T.I. halmazok véges csoportokban

Diplomamunka

Péter Gerzson, matematikus MSc hallgató

témavezető:

Pálfy Péter Pál, egyetemi tanár

Algebra és Számelmélet Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2017.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék itt köszönetet mondani Pálfy Péter Pál és Halasi Zoltán tanár úraknak az önzetlen segítségnyújtásért!

Továbbá elsősorban köszönöm anyukámnak az erkölcsi és anyagi támogatását a hosszú évek alatt!

Tartalomjegyzék

1. Előszó

A diplomamunka M.Isaacs: Character Theory of Finite Groups című könyvének a 7.fejezetét dolgozza fel. Ez a fejezet a T.I. halmazok elméletével foglalkozik. T.I. halmaz egy G csoportnak az a részhalmaza, melyre minden $g \in G$-re, vagy $X^g = X$, vagy $X^g \cap X \subseteq \{1\}$. Az első példa a T.I. halmazra a Frobenius-csoport (konkrétan egy pont stabilizátora T.I. halmaz, ld. [2. 35.23.1.]). A T.I. halmaz definícója után két példa szerepel rájuk (Brauer-Suzuki-tétel és a 4.10.tétel).

Újabb alapdefiníciók következnek ezután: lineáris izometria, kivételes karakterek, koherencia. A fejezet egyik fő célja, hogy megmutassa, hogy mikor van koherencia T.I.F.N. esetben, ami speciális T.I. halmaz (Megj. a T.I.F.N. halmaz egy Frobenius csoport magja). Feit egy tétele szól arról, hogy mikor van koherencia.

Brauer-Suzuki az említetten kivül egy másik tételük szól arról, hogy mikor van koherencia Abel és T.I.F.N. esetben, míg Feit és Sibliey tétele azt adja meg, hogy általános, nem Abel esetben ez mikor van. A két tétel között példákat láthatunk, hogy mikre jó a koherencia T.I.F.N. esetben.

A megértéshez egy bevezető előkészületek részt tartalmaz a dolgozat. A szakdolgozat utána követi a könyvet.

Ismertnek tételezem fel a véges csoportok karakterelméletének alapfogalmait, de ezek közül az előkészületek részben a legalapvetőbbeket felelevenítem.

Az utolsó fejezetben két példa kerül megoldásra a könyvből.

2. Előkészületek

2.1. Definició. Legyen A egy F-algebra. Egy *reprezentáció*-ja A-nak egy $X : A \to M_n(F)$ algebra homomorfizmus. Az n egész szám a *foka* X-nek. Két, X, Y reprezentáció *hasonló*, ha létezik egy nem szinguláris $n \times n$-es P mátrix, melyre $X(a) = P^{-1}Y(a)P$ minden $a \in A$-ra.

Legyen G egy véges csoport és F egy test. Tegyük fel, hogy X reprezentációja $F[G]$-nek n fokú. Mivel X egy algebra homomorfizmus, $X(1) = I$, az egységmátrix. Ebből következik $g \in G$-re, hogy $X(g)$ nem szinguláris és $X(g)^{-1} = X(g^{-1})$. Ha megszorítjuk az X függvényt $G \in F[G]$-re, akkor egy csoport homomorfizmust kapunk G-ről a *általános lineáris csoport*-ba, $\mathrm{GL}(n, F)$-be, vagyis az F feletti nem szinguláris $n \times n$-es mátrixok multiplikatív csoportjába.

2.2. Definició. Legyen F egy test és G egy csoport. Akkor egy *F-reprezentáció*-ja G-nek egy $X : G \to \mathrm{GL}(n, F)$ homomorfizmus valamilyen n egész számra.

2.3. Definició. Legyen X egy F-reprezentációja G-nek. Akkor az X *karaktere*, (ill. *F-karaktere*) az a G-n értelemezett χ függvény, amit $\chi(g) = trX(g)$ ad meg.

Ahogy az G F-reprezentációinál van, nézhetjük az F-karaktereket, mint függvényeket az egész $F[G]$-n. Vegyük észre, hogy ha a karakterisztika char$(F) \neq 0$, akkor a konstans 0 függvény egy F -karakter. Másrészről pedig, ha char$(F) = 0$, akkor a 0 nyilván nem egy F-karakter, mert $\chi(1) = deg\ X$, ahol X G egy F-reprezentációja. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy $\chi(1)$ a foka χ-nek. Az 1 fokú karaktereket *lineáris karakterek*-nek hívják. Speciálisan az 1_G függvény, amelyiknek konstans 1 az értéke G-n egy lineáris F-karakter. Ezt nevezik *fő* F-karakternek.

2.4. Lemma. *(a) G hasonló F-reprezentációinak egyenlő karakterek felelnek meg.*
(b) Egy csoport konjugált osztályain a karakterek konstansok.

Ezentúl F $\mathbb{C}$ lesz, a komplex számok teste.

2.5. Tétel. *A hasonló irreducibilis reprezentációs osztályok száma G-ben megegyezik G konjugált osztályainak a számával.*

2.6. Tétel. *A G csoport Abel akkor és csak akkor, ha minden irreducibilis karakter lineáris.*

2.7. Tétel. *Legyen G egy csoport. Akkor*

$$\sum_{\chi \in Irr(G)} \chi(1)^2 = |G|.$$

Egy *osztály függvény* egy G csoporton egy olyan függvény, $\phi : G \to \mathbb{C}$, amelyik konstans a konjugált osztályokon. Minden karakter osztály függvény.

2.8. Tétel. *Minden ϕ osztály függvénye G-nek egyértelműen fejezhető ki ebben a formában*

$$\phi = \sum_{\chi \in Irr(G)} a_\chi \chi,$$

ahol $a_\chi \in \mathbb{C}$. Továbbá, ϕ egy karakter akkor és csak akkor, ha az összes a_χ nemnegatív egész és $\phi \neq 0$.

Ha $\chi = \sum_{\chi_i \in Irr(G)} n_i \chi_i$ egy karakter, akkor azon χ_i-ket, melyekre $n_i > 0$ a χ irreducibilis *összetevő*-jeinek nevezik.

Egy G csoportnak az irreducibilis karaktereit rendszerint egy *karakter táblában* ábrázolják: ez egy négyzetes tömbje a komplex számoknak, melynek a sorai megfelelnek a χ-knek, oszlopai pedig a K_i osztályoknak felelnek meg.

A ρ *reguláris karakter*-e G-nek annak a reprezentációnak van megfeleltetve, amelyik a $\mathbb{C}[G]^\circ$ reguláris modulushoz kapcsolódik. Erre a ρ karakterre: ha $g \in G$ és $g \neq 1$, akkor $\rho(g) = 0$, ill. $\rho(1) = |G|$.

2.9. Tétel. *(Első ortogonalitási reláció)*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g) \chi_j(g^{-1}) = \delta_{ij}.$$

2.10. Tétel. *Legyen X egy reprezentációja G-nek, melynek a karaktere χ és legyen $g \in G$. Legyen $n = o(g)$, g rendje. Ekkor*

(a) $X(g)$ hasonló egy $diag(\epsilon_1, ..., \epsilon_f)$ diagonális mátrixhoz;

(b) $\epsilon_i^n = 1$;

(c) $\chi(g) = \sum \epsilon_i$ és $|\chi(g)| \leq \chi(1)$;

(d) $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.

2.11. Definició. Legyenek ϕ és ϑ osztály függvények egy G csoporton. Akkor

$$[\phi, \vartheta] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g) \overline{\vartheta(g)}$$

a *belső szorzata* ϕ és ϑ-nak.

A definiált belső szorzat teljesíti az elvárt tulajdonságokat. $Irr(g)$ ortonormált bázisa az osztályfüggvények terének.

2.12. Tétel. *Legyenek* χ *és* ψ *(nem feltétlenül irreducibilis) karakterei* G*-nek. Akkor* $[\chi, \psi] = [\psi, \chi]$ *egy nemnegatív egész.* χ *irreducibilis akkor és csak akkor, ha* $[\chi, \chi] = 1$

2.13. Tétel. *(második ortogonalitási reláció) Legyenek* $g, h \in G$*. Akkor*

$$\sum_{\chi \in Irr(G)} \chi(g)\overline{\chi(h)} = 0$$

, ha g *nem konjugált* h*-hoz* G*-ben. Máskülönben az összeg egyenlő* $|\mathrm{C}(g)|$*-vel.*

3. T.I. halmazok

3.1. A Frobenius csoport

Az Isaacs könyvben [1.] a 6.34. Tételben olyan, egy N normális részcsoportot tartalmazó G csoportokról van szó, melyekre $\mathrm{C_G}(x) \subseteq N$ minden $1 \neq x \in N$-re. A Sylow-tételből és abból, hogy nem-triviális p-csoportoknak van nem-triviális centrumuk azonnal következik, hogy $(|N|, |G : N|) = 1$. A Schur-Zassenhaus tétel segítségével levonhatjuk azt az állítást, hogy létezik $H \subseteq G$, és $NH = G$ és $N \cap H = 1$.

Ebben a helyzetben legyen $g \in G - H$. Írjuk $G = xn$ $x \in H$-val és $1 \neq n \in N$. Ha $y \in H \cap H^g$, akkor $y \in H^n$ és $y = h^n$ valamely $h \in H$-ra. Mivel $y \in H$, kapjuk $[h, n] = h^{-1}h^n = h^{-1}y \in H$. Mint hogy $N \lhd G$, kapjuk $[h, n] \in H \cap N = 1$ és $h \in \mathrm{C}(n) \subseteq N$. Ezért $h = 1$ és $y = 1$. Befejezésül látható, hogy $H \cap H^g = 1$.

3.1. Definició. Legyen $H \subseteq G$, ahol $1 < H < G$. Tegyük fel, hogy $H \cap H^g = 1$, amikor $g \in G - H$. Akkor H egy *Frobenius komplementum* G-ben. Egy csoportot, mely tartalmaz egy Frobenius komplementumot *Frobenius csoport*-nak nevezzük.

Az előzőekben bebizonyítottuk, hogy azon csoportok, melyek kielégítik a 6.34. Tétel feltételeit $1 < N < G$-vel Frobenius csoportok. Frobenius tétele a megfordítása ennek.

3.2. Tétel. *(Frobenius) Legyen G egy Frobenius csoport H komplementummal. Ekkor létezik $N \lhd G$, ahol $HN = G$ és $H \cap N = 1$.*

A tényt, hogy az N csoport a 4.2. Tételben kielégíti azt a feltételt, hogy $\mathrm{C_G}(x) \subseteq N$ minden $1 \neq x \in N$-re, nem nehéz bebizonyítani.

Mielőtt elkezdenénk a 4.2 Tétel bizonyítását, megemlítjük azt az érdekes tényt, hogy az triviális, hogy N-et megtaláljuk. Ami nehéz az az, hogy bebizonyítsuk, hogy N egy részcsoport.

3.3. Lemma. *Legyen H egy Frobenius komplementum G-ben. Legyen*

$$N = \left((G - \bigcup_{x \in G} H^x) \right) \cup \{1\}.$$

Akkor $|N| = |G : H|$. Ha $M \lhd G$ $M \cap H = 1$-gyel, akkor $M \subseteq N$.

Bizonyítás. Mivel $H = \mathrm{N_G}(H)$, $|G:H|$ különböző részcsoport van H^x alakban. Ezek pontosan $|G:H|(|H|-1)$ nem-egység elemet tartalmaznak. G fennmaradt elemei alkotják az N halmazt. Kapjuk:

$$|N| = |G| - |G:H|(|H|-1) = |G| - |G| + |G:H| = |G:H|.$$

Ha $M \triangleleft G$ és $M \cap H = 1$, akkor $M \cap H^x = 1$ minden $x \in G$-re, és így $M \subseteq N$. A bizonyítás vége. □

3.4. Lemma. *Legyen H egy Frobenius komplementum G-ben. Legyen ϑ egy osztályfüggvénye H-nak, mely kielégíti $\vartheta(1) = 0$-t. Akkor $(\vartheta^G)_H = \vartheta$.*

Bizonyítás. Legyen $1 \neq h \in H$. Akkor

$$\vartheta^G(h) = (1/|H|) \sum_{x \in G} \vartheta^\circ(xhx^{-1}).$$

Ha $\vartheta^\circ(xhx^{-1}) \neq 0$, akkor $1 \neq xhx^{-1} \in H \cap H^{x^{-1}}$ és $x \in H$. Ekkor $\vartheta^\circ(xhx^{-1} = \vartheta(h)$. Kapjuk

$$\vartheta^G(h) = (1/|H|) \sum_{x \in H} \vartheta(h) = \vartheta(h).$$

Mivel $\vartheta^G(1) = |G:H|\vartheta(1) = 0$, a bizonyítás kész. □

A 4.2. Tétel bizonyítása a következőképpen motíválható. Feltételezve, hogy a tétel igaz, legyen $\chi \in Irr(G)$, ahol $N \subseteq ker\chi$. Akkor $\chi_H \in Irr(H)$. Most adott $\chi_H = \phi \in Irr(H)$-ra próbáljuk megtalálni $\chi \in Irr(G)$-t. Ezt csináljuk minden $\phi \in Irr(H)$-ra és ellenőrizzuk, hogy $\bigcap ker\ \chi$ -e a kívánt normális részcsoport.

