Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Dankovics Attila
Matematikus MSc

Hamilton körök és teljes párosítások extremális gráfokban és hipergráfokban

Szakdolgozat

Témavezető: Katona Gyula, egyetemi tanár
Számítógéptudományi tanszék

Budapest, 2017.

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Katona Gyulának a téma ajánlását, segítségét a konzultációk során és a dolgozat alapos átnézését.

Az Emberi Erőforrások Minisztériuma Új Nemzeti Kiválóság Programjának támogatásával készült.

Emberi Erőforrások
Minisztériuma

Bevezető

Dirac klasszikus tétele [Dir52] kimondja, hogy ha egy n csúcsú gráf minden fokszáma legalább $\frac{n}{2}$, akkor van a gráfban Hamilton kör.

A tételnek sok alkalmazása ismert és sokféleképpen általánosították. Az első fejezetben két általánosítási irányt mutatok be. Ezek egyike Ore [Ore60], Pósa [Pó62] és Bondy-Chvátal [BC76] tételei, melyek az egységes fokszám korlátot gyengébb feltételekre cserélik. Egy másik általánosítási irány Katona O.H. Gyula általánosítása, aki [Kat05] cikkében a tételt arra az esetre általánosítja, mikor adottak korlátozó gráfok is és bizonyos alternáló 4-köröket el szeretnénk kerülni.

Szakdolgozatomban közös általánosítását adom a tételeknek és bemutatok néhány alkalmazást is a [DKS98] és [EK01] cikkekben belátott tételekre.

A második fejezetben hipergráfokra vizsgálok egy hasonló kérdést [Kat05], illetve megvizsgálom a fokszám korlátos eset mellet, mikor az élek minimális számát keressük a korlátozó hipergráfban, ez utóbbi kérdést J. Robert Johnson vetette fel [Joh13].

A harmadik fejezetben olyan maximális reguláris páros gráfot keresek, melyben minden teljes párosításhoz van alternáló 4-kör párosítás élekből és nem-élekből. Ezt az extremális kérdést Johnson vetette fel [Joh13] cikkében és adott is rá alsó és felső becslést. Szakdolgozatomban egy véletlen konstrukció segítségével megjavítom Johnson felső becslését.

Szakdolgozatom negyedik fejezetében a Kneser gráfokban keresek Hamilton kör hatványokat, azaz egy n elemű alaphalmaz k elemű részhalmazait szeretném ciklikusan felsorolni úgy, hogy az egymástól legfeljebb l távolságra lévők diszjunktak legyenek. A kérdés sokat vizsgált az $l = 1$ esetben [Che03], de nem teljesen megoldott. Az általános kérdést Katona vetette fel [Kat05] és belátott egy $\frac{n}{k^2}$ nagyságrendű felső korlátot a Seymour sejtés felhasználásával. Én belátok egy lényegében azonos nagyságú korlátot a sejtés felhasználása nélkül.

1. Hamilton körök gráfokban

A fejezetben Dirac tételéhez [Dir52] hasonló, annál többnyire általánosabb eredményeket bizonyítok. Általában adott egy vagy több gráf valamilyen fokszám korláttal egy közös csúcshalmazon és valamilyen feltétel amit teljesítő Hamilton kört keresünk. Hamilton kör alatt a szakdolgozat folyamán végig a közös csúcshalmaz összes elemének egy ciklikus felsorolását értem mely teljesít egy előírt feltételt. Azt mondom. hogy egy gráf tartalmaz Hamilton kört, ha a szomszédos csúcsok éllel vannak összekötve egy megfelelő ciklikus felsorolásban.

1.1. Definíciók és állítások

Bevezetésként belátjuk Dirac tételét és annak néhány egyszerű általánosítását, melyek egyetlen egyszerű gráfra vonatkoznak.

1.1.1. Tétel. *(Dirac): Adott egy $G = (V, E)$ gráf, $|V| = n$ csúccsal és minden csúcs fokszáma legalább $\frac{n}{2}$. Ekkor a gráf tartalmaz Hamilton kört.*

Dirac tétele könnyen ellenőrizhetően éles, megfelelő példa egy teljes páros gráf közel egyenlő méretű csúcs osztályokkal. A következő tétel Ore tétele [Ore60] általánosítja Dirac tételét, egy bővebb gráfosztályra bizonyítja Hamilton kör létezését.

1.1.2. Tétel. *(Ore): Adott egy $G = (V, E)$ gráf, $|V| = n$ csúccsal és bármely két nem szomszédos csúcs fokszámának összege legalább n. Ekkor a gráf tartalmaz Hamilton kört.*

Bizonyítani egy még ennél is erősebb tételt fogunk, mely Bondy és Chvátal tétele [BC76], melyhez szükségünk lesz a következő definícióra.

1.1.3. Definíció. *Gráf lezártja: Egy $G = (V, E)$ gráf lezártján a következőt értjük. Amíg a gráfnak van két olyan nem szomszédos csúcsa amik fokszámának összege legalább n, azokat összekötjük éllel. Az így kapott gráf a G gráf lezártja, jele $\overline{G}$.*

1.1.4. Tétel. *Bondy, Chvátal: Egy $G = (V, E)$ gráfban pontosan akkor van Hamilton kör, ha a lezártjában, $\overline{G}$-ben van Hamilton kör.*

Mivel az előző két tételben leírt gráfosztály mindegyikére igaz, hogy a lezártja a teljes gráf és a teljes gráfban van Hamilton kör így azok egyszerűen következnek ebből a tételből.

Bizonyítás. Ha az eredeti gráfban van Hamilton kör, akkor az Hamilton kör a lezártban is, így ez az irány azonnal adódik.

Legyen $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. A másik irányhoz tegyük fel indirekten, hogy G-ben nincs Hamilton kör, míg a lezártban már van. Ekkor a lezárás során tekintsük azt az élbehúzást, ami után először van Hamilton kör. Feltehetjük, az indexek megcserélésével, hogy ez az él $\{v_1, v_2\}$ és az így kapott Hamilton kör $(v_1, \dots, v_n)$. Továbbá tudjuk a lezárás szabályai szerint, hogy

$$d(v_1) + d(v_2) \geq n$$

ahol d jelöli a fokszámot még az új él behúzása előtt. Keressünk olyan $3 \leq i \leq n-1$ indexet, melyre $\{v_2, v_{i+1}\}$ és $\{v_1, v_i\}$ élek. Mivel v_1-nek $d(v_1) - 1$-hez megfelelő i létezik és v_2-höz $d(v_2) - 1$, ami összege legalább $n - 2$. Másfelől $n - 3$ lehetséges i van, így a skatulyaelv értelmében lesz olyan i. ami mindkettőhöz jó. Ekkor a

$$(v_1, v_i, v_{i-1}, \dots, v_3, v_2, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_n),$$

azaz az a ciklikus sorozat amit a v_2 és v_i közötti rész megfordításával kapunk egy Hamilton kör melyben $\{v_1, v_2\}$ nem szerepel, ellentmondva azzal hogy a hozzáadása előtt nem volt Hamilton kör. □

A bizonyításban használt módszer, hogy egy már majdnem megfelelő kör egy szeletét megfordítjuk és leszámlálással meghatározzuk, hogy van olyan megfordítás ami Hamilton kört ad. Ez a módszer több későbbi bizonyításban is szerepet játszik.

A következő tételt Pósa bizonyította [Pó62]. A bizonyításhoz mi szintén a 1.1.4 tételt alkalmazzuk, de nem lesz annyira triviális következmény, mint Ore és Dirac tételei voltak.

1.1.5. Tétel. *(Pósa): Ha egy G gráfban teljesül, hogy minden $1 \leq k < \frac{p-1}{2}$ számra a gráfnak kevesebb mint k olyan csúcsa van, ami legfeljebb k fokú és legfeljebb $\frac{p-1}{2}$ olyan, ami legfeljebb $\frac{p-1}{2}$ fokú, akkor van benne Hamilton kör.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy a gráf zárt (különben vesszük a lezártját). Vegyük a legnagyobb k-t, hogy van a gráfnak két olyan legalább k fokú csúcsa, melyek nem szomszédosak. Ekkor $k \leq \frac{p-1}{2}$ a lezártság miatt.

Vizsgáljuk először a $k = \frac{p-1}{2}$ esetet. Ekkor van $\frac{p+1}{2}$ darab legalább $\frac{p+1}{2}$ fokú csúcs. Ezek mind szomszédai a $\frac{p-1}{2}$ fokú csúcsnak, ami ellentmondás.

Vizsgáljuk most a $k < \frac{p-1}{2}$ esetet. Ekkor van legalább $n - k + 1$ csúcs, mely teljes gráfot feszít, nevezetesen a k-nál nagyobb fokszámú csúcsok. Ezek fokszáma így legalább $n - k$. Ekkor ezek szükségszerűen mind szomszédai a k fokú csúcsnak a lezártság miatt, ami ellentmondás.

