l' + E_I) = \mathscr{F}(l' + E_I + E_v)$ minden $v \notin I$ esetben, ebből triviálisan következik az állítás.

(b) Triviális a Hilbert sor együtthatóinak fenti képletéből. $\square$

A Poincaré sorból visszaszámalhatjuk a Hilbert sort a következő képlettel:

2.0.40. LEMMA. *Legyen* $P(\mathbf{t}) = \sum_{l' \in \mathscr{S}'} \mathfrak{p}(l')\mathbf{t}^{l'}$, *ekkor:*

$$H(\mathbf{t}) = P(\mathbf{t}) \cdot \sum_{a \in L, a \ngeq 0} \mathbf{t}^{-a}.$$

Az együtthatók nyelvén megfogalmazva ez azt jelenti, hogy:

$$\mathfrak{h}(l') = \sum_{a \in L, a \ngeq 0} \mathfrak{p}(l' + a). \tag{2.0.41}$$

Az analitikus Poincaré sorral nem fogunk sokat foglalkozni ebben a dolgozatban, de bizonyitás nélkül felsoroljuk néhány fontos tulajdonságát.

2.0.42. TÉTEL. [**1**] *Legyen* $P_0(\mathbf{t}) = \sum_{l \in \mathscr{S}} \mathfrak{p}(l)\mathbf{t}^l$ *a 0–komponense a* $P(\mathbf{t})$ *sornak. Ekkor:*

Minden $\mathscr{L} = \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-l)$ *vonal nyalábra, melyre* $l \in (-K_{\widetilde{X}} + \mathscr{S}') \cap L$

$$\sum_{\tilde{l} \in L,\ \tilde{l} \ngeq l} \mathfrak{p}(\tilde{l}) = \chi(l) + p_g. \tag{2.0.43}$$

Ez az egyenlet általánosabb formában is teljesül, ha $\mathscr{L} = \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-l)$ *valamilyen* $l \in L$ *esetén, akkor:*

$$h^1(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-l)) = -\sum_{\tilde{l} \in L,\ \tilde{l} \ngeq l} \mathfrak{p}(\tilde{l}) + \chi(l) + p_g. \tag{2.0.44}$$

Mivel P nem nulla együtthatói a topologikus félcsoportben helyezkednek el, ezért ha $l \leq 0$, *akkor a jobb oldalon lévő szumma üres.*

Ez azt jelenti, hogy a $P_0(\mathbf{t})$ *sor együtthatói meghatározzák a* $h^1(\mathscr{O}(l))$ $(l \in L)$ *kohomológia csoportok dimenzóit.*

2.0.45. Most tegyük fel, hogy az (X, o) szingularitás csomója racionális homológia gömb, ekkor az univerzális Abel fedés egyértelműen létezik és hat rajta a véges H Abel csoport.

A $H^1(\mathscr{O}_Z)$ kohomológia csoportnak e hatás szerinti sajátaltér dekompoziciója $\sum_h h^1(\mathscr{O}(-r_h))$.

Ebben az esetben megfogalmazhatjuk az előző állitás ekvivariáns változatát:

2.0.46. TÉTEL. [**1**]

Legyen $\mathscr{L} = \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-l')$ *vonal nyaláb, melyre* $l' \in -K_{\widetilde{X}} + \mathscr{S}'$, $l' = l + r_h$ *valamely egész* $l \in L$ *esetén,*

$$\sum_{[\tilde{l}'] = [l'],\ \tilde{l}' \ngeq l'} \mathfrak{p}(\tilde{l}') = \chi_{K_{\widetilde{X}} + 2r_h}(l) + h^1(\mathscr{O}(-r_h)). \tag{2.0.47}$$

Ez az egyenlet általánosabb formában is igaz, ha $\mathscr{L} = \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-l')$ *természetes vonal nyaláb, valamely* $l' \in L'$ *esetén, és* $l' = l + r_h$ *felbontás, ahol* $l \in L$, *akkor:*

(2.0.48)
$$\begin{aligned} h^1(\mathscr{O}(-l')) &= -\sum_{[\tilde{l}']=[l'],\ \tilde{l}'\not\geq l'} \mathfrak{p}(\tilde{l}') + \chi_{K_{\widetilde{X}}+2r_h}(l) + h^1(\mathscr{O}(-r_h)) \\ &= -\sum_{[\tilde{l}']=[l'],\ \tilde{l}'\not\geq l'} \mathfrak{p}(\tilde{l}') + \chi(l') + h^1(\mathscr{O}(-r_h)) - \chi(r_h). \end{aligned}$$

A fenti állítás azt jelenti hogy a $P(\mathbf{t})$ sor meghatározza az összes $h^1(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(l'))$ kohomológia csoport dimenzióját.

Ebből a tételből és a Hilbert sor Poincaré sorból történő számolásából adódik a következő álitás:

Legyen $l' - r_h \in L_{>0}$, ekkor:

$$\mathfrak{h}(l') = \chi(l') - h^1(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-l')) - \chi(r_h) + h^1(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-r_h)).$$

Most a P sor együthatóit a H együtthatóiból visszaszámolva azt kapjuk, hogy:

(2.0.49)
$$P(\mathbf{t}) = \sum_{l'\in\mathscr{S}'} \sum_{I\subset\mathscr{V}} (-1)^{|I|+1} \Big(\chi(l'+E_I) - h^1(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-l'-E_I))\Big)\mathbf{t}^{l'}.$$

Megjegyezzük, hogy a $\chi(x) - h^1(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-x))$ mennyiség invariáns a Laufer algoritmus tipusú lépéskre, vagyis ha $y = x + E_v$ és $(E_v, x) > 0$, akkor:

(2.0.50)
$$\chi(x) - h^1(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-x)) = \chi(y) - h^1(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-y)).$$

Ez könnyen látható a $0 \to \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-y) \to \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-x) \to \mathscr{O}_{E_v}(-x) \to 0$ exakt sorhoz tartozó kohomologikus hosszú exakt sorból, felhasználva, hogy $h^0(\mathscr{O}_{E_v}(-x)) = 0$.

Ez azt jelenti hogy ennek a mennyiségnek a számolásokban az x -et kicserélhetjük a Laufer algoritmusában szereplő bármely ciklusra, speciálisan az $s(x) \in \mathscr{S}'$ elemre is.

2.0.51. **Topológikus Zeta sor.** A folytatásban definiáljuk a szingularitás rezolúciós gráfjához rendelt topologikus Zeta sort. Ehhez feltesszük a következőkben hogy a szingularitás csomója racionális homológia gömb:

2.0.52. DEFINICIÓ. *Legyen $z(\mathbf{x}) := \prod_{v\in\mathscr{V}}(1-x_v)^{\delta_v-2}$ hatványsor, ahol δ_v a v csúcsba befutó élek száma. Ekkor a korábbi jelölésekkel élve legyen:*

(2.0.53)
$$Z(\mathbf{t}) := \Phi(z)(\mathbf{t}).$$

Ez azt jelenti, hogy $Z(\mathbf{t}) = \prod_v (1-\mathbf{t}^{E_v^*})^{\delta_v-2}$.

A topologikus Zeta sor egyszerű definiciója ellenére számos esetben jól közeliti az analitikus Poincaré sort. Most kimondunk bizonyitás nélkül egy ilyen tipusú tételt.

Legyen (X,o) egy normál felület szingularitás és $\phi : \widetilde{X} \to X$ egy jó rezoluciója a Γ rezolúciós gráffal. Tegyük fel, hogy $H^1(\widetilde{X},\mathbb{Z}) = 0$, vagyis a szingularitás csomója racionális homológia gömb. Jelölje $\mathscr{V}$ és $\mathscr{E}$ a csúcsok és az élek halmazát és legyen $H = H_1(L_X,\mathbb{Z})$. Legyen még a fagráf leveleinek halmaza $\mathscr{E}$.

Vegyünk egy C irreducibilis görbét az $\widetilde{X}$ felületen, ami az E görbéhez pontosan egy E_v komponensét metszi transzverzálisan annak egy sima pontjában.

Egy $f \in \mathscr{O}_{X,o}$ függvényt a C görbe kivágó függvényének hivunk, ha a $f \circ \phi$ függvény divizorának a tartója benne van az E és C görbe uniójában. A C görbét az E_v görbe analitikus vágásának, vagy röviden vágásának hivjuk, ha létezik kivágó függvénye.

2.0.54. DEFINICIÓ. *A ϕ rezolúció teljesiti a 'vég görbe' feltételt ha a rezolúciós gráf minden leveléhez tartozó E_i, $i \in \mathscr{E}$ görbének van egy H_i analitikus vágása. A H_i görbét vég görbének hivjuk, a kivágó függvényét pedig vég görbe függvénynek.*

2.0.55. PÉLDA. A vég görbe feltétel teljesül a következő esetekben: (a) Racionális szingularitás tetszőleges ϕ rezolúciója.

(b) Minimális eliptikus szingularitás és annak olyan ϕ rezoluciója, hogy a minimális elliptikus ciklus tartója E.

(c) Súlyozott homogén szingularitás minimális jó rezolúciója.

A fenti jelölésekkel élve kimondhatjuk a következő tételt:

2.0.56. TÉTEL. [**1**] *Legyen (X,o) egy szingularitás és ϕ rezolúciója, ami teljesiti a vég görbe feltételt és $H^1(\widetilde{X},\mathbb{Z}) = 0$. Ekkor $P(\mathbf{t}) = Z(\mathbf{t})$, vagyis a topologikus zeta sor megegyezik az analitikus Poincaré sorral.*

2.0.57. **Kockák súlyfüggvényei.** Vezessünk be most pár jelölést.