Bizonyítás. (4.2. Tétel bizonyítása) Legyen $1_H \neq \phi \in Irr(H)$ és írjuk $\vartheta = \phi - \phi(1)1_H$, úgy hogy $\vartheta(1) = 0$. Most $[\vartheta^G, \vartheta^G] = [\vartheta, (\vartheta^G)_H] = [\vartheta, \vartheta]$ a 4.4. Lemma miatt. Ezért $[\vartheta^G, \vartheta^G] = 1 + \phi(1)^2$. Most $[\vartheta^G, 1_G] = [\vartheta, 1_H] = -\phi(1)$. Ezért írhatjuk $\vartheta^G = \phi^* - \phi(1)1_G$, ahol ϕ^* egy osztályfüggvénye G-nek, $[\phi^*, 1_G] = 0$, és $1 + \phi(1)^2 = [\phi^*, \phi^*] + \phi(1)^2$, úgy hogy $[\phi^*, \phi^*] = 1$. Mivel ϑ karakterek különbsége, így ϑ^G is, és ezért ϕ^* szintén karaktereknek a különbsége. Mint hogy $[\phi^*, \phi^*] = 1$, következik, hogy $\pm\phi^* \in Irr(G)$. Továbbá, ha $h \in H$, akkor

$$\phi^*(h) = \vartheta^G(h) + \phi(1) = \vartheta(h) + \phi(1) = \phi(h).$$

Speciálisan $\phi^*(1) > 0$ és így $\phi^* \in Irr(G)$.

Minden nem-principális $\phi \in Irr(H)$-ra választottunk egy kirterjesztést $\phi^* \in Irr(G)$-t. Legyen $M = \bigcap_\phi ker\ \phi^*$. Ha $x \in M \cap H$, akkor $\phi(x) = \phi^*(x) = \phi^*(1) = \phi(1)$ minden $\phi \in Irr(H)$-ra és így $x = 1$. 4.3. Lemma alapján $M \subseteq N$.

Fordítva, ha $g \in G$ H-val nem konjugáltban fekszik, akkor

$$\phi^*(g) - \phi(1) = \vartheta^G(g) = 0$$

és $g \in ker\ \phi^*$. Ebből következik, hogy $M = N$, és ezért az M normális részcsoport kielégíti $|M| = |G : H|$-t. Kapjuk $|MH| = |M||H| = |G : H||H| = |G|$ és az eredmény következik. □

A normális részcsoportot, melynek létezését a 4.2. Tétel biztosítja *Frobenius mag*-nak nevezik. A 4.3. Lemma szerint ez egyértelműen meg van határozva H által.

Egy teljesen ekvivalens változata a Frobenius tételnek az alábbiak szerint szól.

3.5. Következmény. *Legyen G egy tranzitív permutáció csoport Ω-n χ karakterrel. Tételezzük fel, hogy $\chi(g) \leq 1$ minden $g \in G$-re, ahol $g \neq 1$. Akkor a $\{g \in G | \chi(g) = 0\} \cap \{1\}$ halmaz egy tranzitív normális részcsoport.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha \in \Omega$ és tételezzük fel $|\Omega| \geq 2$. Ha létezik egy $g \in G, g \neq 1$ $\chi(g) \neq 0$-val, akkor G_α egy Frobenius komplementum. A 4.2. Tétel és a 4.3. Lemma szerint a $\{g \in G | \chi(g) = 0\} \cap \{1\} = N$ a Frobenius mag. Ez tranzitív, mert $NG_\alpha = G$. □

3.2. T.I. halmazok

Most olyan témáról lesz szó, hogy miképp terjesztették ki, és használták más kontexusban a Frobenius bizonyításában találtakat. Be kell vezetnünk egy terminológiát.

3.6. Definició. Legyen $X \subseteq G$ egy részhalmaz. Akkor X egy *T.I. halmaz* (trivial intersection set), ha minden $g \in G$-re, vagy $X^g = X$, vagy $X^g \cap X \subseteq \{1\}$.

3.7. Lemma. *Legyen X egy T.I. halmaz G-ben és legyenek ϕ és ϑ osztály függvények $N = \mathrm{N_G}(X)$-en. Tegyük fel, hogy ϕ és ϑ eltűnik $N - X$-en és $\vartheta(1) = 0$. Akkor $\vartheta^G(x) = \vartheta(x)$ minden $x \in X$-re és $[\vartheta^G, \phi^G] = [\vartheta, \phi]$.*

Bizonyítás. Legyen $x \in X$. Akkor $\vartheta^G(x) = (1/|N|)\sum_{y\in G}\vartheta^\circ(yxy^{-1})$. Ha $\vartheta^\circ(yxy^{-1}) \neq 0$, akkor $yxy^{-1} \in X \cap X^{y^{-1}}$ és $yxy^{-1} \neq 1$. Következik $y \in N$ és $\vartheta^\circ(yxy)^{-1} = \vartheta(x)$. Az első állítás most következik.

Igaz, hogy $[\vartheta^G, \phi^G] = [(\vartheta^G)_N, \phi]$. Mivel ϕ eltűnik $N - X$-en és $(\vartheta^G)_N - \vartheta$ eltűnik X-en, kapjuk, hogy $[(\vartheta^G)_N - \vartheta, \phi] = 0$, és ezért $[\vartheta^G, \phi^G] = [\vartheta, \phi]$, ahogy állítottuk. □

A $\vartheta(1) = 0$ követelmény miatt az előző lemma nem alkalmazható, ha ϑ egy karakter. Mi leggyakrabban ϑ-t két karakter különbségének vesszük. Egy ilyen különbséget *generalizált karakter*-nek nevezünk. Megjegyezzük, hogy ϑ egy generalizált karaktere G-nek akkor és csak akkor, ha $[\vartheta, \chi] \in \mathbb{Z}$ minden $\chi \in Irr(G)$-re. Szintúgy G generalizált karaktereinek a halmaza egy gyűrű.

Készen állunk arra, hogy olyan csoportokkal foglalkozzunk, amelyeknek a P Sylow 2-részcsoportja generalizált kvaternió. Ha $|P| \geq 16$, be fogjuk látni Brauer és Suzuki tételét, mely azt állítja (több dolog mellett), hogy egy ilyen csoport nem lehet egyszerű. Ez a tétel akkor is igaz, ha $|P| = 8$, csak sokkal nehezebb bebizonyítani azt az esetet.

A következő tényeket használjuk majd egy P generalizált kvaternióról:

(a) P-nek van egy 2 indexű ciklikus részcsoportja;

(b) $|P : P'| = 4$;

(c) $|\mathrm{Z}(P)| = 2$;

(d) P nem-ciklikus részcsoportjai maguk is generalizált kvaterniók;

(e) P tartalmaz egy egyértelmű involúciót.

3.8. Tétel. *(Brauer-Suzuki) Legyen $P \in Syl_2(G)$ generalizált kvaternió $|P| \geq 16$-tal. Akkor létezik $N \lhd G$, ahol $|N|$ páratlan és olyan, hogy G/N-nek egy 2 rendű normális részcsoportja van.*

Megjegyezzük, hogy $N = 1$ is lehetséges a 4.8. Tételben. Először a következő gyengébb változatot bizonyítjuk. A teljes eredmény aztán könnyen fog ebből jönni.

3.9. Tétel. *Legyen $P \in Syl_2(G)$ generalizált kvaternió $|P| \geq 16$. Akkor létezik $M \lhd G$ olyan, hogy $|M|$ páros és G/M nem Abel.*

Bizonyítás. Legyen $H \subseteq P$ ciklikus $|P : H| = 2$-vel. Kapjuk $P' \subseteq H$ és $|P''| = |P|/4 \geq 4$, úgy hogy $P' > \mathrm{Z}(P)$, és így $\mathrm{C_P}(P') = H$. Legyen $C = \mathrm{C_G}(P')$ és $N =$

$\mathrm{N_G}(P')$. Most $P \in Syl_2(N)$ és $C \lhd N$, úgy hogy $H = P \cap C \in Syl_2(C)$. Mivel C-nek egy Sylow 2-részcsoportja ciklikus, következik, hogy (például a Burnside transzfer tételéből) C-nek van egy K normális 2-komplementuma és $K \lhd N$. Most N/C izomorf $Aut(P')$ egy részcsoportjával. Mivel P' egy ciklikus 2-csoport, következik, hogy N/C egy 2-csoport. Ezért levonhatjuk azt a következtetést, hogy $N = KP$. Mivel $C = KH$, kapjuk $|N : C| = 2$.

Legyen $U \subseteq P'$ $|P' : U| = 2$-vel. Legyen $X = C - UK$. Az állítjuk, hogy X egy T.I. halmaz és $N = \mathrm{N}(X)$. Most $C/K \cong H$ ciklikus és UK/K az ő egyértelmű részcsoportja, melynek a rendje egyenlő $|U|$-val. Következik $y \in C$-re, hogy $y \in X$ akkor és csak akkor, ha $o(yK)$ C/K-ban túllépi $|U|$-t. Következtetésként levonjuk, hogy $y \in X$ akkor és csak akkor, ha $(2|U|)|o(y)$.

Most $|P'| = 2|U|$ és $P' \lhd C$. Mivel P' tartalmazza C minden elemét, melyek rendje $2|U|$, következik, hogy $P' \subseteq \langle x \rangle$ minden $x \in X$-re. Ha $x \in X \cap X^g$, akkor $P' \subseteq \langle x \rangle$ és $(P')^g \subseteq \langle x \rangle$. Mivel $|P'| = |(P')^g|$, kapjuk $P' = (P')^g$, és $g \in N$. Mivel nyilván $N \subseteq \mathrm{N}(X)$. Mivel $|P'| \geq 4$, szintén kapjuk, hogy $4|o(x)$ minden $x \in X$-re.

Most C/UK ciklikus, 4 renddel. Legyen λ C-nek egy lineáris karaktere $ker\ \lambda = UK$-val. Legyen $\vartheta = \lambda^N - (1_C)^N$. Mivel $ker\ \lambda^N = UK \subseteq ker(1_C)^N$, arra jutunk, hogy ϑ eltűnik UK-n, és speciálisan $\vartheta(1) = 0$. Nyilván ϑ eltűnik $N - C$-n, így ϑ eltűnik $N - X$-en. Ezért alkalmazhatjuk a 4.7. Lemmát $\phi = \vartheta$-val, és arra jutunk, hogy $[\vartheta^G, \vartheta^G] = [\vartheta, \vartheta]$.

$[\vartheta, \vartheta]$ kiszámolásához vegyük észre, hogy $(1_C)^N = 1_N + \mu$, ahol $ker\ \mu = C$. Azt állítjuk, hogy $\lambda^N \in Irr(N)$. Ellenkezőleg λ^N lineáris karaktereknek az összege, és $P' \subseteq N' \subseteq ker\ \lambda^N = UK$, ami nem igaz. Így $\vartheta = \lambda^N - \mu - 1_N$ és $[\vartheta, \vartheta] = 3$.

Most $[\vartheta^G, \vartheta^G] = 3$ és $[\vartheta^G, 1_G] = [\vartheta, 1_N] = -1$. Következik, hogy

$$\vartheta^G = \pm\chi_1 \pm \chi_2 - 1_G,$$

ahol $\chi_1, \chi_2 \in Irr(G)$-ek nem principálisak. Mivel $\vartheta^G(1) = \vartheta(1) = 0$, ahhoz jutunk, hogy fent az előjelek mind ellentétesek, és írhatjuk

$$\vartheta^G = \chi_1 - \chi_2 - 1_G.$$

Mivel $\vartheta^G(g) = 0$, hacsak nem g konjugált X egy eleméhez, kapjuk

$$\chi_1(g) - \chi_2(g) = 1, \ \ ha\ 4 \nmid o(g). \tag{1}$$

Mivel P-nek van egy egyértelmű involúciója, következik, hogy G-nek van egy egyértelmű konjugált osztálya involúciókból. Legyen K_1 ez az osztály. Definiáljuk a ϕ osztály függvényt G-n

$$\phi(g) = |\{(x, y)|x, y \in K_1, xy = g\}|.$$

által.

Ha $\phi(g) \neq 0$, akkor $g = xyx$ ésy involúciókra, és igy $g^x = yx = g^{-1}$. Ha $o(g)$ páros, legyen σ az involúció, ami $\langle g \rangle$-ben van. Akkor $\langle x, \sigma \rangle$ egy ábel, nem-ciklikus csoport 4 renddel. Mivel P-nek nincs ilyen részcsoportja, így G-nek sem a Sylow tétel miatt. Így arra jutunk, hogy $\phi(g) = 0$, ha $o(g)$ páros. Ezért $\phi(g)(\chi_1(g) - \chi_2(g) - 1) = 0$ minden $g \in G$-re. Emiatt

$$[\phi, \chi_1 - \chi_2 - 1_G] = 0. \tag{2}$$

$\mathbb{C}[G]$-ben legyen K_ν az osztály összeg, amelyik a K_ν konjugált osztályhoz tartozik. Akkor a [1.; 3.9. Probléma] jelöléseivel,

$$K_1 K_1 = \sum a_{11\nu} K_\nu,$$

és ha $g \in K_\nu$, akkor $\phi(g) = a_{11\nu}$.