Ezzel az állítást beláttuk. $\square$

Ezzel szép alkalmazását adtuk a 1.1.4 tételnek.

A továbbiakban Katona O.H. Gyula [Kat05] cikkében szereplő tételeket írok le, melyek bizonyításához a cikkben nem szereplő új ötleteket is használok, de az alapvető módszer változatlan. Később a Dirac tétel általánosításához hasonlóan igyekszem a gráf lezárás módszerét kiterjeszteni a felvetett általánosabb kérdésekre.

A következő tétel már egy csúcshalmazon adott két gráfra vonatkozik. Legyen $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ és $G = (V, E)$ a gráfunk melyben Hamilton kört keresünk. A korlátozásokat egy $G' = (V, E')$ gráf formájában adjuk meg, ahol E és E' diszjunktak. Egy G gráfbeli Hamilton kör megengedett G'-re nézve, ha nincs két él a Hamilton körben és két él G'-ben mely egy alternáló 4-kört alkot.

1.1.6. Tétel. *(Katona): Legyen G minimális fokszáma d és G' maximális fokszáma s. Ekkor ha teljesül a*

$$2d - 4s^2 - s \geq n$$

egyenlőtlenség, akkor G-ben van G'-re nézve megengedett Hamilton kör.

A bizonyítás kulcsa a következő lemma, mely egy Hamilton útnak Hamilton körré való kiegészítését teszi lehetővé.

1.1.7. Lemma. *Ha G-ben $(v_1, \ldots, v_n)$ egy megengedett Hamilton út és a teljesül a 1.1.6 tételben szereplő egyenlőtlenség, ekkor van olyan $1 \leq i \leq n-1$ index, hogy*

$$(v_1, v_2, \ldots, v_i, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{i+1})$$

egy megengedett Hamilton kör.

Bizonyítás. Ahhoz hogy egy i megfelelő legyen az kell, hogy $\{v_i, v_n\}$ él legyen, $\{v_{i+1}, v_1\}$ szintén és egyik se szerepeljen a kör egy másik élével tiltott alternáló 4-körben. Az első két feltétel egyenként legalább d indexre teljesül, tehát mindkettő teljesül legalább $2d - n + 1$-re.

Ezek közül most kivonjuk azokat, amelyek nem teljesítik a további feltételeket. Az első eset, hogy $\{v_i, v_n\}$ és $\{v_{i+1}, v_1\}$ mindkettő szerepel ugyanabban az alternáló körben. Mivel $\{v_{i+1}, v_i\} \in E$ ezért nem lehet E'-ben. Tehát közös alternáló 4-kör csak akkor lehet, ha $\{v_1, v_i\} \in G'$, ami legfeljebb s indexre teljesül.

Második eset ha csak $\{v_i, v_n\}$ szerepel egy tiltott alternáló 4-körben. Ez a kör akkor

$$(v_n, v_j, v_{j\pm1}, v_i)$$

alakú. Itt v_j legfeljebb s-féle lehet, mert v_n-nek E' szomszédja, $v_{j\pm1}$ ekkor $2s$ és v_i pedig $2s^2$-féle lehet, mert $v_{j\pm1}$-nek E' szomszédja. Hasonlóan mikor csak $\{v_{i+1}, v_1\}$ szerepel egy tiltott alternáló 4-körben, az további $2s^2$ esetet zár ki.

Tehát a megfelelő indexek száma legalább

$$2d - 4s^2 - s - n + 1,$$

ami a feltétel szerint pozitív. □

A bizonyításból egy kicsit általánosabb lemmát is megkapunk, nevezetesen a következőt.

1.1.8. Lemma. *Ha G-ben $(v_1, \ldots, v_n)$ egy Hamilton út és a teljesül a 1.1.6 tételben szereplő egyenlőtlenség, akkor van olyan $1 \le i \le n-1$ index, hogy*

$$(v_1, v_2, \ldots, v_i, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{i+1})$$

egy olyan Hamilton kör, melyben sem $\{v_i, v_n\}$ sem $\{v_{i+1}, v_1\}$ nem szerepel tiltott alternáló 4-körben.

Ez alapján a tétel már többféle extremális meggondolással bizonyítható, itt egy az eredeti cikkben [Kat05] szereplőtől különböző bizonyítást adok.

Bizonyítás. 1.1.6 tétel: A Dirac tétel alapján vegyünk egy Hamilton kört a gráfban, legyen ez

$$(v_1, \ldots, v_n).$$

Ha ez megengedett Hamilton kör akkor készen vagyunk, ha nem akkor van olyan $\{v_i, v_{i+1}\}$ él ami szerepel egy tiltott alternáló 4-körben, jelöljük azt a kört C-vel.

Alkalmazzuk most a 1.1.8 lemmát a

$$(v_{i+1}, \ldots, v_n, v_1, \ldots, v_i)$$

Hamilton útra. Az így kapott Hamilton körben nem jött létre új tiltott alternáló 4-kör és C megszűnt tiltott alternáló 4-körnek lenni. Tehát a tiltott körök száma csökkent, az eljárást ismételve előbb utóbb megengedett Hamilton kört kapunk. □

A tétel egy természetes további általánosítása, hogy egy tiltó gráf helyett 2 tiltó gráf legyen és olyan alternáló 4-kört tiltsunk, ami mindkettőből egy-egy élet tartalmaz. A következő tétel még ennél is általánosabb, k darab tiltó gráfpárt adunk meg.

Legyen $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ és $G = (V, E)$ a gráfunk melyben Hamilton kört keresünk. A korlátozásokat $2k$ gráf $A_i = (V, L_i)$ és $B_i = (V, M_i)$ $(1 \leq i \leq k)$ formájában adjuk meg, ahol E diszjunkt a többi élhalmaztól. Egy G gráfbeli Hamilton kör megengedett $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_k$-ra nézve, ha nincs két él a Hamilton körben, továbbá $1 \leq i \leq k$ és két él L_i-ben és M_i-ben mely egy alternáló 4-kört alkot.

A következő tétel általánosítja (bár kicsit gyengébb konstanssal) a 1.1.6 tételt.

1.1.9. Tétel. *(Katona [Kat05]): Legyen G minimális fokszáma d, L_i maximális fokszáma l_i és M_i maximális fokszáma m_i. Ekkor ha teljesül a*

$$2d - 8\sum_{i=1}^{k} l_i m_i - \sum_{i=1}^{k}(l_i + m_i) \geq n$$

egyenlőtlenség, akkor van G-ben megengedett Hamilton kör.

A bizonyítás kulcsa megint egy lemma mely egy Hamilton utat Hamilton körré egészít ki úgy, hogy az új élek a Hamilton körben nincsenek tiltott 4-körben. A lemma általánosítása az 1.1.8 lemmának.

1.1.10. Lemma. *Ha G-ben $(v_1, \ldots, v_n)$ egy Hamilton út és a teljesül a 1.1.9 tételben szereplő egyenlőtlenség, akkor van olyan $1 \leq i \leq n-1$ index, hogy*

$$(v_1, v_2, \ldots, v_i, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{i+1})$$

egy olyan Hamilton kör, melyben sem $\{v_i, v_n\}$ sem $\{v_{i+1}, v_1\}$ nem szerepel tiltott alternáló 4-körben.

A bizonyítás alapötlete megegyezik a 1.1.8 lemma bizonyításával, csak a számolást pontosítjuk.

Bizonyítás. Ahhoz hogy egy i megfelelő legyen az kell, hogy $\{v_i, v_n\}$ él legyen, $\{v_{i+1}, v_1\}$ szintén és egyik se szerepeljen a kör egy másik élével tiltott alternáló 4-körben. Az első két feltétel egyenként legalább d indexre teljesül, tehát mindkettő teljesül legalább $2d - n + 1$-re.

Ezek közül most kivonjuk azokat, amelyek nem teljesítik a további feltételeket. Az első eset, hogy $\{v_i, v_n\}$ és $\{v_{i+1}, v_1\}$ mindkettő szerepel ugyanabban az alternáló körben. Mivel $\{v_{i+1}, v_i\} \in E$ ezért nem lehet E'-ben, tehát ez csak akkor lehet ha $\{v_1, v_i\}$ tiltó él, ami legfeljebb

$$\sum_{e=1}^{k} (l_e + m_e)$$

indexre teljesül.