A $Z(\mathbf{t})$ sor egyik együtthatóira vonatkozó összefüggéshez szükség van a súlyozott kockák definiciójára

Legyen $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, ekkor a q–kockák halmaza a $(l',I) \in L' \times \mathscr{P}(\mathscr{V})$, $|I| = q$ párokból áll, ahol $\mathscr{P}(\mathscr{V})$ a $\mathscr{V}$ halmaz hatványhalmazát jelöli. A q dimenziós $\square_q = (l',I)$ kocka csúcsai a $\{l' + \sum_{j\in I'} E_j\}_{I'}$ alakú rácspontok, ahol I' végigfut az I halmaz összes részhalmazán.

Ezekkel a jelölésekkel élve definiáljuk a kövezkező súlyfüggvényeket:

$$w(k) := \chi(l') = -(l', l'+K)/2. \tag{2.0.58}$$

Ez kiterjed a kockákra is a következőképpen:

$$w(\square_q) = w((l',I)) = \max_{I'\subset I} \big\{ w(l' + \sum_{j\in I'} E_j) \big\}. \tag{2.0.59}$$

Most kimondunk egy tételt, amit később nagyobb általánosságban is be fogunk bizonyitani.

2.0.60. TÉTEL. [**1**] *Legyen* Γ *egy összefüggő negativ definit gráf, ekkor:*

$$Z(\mathbf{t}) = \sum_{l' \in L'} \Big(\sum_{I \in \mathscr{P}(\mathscr{V})} (-1)^{|I|+1} w((l', I)) \Big) \mathbf{t}^{l'}. \tag{2.0.61}$$

A következőkben minden l' elemre definiálni fogunk lineáris projektiv alterek elrendezéseit, melyek komplementerének az Euler karakterisztikája lesz az analitikus Poincaré sor együtthatója az egyik esetben, a topologikus zeta sor együtthatói a másik esetben.

Legyen tehát l' tetszőleges és legyen $E = \sum_{j \in \mathscr{V}} E_j$ és $E_I = \sum_{j \in I} E_j$, valamint jelölje $a_v = -(l', E_v)$. Ekkor felirhatjuk a következő exakt sorokat:

$$0 \to \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-l' - E) \to \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-l') \to \mathscr{O}_E(-l') \to 0 \tag{2.0.62}$$

$$0 \to \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-l' - E) \to \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-l' - E_I) \to \mathscr{O}_{E-E_I}(-l' - E_I) \to 0. \tag{2.0.63}$$

Vegyük észre, hogy ha $I' \subset I$ a $H^0(\mathscr{O}_{E-E_I}(-l' - E_I))$ vektortér természetes módon injektiven beleképződik a $H^0(\mathscr{O}_{E-E_{I'}}(-l' - E_{I'}))$ vektortérbe, a következő exakt sor miatt:

$$0 \to \mathscr{O}_{E-E_I}(-l' - E_I) \to \mathscr{O}_{E-E_{I'}}(-l' - E_{I'}) \to \mathscr{O}_{E_I - E_{I'}}(-l' - E_{I'}) \to 0. \tag{2.0.64}$$

Jelölje $T(l') = H^0(\mathscr{O}_E(-l'))$ és $T_I(l') = H^0(\mathscr{O}_{E-E_I}(-l' - E_I))$, ahol $I \subset \mathscr{V}$. Ekkor tehát $T_I(l')$ lineáris altér a $T(l')$ vektortérben, és ha $I' \subset I$, akkor $T_I(l') \subset T_{I'}(l')$.

A fenti altér elhelyezést nevezzük az l' rácselemhez tartozó topologikus altérelrendezésnek. Nézzük meg mi ennek az analitikus megfelelője:

A fenti exakt sorok miatt az adódik, hogy $H^0(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-l' - E_I))/H^0(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-l' - E)) = ker(T_I \to H^1(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-l' - E))$. Jelölje ezt az alteret $A_I(l')$, és , ha I az üres halmaz, akkor $A(l')$. Ekkor világos, hogy $A_I(l') = T_I(l') \cap A(l')$.

Nevezzük ezt a l' rácselemhez tartozó analitikus altérelrendezésnek. Most vegyük észre, hogy a Poincaré sor l' rácselemhez tartozó együtthatójára a következő összefüggés áll fenn:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}(l') &= \sum_{I \subset \mathscr{V}} (-1)^{|I|+1} \dim \frac{H^0(\widetilde{X}, \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-l'))}{H^0(\widetilde{X}, \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-l' - E_I))} \\ &= \sum_{I \subset \mathscr{V}} (-1)^{|I|} \dim \frac{H^0(\widetilde{X}, \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-l' - E_I))}{H^0(\widetilde{X}, \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-l' - E))}. \end{aligned} \tag{2.0.65}$$

Tehát a fentiek szerint ez azt jelenti, hogy $\mathfrak{p}(l') = \sum_{I\subset\mathcal{V}} (-1)^{|I|} \dim A_I$.

2.0.66. A következőkben a topologikus altérelrendezéssel foglalkozunk, megnézzük hogy számolhatók ki a benne szereplő alterek dimenziói és belátjuk az analóg állitást a zeta sor együtthatóira.

Először definiáljuk a J-tipusu részhalmazait a $\mathcal{V}$ alaphalmaznak:

2.0.67. DEFINICIÓ. *Egy $I\subset\mathcal{V}$ részhalmazt akkor hivunk J-tipusúnak, ha bármely bővebb $I\subset I'$ halmazra $\dim T_{I'} < \dim T_I$.*

Egy $I\subset\mathcal{V}$ halmazhoz definiáljuk azt a legbővebb $I\subset J(l',I)$ halmazt, melyre $\dim T_I = \dim T_{J(l',I)}$, ennek a létezése következik abból hogy a T_I egy altér elrendezés, melyre T_I az olyan T_v alterek metszete, melyekre $v\in I$.

Egy $I\subset\mathcal{V}$ halmazra algoritmikusan könnyen tudjuk karakterizálni a $J(l',I)\subset\mathcal{V}$ halmazt.

2.0.68. LEMMA. *(a) Minden $l'\in L'$ és $I\subset\mathcal{V}$ részhalmaz esetén létezik egy egyértelmű legkisebb $h(I)\subset\mathcal{V}$ halmaz, ami tartalmazza az I halmazt és melyre teljesül a következő:*

(2.0.69) *Nincsen olyan $v\in\mathcal{V}\setminus h(I)$ csúcs, melyre $(E_v, E_{h(I)}) > a_v$.*

(b) Az $h(I)$ halmaz megtalálható a következő algoritmussal:

$\{I_m\}_{m=0}^k$ részhalmazai $\mathcal{V}$ alaphalmaznak, melyre $I_0 = I$, $I_{m+1} = I_m\cup\{v(m)\}$, ahol a $v(m)$ indexet a következőképp határozzuk meg.

Tegyük fel, hogy már az I_m halmazt megkonstruáltuk. Hogyha az I_m halmaz teljesiti a kivánt tulajdonságot, akkor megállunk és $m = k$. Különben létezik legalább egy v csúcs, melyre $(E_v, E_{I_m}) > a_v$. Legyen $v(m)$ az egyik ilyen csúcs, ekkor az I_{m+1} elemet a fenti $I_m\cup\{v(m)\}$ formában adjuk meg. Ekkor legyen $I_k = h(I)$.

BIZONYÍTÁS. Egyrészt a teljes $\mathcal{V}$ halmaz teljesiti a lemma feltételét, másrészt ha két U és V halmaz teljesiti, akkor $U\cap V$ is teljesiti. Valóban, ha $v\notin U\cap V$, akkor szimmetria miatt feltehetjük, hogy $v\notin U$. Ekkor $(E_v, E_{U\cap V}) \le (E_v, E_U) \le a_v$, tehát a $U\cap V$ halmaz is teljesiti a tulajdonságot. Ebből következik, hogy valóban létezik minimális a tulajdonsággal rendelkező $h(I)$ halmaz, méghozzá a tulajdonságot teljesitő halmazok metszete.

Az algoritmus helyessége ezután triviális, ugyanis minden lépésben olyan v csúcsot veszünk be a halmazba, aminek muszáj benne lennie a $h(l)$ halmazban. $\square$

Azt fogjuk belátni hamarosan, hogy $h(I) = J(l',I)$, csak addig használjuk a különböző jelöléseket.

A következőkben kiszámoljuk a T_I alterek dimenzióit, mivel l' rögzitett lesz, ezért lehagyjuk a jelölésből.

2.0.70. LEMMA. *A* T_I *és* $T_{h(I)}$ *alterek megyegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens,* $\dim(T_I) = \dim(T_{h(I)})$.