A [1.; 3.9. Probléma] alapján kapjuk $g \in K_\nu$-re és $x \in K_1$-re, hogy

$$\phi(g) = a_{11\nu} = (||K_1|^2/|G|) \sum_{\chi \in Irr(G)} \chi(x)^2 \bar{\chi(g)}/\chi(1).$$

Mivel $\chi(x)$ és $\phi(g)$ valósak, újraírhatjuk ezt az egyenletet, mint

$$(|G|)/|K_1|^2)\phi = \sum_{\chi \in Irr(G)} (\chi(x)^2/\chi(1))\chi$$

és

$$(|G|)/|K_1|^2)[\phi, \chi] = \chi(x)^2/\chi(1)$$

minden $\chi \in Irr(G)$-re.

Arra jutunk a (2.) egyenletből, hogy

$$\chi_1(x)^2/\chi_1(1) - \chi_2(x)^2/\chi_2(1) = 1.$$

Az (1.) egyenletből kapjuk $\chi_2(x) = \chi_1(x) - 1$, mivel $4 \nmid o(x)$ és úgyszintén $\chi_2(1) = \chi_1(1) - 1$. Behelyettesítés az slőző egyenletbe adja

$$\chi_1(x)^2/\chi_1(1) - (\chi_1(x) - 1)^2/(\chi_1(1) - 1) = 1.$$

Egyszerűsítve ezt kapjuk

$$(\chi_1(x) - \chi_1(1))^2 = 0$$

, és $x \in ker\ \chi_1$.

Mivel $o(x) = 2$, kapjuk $|ker\ \chi_1|$ páros. Most $\chi_1(1) = 1 + \chi_2(1) \geq 2$ és így $G/ker\ \chi_1$ nem ábel. A bizonyítás kész $M = ker\ \chi_1$-gyel. □

Bizonyítás. (*4.8. Tétel*) Legyen U a (normális) részcsoport, melyet az összes involúciók generálnak G-ben. Ha U-nakvan egy ciklikus Sylow 2-részcsoportja, akkor U-nak van egy normális N 2-komplementuma és $N \triangleleft G$. Ebben az esetben $U/N \triangleleft G/N$ és U/N egy ciklikus 2-csoport. Az eredmény adódik.

Tegyük fel, hogy U Sylow 2-részcsoportjai nem ciklikusak. Ez ellentmondásra fog vezetni. Mivel $8 \mid |U|$, választhatunk V-t, ahol $U \subseteq V \subseteq UP$ olyan, hogy $|V : U| \leq 2$ és $16||V|$. Most a 4.9. Tétel alkalmazható V-hez, és választhatjuk $M \triangleleft V$ úgy, hogy V/M nem Abel és $|M|$ páros.

Mivel egy Sylow 2-részcsoportja V-nek tartalmaz egy egyértelmű involúciót, következik, hogy V összes involúciója konjugált. Mivel $M \triangleleft V$ tartalmaz egy involúciót, következik, hogy M tartalmazza V összes involúcióját, és így $U \subseteq M$. Ezért $|V : M| \leq |V : U| \leq 2$ és ez ellentmond annak, hogy V/M nem Abel és kész a bizonyítás. □

A Brauer-Fowler tétel szerint legfeljebb véges sok nem izomorf egyszerű csoport van, mely tartalmaz egy involúciót, melynek a centralizátora izomorf egy adott C csoporthoz. Sokat fáradoztak azon, hogy megtalálják az összes egyszerű csoportot, mely különböző ilyen C-knek felel meg. A kulcs lépés az az, hogy megtaláljuk az összes lehetséges rendjeit ezeknek az egyszerű csoportoknak éa ez gyakran karakter elméleti technikák bevonásával jár, melyekkel itt foglalkozunk. Ennek illusztrálására bebizonyítjuk a következőt.

3.10. Tétel. *Legyen $G = G'$ és tegyük fel $\tau \in G$ egy involúció, amire $\mathrm{C_G}(\tau)$ dihedral 8 renddel. Akkor $|G| = 168$, vagy 360.*

Szükségünk van egy lemmára.

3.11. Lemma. *(Thompson) Legyen $S \in Syl_2(G)$ és tegyük fel $M \subseteq S$, amire $|S : M| = 2$. Legyen $\tau \in S$ egy involúció, mely nem konjugált G-ben M egyetlen eleméhez sem. Akkor $\tau \notin G'$.*

Bizonyítás. G hasson jobbszorzással $\Omega = \{Mg | g \in G\}$-n. Akkor $|\Omega| = 2|G : S|$. Most ha $Mg\tau = Mg$, akkor $g\tau g^{-1} \in M$, ami nem az eset. Így τ-nak nincs fixpontja Ω-n, és mivel $|G : S|$ páratlan, következik, hogy τ egy páratlan permutációt indukál Ω-n. Ezért létezik $A \triangleleft G$, amire $|G : A| = 2$ és $\tau \notin A$. Az eremény következik. □

Bizonyítás. (*4.10. Tétel*) Legyen $D = \mathrm{C_G}(\tau)$ és $D \subseteq S \in Syl_2(G)$. Ekkor $\mathrm{Z}(S) \subseteq \mathrm{Z}(D) = \langle \tau \rangle$ és így $S \subseteq \mathrm{C}(\tau) = D$. Ezért $D \in Syl_2(G)$. Legyen $M \subseteq D$ ciklikus 4 renddel, úgy hogy τ az egyértelmű involúció M-ben. Mivel $G = G'$, 4.11. Lemma garantálja, hogy G-ben minden involúció konjugált τ-hoz.

Most M T.I. halmaz G-ben, mivel ha $M \cap M^x \neq 1$, akkor $\tau \in M^x$, és így $\tau = \tau^x$, és $x \in D$. Mivel $M \triangleleft D$ kapjuk $M = M^x$. Ez azt is mutatja, hogy $D = \mathrm{N_G}(M)$.

Legyen λ egy hűséges lineáris karaktere M-nek, és legyen $\vartheta = (1_M - \lambda)^D$. Mivel λ^D irreducibilis, következik, hogy $[\vartheta, \vartheta] = 3$. Úgyszintén $\vartheta(1) = 0$ és ϑ eltűnik $D - M$-en. Így 4.7. Lemma alapján kapjuk $[\vartheta^G, \vartheta^G] = 3$, és $(\vartheta^G)_M = \vartheta$. Mivel $\vartheta^G(1) = \vartheta(1) = 0$, következik, hogy írhatjuk $\vartheta^G = 1_G + \chi - \psi$, ahol $\chi, \psi \in Irr(G)$. Számolás D-ben adja $4 = \vartheta(\tau) = \vartheta^G(\tau)$, és mi kapjuk

$$0 = 1 + \chi(1) - \psi(1), \quad 4 = 1 + \chi(\tau) - \psi(\tau). \tag{1}$$

Jelölje K az (egyértelmű) konjugált osztályát az involúcióknak G-ben, és definiálja a ϕ osztályfüggvényt

$$\phi(g) = |\{(x, y) | x, y \in K, xy = g\}|.$$

Ha $xy = g$ x és y involúciókra, akkor $g^x = g^{-1}$ és fordítva, ha $x \in K$, $x \neq g$ és $g^x = g^{-1}$, akkor $y = xg$ egy involúció. Következik, hogy $\phi(g) = |\{x \in K | x \neq g, g^x = g^{-1}\}|$. Ha $1 \neq\in M$ és $g^x = g^{-1}$, akkor $\tau^x = \tau$ és $x \in D$. Arra jutunk, hogy $\phi(g) = 4$ $1 \neq g \in M$-re.

Hasonló gondolatmenettel, mint a 4.9. Tétel bizonyításánál és használva a [1.; 3.9. Problémát], kapjuk

$$\phi = \frac{|K|^2}{|G|} \sum_{\xi \in Irr(G)} \frac{\xi(\tau)^2}{\xi(1)} \xi.$$

Mivel $|K| = |G|/8$, ez adja

$$[\vartheta^G, \phi] = \frac{|G|}{2^6} \left[1 + \frac{\chi(\tau)^2}{\chi(1)} - \frac{\psi(\tau^2)}{\psi(1)} \right].$$

Úgyszintén $[\vartheta^G, \phi] = [(1_M - \gamma), \phi_M]$. Mivel konstans 4 az értéke ϕ-nek $M - \{1\}$-en, ez adja $[\vartheta^G, \phi] = (1+i) + (2) + (1-i) = 4$. Arra jutottunk, hogy

$$2^8 = |G|\left[1 + \frac{\chi(\tau)^2}{\chi(1)} - \frac{\psi(\tau^2)}{\psi(1)}\right]. \tag{2}$$

Írjuk $a = \chi(1)$ és $b = \chi(\tau)$, úgy hogy $\psi(1) = a+1$ és $\psi(\tau) = b-3$ (1.) egyenlet miatt.

A második ortogonális reláció miatt kapjuk

$$8 = |\mathrm{C}(\tau)| \geq 1 + \chi(\tau)^2 + \psi(\tau)^2 = 1 + b^2 + (b-3)^2.$$

Mivel $b \in \mathbb{Z}$, kapjuk, hogy $b = 1$ vagy 2.

Tegyük fel $b = 1$. A (2) egyenlet adja $2^8 = |G|[1 + (1/a) - (4/(a+1))]$ és

$$|G| = 2^8 a(a+1)/(a-1)^2.$$

Most $2|a(a+1)$, de $2^4 \nmid |G|$ és oda jutunk, hogy $2^3|(a-1)$. Ezért $2^2 \nmid a(a+1)$, és mivel $2^3|\ |G|$, kapjuk, $2^4 \nmid (a-1)$. $a-1$-nek semilyen prím osztója sem oszthatja $2^8 a(a+1)$-t, és arra következtethetünk, hogy $a-1$ egy hatványa 2-nek, és így $a = 9$. Ez adja $|G| = 2^2 x 9 x 10 = 360$.

Most tegyük fel $b = 2$. A (2) egyenlet adja $2^8 = |G|[1 + (4/a) - (1/(a+1))]$, és

$$|G| = 2^8 a(a+1)/(a+2)^2.$$

Pontosan az előzőek szerint csinálva kapjuk, hogy $a+2 = 8$ és $|G| = 2^2 x 6 x 7 = 168$. A bizonyításnak vége. □

Megemlítjük, hogy GL(3,2) $\cong$ PSL(2,7) az egyértelmű G csoport 168 renddel $G = G'$-vel, és $A_6 \cong$ PSL(2,9) az egyetlen egyértelmű 360 renddel.

3.3. Koherencia, és kivételes karakterek

Most azzal a problémával fogunk foglalkozni, hogy hogyan szerezhető információ egy csoport irreducibilis karaktereiről egy részcsoportról való információk segítségével. Legyen $S \subseteq Irr(N)$. Most bevezetjük a $\mathbb{Z}[S]$ jelölést az S $\mathbb{Z}-$lineáris kombinációjainak a halmazára. (Így $\mathbb{Z}[\mathrm{Irr}(N)]$ az N generalizált karaktereinek a halmaza.)

Tegyük fel $N \subseteq G$, és hogy találtunk egy $* : \mathbb{Z}[S] \to \mathbb{Z}[Irr(G)]$ leképezést, amelyre * $\mathbb{Z}-$lineáris és $[\phi^*, \theta^*] = [\phi, \theta]$ minden $\phi, \theta \in \mathbb{Z}[S]$-re. (Az ilyen leképezést *lineáris izometriának* hívják.) Ebben az esetben $[\chi^*, \chi^*] = 1$ $\chi \in S$-re és így $\pm\chi^* \in Irr(G)$. Írjunk $\epsilon(\chi) = \pm 1$-et, és ekkor $\epsilon(\chi)\chi^* \in Irr(G)$. Az $\epsilon(\chi)\chi^*$ karaktereket *kivételes karaktereknek* hívják, melyek S-hez és *-hoz vannak asszociálva. Egy-egy megfeleltetésben vannak ezek S-sel.

Hogyan készíthető egy ilyen * leképezés? A $* : \mathbb{Z}[S] \to \mathbb{Z}[Irr(G)]$ lineáris leképezésre egy könnyű példa a $\vartheta \to \vartheta^G$ indukció leképezés. Azonban ez a leképezés ritkán izometria $\mathbb{Z}[S]$-en. A 4.7. Lemma segítségével láthatjuk, hogy vannak helyzetek, amikor az indukció egy izometria $\mathbb{Z}[S]^\circ = \{\vartheta \in \mathbb{Z}[S] | \vartheta(1) = 0\}$-án. Ez történik, például, ha $N = N(X)$, ahol X T.I. halmaz, és $S = \{\chi \in Irr(N) | \chi$ *eltűnik* N*–*X*-en*$\}$. A probléma ezek után az, hogy miképp terjesztünk ki egy lineáris izometriát $\mathbb{Z}[S]^\circ$-ról a teljes $\mathbb{Z}[S]$-re.