Második eset ha csak $\{v_i, v_n\}$ szerepel egy tiltott alternáló 4-körben. Ez a kör akkor

$$(v_n, v_j, v_{j\pm1}, v_i)$$

alakú. Tegyük fel először, hogy $\{v_n, v_j\}$ valamelyik M_e élhalmazban szerepel. Ekkor v_j legfeljebb m_e-féle lehet, $v_{j\pm1}$ ekkor $2m_e$-féle és v_i pedig $2l_e m_e$-féle lehet, mert $v_{j\pm1}$-nek L_e szomszédja. Hasonlóan ha $\{v_n, v_j\}$ valamelyik L_e élhalmazban szerepel az szintén $2l_e m_e$ esetet zár ki, ez összesen $4l_e m_e$ eset, ami bármelyik e-re előfordulhat, összesen

$$4 \sum_{e=1}^{k} l_e m_e.$$

Hasonlóan mikor csak $\{v_{i+1}, v_1\}$ szerepel egy tiltott alternáló 4-körben, az további $4 \sum_{e=1}^{k} l_e m_e$ esetet zár ki.

Tehát a megfelelő indexek száma legalább

$$2d - 8 \sum_{e=1}^{k} l_e m_e - \sum_{i=e}^{k} (l_e - m_e) - n + 1,$$

ami a feltétel szerint pozitív. □

A tétel bizonyítása innentől hasonlóan végezhető, mint a 1.1.6 tétel bizonyítása.

Bizonyítás. 1.1.9 tétel: A Dirac tétel alapján vegyünk egy Hamilton kört a gráfban, legyen ez

$$(v_1, \ldots, v_n).$$

Ha ez megengedett Hamilton kör akkor készen vagyunk, ha nem akkor van olyan $\{v_i, v_{i+1}\}$ él, ami szerepel egy tiltott alternáló 4-körben, jelöljük azt a kört C-vel.

Alkalmazzuk most az 1.1.10 lemmát a

$$(v_{i+1}, \ldots, v_n, v_1, \ldots, v_i)$$

Hamilton útra. Az így kapott Hamilton körben nem jött létre új tiltott alternáló 4-kör és C megszűnt tiltott alternáló 4-körnek lenni. Tehát a tiltott körök száma csökkent, az eljárást ismételve előbb utóbb megengedett Hamilton kört kapunk. $\square$

A tétel tovább általánosítható hipergráfokra, ezt az általánosítást a 2. fejezetben részletezem.

1.2. Általánosítások

Bondy és Chvátal 1.1.4 tétele és Katona 1.1.6 tétele hasonló bizonyítási módszeren alapulnak, így érdemesnek tűnik közös általánosításukat keresni.

Ebben a részben ezt fogom tenni, azaz közös általánosítását adom a nevezett tételeknek. Legyen $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $G = (V, E)$ és $H = (V, F)$ a két gráfunk melynek uniójában Hamilton kört keresünk. A korlátozásokat egy $G' = (V, E')$ gráf formájában adjuk meg, ahol $E \cup F$ és E' diszjunktak. Egy $G \cup H$ gráfbeli Hamilton kör nem megengedett G'-re nézve, ha van két él a Hamilton körben, melyek egyike sem szerepel H-ban, és alternáló 4-kört alkot két éllel G'-ből. Egy Hamilton kör megengedett ellenkező esetben.

Szemléletesen H élei a szuper élek, melyek nem baj ha szerepelnek alternáló 4-körben.

Vegyük észre továbbá, hogy 1.1.6 tétel bizonyításában igen fontos szerepet játszott, hogy az élek és a tiltó élek halmaza diszjunkt így ezt folyamatosan fenn szeretnénk tartani.

1.2.1. Lemma. *Legyen a fokszám függvény $G \cup H$-ban d, G'-ben s és a maximális fokszám G'-ben pedig s_{max}. Ha $G \cup H$-ban $(v_1, \ldots, v_n)$ egy Hamilton út és a teljesül a*

$$d(v_1) + d(v_n) - \min(s(v_1), s(v_n)) - 2(s(v_1) + s(v_n))s_{max} \geq n$$

egyenlőtlenség, akkor van olyan $1 \leq i \leq n-1$ index, hogy

$$(v_1, v_2, \ldots, v_i, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{i+1})$$

egy olyan Hamilton kör, melyben sem $\{v_i, v_n\}$ sem $\{v_{i+1}, v_1\}$ nem szerepel tiltott alternáló 4-körben.

Bizonyítás. Ahhoz hogy egy i megfelelő legyen az kell, hogy $\{v_i, v_n\}$ él legyen, $\{v_{i+1}, v_1\}$ szintén és egyik se szerepeljen a kör egy másik élével tiltott alternáló 4-körben. Az első két feltétel egyenként rendre $d(v_1)$, $d(v_n)$ indexre teljesül, tehát mindkettő teljesül legalább $d(v_1) + d(v_n) - n + 1$-re.

Ezek közül most kivonjuk azokat, amelyek nem teljesítik a további feltételeket. Az első eset, hogy $\{v_i, v_n\}$ és $\{v_{i+1}, v_1\}$ mindkettő szerepel ugyanabban az alternáló körben. Mivel $\{v_{i+1}, v_i\} \in E$ ezért nem lehet E'-ben, tehát ez csak akkor lehet ha $\{v_1, v_i\} \in G'$ és $\{v_{i+1}, v_n\} \in G'$ami legfeljebb $\min(s(v_1), s(v_n))$ indexre teljesül.

Második eset, ha csak $\{v_i, v_n\}$ szerepel egy tiltott alternáló 4-körben. Ez a kör akkor

$$(v_n, v_j, v_{j\pm1}, v_i)$$

alakú. Itt v_j legfeljebb $s(v_n)$-féle lehet, mert v_n-nek E' szomszédja, $v_{j\pm1}$ ekkor $2s(v_n)$ és v_i pedig $2s(v_n)s_{max}$-féle lehet, mert $v_{j\pm1}$-nek E' szomszédja. Hasonlóan mikor csak $\{v_{i+1}, v_1\}$ szerepel egy tiltott alternáló 4-körben, az további $2s(v_1)s_{max}$ esetet zár ki.

Tehát a megfelelő indexek száma legalább

$$d(v_1) + d(v_n) - n - \min(s(v_1), s(v_n)) - 2(s(v_1) + s(v_n))s_{max} + 1,$$

ami a feltétel szerint pozitív. □

A most belátott lemmát egy új lezárási eljárás lépéseként szeretnénk felhasználni. A lezárási eljárás a következő lesz.

1.2.2. Definíció. *Egy közös $|V| = n$ csúcshalmazon adott (G, H, G') gráfhármas lezártján a következőt értjük. Legyen a fokszám függvény $G \cup H$-ban d és G'-ben s és a maximális fokszám G'-ben pedig s_{max}. Ekkor lezárási lépés alatt a következő két lépést értjük:*

1. *Ha adott két csúcs v_1 és v_2 melyet nem köt él össze sem H-ban, sem G'-ben és teljesül rájuk a*

$$d(v_1) + d(v_2) - \min(s(v_1), s(v_2)) - 2(s(v_1) + s(v_2))s_{max} \geq n$$

egyenlőtlenség, akkor vegyük fel a $\{v_1, v_2\}$ élet H-ba.

2. *Ha egy G'-beli él egyik végéből nem indul ki $G \backslash H$-beli él, akkor töröljük ki azt az élet G'-ből.*

A gráfhármas lezártját úgy kapjuk, hogy addig végzünk lezárási lépéseket, amíg csak lehetséges.

Vegyük észre hogy a lezárt egyértelmű, egy elvégezhető lépés elvégezhető marad amíg el nem végezzük és sorrendjük a megengedett sorrendeken belül lényegtelen.

Így már kimondhatjuk a korlátozó gráfok lezárására vonatkozó tételünket.

1.2.3. Tétel. *Ha $G \cup H$-ban van megengedett Hamilton kör G'-re nézve akkor és csak akkor ha a lezártjukra is teljesül ugyanez.*

Bizonyítás. Ha az eredetiben van megengedett Hamilton kör az persze megengedett Hamilton kör a lezártban is, így ez az irány azonnal adódik.

A másik irányhoz tegyük fel indirekt, hogy nem teljesül. Ekkor van olyan lépése a lezárásnak, ami után már van megengedett Hamilton kör, de előtte még nem volt.

Tegyük fel először, hogy ez kettes típusú lépés. Ez csak úgy lehetséges, ha a lépés utáni megengedett Hamilton kört blokkolja a törölt él, azaz szerepel egy alternáló 4-körben. Ehhez viszont mindkét végén kéne hogy legyen $G \backslash H$-beli él, ami a feltétel szerint nincs, így ezt az esetet kizártuk.