BIZONYÍTÁS. Elég belátnunk, hogy az I halmazból $h(I)$ halmazt megtaláló algoritmus lépései során az alterek nem változnak. Legyen tehát $U \subset \mathscr{V}$ egy részhalmaz és $v \notin U$, melyekre $(E_v, E_U + l') > 0$ és irjuk fel a következő exakt sort:

$$0 \to \mathscr{O}_{E-E_{U\cup v}}(-l' - E_{U\cup v}) \to \mathscr{O}_{E-E_U}(-l' - E_U) \to \mathscr{O}_{E_v}(-l' - E_U) \to 0$$

Mivel $(E_v, E_U + l') > 0$, ezért $H^0(\mathscr{O}_{E_v}(-l' - EU)) = 0$, amiből az következik, hogy a $T_{U\cup v} \to T_U$ leképezés izomorfizmus. □

Most kiszámoljuk a $T_I = T_{h(I)}$ tér dimenzióját.

2.0.71. LEMMA. $H^1(\mathscr{O}_{E-E_{h(I)}}(-l' - E_{h(I)})) = 0$

BIZONYÍTÁS. Azt látjuk be, hogy ha $U \subset \mathscr{V}$ tetszőleges részhalmaz és x olyan rácselem melyre $(x, E_v) \geq 0$ minden $v \in U$ esetén, akkor $H^1(\mathscr{O}_{E_U}(x)) = 0$. Ebből az állitás $h(I)$ tulajdonsága miatt triviálisan teljesül. Az U elemszámára való indukcióval láthatjuk be ezt. Ha $U = 0$, akkor triviális az álitás. Ha U nem üres, akkor legyen $v \in U$ olyan, melyre $(E_v, E_U - E_v) \leq 1$, ennek a létezése abból adódik, hogy a rezolúciós gráf fa. Tekintsük ekkor a következő kohomologikus exakt sor végét:

$$H^1(\mathscr{O}_{E_v}(x - (E_U - E_v))) \to H^1(\mathscr{O}_{E_U}(x)) \to H^1(\mathscr{O}_{E_U - E_v}(x)) \to 0 \tag{2.0.72}$$

Mivel $(E_v, (x - (E_U - E_v))) \geq -1$, ezért $H^1(\mathscr{O}_{E_v}(x - (E_U - E_v))) = 0$, vagyis az indukciós lépés adódik az exakt sorból. □

Az előző lemma szerint tehát:

$$\dim(T_I) = \dim(T_{h(I)}) = H^0(\mathscr{O}_{E-E_{h(I)}}(-l' - E_{h(I)})) = \chi(\mathscr{O}_{E-E_{h(I)}}(-l' - E_{h(I)}))$$

Ezt és a Riemann–Roch tételt felhasználva kis számolással a következők adódnak:

$$\dim(T) = 1 - (l', E) \tag{2.0.73}$$

$$\operatorname{codim}(T_{h(I)}) = \chi(\mathscr{O}_{E_{h(I)}}(-l')) = \chi(\mathscr{O}_{l'+E_{h(I)}}) - \chi(\mathscr{O}_{l'}) = \chi(E_{h(I)}) - (l', E_{h(I)})$$

Megjegyezzük, hogy egy $I \subset \mathscr{V}$ részhalmazra $\chi(E_I)$ az I halmazban levő csúcsok által alkotott teljes részgráf összefüggő komponenseinek a száma.

2.0.74. LEMMA. $h(I) = J(l', I)$.

BIZONYÍTÁS. Ehhez az eddigiek ismeretében azt kell belátnunk, hogy ha $h(I_1) = I_1$ és $h(I_2) = I_2$, valamint $T_{I_1} = T_{I_2}$, akkor $I_1 = I_2$. A két halmaz unióját véve leredukálhatjuk ezt arra az esetre, ha $I_1 \subset I_2$ és $I_1 \neq I_2$

Ekkor a fönti képletekből az adódik, hogy:

$$\dim(T_1) - \dim(T_2) = (l' + E_1, E_{I_1} - E_{I_2}) + \chi(E_{I_2} - E_{I_1}). \tag{2.0.75}$$

Mivel $h(I_1) = I_1$, ezért $(l' + E_1, E_{I_1} - E_{I_2}) \geq 0$, és tudjuk, hogy $\chi(E_{I_2} - E_{I_1}) \geq 1$, tehát ezzel a lemmát beláttuk. □

Mostantól fogva tehát csak a $h(I)$ jelölést használjuk.

Vegyük észre, hogy a fenti topologikus altérelrendezés izomorfia erejéig csak a fagráf alakjától és az a_v számoktól függ.

Korábban beláttuk, hogy $\mathfrak{p}(l') = \sum_{I \subset \mathscr{V}} (-1)^{|I|} \dim A_I$.

Később be fogjuk látni függetlenül, de az eddigiekből már adhatunk rá egy intuitiv érvelést, hogy $z(l') = \sum_{I \subset \mathscr{V}} (-1)^{|I|} \dim T_I$ is teljesül.

Ha l' nem a topologikus félcsoportban van, akkor egyrészt a zeta sor együtthatója nulla, másrészt az altérelrendezés komplementere üres, tehát ebben az esetben az állítás triviális. Tegyük tehát fel, hogy l' a topologikus félcsoportban van, ami azt jelenti, hogy az a_v számok nemnegativak.

Vegyünk most egy olyan negativ definit gráfot, melynek az alakja ugyanolyan mint a mi gráfunknak és legyenek rajta a dekorációk nagyon negativok. Vegyünk egy ehhez a gráfhoz tartozó normál felület szingularitást, ami a Grauert tétel miatt létezik.

Ha a dekorációk eléggé negativok, akkor egyrészt a kapott szingularitás racionális lesz, másrészt az E ciklus eleme lesz a topologikus félcsoportnak. Legyen még l' az a rácselem , melyre $-(l', E_v) = a_v$. Ezen feltételek mellett a $H^1(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(-l' - E)) = 0$, ami azt jelenti, hogy az l' tartozó analitikus és topologikus altérelrendezés megegyezik, másrészt viszont racionális szingularitások esetén $P = Z$ és azt is látjuk hogy a $z(l')$ eggyüttható a topologikus zeta sor definiciója miatt csak a gráf alakjától és az a_v számoktól függ.

Ezeket a tényeket összerakva tehát $z(l') = \sum_{I \subset \mathscr{V}} (-1)^{|I|} \dim T_I$ adódik.

Ezeknek az együtthatókra vonatkozó képleteknek geometriai jelentést is tulajdonithatunk a következő könnyű lemma szerint:

2.0.76. LEMMA. *Tegyük fel, hogy $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ egy véges halmaza lineáris altereknek a V complex vektortérben. Egy adott $I \subset \Lambda$ részhalmazra jelölje $V_I := \cap_{\alpha \in I} V_\alpha$ az I halmazban levő alterek metszetét. Ekkor a következő összefüggés áll fenn:*

$$\chi_{\text{top}}(\mathbb{P}(V \setminus \cup_\alpha V_\alpha)) = \sum_{I \subset \Lambda} (-1)^{|I|} \dim V_I.$$

Ha feltesszük, hogy $\Lambda \neq \emptyset$, akkor ezt $\sum_I (-1)^{|I|+1} \mathrm{codim}(V_I \subset V)$ alakba is irhatjuk.

BIZONYÍTÁS. Egyszerűen következik a szita formulából és abból a tényből, hogy $\dim V_I = \chi_{\text{top}}(\mathbb{P} V_I)$. □

Tehát a topologikus zeta sor illetve analitikus Poincaré sor együtthatói előállnak, mint bizonyos altérelrendezések komplementereinek az Euler karakterisztikája.

2.0.77. Jelölje a következőkben $f(I) = \mathrm{codim}(T_{h(I)}) = \chi(E_{h(I)}) - (l', E_{h(I)})$ és jelölje $g(I) = \chi(E_I) - (l', E_I)$.

2.0.78. LEMMA. $f(I) = \min_{I \subset I'} \{ g(I') \}$.

BIZONYÍTÁS. Legyen $I \subset I'$ tetszőleges, azt kell belátnunk, hogy $g(h(I)) \leq g(I')$. Tudjuk, hogy $g(h(I)) \leq g(h(I'))$, mert nyilván:

$$\mathrm{codim}(T_{h(I)}) = \mathrm{codim}(T_I) \leq \mathrm{codim}(T_{I'}) = \mathrm{codim}(T_{h(I')}). \tag{2.0.79}$$

Ezek szerint tehát csak azt kell belátnunk, hogy $g(h(I')) \leq g(I')$. Vegyük ehhez azt az algoritmust, ami kiszámolja az I' halmazból a $h(I')$ halmazt, azt kell belátnunk, hogy az algortimus lépései során csökken a g függvény. Legyen tehát U egy halmaz és $v \notin U$, melyre $(l' + E_U, E_v) > 0$, ekkor a következő teljesül:

$$g(U) - g(U \cup v) = (l' + E_U, E_v) - 1 \geq 0. \tag{2.0.80}$$

Ezzel a lemmát beláttuk. □

Mivel nem lesz rá szükségünk, csak bizonyitás nélkül megjegyezzük, hogy a gráf fa tulajdonságát kihasználva a következő állítás is igaz.

2.0.81. LEMMA. *Legyen U egy tetszőleges J-tipusú részhalmaz, vagyis $h(U) = U$ és $v \notin U$, ekkor $g(U \cup v) = g(h(U \cup v)) = f(U \cup v)$.*

BIZONYÍTÁS. Futassuk a Laufer tipusú algoritmust a $U \cup v$ halmazra, legyenek az algoritmus során a halmazhoz hozzávett elemek u_1, u_2, ..., u_t és legyen $u_0 = v$.