3.12. Definició. Legyen $N \subseteq G$ és $S \subseteq Irr(N)$, $|S| \geq 2$. Tegyük fel $\tau : \mathbb{Z}[S]^\circ \to \mathbb{Z}[Irr(G)]^\circ$ egy lineáris izometria. Azt mondjuk, hogy (S, τ) *koherens*, ha τ kiterjeszthető egy * lineáris izometriára, mely $\mathbb{Z}[S]$-en van definiálva.

Ha τ az indukálás leképezés és (S, τ) koherens, akkor egyszerűen azt mondjuk, hogy S koherens. Hangsúlyoznunk kell azt, hogy még ebben az esetben is a * leképezés rendszerint nem indukálás. A fő példa a koherenciára amikor N egy Frobenius komplemens G-ben. Ebben az esetben $Irr(N)$ koherens, és ennek a bizonyítása lényegében a Frobenius-tétel bizonyítása.

Ha (S, τ) koherens, a * leképezés sincs egyértelműen meghatározva mindig. Azonban az $\epsilon(\chi)\chi^*$ kivételes karakterek halmaza (S, τ) által egyértelműen meg van határozva.

3.13. Lemma. *Legyen* (S, τ) *koherens és legyen * egy olyan izometria, mely kiterjeszti* τ*-t. Akkor létezik* $\epsilon = \pm 1$ *olyan, hogy* $\epsilon\chi^* \in Irr(G)$ *minden* $\chi \in S$*-re. Az* $f : S \to Irr(G)$*függvény, amit* $f(\chi) = \epsilon\chi^*$ *definiál egy-egyértelmű.f képe* $\{\Psi \in Irr(G) | [\vartheta^\tau, \Psi] \neq 0$ *valamely* $\vartheta \in \mathbb{Z}[S]^\circ - ra\}$.

Bizonyítás. $\chi \in S$-re $[\chi^*, \chi^*] = 1$, és választhatjuk $\epsilon(\chi) = \pm 1$-et úgy, hogy $\epsilon(\chi)\chi^* \in Irr(G)$. Állítjuk, hogy $\epsilon(\chi) = \epsilon(\xi)$ minden $\xi \in S$-re. Most $\vartheta =$

$\chi(1)\xi - \xi(1)\chi \in \mathbb{Z}[S]^\circ$, és így

$$\chi(1)\xi^* - \xi(1)\chi^* = \vartheta^\tau \in \mathbb{Z}[Irr(G)]^\circ.$$

q-ben kiértékelve $0 = \chi(1)\xi^*(1) - \xi(1)\chi^*(1)$ és így $\xi^*(1)$ és $\chi^*(1)$-nek azonos az előjele. Vagyis $\epsilon(\chi) = \epsilon(\xi)$, ahogy állítottuk.

Az előzőek azt is mutatják, hog $[\vartheta^\tau, f(\chi)] \neq 0$ egy $\vartheta \in \mathbb{Z}[S]^\circ - ra$. Fordítva, tegyük fel $\Psi \in Irr(G)$ és $[\vartheta^\tau, \Psi] \neq 0$, ahol $\vartheta \in \mathbb{Z}[S]^\circ$. Akkor $\vartheta = \sum_{\chi \in S} a_\chi \chi$ és $\vartheta^\tau = \sum a_\chi \chi^*$. Ezért $0 \neq [\chi^*, \Psi] = \epsilon[f(\chi), \Psi]$ valamely $\chi \in S$, így $f(\chi) = \Psi$.

f egy-egy értelműségéhez elég megmutatni, hogy *-nak a kernelje triviális. Ez így van, mert ha $\vartheta^* = 0$, akkor $0 = [\vartheta^*, \vartheta^*] = [\vartheta, \vartheta]$, ezért $\vartheta = 0$. $\square$

Tegyük fel $N \subseteq G, S \subseteq Irr(N), |S| > 1$ és $\tau : \mathbb{Z}[S]^\circ \to \mathbb{Z}[Irr(G)]^\circ$ egy lineáris izometria. Olyan feltételeket keresünk, mely biztosítja, hogy S-en koherens (S, τ).

3.14. Tétel. *(Feit) Legyen $N \subseteq G, S \subseteq Irr(N)$ és legyen $\tau : \mathbb{Z}[S]^\circ \to \mathbb{Z}[Irr(G)]^\circ$ egy lineáris izometria. Tegyük fel, hogy $S = S_0 \cup \{\chi\}$, ahol (S_0, τ) koherens. Tételezzük fel, hogy létezik egy olyan $\Psi \in S_0$, melyre $\Psi(1)|\chi(1)$ és*

$$\chi(1) < \frac{1}{2\Psi(1)} \sum_{\xi \in S_0} \xi(1)^2.$$

Ekkor (S, τ) koherens.

Bizonyítás. Legyen $* : \mathbb{Z}[S_0] \to \mathbb{Z}[Irr(G)]$ egy lineáris izometria, amely kiterjeszti τ-t $\mathbb{Z}[S]^\circ$-án. Definiálnunk kell χ^*-ot úgy, hogy a * leképezés lineárisan kiterjeszthető lehessen az egész $\mathbb{Z}[S]$-re.

Legyen $\chi(1) = d\Psi(1)$ úgy, hogy $\chi - d\Psi \in \mathbb{Z}[S]^\circ$. Definiáljuk Δ-t

$$(\chi - d\Psi)^\tau = \Delta - d\Psi^* + \sum_{\xi \in S_0} b_\xi \xi^*, \tag{1}$$

ahol $[\Delta, \xi^*] = 0$ minden $\xi \in S_0$. Természetesen Δ egy (lehet 0) generalizált karaktere G-nek és minden $b_\xi \in \mathbb{Z}$ Megmutatjuk, hogy $[\Delta, \Delta] = 1$ és minden $b_\xi = 0$.

Most

$$1 + d^2 = [(\chi - d^2 = [(\chi - d\Psi), (\chi - d\Psi)] = [(\chi - d\Psi)^\tau, (\chi - d\Psi)^\tau],$$

és így

$$1 + d^2 = [\Delta, \Delta] + \sum_{\xi \neq \Psi} b_\xi^2 + (b_\Psi - d)^2.$$

Ezért

$$[\Delta, \Delta] + \sum_{\xi} b_{\xi}^2 = 1 + 2db_{\Psi}. \tag{2}$$

Továbbá, mivel τ $\mathbb{Z}[Irr(G)]^{\circ}$-re képez azt kapjuk, hogy $(\chi - d\Psi)^{\tau}(1) = 0$, és így

$$0 = \sum_{\xi} b_{\xi}\xi^*(1) - d\Psi^*(1) + \Delta(1). \tag{3}$$

$\xi \in S_0$-ra legyen $\Xi = \Psi(1)\xi - \xi(1)\Psi \in \mathbb{Z}[S]^{\circ}$. Ekkor

$$[\Xi^{\tau}, (\chi - d\Psi)^{\tau}] = [\Xi, (\chi - d\Psi)] = d\xi(1).$$

Ezért

$$d\xi(1) = [\Xi^t au, \sum b_{\eta}\eta^*] - d[\Xi^{\tau}, \Psi^*] + [\Xi^{\tau}, \Delta] = \Psi(1)b_{\xi} - \xi(1)b_{\Psi} + d\xi(1) + 0$$

,mivel $\Xi^{\tau} = \Psi(1)\xi^* - \xi(1)\Psi^*$. Ahhoz jutottunk, hogy

$$\Psi(1)b_{\xi} = \xi(1)b_{\Psi}.$$

Most definiáljuk $\mu = b_{\Psi}/\Psi(1)$. Ekkor kapjuk, hogy

$$b_{\xi} = \mu\xi(1). \tag{4}$$

minden $\xi \in S_0$.

Szintén, mivel $\Xi^{\tau}(q) = 0$ kapjuk

$$\Psi(1)\xi^*(1) = \xi(1)\Psi^*(1)$$

és írhatjuk

$$\xi^*(1) = \alpha\xi(1) \tag{5}$$

Minden $\xi \in S_0$ és fix $\alpha \neq 0$-ra. Feltevés szerint

$$2d\Psi(1)^2 < \sum_{\xi} \xi(1)^2 \tag{6}$$

Tegyük fel $\mu \neq 0$. Ekkor (4.) miatt

$$2db_{\Psi}^2 = \mu^2(2d\Psi(1)^2) < \mu^2 \sum \xi(1)^2 = \sum b_{\xi}^2$$

és ezért

$$1 + 2db_{\Psi}^2 \leq \sum b_{\xi}^2.$$

Most (2.) adja

$$[\Delta, \Delta] + 2db_\Psi^2 \leq 2db_\Psi.$$

Mivel b_Ψ egy $\neq 0$ egész (mivel $\mu \neq 0$) és $[\Delta, \Delta] \geq 0$, kapjuk $\Delta = 0$ és $b_\Psi = 1$. Így $\Delta(1) = 0$ és (3.), (5.) és (4.) adják

$$d\Psi(1) = \sum b_\xi \xi(1) = \mu \sum \xi(1)^2.$$

Mivel $b_\Psi = 1, \mu = 1/\Psi(1)$, és így

$$d\Psi(1)^2 = \sum \xi(1)^2.$$

Ez ellentmond (6.)-nak és bizonyítja $\mu = 0$-át. Mindebből következik, hogy minden $b_\xi = 0$ és (1.) adja

$$(\chi - d\Psi)^\tau = \Delta - d\Psi^*.$$

(2.)-ből $[\Delta, \Delta] = 1$ és kiterjesztjük *-ot $\mathbb{Z}[S]$-re lineárisan $\chi^* = \Delta$ definiálásával.

Most megmutatjuk, hogy * egy lineáris izometria $\mathbb{Z}[S]$-en és hogy ez kiterjeszti τ-t. Ha $\vartheta \in \mathbb{Z}[S]^\circ$, és $[\vartheta, \chi] = a$, írhatjuk

$$\vartheta = a(\chi - d\Psi) + \phi,$$

ahol $\phi \in \mathbb{Z}[S_0]^\circ$. Ekkor

$$\vartheta^* = a(\chi - d\Psi)^* + \phi^* = a(\chi - d\Psi)^\tau + \phi^\tau = \vartheta^\tau$$

, így * kiterjeszi τ-t. Annak megmutatásához, hogy * egy izometria elég megmutatni, hogy $[\mu^*, \nu^*] = [\mu, \nu]$ minden $\mu, \nu \in S$-re. Ha $\mu, \nu \in S_0$, akkor már tudjuk. Mivel $[\Delta, \xi^*] = 0$ minden $\xi \in S_0$-ra és $[\Delta, \Delta] = 1$, kijön a végeredmény. □

Következményként adódik, hogy ahhoz, hogy (S, τ) koherens legyen S-en elegendő feltétel az, hogy minden $\chi \in S$ -nek egyenlő legyen a foka.

3.15. Következmény. *Legyen $N \subseteq G$ és $S \subseteq Irr(N)$, ahol $|S| \geq 2$. Tegyük fel $* : \mathbb{Z}[S]^\circ \to \mathbb{Z}[Irr(G)]$ egy lineáris izometria. Tegyük fel, hogy minden $\chi \in S$-nek egyenlő a foka. Akkor (S, τ) koherens.*

Bizonyítás. Indukciót használunk $n = |S|$-en. Legyen $\chi_1, \chi_2 \in S$ különböző. Akkor

$$[(\chi_1 - \chi_2)^\tau, (\chi_1 - \chi_2)^\tau] = [(\chi_1 - \chi_2), (\chi_1 - \chi_2) = 2$$

és mivel $(\chi_1 - \chi_2)^\tau(1) = 0$, írhatjuk $(\chi_1 - \chi 2)^t au = \alpha - \beta$, ahol $\alpha, \beta \in Irr(G)$ különbözők. Ha $n = 2$, definiáljuk $\chi_1^* = \alpha$ és $\chi_2^* = \beta$ és kiterjesztjük lineárisan $\mathbb{Z}[S]$-re. Ebben az esetben $\mathbb{Z}[S]^\circ = \{a(\chi_1 - \chi_2) | a \in \mathbb{Z}\}$ és így * megyezik τ-val $\mathbb{Z}[S]^\circ$-on.

Ha $n = 3$, legyen $\chi_3 \in S - \{\chi_1, \chi_2\}$. Mint fennt, $(\chi_1 - \chi_3)^\tau = \mu - \nu$ ahol $\mu, \nu \in Irr(G)$ és $\mu \neq \nu$. Úgyszintén

$$[(\chi_1 - \chi_2)^\tau, (\chi_1 - \chi_3)^\tau] = 1$$

és bebizonyosodik, hogy vagy $\mu = \alpha$ vagy $\nu = \beta$, de egyszerre mindkettő nem igaz. Ha $\mu = \alpha$, definiáljuk $\chi_1^* = \alpha, \chi_2^* = \beta$, és $\chi_3^* = \nu$.Ha $\nu = \beta$, definiáljuk $\chi_1^* = -\beta, \chi_2^* - \alpha$, és $\chi_3^* = -\mu$. Bármelyik esetben, kiterjesztjük *-ot lineárisan $\mathbb{Z}[S]$-re és ellenőrizzük, hogy * megegyezik τ-val $\chi_1 - \chi_2$-ön és $\chi_1 - \chi_3$-on és hogy * egy izometria. Mivel

$$\mathbb{Z}[S]^\circ = \{a(\chi_1 - \chi_2) + b(\chi_1 - \chi_3) | a, b \in \mathbb{Z}\},$$

és a végeredmény következik ebben az esetben.