Tegyük fel most, hogy egyes típusú lépéssel lett megengedett Hamilton kör. Feltehető, hogy ez a Hamilton kör

$$(v_1, \ldots, v_n)$$

és az új él a $\{v_1, v_n\}$ (ez átindexeléssel elérhető). Ekkor a lépés előtti állapotra alkalmazható a 1.2.1 lemma, ami egy megengedett Hamilton kört ad, ellentmondva a feltételnek, hogy az utolsó lépés előtt még nem volt olyan. □

Vegyük észre, hogy ennek a tételnek speciális esete a 1.1.4 tétel, nevezetesen a $H = G' = \emptyset$ eset. Másfelől egyszerű következménye a 1.1.6 tétel, hiszen ha annak teljesül a feltétele, akkor a lezárás során először H-ba kerül minden nem G'-ben lévő él, majd G' kiürül, majd H a teljes gráf lesz, így abban nyilván van Hamilton kör.

1.3. Alkalmazások

Ebben az alfejezetben a korábbi tételek néhány lehetséges alkalmazását mutatom be. Ezeknek a tételeknek a bizonyítása lehetséges Hamilton körök használata nélkül is, de az alkalmazások így is jól szemléltetik milyen típusú állítások belátására alkalmazhatóak az első alfejezet tételei.

Adott egy n elemű alaphalmaz és annak k elemű részhalmazai. Ezeket szeretnénk párosítani úgy, hogy a párok diszjunktak legyenek és bármely két pár legalább egyik tagja lényegesen különbözzön, azaz két egymáshoz hasonló elem szomszédjai ne legyenek hasonlóak. Ilyen párosítás található, a tétel pontosan a következő, melyet Demetrovics János, Sali Attila és Katona O.H. Gyula látott be [DKS98] cikkükben.

1.3.1. Tétel. *(Demetrovics, Sali, Katona): Legyen $n > n_0(k)$, azaz n elég nagy. Ekkor létezik olyan $\{A_i, B_i\}$, $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{\binom{n}{k}}{2} \right\rfloor$ párosítása egy n elemű alaphalmaz k elemű részhalmazainak, amelyre teljesül, hogy*

$$\forall i |A_i \cap B_i| = \emptyset$$

és bármely i, j különböző indexpárra

$$min(|A_i \cap A_j|, |B_i \cap B_j|) \leq \frac{k}{2}$$

teljesül. Mivel a párok nem rendezettek, így ez egyben a

$$min(|A_i \cap B_j|, |B_i \cap A_j|) \leq \frac{k}{2}$$

egyenlőtlenség teljesülését is jelenti.

A bizonyítás alapja a 1.1.6 tétel.

Bizonyítás. Legyen a V alaphalmaz az n elemű halmazunk k elemű részhalmazainak a halmaza. Ezen az E élhalmazban a diszjunktak legyenek szomszédosak, míg az E' élhalmazban azok, melyek metszete nagyobb mint $\frac{k}{2}$. Legyen $G = (V, E)$ és $G' = = (V, E')$.

Mindkét gráf reguláris, vizsgáljuk meg a fokszámukat. A fokszám G-ben $\binom{n-k}{k}$, ami elég nagy n-re nagyobb, mint $\frac{3}{4}\binom{n}{k}$. Viszont G' fokszáma

$$\sum_{\frac{k+1}{2} \leq i < k} \binom{k}{i} \binom{n-k}{k-i} = O(n^{\frac{k-1}{2}}),$$

tehát elég nagy n-re a 1.1.6 tétel alkalmazható, ami biztosít egy megengedett Hamilton kört. Ebből minden második élet kiválasztva kapunk egy megengedett párosítást, ami megfelel a feltételeknek. $\square$

A bizonyítás szép alkalmazása a 1.1.6 tételnek, de tovább erősíthető a 1.1.9 tétel segítségével. A következő tételt Katona O.H. Gyula és H. Enomoto látta be [EK01] cikkükben. Adott egy n elemű alaphalmaz és annak k elemű részhalmazai. Ezeket szeretnénk párosítani úgy, hogy a párok diszjunktak legyenek és bármely két pár távol legyen egymástól összesen.

1.3.2. Tétel. *(Katona, Enomoto): Legyen $n > n_0(k)$ azaz n elég nagy. Ekkor létezik olyan $\{A_i, B_i\}$, $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{\binom{n}{k}}{2} \right\rfloor$ párosítása egy n elemű alaphalmaz k elemű részhalmazainak, amelyre teljesül, hogy*

$$\forall i |A_i \cap B_i| = \emptyset$$

és bármely i, j különböző indexpárra

$$|A_i \cap A_j| + |B_i \cap B_j| \leq k$$

teljesül. Mivel a párok nem rendezettek, így ez egyben a

$$|A_i \cap B_j| + |B_i \cap A_j| \leq k$$

egyenlőtlenség teljesülését is jelenti.

A bizonyítás alapja a 1.1.9 tétel.

Bizonyítás. Legyen a V alaphalmaz az n elemű halmazunk k elemű részhalmazainak a halmaza. Ezen legyen az E élhalmaz a diszjunkt párok halmaza, míg az M_i élhalmaz a legalább i elemben metsző párok és az L_i a legalább $k-i+1$ elemben metsző párok halmaza ($2 \leq i \leq k-1$). Legyen $G = (V, E)$, $A_i = (V, M_i)$ és $B_i = (V, L_i)$.

Mind a $2k+1$ gráf reguláris, vizsgáljuk meg a fokszámukat. A fokszám G-ben $\binom{n-k}{k}$, ami elég nagy n-re nagyobb, mint $\frac{3}{4}\binom{n}{k}$. Viszont M_i fokszáma

$$m_i = \sum_{k-i+1 \leq j < k} \binom{k}{j} \binom{n-k}{k-j} = O(n^{k-i}),$$

míg L_i fokszáma

$$l_i = \sum_{i \leq j < k} \binom{k}{j} \binom{n-k}{k-j} = O(n^{i-1}).$$

Így teljesül az

$$l_i m_i = O(n^{k-1})$$

egyenlőség, sőt i szerint szummázva is fennáll

$$\sum_{i=2}^{k-1} l_i m_i = O(n^{k-1}).$$

Tehát elég nagy n-re a 1.1.9 tétel alkalmazható, ami biztosít egy megengedett Hamilton kört. Ebből minden második élet kiválasztva kapunk egy megengedett párosítást, ami megfelel a feltételeknek. $\square$

2. Hamilton körök hipergráfokban

Ebben a fejezetben hipergráfokhoz keresünk Hamilton köröket. A Hamilton köröket általában a teljes gráfban keressük, és a hiperélek jelentik a korlátozó feltételeket a megengedettségre. A hipergráfjaink uniformak lesznek. Egy u-uniform hipergráf alatt egy $\mathcal{F} \subset \binom{V}{u}$ halmazrendszert értünk.

A fejezet kulcsfogalma a megengedett $x_1, \dots, x_k$-Hamilton kör, melyet a következőképpen definiálunk.

2.0.1. Definíció. *Legyenek $x_1, \dots, x_k$ pozitív egészek és $\mathcal{F}$ egy $x_1 + \dots + x_k$-uniform hipergráf egy $|V| = n$ csúcshalmazon. Ekkor egy*

$$(v_1, \dots, v_n)$$

Hamilton kör megengedett $x_1, \dots, x_k$-Hamilton kör pontosan akkor, ha nincs olyan $t_1, \dots, t_k$ indexsorozat, melyre

$$\bigcup_{i=1}^{k} \{v_{t_i}, \dots, v_{t_i + x_i - 1}\} \in \mathcal{F}$$

ahol az indexeket ciklikusan értjük.

Azaz nem lehetnek olyan diszjunk x_i hosszúságú szakaszok, melyek egyesítése kiad egy hiperélet.

2.1. Fokszám korlátos hipergráfok

Ebben a részben a 2,2-Hamilton körökkel foglalkozunk. Vegyük észre, hogy ezek általánosításai 1.1.6 tétel és 1.1.9 tételben szereplő problémának (az egyik esetben G' független élpárjai adják a négyeseket, a másikban M_i, L_i független élpárjai).

Hogy a kérdéskör általánosításánál maradjunk, ezért egy $G = (V, E)$ gráfban fogunk egy $\mathcal{F} \subset \binom{V}{4}$ megengedett 2,2-Hamilton kört keresni, ahol G alulról és $\mathcal{F}$ felülről fokszám korlátos. Ehhez viszont definiálnunk kell egy hipergráf fokszámát, amire több lehetőségünk is van.

A következő definíciók és állítások Katona O.H. Gyula [Kat05] cikkében megtalálhatóak.

Egy $U \subset V$ halmaz fokán a $d(U, \mathcal{F}) = |\{U \subset F \in \mathcal{F}\}|$ mennyiséget értjük. Egy hipergráf maximális t-foka

$$d_t(\mathcal{F}) = \min\{d(U, \mathcal{F}) \big| t = |U|\}.$$

Vegyük észre, hogy ha felső becslést adunk egy u-uniform hipergráfban a maximális t-fokra akkor az felső becslés minden $s < t$ maximális s-fokra is, hiszen

$$d_{t-1} \leq \frac{n - t + 1}{u - t + 1} d_t,$$

ha $1 \leq t \leq u$. Emellett $d_u = 1$ (kivéve ha $\mathcal{F}$ üres) és $d_0 = |\mathcal{F}|$.