Legyen $0 \leq i \leq t$, a következő állitásokat látjuk be az i paraméterre vonatkozó indukcióval:

a) Az $u_0, u_1, \ldots, u_i$ csúcsok egy összefüggő részgráfot alkotnak.

b) Az u_i csúcs levele az $u_0, u_1, \ldots, u_i$ csúcsok által alkotott összefüggő részgráfnak.

Az $i = 0$ esetben triviálisak az állítások. Tegyük fel, hogy i-re tudjuk ezt a két állitást, most nézzük meg mit tudunk a $i+1$ esetben.

Mivel U egy J-tipusú részhalmaz, ezért az u_{i+1} csúcsnak legfeljebb a_{i+1} szomszédja van az U halmazban levő csúcsok között. Mivel bevesszük az algoritmus során az u_{i+1} csúcsot, ezért kell hogy legyen szomszédja az $u_0, u_1, \ldots, u_i$ csúcsok között, tehát az a) állitást beláttuk. A b) állitás alakja ebből triviálisan következik felhasználva, hogy a gráf fa.

Most ebből a lemma egyből következik, mivel azt kaptuk, hogy minden lépésben egyel több szomszédja van az u_i csúcsnak, mint a_{u_i}, ami azt jelenti hogy ha $i > 0$, akkor az algoritmus lépései során nem változik a g függvény értéke. $\square$

Definiáljuk még a $w'(I) = \max_{I' \subset I} \left\{ g(I') \right\}$ függvényt, ami egy eltoltja a korábban a rácskockákra bevezetett w súlyfüggvénynek.

Vegyük észre, hogy az eddig definiált függvényeket a gráf és a rajta levő a_v dekorációk határozzák meg.

Most kimondunk egy könnyű lemmát bizonyitás nélkül a w' súlyfüggvény kiszámolására:

2.0.82. LEMMA. [**1**] *Legyen G egy fagráf és a_v tetszőleges egész dekorációk rajta, valamint legyen u_1 az egyik levele a gráfnak, melynek egyetlen szomszédja u_2, és legyen I a csúcsoknak egy részhalmaza. Három esetet különböztetünk meg ekkor.*

Tegyük fel, hogy $u_1 \notin I$. Hagyjuk el a G gráfból az u_1 levelet, és őrizzük meg a többi csúcs a_v dekorációját, a kapott gráf legyen G'. Legyen $w'_{G'}(I) = g_{G'}(I')$, ahol $I' \subset I$, ekkor $w'_G(I) = g_G(I')$.

Tegyük fel, hogy $u_1 \in I$, valamint $a_{u_1} < 0$. Hagyjuk el a G gráfból az u_1 levelet, és őrizzük meg a többi csúcs a_v dekorációját, a kapott gráf legyen G'. Legyen $w'_{G'}(I \setminus (v)) = g_{G'}(I')$, ahol $I' \subset I$, ekkor $w'_G(I) = g_G(I')$.

Tegyük fel, hogy $u_1 \in I$, valamint $a_{u_1} \geq 0$. Hagyjuk el a G gráfból az u_1 levelet, és őrizzük meg a többi csúcs a_v dekorációját, kivéve az u_2 csúcs dekorációját, amit csökkentsünk eggyel, a kapott gráf legyen G'. Legyen $w'_{G'}(I \setminus (v)) = g_{G'}(I')$, ahol $I' \subset I$, ekkor $w'_G(I) = g_G(I' \cup v)$.

Most belátjuk, hogy a w' és f súlyfüggvények bizonyos alternáló összegei megegyeznek.

2.0.83. LEMMA. *Legyen J egy tetszőleges J-tipusú halmaz, tehát $h(J) = J$.*

Ekkor a következő azonosság teljesül:

$$\left(\sum_{h(I)=J} (-1)^{|I|+1} w'(I) \right) = \left(\sum_{h(I)=J} (-1)^{|I|+1} f(I) \right). \tag{2.0.84}$$

BIZONYÍTÁS. Először is az könnyen látható, hogy $\mathscr{V} = J$ feltehető. Ugyanis ha a J halmaz összefüggő komponensei a G gráfban $G_1, \cdots, G_i$, akkor egy $I \subset J$ halmazra pontosan akkor fog $h(I) = J$ teljesülni, ha mindegyik összefüggő G_k komponensben $h(G_k \cap I) = G_k$.

Azt is tudjuk hogy a w' és f súlyfüggvény is kompatibilis erre a felbontásra, vagyis ha $I \subset J$ és $G_k \cap I = I_k$, akkor:

$$f(I) = \sum_k (f(I_k))$$

$$w'(I) = \sum_k (w'(I_k)).$$

Ezeket a tényeket valamint az állítás speciális esetét alkalmazva a $\mathscr{V} = J$ esetben a $G_1, \cdots, G_i$ gráfokra adódik az általános eset egyszerű számolással. Az egyenlet bal oldala a következő alakban irható:

$$\sum_{1\le v\le i} \Big(\sum_{h(I_k)=G_k, 1\le k\le i, k\ne v} ((-1)^{\sum_{k\ne v}(|I_k|)} \cdot \sum_{h(I_k)=G_k} ((-1)^{|I_v|+1} \cdot w'(I_v))))$$

Az egyenlet jobb oldala a következő alakban irható:

$$\sum_{1\le v\le i} \Big(\sum_{h(I_k)=G_k, 1\le k\le i, k\ne v} ((-1)^{\sum_{k\ne v}(|I_k|)} \cdot \sum_{h(I_k)=G_k} ((-1)^{|I_v|+1} \cdot f'(I_v))))$$

Ebből látható, hogy az általános esetben is teljesül az egyenlőség.

Most belátjuk az állítást a $\mathscr{V} = J$ esetben a csúcsok száma szerinti indukcióval. Egy csúcs esetén triviális az állitás.

Először is ha valamely v csúcs esetén $a_v < 0$, akkor tetszőleges $v \notin I$ halmaz esetén $h(I) = \mathscr{V}$ pontosan akkor teljsesül, ha $h(I \cup v) = \mathscr{V}$. Ebben az esetben azt is tudjuk, hogy $f(I) = f(I \cup v)$, valamint $w'(I) = w'(I \cup v)$.

Az első állitás triviális, a második pedig következik a w' súlyfüggvény kiszámitására vonatkozó lemmából. Azt látjuk tehát hogy ha létezik olyan v csúcs, melyre $a_v < 0$, akkor a bizonyitandó egyenlőség minkét oldala 0.

Tegyük fel tehát most, hogy $a_v \ge 0$, és vegyük a G gráf egy tetszőleges u_1 levelét, aminek az egyetlen szomszédja legyen u_2.

Most osszuk két csoportra azokat az $I \subset \mathscr{V}$ halmazokat, melyekre $h(I) = \mathscr{V}$, legyen A azoknak a csoportja, melyek nem tartalmazzák az u_1 csúcsot, és legyen B azoknak a csoportja melyek tartalmazzák.

Azt állitjuk, hogy külön, külön az A, illetve B beli halmazokra is igaz hogy az alternáló összegek megegyeznek a w' és f súlyfüggvényekre nézve.

Most tehát először belátjuk, hogy a következő teljesül:

$$\Big(\sum_{h(I)=J, I\in A} (-1)^{|I|+1} w'(I) \Big) = \Big(\sum_{h(I)=J, I\in A} (-1)^{|I|+1} f(I) \Big).$$

Ha $a_{u_1} > 0$, akkor A az üres halmaz, ugyanis ekkor $h(\mathscr{V} \setminus u_1) = \mathscr{V} \setminus u_1$, tehát ebben az esetben az egyenlőség triviális. Tegyük fel tehát, hogy $a_{u_1} = 0$, és legyen $G' = G\ u_1$ gráf, amin az a_v dekorációk változatlanok. Ekkor $h_G(I) = \mathscr{V}$ és $I \in A$ pontosan akkor, ha $h_{G'}(I) = \mathscr{V} \setminus u_1$, valamint könnyen látható, hogy $w'_{G'}(I) = w'_G(I)$ és $f_{G'}(I) = f_G(I)$.

Ez azt jelenti, hogy a G' gráfra alkalmazva az indukciós feltételt az egyenlőség teljesül.

Most belátjuk, hogy a következő teljesül:

$$\Big(\sum_{h(I)=J, I\in B} (-1)^{|I|+1}\, w'(I)\Big) \;=\Big(\sum_{h(I)=J, I\in B} (-1)^{|I|+1}\, f(I)\Big)\;.$$

Legyen $G' = G \setminus u_1$ és legyenek az a_v dekorációk változatlanok, kivéve az u_2 csúcs dekorációja, amit egyel csökkentünk.

Ekkor $h_G(I \cup u_1) = \mathscr{V}$ és $I \cup u_1 \in B$ pontosan akkor, ha $h_{G'}(I) = \mathscr{V} \setminus u_1$.

Másrészt ezekre az I halmazokra tudjuk a w' súlyfüggvény kiszámitására vonatkozó lemmából, hogy:

$$w'_G(I \cup u_1) = \max_{I' \subset I}(\chi(l' + E_{u_1} + E_{I'}) - \chi(l'))$$

$$w'_G(I \cup u_1) = \max_{I' \subset I}(\chi(l' + E_{u_1} + E_{I'}) - \chi(l' + E_{u_1}) + (\chi(l' + E_{u_1}) - \chi(l')))$$

$$w'_G(I \cup u_1) = w'_{G'}(I) + \chi(l' + E_{u_1}) - \chi(l') = w'_{G'}(I) + a_{u_1} + 1.$$

Hasonlóan könnyen látható, hogy $f_G(I \cup u_1) = f_{G'}(I) + a_{u_1} + 1$.