Tegyük fel $n > 3$. Írjuk, hogy $S = S_0 \cup \{\chi\}$ ahol $3 \leq |S_0| = n - 1$. Az indukciós feltevés miatt (S_0, τ) koherens. Válasszuk $\psi \in S_0$ és vegyük észre, hogy $\psi(1)|\chi(1)$ mivel $\psi(1) = \chi(1)$. Most

$$\frac{1}{2\psi(1)} \sum\nolimits_{\xi \in S_0} \xi(1)^2 = \frac{n-q}{2} \chi(1) > \chi(1)$$

és így (S, τ) koherens 4.14. Tétel miatt. $\square$

4. T.I.F.N. halmazok

4.1. T.I.F.N. halmazok

A legtöbb alkalmazása a koherenciának a „tamely beágyazott” részcsoportok eset, ahogy Feit és Thompson definiálták azt a páratlan rendű csoportok feloldhatóságáról szóló munkájukban. A szakdolgozatban egy korlátozottabb definició szerepel, ami szintén fontos az alkalmazásokban.

4.1. Definició. Legyen $K \subseteq G$. Tegyük fel

(a) K T.I. halmaz G-ben;

(b) $K < \mathrm{N_G}(K)$;

(c) $\mathrm{C_G}(k) \subseteq K$ minden $1 \neq k \in K$-ra.

Ekkor K egy *T.I.F.N.* részcsoportja G-nek.

Az „F.N.” az előző definicióban „Frobenius normalizátort” jelent. Vegyük észre, hogy ha $N = \mathrm{N_G}(K)$, ahol K egy T.I.F.N. G-ben, akkor N egy Frobenius csoport és K a Frobenius mag. Az [1.; 6.34. Tétel] szerint, az irreducibilis karakterei N-nek két típusúak, azok, melyeknél a mag tartalmazza K-t és azok, melyek egy nemprincipális $\phi \in Irr(K)$-ból vannak indukálva. Ha $S = \{\chi \in Irr(N) | K \nsubseteq ker\chi\}$, akkor amit be akarunk bizonyítani az az, hogy S koherens. Feit és Sibley eredményeiből a legtöbb esetben ez következik. Vegyük észre, hogyha $K \subseteq G$ kielégíti a 5.1. Definició (a) feltételét, akkor (c) ekvivalens $\mathrm{C_N}(k) \subseteq K$-val minden $1 \neq k \in K$-ra, ahol $N = \mathrm{N_G}(K)$.

Thompson egyik jelentős tétele az állítja, hogy a Frobenius mag szükségszerűen nilpotens. A T.I.F.N. részcsoportok nilpotenciálja a következőkben fel lesz tételezve.

Egy sokkal elemibb tény G-nek a K T.I.F.N. részcsoportjával kapcsolatban, hogy $(|G : K|, |K|) = 1$, vagyis a K egy Hall részcsoport. Ez így van, mert legyen $p \mid |K|$, legyen $P \in Syl_p(K)$ és tegyük fel $P \subseteq S \in Syl_p(G)$. Ekkor $\mathrm{Z}(S) \subseteq \mathrm{C}(P) \subseteq K$ a 5.1. Definició (c) része alapján. Most $\mathrm{Z}(S) \neq 1$ és így $S \subseteq \mathrm{C}(\mathrm{Z}(S)) \subseteq K$ ismét a 5.1. Definició (c) része miatt. Igy $p \nmid |G : K|$.

Néhány esetet említünk, ahol T.I.F.N. részcsoport fellép. Ha $P \in Syl_p(G), |P| = p$ és $P = \mathrm{C_G}(P) < \mathrm{N_G}(P)$, akkor P T.I.F.N. Például ez történik a p fokú permutációcsoportoknál, és a $\mathrm{PSL}(2, p)$ csoportnál.

Egy kétszeresen tranzitív permutációcsoport egy *Zassenhaus csoport*, ha néhány nem egységelem fixál két pontot, de egy sem fixál hármat. Legyen G egy Zassenhaus csoport egy Ω halmazon és legyen $\alpha, \beta \in \Omega$, miközben $\alpha \neq \beta$. Akkor G_α egy Frobenius csoport $G_{\alpha\beta}$ komplementummal. (A trivialitás elkerülése miatt feltételezzük, hogy $|\Omega| > 2$). Legyen K a Frobenius magja G_α-nak. A nem egységelemei K-nak pontosan azon elemei G-nek, melyek fixálják α-t és más pontot nem. Könnyen következik, hogy K T.I.F.N. G-ben és $G_\alpha = \mathrm{N_G}(K)$.

4.2. Lemma. *Leyen K T.I.F.N. G-ben, és legyen $N = \mathrm{N_G}(K)$ és $S = \{\chi \in Irr(N) | K \nsubseteq ker\chi\}$. Akkor az indukálás egy*

$$\mathbb{Z}[S]^\circ \to \mathbb{Z}[Irr(G)]^\circ$$

lineáris izometriát definiál, és ha $\vartheta \in \mathbb{Z}[S]^\circ$, akkor $(\vartheta^G)_N = \vartheta$.

Bizonyítás. Ha $\chi \in S$, akkor $\chi = \xi^N$ valamely $\xi \in Irr(K)$ a [1.] 6.34. Tétel szerint. Így χ eltűnik $N-K$-n. Ha $\phi, \vartheta \in \mathbb{Z}[S]^\circ$, akkor következik, hogy ϕ, ϑ eltűnik $N-K$-n és 4.7. Lemma szerint $[\phi^G, \vartheta^G] = [\phi, \vartheta]$ és az első állítást bebizonyítottuk.

Szintén $(\vartheta^G)_K = \vartheta_K$ a 4.7. Lemma alapján. Mivel ϑ eltűnik $N-K$-n, elég megmutatni, hogy ϑ^G eltűnik $N-K$-n, hogy bebizonyítsuk, hogy $(\vartheta^G)_N = \vartheta$. Azonban egyetlen eleme $N-K$-nak sem lehet G-konjugált K egy eleméhez, mivel ha $x \in N-K$ és $o(x) \mid |K|$, akkor $K < \langle K, x\rangle$ és $\langle K, x\rangle = K\langle x\rangle$ úgy, hogy $|\langle K, x\rangle : K|$ nem relatív prím $|K|$-hoz. Ez ellentmondásban van azzal, hogy $(|G : K|, |K|) = 1$. Most ϑ^G definiciójából és abból, hogy ϑ eltűnik $N-K$-n következik, hogy ϑ^G szintén eltűnik $N-K$-n, és a bizonyítás kész. □

4.3. Következmény. *(Brauer-Suzuki) Legyen K egy abel T.I.F.N. részcsoportja G-nek. Legyen $N = \mathrm{N_G}(K)$ és $e = |N : K|$. Legyen $S = \{\chi \in Irr(N) | K \nsubseteq ker\chi\}$. Ekkor vagy*

(a) $|S| = 1, |K| = 1 + e$ és K egy elemi abel p-csoport, vagy

(b) S koherens, és létezik egy egy-egyértelmű $f : S \to Irr(G)$ függvény és $\epsilon = \pm 1$ olyan, hogy $(\chi - \xi)^G = \epsilon(f(\chi) - f(\xi))$ minden $\chi, \xi \in S$-re.

Bizonyítás. K-nak a nem-principális irreduciblis karaktereinek minden orbitjának N hatásánál e mérete van. Így $\chi(1) = e$ minden $\chi \in S$-re és $|S| = (|K| - 1)/e$. Ha $|S| \geq 2$, akkor 4.15. Következmény miatt S koherens. Ebben az esetben (b) következik 4.13. Lemmából.

Ha $|S| = 1$, akkor $|K| - 1 = e$ és a nem-egységelemei K-nak mind konjugáltak N-ben. Következik, hogy mindnek úgyanaz a prím a rendje, és (a) kijön. $\square$

Néhány következményét tárgyaljuk most a koherenciának a T.I.F.N. esetben.

4.4. Lemma. *Legyen $K \subseteq G$ T.I.F.N. és legyen $N = \mathrm{N_G}(K)$. Tegyük fel $X \subseteq \{\chi \in Irr(N) | K \nsubseteq ker\chi\}$ és hogy X koherens. Legyen $*$ a jelölése egy $\mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[Irr(G)]$ izometriának, mely olyan, hogy $*$ kiterjesztése az indukálásnak $\mathbb{Z}[X]^\circ$-on. Legyen $\alpha = \sum_{\chi \in X} \chi(1)\chi$. Akkor*

(a) Ha $\psi \in Irr(G)$ és $\psi \notin \{\pm\chi^* | \chi \in X\}$, akkor $\psi_N = a\alpha + \vartheta$, ahol a racionális és $[\vartheta, \chi] = 0$ minden $\chi \in X$-re.

(b) $((\chi^*)_N - \chi)/\chi(1)$ független $\chi \in X$-től.

(c) $(\chi^*)_N - \chi = a\alpha + \vartheta$ $\chi \in X$-re, ahol a racionális és $[\vartheta, \xi] = 0$ minden $\xi \in X$-re.

Bizonyítás. (a) Legyen $\chi, \xi \in X$. Akkor

$$[\psi_N, \chi(1)\xi - \xi(1)\chi] = [\psi, (\chi(1)\xi - \xi(1)\chi)^G] = [\psi, \chi(1)\xi^* - \xi(1)\chi^*] = 0$$

Ezért $\chi(1)[\psi_N, \xi] = \xi(1)[\psi_N, \chi]$ és így $[\psi_N, \chi]/\chi(1) = a$ független $\chi \in X$-től. Ezért $\psi_N = a\alpha + \vartheta$, ahol $[\vartheta, \chi] = 0$ minden $\chi \in X$-re. Így (a) bizonyítva van.

(b) Legyen $\chi, \xi \in X$. Akkor $\Delta = \chi(1)\xi - \xi(1)\chi \in \mathbb{Z}[S]^\circ$ és ezért $(\Delta^G)_N = \Delta$ 5.2. Lemma által. Azonban $\Delta^G = \Delta^* = \chi(1)\xi^* - \xi(1)\chi^*$, és így

$$\chi(1)\xi - \xi(1)\chi = \chi(1)(\xi^*)_N - \xi(1)(\chi^*)_N$$

, és

$$\xi(1)((\chi^*)_N - \chi) = \chi(1)((\xi^*)_N - \xi).$$

Így (b) következik.

(c) Legyen $\xi, \eta \in X$ és írjuk $\Delta = \xi(1)\eta - \eta(1)\xi$. Akkor

$$[(\chi^*)_N, \Delta] = [\chi^*, \Delta^G] = [\chi^*, \Delta^*] = [\chi, \Delta]$$

végül $[(\xi^*)_N, \Delta] = 0$. Most következik, mint (a)-nál, hogy $(\chi^*)_N - \chi = a\alpha + \vartheta$, ahol $a = [(\chi^*)_N - \chi, \xi]/\xi(1)$ és $[\xi, \vartheta] = 0$ $\xi \in X$-re. $\square$

4.5. Tétel. *Legyen $K \subseteq G$ T.I.F.N., és legyen $N = \mathrm{N_G}(K)$. Tegyük fel $S = \{\chi \in Irr(N) | K \nsubseteq ker\chi\}$ koherens és legyen $E \subseteq Irr(G)$ a megfelelő kivételes* *karakterek halmaza. Legyen * egy $\mathbb{Z}[S] \to \mathbb{Z}[E]$ izometria, mely kiterjeszti az indukálást $\mathbb{Z}[S]^\circ$-on és legyen $\epsilon = \pm 1$, úgy hogy $\epsilon\chi^* \in E$ $\chi \in S$-re. Akkor*

(a) $E = \{\psi \in Irr(G) | \psi$ nem állandó $K - \{1\}-\text{en}\}$.

(b) Ha $\psi = \epsilon\chi^* \in E$, akkor $\psi_K - \epsilon\chi_K$ konstans $K - \{1\}-$en. Ez a konstans $m\chi(1)/|N : K|$ alakú egy $m \in \mathbb{Z}$-re, amelyik független $\chi \in S$ választásától.

(c) Ha $g \in G$ nem konjugált $K - \{1\}-$nek egy eleméhez sem, akkor $\psi(g)/\psi(1)$ független $\psi \in E$ választásától.

(d) Ha $\chi \in S$, akkor $\chi^*(1)/\chi(1)$ független χ választásától.