Ezekkel a definíciókkal már kimondhatnánk állításunkat, de még erősebb tételt kapunk a lineáris fok bevezetésével. Ez nem veszi figyelembe az összes élet amiben egy csúcs szerepel, csak egyetlen permutációra azokat, melyben vannak szomszédos csúcsok.

Legyen v_1 a gráf egy csúcsa és P egy $(v_1, \ldots, v_n)$ permutáció és $\mathcal{F}$ 4-uniform hipergráf. Ekkor a v_1 lineáris 1-foka erre a permutációra nézve

$$\overline{d}_1(v_1, P, \mathcal{F}) = |\{F \in \mathcal{F} \big| v_1 \in F \wedge (\exists j) v_j, v_{j+1} \in F\}|.$$

Ez alapján egy v_1 csúcs lineáris 1-foka

$$\overline{d}_1(v_1, \mathcal{F}) = \max_P \overline{d}_1(v_1, P, \mathcal{F}),$$

ahol P az olyan permutációkun fut mely első eleme v_1. Egy hipergráf $\mathcal{F}$ maximális lineáris 1-foka

$$\overline{d}_1(\mathcal{F}) = \max_v \overline{d}_1(v, \mathcal{F}).$$

Hasonlóan vezetjük be a lineáris 2-fokot. Legyen $P = (v_1, \ldots, v_n)$ permutáció, ekkor $\{v_1, v_n\}$ lineáris 2-foka

$$\overline{d}_2(\{v_1, v_n\}, P, \mathcal{F}) = |\{F \in \mathcal{F} \big| v_1, v_n \in F \wedge (\exists j) v_j, v_{j+1} \in F\}|.$$

Ez alapján egy v_1, v_n csúcspár lineáris 2-foka

$$\overline{d}_2(\{v_1, v_n\}, \mathcal{F}) = \max_P \overline{d}_2(\{v_1, v_n\}, P, \mathcal{F}),$$

ahol P az olyan permutációkun fut mely első eleme v_1 és utolsó eleme v_n. Egy hipergráf $\mathcal{F}$ maximum lineáris 2-foka

$$\overline{d}_2(\mathcal{F}) = \max_{v_1, v_n} \overline{d}_2(\{v_1, v_n\}, \mathcal{F}).$$

Ezekkel a definíciókkal már kimondhatjuk a tételünket, mely a 1.1.6 és 1.1.9 tételek általánosítása.

2.1.1. Tétel. *(Katona [Kat05]): Legyen a* $G = (V, E)$ *gráf minimális fokszáma* d*, és* $\mathcal{F}$ 4*-uniform hipergráf. Ekkor ha teljesül a*

$$2d - 4\overline{d}_1(\mathcal{F}) - \overline{d}_2(\mathcal{F}) \geq n$$

egyenlőtlenség, akkor van G*-ben megengedett* (2,2)*-Hamilton kör.*

A bizonyítás kulcsa megint egy lemma, mely egy Hamilton utat Hamilton körré egészít ki úgy, hogy az új élek a Hamilton körben nincsenek tiltott négyesben. A lemma általánosítása az 1.1.8 lemmának.

2.1.2. Lemma. *Ha* G*-ben* $(v_1, \ldots, v_n)$ *egy Hamilton út és a teljesül a 2.1.1 tételben szereplő egyenlőtlenség, akkor van olyan* $1 \leq i \leq n-1$ *index, hogy*

$$(v_1, v_2, \ldots, v_i, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{i+1})$$

egy olyan Hamilton kör, melyben sem $\{v_i, v_n\}$ *sem* $\{v_{i+1}, v_1\}$ *nem szerepel tiltott négyesben.*

Bizonyítás. Ahhoz hogy egy i megfelelő legyen az kell, hogy $\{v_i, v_n\}$ él legyen, $\{v_{i+1}, v_1\}$ szintén és egyik se szerepeljen a kör egy másik élével tiltott négyesben. Az első két feltétel egyenként legalább d indexre teljesül, tehát mindkettő teljesül legalább $2d - n + 1$-re.

Ezek közül most kivonjuk azokat, amelyek nem teljesítik a további feltételeket. Az első eset, hogy $\{v_i, v_n\}$ és $\{v_{i+1}, v_1\}$ mindkettő szerepel ugyanabban a tiltott négyesben. Ez legfeljebb $\overline{d}_2(\mathcal{F})$-féleképpen lehetséges.

Második eset ha csak $\{v_i, v_n\}$ szerepel egy tiltott négyesben. Ez a négyes akkor

$$\{v_n, v_j, v_{j+1}, v_i\}$$

alakú. Ilyen négyes legfeljebb $\overline{d}_1(\mathcal{F})$-féle lehet, és mindegyik legfeljebb 2 esetet zár ki (ha $i, j, j+1$ három egymást követő index).

Hasonlóan mikor csak $\{v_{i+1}, v_1\}$ szerepel egy tiltott négyesben, az további $2\overline{d}_1(\mathcal{F})$ esetet zár ki.

Tehát a megfelelő indexek száma legalább

$$2d - 4\overline{d}_1(\mathcal{F}) - \overline{d}_2(\mathcal{F}) - n + 1,$$

ami a feltétel szerint pozitív. □

Bizonyítás. 2.1.1 tétel: A Dirac tétel alapján vegyünk egy Hamilton kört a gráfban, legyen ez

$$(v_1, \ldots, v_n).$$

Ha ez megengedett Hamilton kör akkor készen vagyunk, ha nem akkor van olyan $\{v_i, v_{i+1}\}$ él ami szerepel egy tiltott négyesben, jelöljük ezt a négyest C-vel.

Alkalmazzuk most a 2.1.2 lemmát a

$$(v_{i+1}, \ldots, v_n, v_1, \ldots, v_i)$$

Hamilton útra. Az így kapott Hamilton körben nem jött létre új tiltott négyes és C megszűnt tiltott négyesnek lenni. Tehát a tiltott négyesek száma csökkent, az eljárást ismételve előbb utóbb megengedett Hamilton kört kapunk. □

Ezzel beláttunk egy Dirac típusú tételt (2,2)-Hamilton körökre.

2.2. Élszám korlátos hipergráfok

Ebben a részben az alapgráf amiben a Hamilton kört keressük a teljes gráf lesz, azaz a csúcsok egy megfelelő ciklikus felsorolását keressük.

Legyen $x = (x_1, \ldots, x_k)$ egy pozitív egészekből álló vektor, és keressük a legkisebb élszámú $\sum_{i=1}^{k} x_i = r$ r-uniform hipergráfot $V = (v_1, \ldots, v_n)$ csúcshalmazzal, melyre nincs megengedett x-Hamilton kör. Jelölje a legkisebb ilyen hipergráf élszámát $m(x, n)$.

Szeretnénk megtudni $m(x, n)$ aszimptotikus viselkedését fix x-re, pontosabban szeretnénk belátni, hogy

$$m(x, n) = \Theta(n^{r-k}).$$

A fejezet állításai és definíciói J. Robert Johnson [Joh13] cikkét követjük, a konstansok élesítéséhez ebben a cikkben találni további eredményeket.

Az aszimptotikus viselkedés belátásához először egy konstruktív felső becslést adunk.

2.2.1. Tétel. *(Johnson): Adott x-re és $n \geq r$-re teljesül a*

$$m(x,n) \leq \binom{n-k}{r-k} = \left(\frac{1}{(r-k)!} + o(1)\right) n^{r-k}$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. A konstrukció a következő, legyen

$$\mathcal{F} = \{U \big| \{v_1, \ldots, v_k\} \in U\}.$$

Belátom, hogy ekkor nincs megengedett x-Hamilton kör.

Vegyünk egy Hamilton kört $(u_1, \ldots, u_n)$ és belátjuk, hogy nem megengedett. A célunk, hogy a $v_1, \ldots, v_k$ csúcsokat lefedjük átfedésmentes $x_1, \ldots, x_k$ hosszú intervallumokkal, így egy blokkoló elrendezést kapunk. Feltehetjük, hogy $v_1 = u_1$ és $v_1, \ldots, v_k$ ebben a sorrendben szerepel a körön, a szimmetria miatt.