Az indukciós feltételt használhatjuk a G' gráfra, ekkor a fenti állitásokból következik, hogy a B-ben levő halmazokra vonatkozó alternáló összegek is megyeznek.

Ezzel a lemmát izagoltuk. Megjegyezzük, hogy az egyenlet jobb oldalának van jelentése, méghozzá a J-tipusú halmazok által alkotott tartalmazásra vett részben rendezett halmaz Möbius függvénye szorozva az $f(J)$ konstanssal.

□

Összeadva fenti egyenleteket az összes J-tipusú J halmazra minden I halmazt pontosan egyszer szerepel az összegben a $J = h(I)$ esetén, ezért a következőt kapjuk [**1**]:

$$\Big(\sum_{I} (-1)^{|I|+1}\, w'(I)\Big) \;=\Big(\sum_{I} (-1)^{|I|+1}\, f(I)\Big)\;. \tag{2.0.85}$$

MIvel a w' súlyfüggvény w eltoltja egy konstanssal, ezért:

$$\Big(\sum_{I\in\mathscr{P}(\mathscr{V})} (-1)^{|I|+1}\, w((l', I))\Big) \;=\Big(\sum_{I\in\mathscr{P}(\mathscr{V})} (-1)^{|I|+1}\, f(I))\Big)\;. \tag{2.0.86}$$

Korábban adtunk már egy érvelést hogy ennek az egyenletnek a jobb oldala megegyezik a topologikus zeta sok l' elemhez tartozó együtthatójával felhasználva, hogy $P = Z$ racionális szingularitások esetén, de a teljesség kedvéért most adunk egy másik bizonyitást erre felhasználva a fenti egyenletet.

2.0.87. TÉTEL. [**1**] *Legyen* Γ *egy összefüggő negativ definit gráf, ekkor:*

$$Z(\mathbf{t}) = \sum_{l' \in L'} \Big(\sum_{I \in \mathscr{P}(\mathscr{V})} (-1)^{|I|+1} w((l', I)) \Big) \mathbf{t}^{l'}. \tag{2.0.88}$$

BIZONYÍTÁS. Legyen a megszokott jelöléssel élve $l' = \sum_v a_v E_v^* \in L'$, ahol $a_v \in \mathbb{Z}$, és jelölje $\mathbf{x}^a := \prod_v x_v^{a_v}$. Vegyük ezekben a duális változókban felirt hatványsort:

$$y_\Gamma(\mathbf{x}) := \sum_{l' \in L'} \Big(\sum_{I \in \mathscr{P}(\mathscr{V})} (-1)^{|I|+1} w((l', I)) \Big) \mathbf{x}^a.$$

Meghatározzuk a y_Γ hatványsort a csúcs számra vett indukcióval. Ha $|\mathscr{V}| = 1$, akkor könnyű látni, hogy $y_\Gamma(x) = 1/(1-x)^2$.

A következőkben feltesszük, hogy $|\mathscr{V}| \geq 2$. Legyen u_1 egy tetszőleges levele a Γ gráfnak, melynek egyetlen szomszédja u_2.

Jelölje $\Gamma_0 := \Gamma \setminus u_1$ azt a gráfot amit az u_1 csúcs törlésével kapunk. Ha $l' = \sum_v a_v E_v^* \in L'(\Gamma)$, akkor jelölje $l'_0 = \sum_{v \neq w} a_v E_v^* \in L'(\Gamma_0)$.

A y_Γ hatványsort irjuk $y_\Gamma^{(1)} + y_\Gamma^{(2)}$ alakba, ahol az első összegben azokat az I részhalmazokat vesszük be, amik nem tartalmazzák az u_1 csúcsot, a másodikba pedig azokat, amelyek tartalmazzák.

Könnyen adódik, hogy:

$$y_\Gamma^{(1)}(\mathbf{x}) = y_{\Gamma_0}(\mathbf{x}_0) \cdot \sum_{a_{u_1} \in \mathbb{Z}} x_{u_1}^{a_{u_1}}. \tag{2.0.89}$$

Itt $\mathbf{x}_0$ az$\{x_v\}_{v \neq u_1}$ változókat jelöli, melyek a Γ_0 gráfhoz tartoznak.

A második összegben $u_1 \in I$ legyen, ekkor $I = I' \cup u_1$, ahol $u_1 \notin I'$. Már sokszor használtuk a következőt a w súlyfüggvényre:

$$\begin{cases} \text{ha } a_{u_1} \geq 0, \text{ akkor} & w((l', I)) = w((l' + E_{u_1}, I')), \\ \text{ha } a_{u_1} < 0, \text{ akkor} & w((l', I)) = w((l', I')). \end{cases}$$

Ezek alapján $y_\Gamma^{(2)}(\mathbf{x})$ a következő alakba irható:

$$\sum_{l'_0 \in L'(\Gamma_0)} \sum_{I = I' \cup u_1} (-1)^{|I|+1} \Big(\sum_{a_{u_1} < 0} w((l', I')) \mathbf{x}^a + \sum_{a_{u_1} \geq 0} w((l' + E_{u_1}, I')) \mathbf{x}^a \Big).$$

Ha felhasználjuk a $E_{u_1} = -e_{u_1} E_{u_1}^* - E_{u_2}^*$ azonosságot, akkor ez a következőképp alakul:

$$y_\Gamma^{(2)}(\mathbf{x}) = -y_{\Gamma_0}(\mathbf{x}_0) \cdot \sum_{a_{u_1} < 0} x_{u_1}^{a_{u_1}} - y_{\Gamma_0}(\mathbf{x}_0) \cdot x_{u_2} \cdot \sum_{a_{u_1} \geq 0} x_{u_1}^{a_{u_1}}. \tag{2.0.90}$$

A fentieket felhasználva végül a következő összefüggést kapjuk:

$y_\Gamma(\mathbf{x}) = y_{\Gamma_0}(\mathbf{x}_0)(1-x_{u_2})/(1-x_{u_1})$. Ha ezt összevetjük a kezdőlépéssel, akkor megkapjuk a kivánt azonosságot: $y_\Gamma(\mathbf{x}) = z_\Gamma(\mathbf{x}) = \prod_v (1-x_v)^{\delta_v-2}$.

Ezzel a tétel állitását beláttuk. □

Ezzel tehát most már beláttuk, hogy a topológikus zeta sor együtthatói megegyeznek a topologikus altérelrendezés komplementerének Euler karakterisztikájával.

A továbbiakban szeretnénk ezt a sort tovább finomitani, például beirhatjuk az Euler karakterisztika helyére a komplementer Grothendieck osztályát az $y = [\mathbb{C}]$ affin egyenes osztályának egy polinomjaként kifejezve, vagy beirhatjuk a komplementer kohomologikus Poincaré sorát, vagy az affin elrendezés komplementerének a Poincaré sorát.

2.0.91. **A Zeta sor általánositása Grothendieck osztálybeli együtthatókkal.** A következőkben a Grothendieck osztályos verziót vizsgáljuk:

2.0.92. DEFINICIÓ. *Legyen $T(l')$ vektortér és benne a $T_v(l')$ alterek az l' rácselemhez tartozó altérelrendezések, ekkor a komplementer Grothendieck osztálya:*

$$Q_{l'}(y) = \left(\sum_I (-1)^{|I|} y^{\dim(V_I)}\right). \tag{2.0.93}$$

A következőkben tehát a

$$Z_G(\mathbf{x}, y) := \sum_{l' \in L'} Q_{l'}(y) \cdot \mathbf{x}^a$$

hatványsort szeretnénk kiszámolni.

2.0.94. Jelölje mostantól $K_{l'}$ a $\mathbb{P}(T(l') \setminus \cup_v T_v(l'))$ topologikus teret. Szükségünk lesz a $K_{l'}$ tér egy belső szratifikálására, hogy ki tudjuk számolni a Grothendieck osztályát.

Először is az E redukált sémának a Pic^0 Picard csoportja triviális, ezért egy rajta levő egyenesnyaláb holomorf szelései konstans szorzó erejéig egyértelmű bijekcióban állnak a numerikusan megfelelő divizorokkal a sémán.

Ehhez azt kell meggondolni az exponenciális exakt sor szerint, hogy $H^1(\mathcal{O}_E) = 0$, ha mindig egy levelet levágunk a fából és felirjuk a kohomologikus exakt sort, akkor indukcióval megkapjuk ezt az állitást.

A $T(l') \setminus \cup_v T_v(l')$ altér elrendezésben az $\mathcal{O}_E(-l')$ egyenesnyaláb olyan szelései vannak, melyek nem tünnek el egyik E_v görbén se, tehát a hozzájuk tartozó divizor nulla dimenziós.

Ha a szelés eltűnik az egyik E_v görbe egy sima pontjában, akkor az egyetlen lényeges információja annak a pontnak az eltűnés multiplicitása, mert az $\frac{\mathbb{C}[[x,y]]}{<x>} = \mathbb{C}[[y]]$ koordináta gyűrűben asszociáltság erejéig a különböző elemek $1, y, y^2, \ldots$.