Bizonyítás. Alkalmazzuk az 5.4. Lemmát $X = S$-sel. Akkor $\alpha = \sigma_N - \sigma_{N/K}$, ahol σ_N és $\sigma_{N/K}$ reguláris karakterek. Vegyük észre, hogy α konstans $K - \{1\}-$en. Szintén, ha ϑ egy generalizált karaktere N-nek és $[\vartheta, \chi] = 0$, minden $\chi \in S$-re, akkor K benne van ϑ minden irreduciblis összetevőjének a kerneljében, így ϑ_K konstans.

Most ha $\psi \notin E$, akkor 5.4.(a) adja, hogy $\psi_N = a\alpha + \vartheta$ és ψ konstans $K - \{1\}-$en. Ha $\psi \in E$, akkor 5.4.(c) adja, hogy $\epsilon\psi_N = \chi + a\alpha + \vartheta$, ahol $\epsilon\psi = \chi^*$. Azonban $\chi \in S$ nem lehet konstans $K - \{1\}-$en, különben [1.; 3.8. Probléma] miatt minden nem-principális irreducibilis karaktere K-nak egy összetevője lenne χ_K-nak. Ez $|S| = 1$-et jelentene, amiről most nincs szó. Így ψ_N nem konstans $K - \{1\}-$en és (a) bizonyítva van.

(b) első része azonnal kijön 5.4.(c)-ből. Ahhoz, hogy a konstanst kiszámoljuk, válasszunk $\xi \in S$-et úgy, hogy $\xi(1) = |N : K|$, vagyis $\xi = \lambda^N$ valamely nem-principális lineáris $\lambda \in Irr(K)$-ra. Most $(\xi^*)_K - \xi_K$ egy generalizált karaktere K-nak konstans m értékel $K - \{1\}-$en. Következik, hogy $m \in \mathbb{Z}$. Ha $\chi \in S$ tetszőleges,5.4.(b) adja, hogy $m'/\chi(1) = m/\xi(1)$, ahol m' a konstans érték, amit $(\chi^*)_K - \chi_K$ vesz fel $K - \{1\}-$en. Mivel $\xi(1) = |N : K|$, kapjuk $m' = m\chi(1)/|N : K|$ és (b) következik.

Legyen $\chi, \xi \in S$, úgy hogy $\xi(1)\chi^* - \chi(1)\xi^* = (\xi(1)\chi - \chi(1)\xi)^G$, amelyik eltűnik azon $g \in G$ elemeken, melyek nem konjugáltak $K - \{1\}$ elemeihez. Így $\xi(1)\chi^*(g) - \chi(1)\xi^*(g) = 0$ és (c) következik.

Végül (d) adódik 5.4.(b)-ből. Vége a bizonyításnak. □

4.2. Feit és Sibley tételei

Megkezdjük munkálkodásunkat Feit és Sibley tételei felé.

4.6. Lemma. *Legyen N egy Frobenius csoport K Frobenius maggal. Tegyük fel $|N : K|$ páros. Akkor K Abel.*

Bizonyítás. Legyen $t \in N$ egy involúció. Akkor $t \notin K$ mivel $(|K|, |N : K|) = 1$ és így $x^t \neq x$ $x \in K - \{1\}$−re. Most képezzük le $K \to K$-ra $x \mapsto x^{-1}x^t$-val. Ez a függvény egy-egyértelmű, mivel ha $x^{-1}x^t = y^{-1}y^t$, akkor $yx^{-1} = (yx^{-1})^t$ és így $yx^{-1} = 1$. Ezért a leképezés szürjektív és minden $x \in K$ $u^{-1}u^t$ alakú. Így $x^t = (u^{-1}u^t)^t = (u^t)^{-1}u = x^{-1}$. Most mi kapjuk $(xy)^t = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = y^tx^t = (yx)^t$. Ezért $xy = yx$ $x, y \in K$-ra, és a végeredmény következik ebből. □

4.7. Lemma. *Legyen $P \in Syl_p(G)$, ahol $p \neq 2$ és tegyük fel P T.I.F.N. G-ben és nem abel. Legyen $N = \mathrm{N_G}(P)$ és legyen $1 < Z \subseteq \mathrm{Z}(P)$ és $Z \lhd N$. Legyen $X = \{\chi \in Irr(N) | Z \nsubseteq ker\chi\}$. Akkor X koherens.*

Bizonyítás. Legyen $e = |N : P|$. 5.6. Lemma miatt e páratlan és ezért $|N|$ páratlan. Mivel $Z > 1, X \neq \emptyset$. Legyen $\xi \in X$-nek a lehetséges minimális foka, és legyen $X_0 = \{\chi \in X | \chi(1) = \xi(1)\}$. Mivel $|N|$ páratlan, $\bar{\xi} \neq \xi$, és így $|X_0| \geq$ 2.4.15. Következmény miatt X_0 koherens. Most definiáljuk az X_i halmazokat $i > 0$-ra ezzel: $X_i = X_{i-1} \cup \{\chi_i\}$, ahol az$\chi_i$-k $X - X_0$-ből vannak választva úgy, hogy $\chi_i(1) \leq \chi_{i+1}(1)$. Ezért $X_0 \subseteq X_1 \subseteq ... \subseteq X_k = X$. Indukciót használunk i-n, hogy megmutassuk, hogy X_i koherens.

Ekkor a $\chi \in X$-k fokai mind ep^a alakúak, és így $\xi(1) | \chi(1)$ minden $\chi \in X$-re. 4.14. Tétel által következik, hogy azért, hogy megmutassuk, hogy X_i koherens, meg kell mutatni, hogy $i \geq 1$-re

$$2\xi(1)\chi_i(1) < \sum_{\chi \in X_{i-1}} \chi(1)^2.$$

Kapjuk

$$|N| = \sum_{\chi \in Irr(N)} \chi(1)^2 = |N : Z| + \sum_{\chi \in X} \chi(1)^2$$

és ezért $|P : Z|$ osztja $\sum_{\chi \in X} \chi(1)^2$-et. Így $e^2|P : Z|$ osztja $\sum_{\chi \in X} \chi(1)^2$-et. Ha $\chi \in X$, akkor $\chi = \vartheta^N$ egy $\vartheta \in Irr(P)$-re és $\vartheta(1)^2 \leq |P : Z|$ az [1.; 2.30. Következmény] miatt. Így $\chi(1)^2 = e^2\vartheta(1)^2$ osztja $e^2|P:Z|$-t, és ezért $\chi_i(1)^2$ osztja $\sum_{\chi\in X}\chi(1)^2$-et. Szintúgy $\chi_i(1)^2|\chi_j(1)^2$ $j \geq i$ és arra jutunk, hogy $\chi_i(1)^2$ osztja $\sum_{\chi\in X_{i-1}}\chi(1)^2$-t. Főként, mivel $2\xi(1) < p\xi(1) \leq \chi_i(1)$, kapjuk

$$2\xi(1)\chi_i(1) < \chi_i(1)^2 \leq \sum_{\chi\in X_{i-1}}\chi(1)^2$$

és az eredmény következik. □

4.8. Lemma. *Legyen $N \subseteq G$ és $S \subseteq Irr(N)$. Legyen $\alpha : \mathbb{Z}[S]^\circ \to \mathbb{Z}[Irr(G)]^\circ$ egy lineáris izometria és legyen $X, Y \subseteq S$, ahol $X \cap Y = \emptyset$ és (X,α) és (Y,α) koherens. Legyenek σ és τ izometriák $\mathbb{Z}[X]$-en és $\mathbb{Z}[Y]$-on, ahol σ és τ - értelem szerint - a koherenciának megfelelően értendők. Akkor*

(a) $[\chi^\sigma, \eta^\tau] = 0$ minden $\chi \in X$-re és $\eta \in Y$-ra.

(b) Tegyük fel $\chi_0 \in X$ és $\eta_0 \in Y$ és

$$(\chi_0(1)\eta_0 - \eta_0(1)\chi_0)^\alpha = \chi_0(1)\eta_0^\tau - \eta_0(1)\chi_0^\sigma.$$

Akkor $X \cup Y$ koherens.

Bizonyítás. $\mu, \nu \in S$-re írjuk $\Delta(\mu,\nu) = \mu(1)\nu - \nu(1)\mu \in \mathbb{Z}[S]^\circ$. Legyen $\delta, \epsilon = \pm 1$ úgy, hogy $\delta\chi^\sigma$ és $\epsilon\eta^\tau \in Irr(G)$ $\chi \in X$-re és $\eta \in Y$-ra. Ahhoz, hogy bebizonyítsuk (a)-t tegyük fel, hogy $[\chi^\sigma, \eta^\tau] \neq 0$. Akkor $\delta\chi^\sigma = \vartheta = \epsilon\eta^\tau$ valamely $\vartheta \in Irr(G)$-re. Vegyük $\chi_1 \in X - \{\chi\}$-t és $\eta_1 \in Y - \{\eta\}$-t és írjuk $\psi = \delta\chi_1^\sigma$ és $\xi = \epsilon\eta_1^\tau$. Ekkor $\psi \neq \vartheta \neq \xi$ és kapjuk

$$\begin{aligned}0 = [\Delta(\chi,\chi_1), \Delta(\eta,\eta_1)] = [\Delta(\chi,\chi_1)^\alpha, \Delta(\eta,\eta_1)^\alpha] = \\ \epsilon\delta[(\chi(1)\psi - \chi_1(1)\vartheta), (\eta(1)\xi - \eta_1(1)\vartheta)] = \\ \epsilon\delta(\chi_1(1)\eta_1(1) + \chi(1)\eta(1)[\psi,\xi]).\end{aligned}$$

Mivel $[\psi,\xi] \geq 0$ ez nem lehet, és (a) bizonyítva van.

Most rögzítsük $\chi_0 \in X$ és $\eta_0 \in Y$-t és feltételezzük azt, hogy $\Delta(\chi_0,\eta_0)^\alpha = \chi_0(1)\eta_0^\tau - \eta_0(1)\chi_0^\sigma$. Definiáljuk *-ot $X \cup Y$-on $\chi^* = \chi^\sigma$-val $\chi \in X$-re és $\eta^* = \eta^\tau$-val $\eta \in Y$-ra és terjesszük ki lineárisan *-ot $\mathbb{Q}[X \cup Y]$-ra. Következik (a)-ból és a tényből, hogy σ és τ izometriák, hogy * egy izometria és $* : \mathbb{Z}[X \cup Y] \to \mathbb{Z}[Irr(G)]$. Elegendő így megmutatni, hogy * egyenlő α lineáris kiterjesztésével $\mathbb{Q}[X \cup Y]^\circ$-n. Azonban * megegyezik α-val $\mathbb{Q}[X]^\circ$-n, $\mathbb{Q}[Y]^\circ$-n, és $\Delta(\chi_0,\eta_0)$-n. Dimenziószámolás mutatja, hogy ezek kiterjednek $\mathbb{Q}[X \cup Y]^\circ$-ra $\mathbb{Q}$ fölött, és a végeredmény adódik. □

4.9. Tétel. *(Sibley) Legyen $P \in Syl_p(G)$ T.I.F.N. G-ben $p \neq 2$-vel. Legyen $N = \mathrm{N_G}(P)$ és $S = \{\chi \in Irr(N) | P \nsubseteq ker\ \chi\}$. Legyen $e = |N : P|$. Akkor az alábbiak közül az egyik teljesül.*

(a) $|S| = 1$, P elemi ábel, és $|P| = e + 1$.

(b) S koherens.

Bizonyítás. Ha P Abel, akkor ez benne van az 5.3. Következményben. Tételezzük fel, hogy P nem Abel, így e páratlan 5.6. Lemma alapján, és ezért $|N|$ páratlan. Legyen $Z = P' \cap \mathrm{Z}(P) > 1$ és legyen $Y = \{\eta \in S | Z \nsubseteq ker\ \eta\}$. Legyen $X = \{\chi \in S | P' \subseteq ker\ \chi\}$. Akkor Y koherens 5.7. Lemma miatt és minden $\chi \in X$ kielégíti $\chi(1) = e$-t. Mivel $\chi \neq \bar{\chi}$-vel $\chi \in X$-re, kapjuk, hogy X koherens 4.15. Következmény miatt. Mivel $Z \subseteq P'$, kapjuk, hogy $X \cap Y = \emptyset$. A bizonyítás legtöbb része a továbbiakban arról szól, hogy megmutassa, hogy $X \cup Y$ koherens.

Legyen $* : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[Irr(G)]$ egy lineáris izometria, mely kiterjeszti az indukálást $\mathbb{Z}[X]^\circ$-on. Hasonlóan, legyen τ egy izometria $\mathbb{Z}[Y]$-on, mely kiterjeszti az indukálást. Mivel $X \cap Y = \emptyset$, 5.8. Lemma adja, hogy $[\chi^*, \eta^\tau] = 0$ $\chi \in X$-re és $\eta \in Y$-ra.

Legyen $\alpha = (1/d) \sum_{\eta \in Y} \eta(1)\eta$. Mivel $e | \eta(1)$ $\eta \in Y$-ra, α egy karaktere N-nek. $\chi \in X$-re, $\chi^* \neq \pm\eta^\tau$bármely $\eta \in Y$-ra és 5.4.(a) Lemma adja, hogy

$$(\chi^*)_N = \vartheta_\chi + a_\chi \alpha,$$

ahol ϑ_χ egy generalizált karaktere N-nek, melyre $[\vartheta_\chi, \eta] = 0$ $\eta \in Y$-ra és $a_\chi \in \mathbb{Q}$.