Legyen ekkor $t_1 = 1$, azaz az első intervallum az egyes indexnél kezdődik, ezt végig fixen tartjuk. Ezek után egyesével választjuk t_i-t, úgy hogy utána $v_1, \ldots, v_i$ már le legyen fedve. és ne legyen átfedés az intervallumok között. Válasszuk t_i-t először a v_i körbeli indexének, azaz $u_{t_i} = v_i$. Ekkor ez átfedhet korábbi szakaszokkal, ha így van akkor azokat egyesével toljuk a kisebb indexek felé (először t_{i-1}, majd egyre kisebb indexűeket). Ha esetleg az eljárás során t_1-et is csökkenteni kéne, akkor helyette minden másik t-t annyival növelünk. Vegyük észre hogy ezen eljárás során t_i-nél kisebb index nem vált fedetlenné ha korábban fedett volt, ezzel az indukciót befejeztük, a tételt beláttuk. □

Az alsó becslést egy számolási meggondolás adja, hogy legalább hány él kell minden ciklikus permutáció blokkolásához. Jelölje $c(x)$ azt, hogy hányféleképpen lehet egy r elemű halmazt k részhalmazra felbontani, melyek nagysága $x_1, \ldots, x_k$, ha a sorrend nem számít.

2.2.2. Tétel. *(Johnson): Teljesül a következő egyenlőtlenség*

$$m(x,n) \geq \left(\frac{1}{c(x)x_1! \ldots x_k!} + o(1)\right) n^{r-k}.$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $(n-1)!$ lehetséges ciklikus sorrend van. Vizsgáljuk meg, hogy egy él legfeljebb hány ciklikus sorrendet blokkolhat. Az ilyen ciklikus sorrendeket megkaphatjuk úgy, hogy a halmaz r elemét felbontjuk k megfelelő méretű részhalmazra, ezeknek egyesével vesszük a belső sorrendjét, majd ezeket egy objektumnak tekintve, az így kapott $n-r+k$ objektumnak vesszük egy ciklikus sorrendjét. Ezt összesen legfeljebb

$$c(x)x_1!\dots x_k!\,(n-r+k-1)!$$

-féleképpen tehetjük meg. Ekkor legalább

$$\frac{(n-1)!}{c(x)x_1!\dots x_k!\,(n-r+k-1)!} = \left(\frac{1}{c(x)x_1!\dots x_k!} + o(1)\right) n^{r-k}$$

élre van szükség a hipergráfban. □

Ezzel a két tétellel beláttuk, hogy fix x-re $m(x,n) = \Theta(n^{r-k})$.

3. Megengedett teljes párosítások reguláris páros gráfokban

Ebben a fejezetben egy teljes párosításokra vonatkozó extremális kérdést vizsgálunk. A problémát J. Robert Johnson vetette fel [Joh13] cikkében. A fejezet során adott lesz egy páros gráf $|A| = |B| = n$ csúcshalmazzal és E reguláris élhalmazzal. Azt mondjuk, hogy egy teljes párosítás megengedett, ha nincsen alternáló 4-kör párosítás élekből és A és B között menő nem-élekből (azaz olyan csúcspárokból melyek közt nincs él E-ben). Az ezzel kapcsoalatos extremális kérdést a következő definíció adja.

3.0.1. Definíció. *Jelölje a legkisebb fokszámot, amire van olyan reguláris páros gráf, aminek a páros komplementerében (azaz az A, B közti csúcspárok összekötöttsége megcserélődik, de A és B továbbra is üres gráfot feszít) nincs megengedett párosítás $b(n)$.*

A célunk $b(n)$-re minél jobb alsó és felső becslést találni.

3.1. b(n) alsó becslése

Az alábbi alsó becslést Johnson adta, a bevezetésben megfogalmazott kérdésnél kicsit általánosabb állítást látott be. Legyen E' egy E-től diszjunkt, szintén reguláris páros gráf ugyanazon a csúcshalmazon. Egy teljes párosítás most megengedett, ha nincs párosítás élekből és E' élekből álló alternáló 4-kör.

3.1.1. Tétel. *Johnson: Legyen E d-reguláris és E' pedig s-reguláris. Ekkor ha fennáll a*

$$2d - 2s^2 > n$$

egyenlőtlenség, akkor van megengedett párosítás E-ben.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy E-ben van teljes párosítás, mert reguláris. Indirekt tegyük fel, hogy nincs megengedett teljes párosítás. Ekkor hagyjuk el egyesével E' éleit, amíg először lesz, legyen az így kapott élhalmaz E''. Legyen egy teljes párosítás $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ és az utoljára törölt él a_1, b_2. Ha az a_1, b_2 tiltó élet visszavennénk, már nem lenne megengedett párosítás, ez csak a

$$(a_1, b_1, a_2, b_2)$$

tiltott 4-kör miatt lehet.

Töröljük a (a_1, b_1) élet a párosításunkból, így már megengedett. Keressünk egy olyan i indexet, melyre a (a_i, b_i)-t kitörölve, és (b_1, a_i)-t és (a_1, b_i)-t a gráfhoz véve egy megengedett teljes párosítást kapunk. Ehhez arra van szükség, hogy a felveendő élek E-ben legyenek és ne legyen olyan j amire a_1, b_i, a_j, b_j tiltott alternáló 4-kört alkot (vagy fordítva a és b-ben).

Az első feltételt $2d - n$-féleképpen tudjuk teljesíteni. A második feltételben j lehet s-féle, hiszen a_1 és b_j E' szomszédok. Adott j-re i szintén s-féle lehet, hiszen a_j és b_i is E' szomszédok. Tehát ez összesen s^2 lehetséges i-t blokkol és ugyanennyit blokkol a fordított eset (a és b-ben).

Tehát összesen

$$2d - n - 2s^2$$

választási lehetőségünk van, ami a feltétel szerint pozitív. Így találtunk egy olyan teljes párosítást E''-re, amit (a_1, b_2) nem blokkol, ami ellentmond annak, hogy a kitörlése előtt még nem volt megengedett teljes párosítás. □

Ez alapján kapjuk a következő alsó becslést $b(n)$-re.

3.1.2. Következmény. *Minden n-re teljesül a*

$$b(n) > \frac{1}{2}(\sqrt{2n+1} - 1) = (\sqrt{2} + o(1))n^{\frac{1}{2}}$$

Ezzel egy $n^{\frac{1}{2}}$ nagyságrendű alsó becslést adtunk $b(n)$-re.

3.2. b(n) felső becslése

Johnson felső becslést is adott $b(n)$-re, melyet sikerült megjavítanom. Ebben a fejezetben először leírom Johnson konstrukcióját, majd leírom a saját konstrukciómat és bizonyítom a helyességét.

Johnson saját konstrukciójához használja Noga Alon következő tételét.

3.2.1. Tétel. *(Alon [Alo86]): Adott d pozitív egészre q prímhatványra. Létezik páros gráf kétszer $n = \frac{q^{d+1}-1}{q-1}$ csúcson ami $d = \frac{q^d-1}{q-1}$ reguláris, hogy minden $0 < x < n$ $|X| = x$ $X \subset A$ részhalmazra*

$$|\Gamma(X)| \geq n - \frac{n^{1+1/d}}{x}$$

teljesül.

Ez alapján Johnson felső becslése a következő.

3.2.2. Tétel. *(Johnson): Végtelen sok n-re teljesül a*

$$b(n) < (2 + o(1))n^{\frac{3}{4}}$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. vázlat: Legyen $m = \frac{q^4-1}{q-1}$ és $n = m\lfloor m^{1/3} \rfloor$. Particionáljuk A-t és B-t egyaránt m méretű, $k = \lfloor m^{1/3} \rfloor$ darab részre. Legyen $B(m)$ az Alon tétele által biztosított páros gráf. Állítsuk párokba a partíciónál kapott darabokat, és a párok közé tegyünk teljes gráfot, míg a nem párok közé $B(m)$-et.

Az így kapott konstrukció megfelelő, ez számolással és eset szétbontással ellenőrizhető. $\square$

A teljes bizonyítás megtalálható Johnson [Joh13] cikkében.

A következő erősebb felső becslést fogom belátni.

3.2.3. Tétel. *Minden n-re teljesül a*

$$b(n) < (1 + o(1))\sqrt{n \log n}$$

egyenlőtlenség.

A bizonyításhoz szükségünk lesz folyamokra és a maximum folyam-minimum vágás tételre, amiket ezért definiálok és kimondok előre. Adott egy $D = (V, E)$ irányított gráf és $c : E \to \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény, továbbá $s, t \in V$ forrás és nyelő. Ekkor egy $f : E \to \mathbb{R}_+$ függvény folyam, ha $f \leq c$ minden élre és minden $v \neq s, t$ csúcsra

$$\sum_{e=(u,v)\in E} f(e) = \sum_{e=(v,u)\in E} f(e).$$

Azaz szemléletesen minden csúcsból ugyanannyi folyik ki mint amennyi bele folyik.