Ha a szelés eltűnik az E_{v_1} és E_{v_2} görbék metszéspontjában, akkor megfelel neki egy elem a $\frac{\mathbb{C}[[x,y]]}{<xy>}$ lokális koordinátagyűrűben invertálható szorzó erejéig.

Könnyen látható, hogy ebben a gyűrűben a különböző osztályokat asszociáltság erejéig az 1, x^k, y^k, $ax^k + by^l$ tipusú elemek adják, ahol $a, b \neq 0$, $[a,b] \in \mathbb{C}P^1$.

Azonban az x^k, vagy y^k tipusú elemek nem lehetnek egy $T(l') \setminus \cup_v T_v(l')$ halmazbeli szelés képei ebben a koordináta gyűrűben, mert akkor a szelés eltűnik egy teljes E_v görbén.

Összefoglalva az eddigieket egy $K_{l'}$-beli ponthoz egyértelműen tartozik az éleknek egy $\mathscr{E}' \subset \mathscr{E}$ részhalmaza, valamint minden $e = (u,v) \in \mathscr{E}'$ él esetén $r_u(e), r_v(e) \geq 1$ számok, valamint $[a_e, b_e] \in \mathbb{C}P^1$, $a_e, b_e \neq 0$, és minden v csúcsra t_v darab pont multiplicitásokkal számolva az E_v görbe sima részén, úgy hogy a következő teljesül minden v csúcsra:

$$(-l', E_v) = a_v = t_v + \sum_{e=(u,v) \in \mathscr{E}'} (r_v(e)). \tag{2.0.95}$$

Jelöljük az $\mathscr{E}'$ élhalmaz, $r_u(e), r_v(e) \geq 1$ és t_v számok lehetséges megválasztásinak a halmazát S-el, és egy $s \in S$ esetén jelölje $K_{l'}(s)$ azoknak a $K_{l'}$-beli pontoknak a halmaza, melyekhez az s adatok tartoznak.

Valójában könnyen látható, hogy a $K_{l'}(s)$ részhalmazok analitikus részhalmazai a $K_{l'}$ analitikus térnek, melyek diszjunkt uniója a teljes tér, ezért a Grothendieck osztályokra teljesül:

$$[K_{l'}] = \sum_{s \in S} ([K_{l'}(s)]). \tag{2.0.96}$$

Jelölje E_v° az E_v görbe sima részét, ennek tehát a Grothendieck osztálya $y - \delta_v + 1$. Másrészről a $K_{l'}(s)$ tér könnyen láthatóan biholomorf a $\prod_v (S^{t_v} E_v^\circ) \cdot \prod_{e \in \mathscr{E}'} (\mathbb{C}^*)$ térrel.

Ez a Grothendieck osztályra vonatkozóan a következőt jelenti:

$$[K_{l'}(s)] = (y-1)^{|\mathscr{E}'|} \cdot \prod_v [S^{t_v} E_v^\circ]. \tag{2.0.97}$$

Tudjuk, hogy az E_v° tér uniója $\delta_v - 1$ darab pontal az affin egyenes, legyen most u tetszőleges változó és legyen W egy $\delta_v - 1$ pontból álló diszkrét tér, ekkor a következőt kapjuk:

$$\sum_{i\geq 0}(u^i\cdot[S^iE_v^\circ])\cdot\sum_{j\geq 0}(u^j\cdot[S^jW])=\sum_{d\geq 0}(u^d\cdot[S^d(\mathbb{C})]). \tag{2.0.98}$$

Ezt az egyenlőséget átirva és felhasználva hogy az affin egyenes szimmetrikus hatványai affin vektorterek:

$$\sum_{i\geq 0}(u^i\cdot[S^iE_v^\circ])\cdot(1-u)^{(1-\delta_v)}=\sum_{d\geq 0}(u^d\cdot y^d).$$

$$\sum_{i\geq 0}(u^i\cdot[S^iE_v^\circ])=\frac{1}{1-yu}\cdot(1-u)^{(\delta_v-1)}.$$

Most szeretnénk kiszámolni a $Z_G(\mathbf{x},y):=\sum_{l'\in L'}Q_{l'}(y)\cdot\mathbf{x}^a$ hatványsort. A fentiek alapján azt kapjuk, hogy:

$$Z_G(\mathbf{x},y)=\sum_{S'}((y-1)^{|\mathscr{E}'|}\cdot\prod_v[S^{t_v}E_v^\circ]\cdot\prod_v[(x_v)^{t_v+\sum_{e=(u,v)\in\mathscr{E}'}(r_v(e))}]).$$

Legyen S' a $t_v\geq 0,\mathscr{E}'\subset\mathscr{E},(r_u(e),r_v(e)\geq 1,e\in\mathscr{E}')$ lehetőségeknek a halmaza. Ezt az egyenletet tovább alakitva:

$$Z_G(\mathbf{x},y)=\sum_{S'}((y-1)^{|\mathscr{E}'|}\cdot\prod_v[x_v^{t_v}\cdot S^{t_v}E_v^\circ]\cdot\prod_v[(x_v)^{\sum_{e=(u,v)\in\mathscr{E}'}(r_v(e))}])$$

$$Z_G(\mathbf{x},y)=\sum_{\mathscr{E}'}((y-1)^{|\mathscr{E}'|}\cdot\prod_v[\frac{1}{1-yx_v}\cdot(1-x_v)^{(\delta_v-1)}]\cdot\prod_{e=(u,v)\in\mathscr{E}'}[\frac{x_u}{1-x_u}\cdot\frac{x_v}{1-x_v}])$$

$$Z_G(\mathbf{x},y)=\prod_v[\frac{1}{1-yx_v}\cdot(1-x_v)^{(\delta_v-1)}]\cdot\sum_{\mathscr{E}'}(\prod_{e=(u,v)\in\mathscr{E}'}[(y-1)\cdot\frac{x_u}{1-x_u}\cdot\frac{x_v}{1-x_v}])$$

$$Z_G(\mathbf{x},y)=\prod_v[\frac{1}{1-yx_v}\cdot(1-x_v)^{(\delta_v-1)}]\cdot\prod_{e=(u,v)\in\mathscr{E}}[1+(y-1)\cdot\frac{x_u}{1-x_u}\cdot\frac{x_v}{1-x_v}]$$

$$Z_G(\mathbf{x},y)=\prod_v[\frac{1}{1-yx_v}\cdot(1-x_v)^{(\delta_v-1)}]\cdot\prod_{e=(u,v)\in\mathscr{E}}[\frac{1-x_u-x_v+yx_ux_v}{(1-x_u)(1-x_v)}].$$

Ebből végül a következő képletet kapjuk:

$$Z_G(\mathbf{x},y)=\frac{\prod_{e=(u,v)\in\mathscr{E}}[1-x_u-x_v+yx_ux_v]}{\prod_v[(1-yx_v)(1-x_v)]}. \tag{2.0.99}$$

(2.0.100)
$$Z_G(\mathbf{x},1) = \frac{\prod_{e=(u,v)\in\mathscr{E}}[1-x_u-x_v+x_ux_v]}{\prod_v[(1-x_v)(1-x_v)}=\prod_v[(1-x_v)^{\delta_v-2}]=Z(\mathbf{x}).$$

Mivel ha a Grothendieck osztályba mindenhova az y változó helyére 1-et irunk, akkor a megfelelő terek topologikus Euler karakterisztikáját kapjuk, ezért az előző egyenlet alapján geometriai bizonyitást is nyertünk rá, hogy a zeta sor együtthatói a megfelelő altérelrendezések komplementereinek Euler karakterisztikája.

2.0.101. MEGJEGYZÉS. A fenti $K_{l'}$ tér sztratifikálását érdekes lenne geometrizálni a következőképpen:

A fentiek szerint egy $s\in S$ elemhez tartozik egy $\mathscr{E}'$ élhalmaz, $r_u(e), r_v(e)\geq 1$ és t_v számok, valamint a $K_{l'}$ tér egy analitikus részhalmaza $K_{l'}(s)$, ami biholomorf a $\prod_v(S^{t_v}E_v^\circ)\cdot\prod_{e\in\mathscr{E}'}(\mathbb{C}^*)$ térrel.

Jelölje most $A_x(y)$ az x dimenziós térben y darabszámú generikus hipersiknak a komplementerét. Könnyen látható, hogy $S^{t_v}E_v^\circ\cong\mathbb{P}(A_{t_v+1}(\delta_v))$, valamint $\prod_{e\in\mathscr{E}'}(\mathbb{C}^*)\cong A_{|\mathscr{E}'|}(|\mathscr{E}'|)$, ami azt jelenti, hogy:

$$K_{l'}(s)\cong\prod_v(\mathbb{P}(A_{t_v+1}(\delta_v)))\cdot A_{|\mathscr{E}'|}(|\mathscr{E}'|) \tag{2.0.102}$$

$$[K_{l'}(s)\cdot A_{|\mathscr{V}|}(|\mathscr{V}|)]=[\prod_v(A_{t_v+1}(\delta_v))\cdot A_{|\mathscr{E}'|}(|\mathscr{E}'|)] \tag{2.0.103}$$

(2.0.104)
$$[T(l')\setminus\cup_vT_v(l')]\cdot[A_{|\mathscr{E}|}(|\mathscr{E}|)]=\sum_{s\in S}([\prod_v(A_{t_v+1}(\delta_v))\cdot A_{|\mathscr{E}'|}(|\mathscr{E}'|)]).$$

Vegyük tehát a $(T(l')\setminus\cup_vT_v(l'))\cdot A_{|\mathscr{E}|}(|\mathscr{E}|)$ teret, ami egy $-(l',E)+1+|\mathscr{E}|$ dimenziós G vektortérben levő lineáris alterek komplementereként áll elő. Jelölje ezeknek a lineáris altereknek az unióját B. Ha $s_1,s_2\in S$ elemek, akkor jelölje $s_1\leq s_2$, hogy ha $\mathscr{E}'(s_1)\subset\mathscr{E}'(s_2)$ és minden $(u,v)=e\in\mathscr{E}'(s_1)$ esetén $r_u(e)(s_1)\leq r_u(e)(s_2)$ és $r_v(e)(s_1)\leq r_v(e)(s_2)$. Legyen $s_1<s_2$, ha $s_1\leq s_2$ és $s_1\neq s_2$.