Mivel minden $\chi(1)$ egyenlő $\chi \in X$-re, 5.4.(b) Lemma adjat, hogy

$$(\chi^*)_N - \chi = \vartheta_\chi - \chi + a_\chi \alpha$$

független $\chi \in X$-től. Következik, hogy $\vartheta_\chi - \chi = \Delta$ és $a_\chi = a$ függetlenek $\chi \in X$-től és

$$(\chi^*)_N = \chi + \Delta + a\alpha. \tag{1}$$

A következő néhány paragrafus arról szól, hogy bebizonyítsuk, hogy $a \in \mathbb{Z}$.

Mivel Z-t a magja $\chi \in X$-nek és Δ minden irreducibilis összetevőjének tartalmazza, kapjuk $z \in Z$-re, hogy $\chi(z) = \chi(1)$ és $\Delta(z) = \Delta(1)$ és így az előző egyenlet azt adja, hogy

$$\chi^*(1) - \chi^*(z) = a(\alpha(1) - \alpha(z)).$$

Szintén kapjuk, hogy $\rho_N = \rho_{N/Z} + e\alpha$, ahol ρ_N és $\rho_{N/Z}$ reguláris karakterek. $z \in Z - \{1\}$-re így kapjuk

$$|N| = \rho_N(1) - \rho_N(z) = e(\alpha(1) - \alpha(z))$$

és ezért

$$\chi^*(1) - \chi^*(z) = a|N|/e = a|P|. \tag{2}$$

Mi most összehasonlítjuk $\chi^*(1)$-et és $\chi^*(z)$-t egy másik módon. Legyenek $X_0, X_1, ...$ G konjugáltosztályai, melyek úgy vannak megszámozva, hogy

(a) $X_0 = \{1\}$;

(b) $X_i \cap Z \neq \emptyset$ akkor és csak akkor, ha $i \leq r$;

(c) $X_i \cap P \neq \emptyset$ akkor és csak akkor, ha $i \leq s$.

Vegyük észre, hogy mivel P egy T.I. halmaz $N = \mathrm{N}(P)$-vel, kapjuk, hogy $X_i \cap P$ egy konjugáltosztálya N-nek $i \leq s$-re és $X_i \cap P \subseteq Z \lhd N$ $i \leq r$-re.

Írjuk, hogy $K_i \in \mathbb{C}[G]$ az osztály összegre, amelyik megfelel K_i-nek és $K_i K_j = \sum a_{ij\mu} K_\mu$, ahol $a_{ij\mu} \in \mathbb{Z}$. Rögzítsük most $i, j \leq r$-et. Legyen $\psi \in Irr(g)$ és legyen $\omega(K_\mu) = \psi(x)|K_\mu|/\psi(1)$ $x \in K_\mu$. Ld. [1., 3. Fejezet]. Legyen $R \subseteq \mathbb{C}$ az algebrai egészek gyűrűje, úgy hogy $\omega(K_\mu) \in R$. Legyen $\psi(1) = mp^t$, $p \nmid m$, és legyen $q = |P|/p^t$. Kapjuk

$$\omega(K_i)\omega(K_j) = \sum_\mu a_{ij\mu}\omega(K_\mu).$$

$\mu \geq s$-re állítjuk, hogy $\omega(K_\mu) \in qR$. A T.I.F.N. tulajdonságból és a tényből, hogy $K_\mu \cap P = \emptyset$ következik, hogy $|P|$ osztja $|K_\mu|$-t és így $m(\omega(K_\mu)/q) \in R$. Mivel szintén $q(\omega(K_\mu)/q) \in R$ és $(m, q) = 1$, következik, hogy $\omega(K_\mu)/q \in R$, ahogy állítottuk. Így

$$\omega(K_i)\omega(K_j) \equiv \sum_{\mu=0}^{s} a_{ij\mu}\omega(K_\mu) \ mod \ qR.$$

Most legyen $r < \mu \leq s$ és $x \in K_m u \cap P$. Legyen $C = \mathrm{C_P}(x)$ és legyen $\Omega = \{(u, v)|e \in K_i, v \in K_j, uv = x\}$. Akkor $a_{ij\mu} = |\Omega|$ és C hat Ω-n $(u, v)^c = (u^c, v^c)$-val. Ha $c \in C - \{1\}$ és $(u, v)^c = (u, v)$, akkor $u, v \in \mathrm{C_G}(c) \subseteq P$ és ezért $u \in K_i \cap P \subseteq Z$ és hasonlóan $v \in Z$. Azonban $uv = x \in K_\mu$ és $K_\mu \cap Z = \emptyset$. Ez az ellentmondás mutatja, hogy C minden pályájának Ω-n a mérete $|C|$, és így $|C|$ osztja $a_{ij\mu}$-t.

Kapjuk, hogy $\mathrm{C_G}(x) \subseteq P$ és így $\mathrm{C_G}(x) = C$ és $|P : C|$ osztja $|K_\mu|$-t. Most következik, hogy $m(a_{ij\mu}\omega(K_\mu)/q \in R$ és mivel $q(a_{ij\mu}\omega(K_\mu)/q) \in R$, kapjuk, hogy

$a_{ij\mu}\omega(K_\mu) \in qR$ és

$$\omega(K_i)\omega(K_j) \equiv \sum_{\mu=0}^{r} a_{ij\mu}\omega(K_\mu) \ mod \ qR.$$

Most tegyük fel, hogy $\psi \in Irr(G)$ olyan, hogy ψ konstans $Z - \{1\}$-en. Ekkor minden $\omega(K_\mu)$ egyenlő (egy ω-val, mondjuk), $1 \leq \mu \leq r$ és $\omega(K_0) = 1$. Szintúgy írjuk $a_{ij} = \sum_{\mu=1}^{r} a_{ij\mu}$, úgy hogy

$$\omega^2 \equiv a_{ij0} + a_{ij}\omega \ mod \ qR.$$

Mivel $|N|$ páratlan, a nem-egység elemei Z-nek nem konjugáltak N-ben (és így G-ben sem) az inverzeikkel. Így $a_{110} = 0$ Tételezzük fel, hogy K_2 az osztálya K_1 inverzeinek, úgy hogy $a_{120} = |K_1| = |G|/|P|$. Így kapjuk

$$a_{11}\omega \equiv \omega^2 \equiv |G|/|P| + a_{12}\omega \ mod \ qR. \tag{3}$$

Abban a speciális esetben, amikor $\psi = 1_G$, kapjuk, $\omega = |G|/|P|$ és $q = |P|$ úgy hogy

$$a_{11}|G|/|P| \equiv |G|/|P| + a_{12}|G|/|P| \ mod \ |P|$$

és $a_{11} \equiv 1 + a_{12} \ mod \ |P|$. Most (3) adja

$$(1 + a_{12})\omega \equiv |G|/|P| + a_{12}\omega \ mod \ qR$$

és

$$\omega \equiv |G|/|P| \ mod \ qR. \tag{4}$$

Alkalmazzuk mindezt a $\psi = \epsilon\chi^* \in Irr(g)$ karakterre, ahol $\epsilon = \pm 1$ és $\chi \in X$. Vegyük észre, hogy ψ konstans $Z - \{1\}$-en (2) alapján és így most (4) megy.

Most $z \in Z - \{1\}$-re

$$\chi^*(z)|G : P|/\chi^*(1) = \omega \equiv |G : P| \ mod \ qR.$$

Mivel $|P|$ osztja $q\chi^*(1)$-t, ez adja

$$\chi^*(z)|G|/|P| \equiv \chi^*(1)|G|/|P| \ mod \ |P|R.$$

(2) alapján

$$|G|/|P||P|a = |G|/|P|(\chi^*(1) - \chi^*(z)) \in |P|R$$

és így $|G:P|a \in R$. Mivel szintén $|P|a = \chi^*(1) - \chi^*(z) \in R$ és $(|G:P|, |P|) = 1$, kapjuk $a \in R \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$, ahogy szerettük volna.

Most legyen $\chi, \chi_1 \in X$ és $\eta \in Y$. Vegyük észre, hogy $\chi(1) = e$ osztja $\eta(1)$-et és írhatjuk $c = \eta(1)/e$. Legyen $\phi = c\chi - \eta \in \mathbb{Z}[S]^\circ$. Kapjuk

$$[\phi^G, \chi_1^*] = [\phi, (\chi_1^*)_N] = [\phi, \chi_1 + \Delta + a\alpha].$$

Mivel $[\chi, \alpha] = 0 = [\eta, \chi_1 + \Delta]$, ez adja

$$[\phi^G, \chi_1^*] = c[\chi, \chi_1 + \Delta] - a[\eta, \alpha].$$

Azonban, $[\eta, \alpha] = c$ α definiciója miatt, és mivel $a \in \mathbb{Z}$, kapjuk, hogy $c | [\phi^G, \chi_1^*]$. Ez a számolás azt is mutatja, hogy

$$[\phi^G, \chi^*] = c + [\phi^G, \chi_1^*]$$

$\chi_1 \neq \chi$-re. Ez adja

$$\phi^G = c(1+b)\chi^* + cb \sum_{\xi \in X; \xi \neq \chi} \xi^* - \Gamma,$$

ahol $b \in \mathbb{Z}$ és $[\Gamma, \xi^*] = 0$ minden $\xi \in X$-re.

Szintén kapjuk

$$[\phi^G, \phi^G] = [\phi, \phi] = 1 + c^2$$

és így két lehetőség van:

(i) $b = 0$ és $[\Gamma, \Gamma] = 1$; vagy

(ii) $b = -1, |X| = 2$ és $[\Gamma, \Gamma] = 1$

A (ii) esetben *-ot helyettesíthetjük **-gal, ahol $\chi_1^{**} = -\chi_2^*$ és $\chi_2^{**} = -\chi_1^*$ $X = \{\chi_1, \chi_2\}$-re. Az eredménye ennek a cserének az az, hogy az (i) helyzetbe rak minket. Így feltehetjük, hogy $(c\chi - \eta)^G = c\chi^* - \Gamma$.

Most legyen $\eta_1 \in Y - \{\eta\}$, úgy hogy

$$\eta_1(1) = [\phi, \eta(1)\eta_1 - \eta_1(1)\eta] = [\phi^G, \eta(1)\eta_1^\tau - \eta_1(1)\eta^\tau] = [\Gamma, \eta_1(1)\eta^\tau - \eta(1)\eta_1^\tau].$$

Így ismét két lehetőségünk van:

(i) $\Gamma = \eta^\tau$; vagy

(ii) $\Gamma = -\eta_1^\tau$ és $\eta(1) = \eta_1(1)$.

Ha $\Gamma \neq \eta^\tau$, akkor $\eta_1^\tau = -\Gamma$ minden $\eta_1 \in Y - \{\eta\}$-ra, és így $|Y| = 2$ és $Y = \{\eta, \eta_1\}$ $\eta(1) = \eta_1(1)$-gyel. Ebben az esetben újradefiniálhatjuk τ-t és így feltételezhetjük, hogy (i) van. Így

$$(c\chi - \eta)^G = c\chi^* - \eta^\tau$$

és így $X \cup Y$ koherens 5.8.(b) Lemma miatt.

A bizonyítás befejezéséhez megfigyeljük, hogy $\sum_{\eta \in Y} \eta(1)^2 = |N| - |N : Z|$ és ezért osztható $|P : Z|$-vel és emiatt $e^2|P : Z|$-vel. Legyen $\psi \in S - (X \cup Y)$. Akkor, mint a 5.7. Lemmában azt kapjuk, hogy $\psi = \vartheta^N$, ahol $\vartheta \in Irr(P)$ és $\vartheta(1)^2 \leq |P : Z|$. Emiatt

$$\psi(1)^2 = e^2\vartheta(1)^2 \leq e^2|P : Z| \leq \sum_{\xi \in Y} \xi(1)^2.$$

Legyen $\chi \in X$ úgy hogy $\chi(1) = e$ és $\psi(1) \geq p\chi(1) > 2\chi(1)$, mivel $\psi \neq X$ és így $\vartheta(1) \geq p$. Ezért

$$2\chi(1)\psi(1) < \psi(1)^2 \leq \sum_{\xi \in X \cup Y} \xi(1)^2.$$

Mivel $X \cup Y$ koherens és $\chi(1)|\psi(1)$ minden $\psi \in S$-re, ismételt alkalmazása a 4.14. Tételnek adja, hogy S koherens és a bizonyítás teljes. $\square$

4.10. Tétel. *(Feit-Sibley) Legyen $K \subseteq G$ T.I.F.N. $N = \mathrm{N_G}(K)$-val, $e = |N : K|$ és $S = \{\chi \in Irr(N) | K \nsubseteq ker\ \chi\}$. Ekkor az alábbiak közül az egyik teljesül.*

(a) $|S| = 1$, $|K| = e + 1$ és K egy elemi Abel p-csoport.