Érdemes feltenni még, hogy a forrásba nem folyik be és a nyelőből nem folyik ki. Ekkor ugyanannyi folyik ki a forrásból, mint amennyi be folyik a nyelőbe, ez a folyam mérete.

Egy vágás egy $s \in S, t \in T$ particionálása a V csúcshalmaznak. Egy vágás mérete

$$\sum_{e=(a,b)\in E \wedge a \in S \wedge b \in T} c(e).$$

Könnyen látszik, hogy ez a minimális összsúlya olyan éleknek, melyeket elhagyva nincs irányított s, t út a gráfban.

Ford és Fulkerson [FF56] tétele a következőt mondja ki.

3.2.4. Tétel. *(Ford, Fulkerson): Legyen D, s, t, c a feltételeknek megfelelően adott. Ekkor a maximális folyamméret megegyezik a minimális vágás mérettel, továbbá a maximális folyam méret felvétetik egész f-en, ha c egész.*

Ez alapján már be tudjuk látni a tételünket.

Bizonyítás. 3.2.3 tétel: Elég belátnom, hogy

$$b(n) \leq (1+3\varepsilon)\sqrt{n \log n},$$

ha n elég nagy ε függvényében. A konstrukció egy véletlen páros gráf lesz, melyben minden él $p = \sqrt{\frac{\log n}{n}}$ eséllyel lesz behúzva.

Belátom, hogy ennek a gráfnak a komplementerében nagy valószínűséggel nincs megengedett teljes párosítás, hogy a maximális fokszáma nagy valószínűséggel kisebb mint $(1+2\varepsilon)\sqrt{n \log n}$, majd kiegészítem egy $(1+3\varepsilon)\sqrt{n \log n}$ reguláris páros gráfra.

Vizsgáljuk először annak valószínűségét, hogy egyetlen adott teljes párosításban egy élpár blokkolva lesz, ennek esélye p^2 (illetve mikor önmagával választjuk párba akkor még nagyobb, p). Ez alapján annak az esélye, hogy nem lesz blokkoló pár kisebb mint $(1-p^2)^{n^2}$. Továbbá

$$\left(1-p^2\right)^{n^2} = \left(1 - \frac{\log n}{n}\right)^{\frac{n}{\log n} n \log n} \leq n^{-n},$$

így annak az esélye, hogy az $n!$ lehetséges párosítás egyike jó lesz legfeljebb

$$\frac{n!}{n^n},$$

ami tart 0-hoz ahogy n tart végtelenhez. A második egyenlőtlenséghez az ismert

$$(1-x)^{1/x} \leq \frac{1}{e},$$

feltéve hogy $0 < x < 1$ egyenlőtlenséget használtuk.

Vizsgáljuk most annak a valószínűségét, hogy lesz olyan csúcs, melynek fokszáma legalább $(1+2\varepsilon)\sqrt{n \log n}$. Vizsgáljuk először egyetlen csúcs fokszámát. Egy csúcs fokszámát n darab független p valószínűségű indikátor változó összegeként kapjuk. Jelölje p_k annak a valószínűségét, hogy a csúcs fokszáma k, és jelölje q az $1-p$-t, ekkor

$$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Vizsgáljuk két egymásutáni hányadosát

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{(n-k)p}{(k+1)q}$$

feltéve, hogy $k > (1+\varepsilon)np$ és n elég nagy kapjuk, hogy

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} < (1-\varepsilon),$$

amiből indukcióval következik, hogy ha $k > (1+2\varepsilon)np$ akkor $p_k < (1+\varepsilon)^{-np\varepsilon}$, így

$$\sum_{k=(1+2\varepsilon)np}^{n} p_k < \frac{1}{\varepsilon}(1+\varepsilon)^{-np\varepsilon}.$$

Ez egy n-ben exponenciálisan csökkenő valószínűség, így még a $2n$-szerese is tart 0-hoz ahogy n tart a végtelenbe.

Ezzel beláttuk, hogy van olyan gráf, aminek a maximális foka legfeljebb $(1+ \\ +2\varepsilon)\sqrt{n \log n}$, a komplementerében nincs megengedett párosítás, és már csak regulárissá kell tennünk.

Ehhez vegyük föl a következő D segédgráfot. $D = (V, E')$, $V = \{s,t\} \cup A \cup B$. E'-t és c-t a következőképpen kapjuk. Az s csúcsból minden A-beli csúcsba húzzunk egy élet akkora súllyal, amennyi él hiányzik belőle az $\lfloor (1+3\varepsilon)\sqrt{n \log n} \rfloor$ fokszámhoz, ez $\varepsilon\sqrt{n \log n}$ és $(1+3\varepsilon)\sqrt{n \log n}$ közötti érték. Hasonlóan húzzunk éleket B-ből t-be. Továbbá húzzunk éleket $a \in A$-ból $b \in B$-be 1 súllyal, ha nem megy köztük E-beli él.

Vegyük észre, hogy egy s,t egész folyam, amelyben minden s-ből kivezető él maximálisan kihasznált, az éppen egy megfelelő kiegészítésnek felel meg, azokat az új éleket vesszük fel A és B közé, melyek súlya f-ben 1.

Tehát elég belátnunk, hogy a két minimális vágás a gráfban, hogy elvágjuk az összes s-ből kivezető élet, illetve hogy elvágjuk az összes t-be vetető élet. Indirekt tegyük fel, hogy van olyan minimális vágás, melyben van olyan s-ből kivezető él (s,a) ami nincs elvágva és van olyan t-be vezető él (b,t) ami nincs elvágva. Tudjuk, hogy az a-ba vezető él súlya legfeljebb $(1+3\varepsilon)\sqrt{n\log n}$, így ezt az élet csak akkor volt értelme nem elvágni, ha legfeljebb ennyi a-ból kivezető élet vágtunk el. Ekkor a azon ki szomszédjait, melyeket nem vágtunk el közvetlen a-tól jelölje B'. A'-t el kellett vágnunk t-től, B' elemszáma legalább $n-(2+5\varepsilon)\sqrt{n\log n}$, elemeinek összsúlya legalább

$$(n-(2+5\varepsilon)\sqrt{n\log n})\varepsilon\sqrt{n\log n}=\Theta(n\sqrt{n\log n}).$$

Másfelől B

B' összsúlya legfeljebb

$$(2+5\varepsilon)\sqrt{n\log n}(1+3\varepsilon)\sqrt{n\log n}=\Theta(n\log n).$$

Tehát elég nagy n-re B és t között több mint az élek összsúlyának felét elvágtuk. Hasonlóan s és A között, így ez a vágás biztosan nagyobb, mint mikor csak az összes s-ből kimenő élet vágtuk el.

Ezzel beláttuk, hogy a gráfunkat ki tudjuk egészíteni regulárissá, a konstrukcióval elkészültünk. $\square$

4. Hamilton körök hatványai Kneser gráfokban

Ebben a fejezetben azt vizsgálom, hogy mikor található egy $K(n,k)$ Kneser gráfban Hamilton kör l-edik hatványa. Ehhez először is definiálom a két használt fogalmat.

4.0.1. Definíció. *Legyen adott n,k pozitív egészek, $n \geq k \geq 2$. Tekintsük a következő gráfot, a csúcsai az n elemű alaphalmaz k elemű részhalmazai, élei a diszjunkt halmazpárok közt mennek. Az így kapott gráfot jelölje $K(n,k)$ és a neve Kneser gráf.*

4.0.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy $G=(V,E)$, $V=\{v_1,\dots,v_m\}$ gráf tartalmazza Hamilton kör l-edik hatványát, ha létezik a csúcsainak olyan ciklikus felsorolása $(v_1,\dots,v_m)$, hogy*

$$(\forall 1 \leq i \leq n)(\forall 1 \leq j \leq l)\{v_i, v_{i+j}\} \in E,$$

ahol az indexeket ciklikusan értjük.

Azaz szemléletesebben bármely legfeljebb l távolságra lévő csúcspár szomszédos.

Egy természetes kérdésfelvetés, hogy adott n-re és k-ra mi a legnagyobb l, hogy $K(n,k)$-ban van Hamilton kör l-edik hatványai. Mi egy ezzel lényegében ekvivalens kérdést vizsgálunk, adott k,l-re mi a legkisebb $n_0(k,l)$, hogy minden $n \geq n_0(k,l)$-re $K(n,k)$-ban van Hamilton kör l-edik hatványa.

A következő tétel egy egyszerű alsó becslés $n_0(k,l)$-re, de azt sejtjük, hogy többnyire éles.

4.0.3. Állítás. *Teljesül az*

$$n_0(k,l) \geq (l+1)k+1$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. Bármely $l+1$ egymás utáni halmaz páronként diszjunkt, így legalább $(l+1)k$ elem van bennük. Ha $n=(l+1)k$, akkor adott l egymás utáni halmaz után csak egyetlen csúcs jöhetne a körben, de előtte is csak ugyanaz jöhetne, ami ellentmondás. □

4.0.4. Sejtés. *Véges sok kivétellel*

$$n_0(k,l) = (l+1)k+1$$

teljesül.