Ebben a bennfoglaló G vektortérben kellene találni H_s altereket minden $s\in S$ esetén melyekre teljesülnek a következők:

a) $\dim(H_s)=\sum_v(t_v(s)+1)$

b) Ha $s_1\leq s_2$, akkor $H_{s_2}\subset H_{s_1}$.

c) $H_s\setminus(\cup_{s_1<s}(H_{s_1})\cup B)\cong\prod_v(A_{t_v+1}(\delta_v))\cdot A_{|\mathscr{E}'|}(|\mathscr{E}'|)$.

Ezeknek a H_s altereknek a létezése megmagyarázná az altérelrendezések nyelvén a Grothendieck osztályok közti egyenlőséget, illetve a fenti szratifikációt.

2.0.105. **A Zeta sor általánositása kohomológikus Poincaré sor együtthatókkal.**

A következőkben a $K_{l'}$ terek kohomologikus Poincaré sorával foglalkozunk.

Jelölje $S_{l'}(q) = \sum_{0 \le i \le \dim(K_{l'})} (b^i \cdot q^i)$, ahol $b^i = \dim(H^i(K_{l'}))$ a megfelelő Betti számok.

Egy projektiv altérelrendezés kohomológiájának kiszámolására Goresky és MacPherson tételét [**2**] fogjuk felhasználni:

Tegyük fel, hogy $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ egy véges halmaza lineáris altereknek a V komplex vektortérben és jelölje az alterek unióját A, valamint a terek projektivizáltjait $\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}(A)$ és $\mathbb{P}(V \setminus A)$.

Jelölje Q a $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ alterek különböző metszeteinek halmazát a V vektorteret is beleértve. Ekkor Q természetes módon egy részbenrendezett halmaz a tartalmazásra nézve. A továbbiakban úgy lesz kényelmes, hogy ha $a, b \in Q$, akkor legyen $a \le b$ pontosan akkor, ha $b \subset a$.

Most definiálhatunk egy $d : Q \to \mathbb{Z}$ függvényt, ami minden altérhez hozzárendeli a porjektivizáltjának dimenzióját, tehát $d(u) = \dim(u) - 1 = \dim(\mathbb{P}(u))$ és legyen $d(V) = d$. Ezenkivül legyen a Λ alaphalmaz hatványhalmaza $P(\Lambda)$. Ekkor definiálhatunk egy természetes $m : P(\Lambda) \to Q$ leképezést, ahol $U \in P(\Lambda)$ esetén legyen $m(U) = \cap_{u \in U}(V_u)$.

Jelölje ezenkivül $Q_{[a,b]} = (u \in Q | a \le \dim(u) \le b)$, hasonlóan definiálható $Q_{[a,b)}$, $Q_{(a,b]}$, $Q_{(a,b)}$.

2.0.106. DEFINICIÓ. *Legyen Q egy részben rendezett halmaz, ekkor definiáljuk a $\Delta(Q)$ szimpliciális komplexust, melynek alaphalmaza a Q, valamint a csúcsok egy halmaza akkor alkot szimplexet, ha a Q részbenrendezett halmazban láncot alkotnak.*

2.0.107. TÉTEL. [**2**]
A fenti jelölésekkel élve teljesül a következő:

(2.0.108)
$$H^i(\mathbb{P}(V \setminus A)) \cong H^{2d-i}(\mathbb{P}(V), \mathbb{P}(A)) \cong \prod_{0 \le k \le \frac{2d-i}{2}} H^{2d-i-2k}(\Delta(Q_{[k,d]}), \Delta(Q_{[k,d)})).$$

A fenti képletben a kohomologiákat racionális együtthatóval vesszük és az izomorfiák mint vektortér izomorfiák értendőek. A $H^{2d-i-2k}(\Delta(Q_{[k,d]}), \Delta(Q_{[k,d)}))$ pár kohomológiájának használata csak technikai könnyebbség, valójában a $\Delta(Q_{[k,d]})$ tér mindig kontraktibilis, mert a $Q_{[k,d]}$ részben rendezett halmaznak van maximális eleme.)

Visszatérve a mi speciális topologikus altérelrendezésünkhoz, ez a formula egyszerűsödni fog a [**5**] cikkben bevezetett lokális rácspont kohomológiára az f súlyfüggvényre nézve.

Először kimondunk egy könnyű lemmát a J tipusú halmazokra nézve:

2.0.109. LEMMA. *Legyenek $J_1, J_2 \subset \mathcal{V}$ két J-tipusú részhalmaz, ekkor $J_1 \cap J_2$ is J-tipusú.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel indirekten, hogy $J_1 \cap J_2$ nem J-tipusú, ekkor van olyan $v \notin J_1 \cap J_2$ csúcs, melynek több, mint a_v szomszédja van a $J_1 \cap J_2$ halmazban. Szimmetria miatt feltehetjük, hogy $v \notin J_1$, de ekkor tudjuk, hogy a v csúcsnak több, mint a_v szomszédja van a J_1 halmazban. Ekkor tehát J_1 nem J-tipusú halmaz, ebből az ellentmondásból adódik az állitás. $\square$

A következőkben a metszet-koherens részhalmazokról egy részbenrendezett halmazban Andrea Bini jelöléseit és tételét használjuk.

2.0.110. DEFINICIÓ. *Legyen R egy részben rendezett halmaz. Ekkor egy $U \subset R$ részhalmazt hivjunk telitettnek, ha tartalmazza az R maximális elemeit.*

2.0.111. DEFINICIÓ. *Legyen R egy részbenrendezett halmaz, ekkor egy $U \subset R$ részhalmazt hivjunk metszet koherensnek, ha a következő teljesül: Amennyiben $u_1, \dots, u_i \in U$ tetszőleges elemek, melyeknek van alsó korlátja, akkor van legnagyobb alsó korlátjuk is.*

2.0.112. TÉTEL. [**3**] *Tegyük fel, hogy R egy részben rendezett halmaz és $U \subset R$ egy telitett metszet koherens részhalmaz. Definiáljuk a T szimpliciális komplexust, melynek alaphalmaza U és U egy részhalmaza akkor alkot benne szimplexet, ha van alsó korlátjuk. Ekkor T és $\Delta(R)$ topologikus terek homotóp ekvivalensek (speciálisan a homológia csoportjaik megegyeznek).*

Ezt a tételt a $Q_{[k,d)}$ részben rendezett halmazra fogjuk használni, vegyük észre hogy ekkor minden maximális elemeket tartalmazó halmazra használhatjuk, mert a mesztet koherens feltétel automatikusan teljesül. Ez azért van, mert néhány elemnek ebben a részbenrendezett halmazban csak akkor lehet alsó korlátja, ha a hozzájuk tartozó J-tipusú halmazoknak van nem üres metszete, ebben az esetben viszont van legnagyobb alsó korlát is, mivel a metszet J-tipusú.

2.0.113. DEFINICIÓ. *Jelölje $S_n(l')$ azt a szimpliciális komplexust, melynek alaphalmaza $\mathcal{V}$ és egy $I \subset \mathcal{V}$ részhalmaz akkor alkot szimplexet, ha a következő teljesül:*

$$f(I) = \operatorname{codim}(T_{h(I)}) \leq n. \tag{2.0.114}$$

Jelölje még a $\mathcal{V}$ halmaz teljes hatványhalmazához tartózó kontraktibilis szimpliciális komplexust $S_\infty(l')$. A következő tétel leegyszerűsiti a Goresky Macpherson formulát a mi esetünkben.

2.0.115. TÉTEL.

$$H^i(K_{l'}) \cong \prod_{\frac{i}{2} \leq n \leq -(l',E)} (H^{2n-i}(S_\infty(l'), S_n(l'))). \tag{2.0.116}$$

BIZONYÍTÁS. A bizonyitáshoz a Goresky-MacPherson formula miatt csak azt kell belátnunk, hogy az $S_n(l')$ és $\Delta(Q_{[k,d)})$ topologikus terek homotóp ekvivalensek.

Vegyük észre, hogy a $Q_{[k,d)}$ részben rendezett halmaz maximális elemeihez tartozó J-tipusú halmazok megegyeznek az $S_n(l')$ - beli maximális elemekkel, jelölje ezeknek a halmazát J_{max}. Legyen T az a szimpliciális komplexus, melynek alaphalmaza J_{max} és egy $I \subset J_{max}$ részhalmaz akkor alkot szimplexet, ha a hozzájuk tartozó J-tipusú halmazok metszete nem üres. Korábbi megjegyzésünk szerint a $Q_{[k,d)}$ tetszőleges részhalmaza metszet koherens és néhány elemnek akkor van alsó korlátja, ha a hozzájuk tartozó J-tipusú halmazok metszete nem üres, ezért tudjuk, hogy T homotóp ekvivalens a $\Delta(Q_{[k,d)})$ térrel.