(b) $K \in Syl_2(G)$ és $|K : K'| < 4e^2$.

(c) S koherens.

Bizonyítás. Ha K Abel, vagy (a) vagy (c) teljesül 5.3. Következmény alapján. Tételezzük fel, hogy K nem Abel és e páratlan. Ha $|K.K'| = E + 1$, akkor K/K' egy elemi Abel p-csoport és így K egy p-csoport. Mivel $e + 1$ páros következik, hogy $p = 2$ és (b) is. Ezért tegyük fel, hogy $|\{\chi \in S | K' \subseteq ker\chi\}| \geq 2$. Ez a halmaz koherens 4.15. Következmény szerint. Legyen $L \triangleleft N$, ahol $L \subseteq K'$ minimális olyan, hogy $X = \{\chi \in S | L \subseteq ker\chi\}$ koherens és tegyük fel, hogy S nem koherens úgy hogy $L > 1$.

Legyen $M \triangleleft N$ olyan, hogy L/M egy főfaktora N-nek. Mivel

$$\{\chi \in S | M \subseteq ker\chi\}$$

nem koherens, ismételt alkalmazása a 4.14. Tételnek adja, hogy $\psi \in Irr(N)$ olyan, hogy

$$2e\psi(1) \geq \sum_{\chi \in X} \chi(1)^2 = |N : L| - |N : K| = e(|K : L| - 1)$$

és $M \subseteq ker\psi$. Legyen $Z/M = \mathrm{Z}(K/M)$. Akkor $Z \cap L > M$ és így $L \subseteq Z$. Szintúgy $\psi = \vartheta^N$ valamely $\vartheta \in Irr(K)$ és $\vartheta(1)^2 \leq |K : Z|$,úgy hogy $\psi(1)^2 \leq e^2|K : Z|$. Így

$$4e^4|K : Z| \geq 4^2\psi(1)^2 \geq e^2(|K : L| - 1)^2.$$

Most írjuk, hogy $a = |K : L|$ és $b = |Z : L|$. Kapjuk, hogy $b|K : Z| = |K : L| = a$ és

$$4e^2a = 4e^2b|K : Z| \geq b(|K : L| - 1)^2 = b(a - 1)^2.$$

Ha $4e^2 \leq b(a-2)$, ez azt adná, hogy $ba(a-2) \geq b(a-1)^2$, ami nem áll fenn. Ezért $b(a - 2) < 4e^2$.

Ha $Z = L$, akkor $\mathrm{Z}(K/M) = L/M$ egy p-csoport valamilyen prímre és ezért K/M egy p-csoport. Mivel $M \subseteq K'$, következik, hogy K egy p-csoport. 5.15. Tétel miatt $p = 2$-t kapunk. $a - 2 < 4e^2$ is igaz, úgy hogy

$$|K : K'| \leq |K : L| = a \leq 4e^2 + 1.$$

Mivel $|K : K'|$ 2 hatvány és $e > 1$ páratlan, kapjuk $|K : K'| < 4e^2$ és (b) teljesül.

Ha $Z > L$, akkor $e|(|Z : L| - 1)$-nak kell lennie, és $b \geq e + 1$. K/M nem-abeli is igaz, és így $Z < K$ és $e|(|K : Z| - 1)$. Ezért

$$a \geq (e + 1)b \geq (e + 1)^2 \geq e^2 + 2.$$

Ezért $4e^2 > b(a-2) \geq (e+1)e^2 \geq 4e^2$, mivel $e \geq 3$. Ez az ellentmondás bizonyítja a tételt. $\square$

Megjegyezzük, hogy a (b) eset S koherenciája nélkül is megtörténhet. A $|K : K'| < 4e^2$ egyenlőtlenség élesíthető. A csoportok, melyekben (b) előfordulhat osztályozva lettek.

5. Feladatok

7.10. Feladat: Legyen K T.I.F.N G-ben, és tegyük fel, hogy $S = \{\psi \in Irr(N(K)) | K \nsubseteq$ ker $\psi\}$ koherens. Legyen T G kivételes karaktereinek a megfelelő halmaza. Legyen $M = \bigcap_{\chi \in T}$ ker χ. Mutassuk meg, hogy $M \cap K = 1$.

Megoldás:

Indirekten bizonyítunk. Ekkor $1 \neq x \in M \cap K$. $\forall \psi \in T, \psi(x) = \psi(1), (x \in M)$. Jelölje $N = Irr(N(K))$. Legyen N karaktertáblázatában a felső rész, ahol $K \subseteq$ kerχ, az alsó rész, ahol ez nem igaz, vagyis S. A felső részben $\chi(x) = \chi(1)$.

A 4.5.b Tétel szerint $\psi(x) - \epsilon\chi(x) = m\chi(1)/|N : K|$, $m \in \mathbb{Z}$ független χ-től. A 4.5.d Tétel szerint viszont $\psi(1) = l\chi(1)$, $l \in \mathbb{Z}$. Vagyis $\epsilon\chi(x) + \frac{m\chi(1)}{|N:K|} = l\chi(1)$, így $\chi(x) = \chi(1)\epsilon(l - \frac{m}{|N:K|}), \forall \chi \in S$.

A II. ortogonalitási tétel alapján:

$0 = \sum_{\chi \in Irr(G)} \chi(x)\chi(1) = \sum_{ker\chi \geq K} \chi(x)\chi(1) + \sum_{\chi \in S} \chi(x)\chi(1) = \sum_{ker\chi \geq K} \chi(1)^2 + \epsilon(l - \frac{m}{|N:K|}) \sum_{\chi \in S} \chi(1)^2$, így

$0 = |N : K| + \epsilon(l - \frac{m}{|N:K|})(|N| - |N : K|)$,

$0 = |N : K| + \epsilon(l|N : K| - m)(|K| - 1)$, ahol $l|N : K| - m$ egész.

Tehát $|K| - 1||N : K| \leq |K| - 1$. A második egyenlőtlenség azért van, mert a Frobenius komplementum, jelölje H fixpontmentesen hat a $K - \{1\}$ halmazon, és a hatás orbitjai $|H|$ eleműek, így $|H|||K| - 1$, ahol $|H| = |N : K|$. Vagyis $|H| = |K| - 1$. Mivel egyetlen orbit van a $K - \{1\}$ halmazon, ezért Kminden eleme azonos rendű. Tudjuk, hogy létezik p rendű elem, vagyis K p- csoport. $1 \neq Z(K)$ miatt $Z(K) = K$, mivel a konjugálás automorfizmus a centrumot önmagába viszi. Tehát K elemi Abel p-csoport.

Ellentmondás van, mert $|S| = 1$ jön ki az alábbi részletezés miatt, ami ellentmond annak, hogy a koherenciánál a definíciónál S elemszáma legalább kettő.

Azért van egyetlen eleme S-nek, mert K bármelyik karakterének ugyanaz lesz az indukáltja (a Frobenius csoport miatt S elemei K nem triviális karakteréről indukálódnak): $\Psi \in S$, $\Psi(1) = |N : K|$; $1 \neq a \in K$, $\Psi(a) = -1$; $b \in N - K$, $\Psi(b) = 0$. Mindez azért van, mert ha K elemi Abel p-csoport, van rajta egy lineáris karakter, aminek a magja p indexű részcsoport a K-ban, és minden p-edik egységgyököt ugyanannyiszor vesz föl. Amikor ezt indukálom, mivel minden K-beli (nem triviális) két elem konjugált egymással, tehát olyan sok konjugált összegét kell venni, ami pont az összes érték összege, kivéve az egységelemen felvett érték, ami 1. Az összes érték összege az 0 az első ortogonalitási reláció miatt, tehát kimarad az az egyetlen érték, azért -1. Mivel normállosztóról indukálunk, kívül 0.

7.12. Feladat: Legyen K T.I.F.N. G-ben, és legyen $e = |N(K) : K|$. Tegyük fel, hogy G-nek van egy hűséges irreducibilis karaktere $< 2e$ fokkal. Mutassuk meg, hogy K Abel.

Megoldás: Jelölje χ a szóbanforgó karaktert. $\chi_{N(K)}$ megszorítás Frobenius csoport, igy az irreducibilis karakterei kétfélék [Isaacs, 6.34]. Az egyik eset, ha ezek magjai tartalmazzák a K-t, a másik esetben ezek egy $\varphi \in Irr(K)$ K-beli irreducibilis karakterről vannak indukálva. Ez utóbbi esetben $\varphi^{N(K)}(1) = |N(K):\ K|\ \varphi(1) = e\varphi(1)$. Vagyis a χ foka $< 2e$ miatt ilyen karaktert csak egyet tartalmazhat a $\chi_{N(K)}$, és ekkor φ foka 1. Ha $\chi_{N(K)}$ csak az első esetbeli irreducibilis karaktert tartalmaz, akkor a megszorítás magja is tartalmazza K-t és ekkor az eredeti χ karakter magja is tartalmazza a K-t, ami nem lehet, mert χ hű. Tehát $\chi_{N(K)}$-ben van egy indukált karakter és esetleg néhány, az első esetbeli karakter.

Mivel a χ irreducibilis, ezért írható a következő, ahol felhasználjuk, hogy mivel K T.I., ezért K konjugáltjainak a darabszáma $\frac{G}{e|K|}$ a normalizátor indexe.

$$1 = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\chi(g)|^2 \ \geq\ \frac{1}{|G|}\frac{G}{e|K|}\sum_{g\in G, g\neq 1}|\chi(g)|^2 + \frac{1}{|G|}\chi(1)^2 \ =\ \frac{1}{e}\frac{1}{|K|}\sum_{g\in K}|\chi(g)|^2 + (\frac{1}{G} - \frac{1}{e|K|})|\chi(1)|^2$$

$\frac{1}{|K|}\sum_{g\in K}|\chi(g)|^2 \ = <\chi_K, \chi_K>$, és ez utóbbi egyenlő a K irreducibilis karaktereire vett együtthatók négyzetösszegével. De $\chi_K = (\chi_{N(K)})_K$. $\varphi^{N(K)}|_K$ e darab konjugált karakter összege, míg az esetleg meglévő, a magok K-t tartalmazó irreducibilis karatktereinek a megszorítása K-ra K triviális karakterei szorozva a dimenzióval: $(\chi(1) - e)1_K$-val egyenlőek. Tehát $\frac{1}{|K|}\sum_{g\in K}|\chi(g)|^2 = e1^2 + (\chi(1) - e)^2$.

Vagyis

$$1 \geq \frac{e + (\chi(1) - e)^2}{e} + (\frac{1}{G} - \frac{1}{e|K|})|\chi(1)|^2.$$

$$(\frac{1}{|K|} - \frac{e}{|G|})\chi(1)^2 \geq \chi(1)^2 - 2e\chi(1) + e^2$$

$$\frac{1}{|K|}\chi(1)^2 > \frac{1}{|K|}(1 - \frac{e}{|G:K|})\chi(1)^2 \geq (\chi(1) - e)^2$$

Kapjuk

$$|K| < \frac{\chi(1)^2}{(\chi(1)-e)^2} = \frac{1}{(1-\frac{e}{\chi(1)})^2}$$

Két eset van: a nevező nulla, vagy nem nulla. Ha a nevező nulla, azaz $\chi(1) = e$, akkor $\chi_N(K)$ irreducibilis, mert további tagok nincsenek. Ha tovább megszorítjuk K-ra ezt, akkor $ker\chi_K \geq K'$ lesz, és így $K' = 1$.

A másik esetben legyen $\chi(1) = e + 1$. Ekkor $|K| < (e+1)^2$. K-n hat a Frobenius-komplementum, ami e elemű, az orbitok regulárisak, tehát minden orbit e hosszúságú. Thompson tétele szerint K nilpotens. $\Phi(K) = 1$ vagy $\Phi(K) \neq 1$. Ez utóbbi esetben a $\Phi(K)$ elemszáma legalább $e+1$, mert minden orbit e elemű, a Frattini az karakterisztikus részcsoport, külső elemmel konjugálva nem viszi ki onnan az elemeket, tehát ez az egész teljes pályákat tartalmazza és a pálya e elemű, így a Frattini elemszám-1 osztható e-vel.

Állítás. $K/\Phi(K)$-n is fixpont mentesen hat a Frobenius komplementum a saját hatásával.

Biz. Indirekt: $a \in K$, minden $b \in H$ (Frob. kompl.) -ra $(b^{-1}ab)\Phi(K) = a\Phi(K)$, $a\Phi(K)$ mellékosztály orbitok uniója. Ha $a \notin \Phi(K)$, akkor $e||\Phi(K)|$, amit ellentmond annak, hogy $e||\Phi(K)| - 1$.

Ellentmondás: Az állítás miatt $\frac{|K|}{|\Phi(K)|} \geq e+1$, $|K| \geq (e+1)|\Phi(K)| \geq (e+1)^2$, ami nem lehet, mert most $|K| < (e+1)^2$.

Irodalom

[1.] M. Isaacs: Character Theory of Finite Groups, Academic Press, Nex York, 1976.

[2.] M. Aschbacher: Finite Group Theory, Second Edititon, Cambridge University Press, 2000.