Egy ismert kivétel van, $K(5{,}2)$-ben nincs Hamilton kör.

Sokat vizsgált az $l = 1$ eset, amikor a gráfban Hamilton kört keresünk csak. A sejtés ebben az esetben sem bizonyított, de Ian Shields és Carla D. Savage [SS04] cikkükben programmal ellenőrizték $k = 13$-ig.

A legjobb felső becslést az $l = 1$ esetre Chen adta [Che03] cikkében.

4.0.5. Tétel. *(Chen): Teljesül az*

$$n_0(k{,}1) \le \frac{3k + 1 + \sqrt{5k^2 - 2k + 1}}{2}$$

egyenlőtlenség.

Egy könnyen kezelhető speciális eset a $k = 2$ eset, erre Katona belátta a sejtést [Kat05].

Az általános esetre egy lehetséges megközelítést ad Seymour sejtése, mely a minimum fokszám alapján biztosítja Hamilton kör l-edik hatványának létét.

4.0.6. Sejtés. *(Seymour): Ha egy G gráfban minden csúcs fokszáma legalább $\frac{l}{l+1}n$, akkor van benne Hamilton kör l-edik hatványa.*

A sejtést belátta elég nagy n-re Komlós, Szemerédi és Sárközy [KSS98] cikkükben.

4.0.7. Tétel. *(Komlós, Szemerédi, Sárközy): Ha adott l és $n > N(l)$, akkor teljesül a Seymour sejtés, azaz ha a gráf minden fokszáma legalább $\frac{l}{l+1}n$, akkor van benne Hamilton kör l-edik hatványa.*

A tétel bizonyításához Szemerédi regularitási lemmáját és az az alapján általuk kidolgozott blow-up lemmát használták [KSS97]. Emiatt a bizonyítás csak hatalmas n-ekre működik.

A Seymour sejtés teljes felhasználásával látta be Katona a következő tételét [Kat05].

4.0.8. Állítás. *(Katona): Feltéteve a Seymour sejtést, és hogy $n > N(k)$, azaz n elég nagy k függvényében, teljesül az*

$$n_0(k, l) \le k^2(l + 1)$$

egyenlőtlenség.

Mi olyan bizonyítást adunk, amihez a $n > N(k)$ feltétel nem szükséges.

4.0.9. Tétel. *Feltéteve a Seymour sejtést teljesül az*

$$n_0(k,l) \leq k^2(l+1) + k - 1$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. A Kneser gráf fokszáma $\binom{n-k}{k}$, míg a csúcsszáma $\binom{n}{k}$. Ezek hányadosa

$$\frac{(n-k)\dots(n-2k+1)}{n\dots(n-k+1)} \geq \left(1 - \frac{k}{n-k+1}\right)^k \geq \left(1 - \frac{k^2}{n-k+1}\right) \geq \frac{l}{l+1},$$

ahol felhasználtuk a Bernoulli egyenlőtlenséget. így teljesül a Seymour sejtés feltétele, a gráfban van Hamilton kör l-edik hatványa. □

A Katona eredeti cikkében adott kicsit erősebb becslés hátránya, hogy a következő következmény nem lenne lehetséges az alapján, mert k-nak és l-nek egymás függvényében nagynak kéne lennie, ami egyszerre nem teljesíthető.

4.0.10. Következmény. *Ha $k > K(l)$, azaz k elég nagy l függvényében, akkor a*

$$n_0(k,l) \leq k^2(l+1) + k$$

egyenlőtlenség teljesül.

Ennek a felső becslésnek a nagyságrendje k^2l, egy ugyanilyen nagyságrendű becslést szeretnék belátni, ami már minden k, l párra működik. Ehhez Baranyai következő tételét fogom felhasználni.

4.0.11. Tétel. *(Baranyai, [Bar75]): Adott n, k és $a_1, \dots, a_m$ úgy, hogy $\sum_{i=1}^{m} a_i = \binom{n}{k}$. Ekkor az n elemű alaphalmaz k elemű részhalmazai felpartícionálhatóak a_i méretű csoportokra, hogy minden csoport közel egyenletes, azaz az alaphalmaz bármely két elemére ha megszámoljuk hogy hány elemben szerepel a csoportból, legfeljebb egy különbséget kapunk.*

Mi a tételt $a_i \leq \frac{n}{k}$ esetben fogjuk használni, ekkor az egyes csoportokba diszjunkt elemek kerülnek.

4.0.12. Tétel. *Teljesül a*

$$n_0(k,l) \leq k((k+2)l+1)$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. A Baranyai tétel segítségével bontsuk fel a gráfunkat $(k+2)l+1$ és $(k+2)l$ méretű klikkek diszjunkt uniójára. Ezeket a klikkeket tegyük egymás után tetszőleges ciklikus sorrendbe, és a klikkeken belül is rögzítsünk egy sorrendet.

Minden klikk utolsó l eleméhez nem nyúlva keressünk a klikken belül olyan l elemet, ami diszjunkt az előző klikk utolsó l elemétől. Minden egyes elem az előző klikk végéről legfeljebb k elemet zár ki, mert maximum annyit tud metszeni egy partícióból. Ez így kl csúcsot zár ki a klikkből, továbbá az utolsó l csúcshoz nem szeretnénk nyúlni, de így is legalább

$$(k+2)l - kl - l = l$$

megfelelő csúcs marad.

Ezeket a klikk elejére mozgatva és ezt minden klikkre elvégezve kapjuk Hamilton kör l-edik hatványát. □

A tétel nagyságrendje szintén k^2l, míg a sejtés és alsó becslés nagyságrendje kl. Vegyük észre, hogy sok lehetőségünk van ennek a bizonyításnak a javítására, hisz a klikkek sorrendjét és a végükön lévő elemet sem módosítottuk. Chen bizonyítása az $l=1$ esetben ezt használja ki.

Hivatkozások

[Alo86] N. Alon, *Eigenvalues, geometric expanders, sorting in rounds, and Ramsey theory*, Combinatorica **6** (1986), no. 3, 207–219. MR 875289

[Bar75] Zs. Baranyai, *On the factorization of the complete uniform hypergraph*, 91–108. Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Vol. 10. MR 0416986

[BC76] J. A. Bondy and V. Chvátal, *A method in graph theory*, Discrete Math. **15** (1976), no. 2, 111–135. MR 0414429

[Che03] Ya-Chen Chen, *Triangle-free Hamiltonian Kneser graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **89** (2003), no. 1, 1–16. MR 1999733

[Dir52] G. A. Dirac, *Some theorems on abstract graphs*, Proc. London Math. Soc. (3) **2** (1952), 69–81. MR 0047308

[DKS98] János Demetrovics, Gyula O. H. Katona, and Attila Sali, *Design type problems motivated by database theory*, J. Statist. Plann. Inference **72** (1998), no. 1-2, 149–164, R. C. Bose Memorial Conference (Fort Collins, CO, 1995). MR 1655189

[EK01] Hikoe Enomoto and Gyula O. H. Katona, *Pairs of disjoint q-element subsets far from each other*, Electron. J. Combin. **8** (2001), no. 2, Research Paper 7, 7, In honor of Aviezri Fraenkel on the occasion of his 70th birthday. MR 1853258

[FF56] L. R. Ford, Jr. and D. R. Fulkerson, *Maximal flow through a network*, Canad. J. Math. **8** (1956), 399–404. MR 0079251

[Joh13] J. Robert Johnson, *Matchings and hamilton cycles with constraints on sets of edges*, 2013.

[Kat05] Gyula O. H. Katona, *Constructions via Hamiltonian theorems*, Discrete Math. **303** (2005), no. 1-3, 87–103. MR 2181045

[KSS97] János Komlós, Gábor N. Sárközy, and Endre Szemerédi, *Blow-up lemma*, Combinatorica **17** (1997), no. 1, 109–123. MR 1466579

[KSS98] János Komlós, Gábor N. Sárközy, and Endre Szemerédi, *Proof of the Seymour conjecture for large graphs*, Ann. Comb. **2** (1998), no. 1, 43–60. MR 1682919

[Ore60] Oystein Ore, *Note on Hamilton circuits*, Amer. Math. Monthly **67** (1960), 55. MR 0118683

[Pó62] L. Pósa, *A theorem concerning Hamilton lines*, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. **7** (1962), 225–226. MR 0184876

[SS04] Ian Shields and Carla D. Savage, *A note on Hamilton cycles in Kneser graphs*, Bull. Inst. Combin. Appl. **40** (2004), 13–22. MR 2020936