Másrészt ha az $S_n(l')$ szimpliciális komplexus nemüres szimplexeire részben rendezett halmazként tekintünk a tartalmazásra nézve (jelölje ezt $R(S_n(l'))$), akkor $\Delta(R(S_n(l')))$ a baricentrikus felbontása az $S_n(l')$ szimpliciális komplexusnak, vagyis homeomorf vele.

Azt is tudjuk, hogy az $R(S_n(l'))$ részbenrendezett halmaz maximális elemeinek halmaza J_{max}, melyekre nyilván teljesül a metszetkoherens feltétel, ugyanis ha néhány elemnek a metszete üres, akkor nincs alsó korlát, ha nem üres, akkor a metszet legnagyobb alsó korlát.

Ez azt jelenti hogy $R(S_n(l'))$ homotóp ekvivalens a T topologikus térrel, vagyis összeségében azt kaptuk, hogy $S_n(l')$ és $\Delta(Q_{[k,d)})$ homotóp ekvivalensek. □

Megjegyezzük hogy az eddigiekből egyből következik hipersik elrendezések esetén is a leegyszerűsitett formula:

2.0.117. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ egy véges halmaza lineáris 1-kodimenziós altereknek a V komplex vektortérben és jelölje az alterek unióját A, valamint a terek projektivizáltjait $\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}(A)$ és $\mathbb{P}(V \setminus A)$.*

Jelölje $I \subset \Lambda$ esetén $f(I) = \mathrm{codim}(\cap_{u\in I}(V_u))$ valamint S_n azt a szimpliciális komplexust, melynek alaphalmaza Λ és egy $I \subset \Lambda$ részhalmaz akkor alkot szimplexet benne, ha $f(I) \leq n$. Legyen még S_∞ a Λ hatványhalmazához tartozó kontraktibilis szimpliciális komplexus, ekkor:

$$H^i(\mathbb{P}(V \setminus A)) \cong \prod_{\frac{i}{2} \leq n \leq \dim(V)} (H^{2n-i}(S_\infty, S_n)). \tag{2.0.118}$$

BIZONYÍTÁS. Nevezzünk egy $I \subset \Lambda$ részhalmazt J-tipusúnak, ha minden $v \notin I$ esetén $f(I) < f(I \cup v)$.

Ha belátjuk, hogy két J-tipusú halmaz metszete J-tipusú akkor a bizonyitás egy az egyben ugyanaz, mint az előbb. Legyen tehát I_1 és I_2 két J-tipusú részhalmaz.

Mivel az alterek egy kodimenziósak, ezért ez azt jelenti, hogy ha $u \notin I_1$, akkor $\cap_{t \in I_1}(V_t)$ nincs benne a V_u hipersikban. Hasonlóan ha $u \notin I_2$, akkor $\cap_{t \in I_2}(V_t)$ nincs benne a V_u hipersikban.

Most tegyük fel indirekten, hogy $I_1 \cap I_2$ nem J-tipusú, ekkor van olyan $u \notin (I_1 \cap I_2)$, melyre $\cap_{t \in (I_2 \cap I_2)}(V_t)$ benne van a V_u hipersikban, feltehetjük, hogy $u \notin I_1$, de ekkor $\cap_{t \in I_1}(V_t) \subset \cap_{t \in (I_2 \cap I_2)}(V_t) \subset V_u$, ami ellentmondás, tehát ezzel az állitást beláttuk. $\square$

A fentiekben $S_{l'}(q) = \sum_{0 \le i \le \dim(K_{l'})}(b^i \cdot q^i)$ jelölte a topologikus projektiv altér elrendezés komplementerének kohomológikus Poincaré sorát. Jelölje most $U_{l'} = T(l') \setminus \cup_v T_v(l')$ a topologikus affin altérelrendezés komplementerét.

Hasonlóan jelölje még $R_{l'}(q)$ az $U_{l'}$ tér kohomológikus Poincaré sorát. Tudjuk ekkor, hogy $S_{l'}(-1) = \chi_{\text{top}}(K_{l'}) = z(l')$. Mivel az $U_{l'}$ tér egy $\mathbb{C}^*$ nyaláb a $K_{l'}$ tér felett, ezért mivel a $\mathbb{C}^*$ Euler karakterisztikája 0, ezért $R_{l'}(-1) = 0$.

Ha az affin alterek közül legalább az egyik egy kodimenziós, akkor a fenti nyaláb könnyen láthatóan triviális, tehát ekkor $R_{l'}(q) = (1+q) \cdot S_{l'}(q)$, vagyis a két Poincaré sor ugyanazt az információt kódolja el.

Ez azonban nem gyakori eset, ahogy azt a következő egyszerű lemma mutatja:

2.0.119. LEMMA. *Ha l' eleme a topologikus félcsoportnak, akkor a $T_v(l')$ alterek közül pontosan akkor van egy kodimenziós, ha az a_v számok között van* 0.

BIZONYÍTÁS. Egy korábbi állításunk szerint, ha adott egy J-tipusú U részhalmaz és $v \notin U$, akkor $g(U \cup v) = f(U \cup v)$. Mivel l' eleme a topologikus félcsoportnak, ezért az üres halmaz J-tipusú, tehát speciálisan azt kapjuk, hogy $g(v) = f(v)$ minden v csúcs esetén. Ebből az állítás triviálisan adódik. $\square$

Ez azt jelenti, hogy a két Poincaré sor általában más információt kódol el, és ezt a következő motovikus hatványsorokban foglalhatjuk össze:

$$Z_p(\mathbf{x}, q) = \sum_{l' \in L'} S_{l'}(q) \cdot \mathbf{x}^a$$

$$Z_a(\mathbf{x}, q) = \sum_{l' \in L'} R_{l'}(y) \cdot \mathbf{x}^a.$$

Itt tehát a $Z_p(\mathbf{x},q)$ sor a topologikus zeta sor egy finomitása, mert $Z_p(\mathbf{x},-1) = Z(\mathbf{x})$.

A Goresky-MacPherson formulának van egy változata affin altér elrendezés komplementérenek kohomológiájának kiszámitására:

Tegyük fel, hogy $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ egy véges halmaza lineáris altereknek a V d-dimenziós komplex vektortérben és jelölje az alterek unióját A.

Jelölje Q a $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ alterek különböző metszeteinek részbenrendezett halmazát a tartalmazás forditottjára nézve. Legyenek $u \leq v$ Q-beli elemek, ekkor jelölje $Q[u,v] = (r \in Q | u \leq r \leq v)$.

Hasonlóan definiálható $Q[u,v)$, $Q(u,v]$, $Q(u,v)$. Az $r \in Q$ elemhez tartozó altér kodimenzióját jelölje $f(r)$.

2.0.120. TÉTEL. [**2**]
A fenti jelölésekkel élve teljesül a következő:

$$H^i(V \setminus A) \cong \prod_{0 \leq r \in Q} (H_{f(r)-i-1}(\Delta(Q[0,r]),\Delta(Q[0,r)))). \tag{2.0.121}$$

Ebből a tételből könnyen adódik a következő állitás:

2.0.122. LEMMA. *A* $Z_a(\mathbf{x},q)$ *hatványsor racionális törtfüggvény, melynek nevezője* $\prod_v((1-x_v)(1-q^2\cdot x_v))$.

2.0.123. PÉLDA. Ha a normál felület szingularitás csomója egy lencsetér, vagyis a rezolúciós gráf egy út, és az a_v dekorációk pozitivak, akkor a fenti képletben szereplő $\Delta(Q[0,r))$ terek mind homotóp ekvivalensek egy valamilyen dimenziós gömbbel. Ez könnyen látható a korábban használt metszetkoherens részhalmazokra vonatkozó módszer iterált alkalmazásával. Annak az esetnek a számolása, ha valamelyik a_v dekoráció nulla, visszavezethető arra, ha mindegyik dekoráció pozitiv, mert ekkor a topologikus altér elrendezés felbomlik rövidebb utakhoz tartozó topologikus altérelrendezések direkt szorzatára.

Ennek ellenére egy élből álló gráf esetén is viszonylag bonyolult a hatványsor számlálója:

$$Z_a(x,y,q) = \frac{(q+1)\cdot((x^2y^2-x^2y-xy^2)q^4+xy(q^4+q^3+q^2-q)+x(-q^2)+y(-q^2)+1)}{(1-x)(1-y)(1-xq^2)(1-yq^2)}.$$

Irodalomjegyzék

[1] András Némethi; *Normal Surface Singularities*; monográfia előkészületben.
[2] Mark Goresky and Robert MacPherson; *Stratified Morse theory*; Stratified Morse theory, SpringerVerlag, 1988.
[3] Andrea Bini; *Some Homological Properties of Partially Ordered Sets*; Advances in Mathematics 43, 197-201 (1982).
[4] Henry B. Laufer; *Normal two dimensional singularities*; Annals of Math. Studies, 71, Princeton University Press, 1971.
[5] András Némethi and Eugene Gorsky; *Lattice and Heegaard Floer homologies of algebraic links*; Int. Math. Res. Not. IMRN 2015, no. 23, 12737-12780.