

EÖTVÖS LÓRÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Friedman Sára
Matematikus MSc

LORENZ TÍPUSÚ LEKÉPEZÉSEK PERIODIKUS
PÁLYÁI

Szakdolgozat

Témavezető: Buczolich Zoltán, egyetemi tanár
Analízis Tanszék



Budapest, 2018

Tartalomjegyzék

1. Előismeretek	4
1.1. Jelölések, definíciók	4
1.2. Hurok, Lópatkó	5
1.2.1. Hurok	6
1.2.2. Lópatkó	8
2. Elemi megközelítés	9
2.1. Lapos - Lapos eset	9
2.2. Lapos - meredek	10
2.3. Végtelen sok kettő periodikus pálya	11
3. n-ciklusok nagy a esetén	16
3.1. Lópatkó az L_a^2 leképezésben és ennek következményei	16
3.2. A 6 periódusok	19
3.2.1. A lehetséges 6 ciklusok	20
3.3. P-gráfok	24
3.4. A kizárható ciklus	30
3.5. A három ciklusok	31
3.6. Az utolsó ciklus	33
4. Összefoglaló	35

Köszönetnyilvánítás

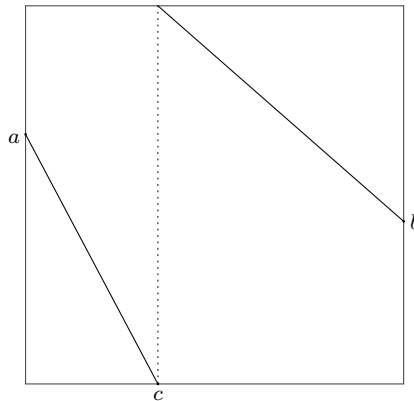
Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Dr. Buczolic Zoltánnak a megelőlegezett bizalmat, a segítőkészséget és mindenekelőtt a példamutatást mind szakmai, mind emberi tekintetben.

Bevezetés

A szakdolgozat célja a Lorenz leképezések egy változata által meghatározott diszkrét dinamikus rendszer tanulmányozása periodikus pályák szempontjából. A Lorenz leképezés egy $f: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ leképezés, amely lineáris a $[0; c]$ és a $[c; 1]$ intervallumokon, $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = 1$ és $\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = 0$. A szakadási helyén a függvényt kétértékűnek tekintjük. Ennek a variációja a mi esetünkben az $f(1-x)$ függvény, amelyet $L_{a,b,c}$ -vel fogunk jelölni, ahol c a függvény szakadási helye, $L_{a,b,c}(0) = a$, valamint $L_{a,b,c}(1) = b$. Képlettel megadva

$$L_{a,b,c}(x) = \begin{cases} a - \frac{a}{c}x, & \text{ha } 0 \leq x \leq c, \\ \frac{1-cb}{1-c} - \frac{1-b}{1-c}x, & \text{ha } c \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Ez egy $I \rightarrow I$ lineáris függvény a $[0, c)$, valamint a $(c, 1]$ intervallumokon, mely monoton csökkenő ezeken az intervallumokon. A c helyen kétértékűnek tekintjük, ahol az 1 és a 0 értékeket is felveszi.



1. ábra. $L_{a,b,c}$ leképezés grafikonja.

Az ábra a függvény grafikonját mutatja a $I \times I$ egységnegyzeten. A szakadási helyet szaggatott vonal jelzi.

A periodikus pontok vizsgálata kapcsán talán a legnevezetesebb tétel Sarkovszkij tétele (1964), melynek bizonyítása megtalálható a [1], [2] könyvekben. A tétel egy $f: I \rightarrow I$ folytonos intervallum leképezés esetén pontosan meghatározza a lehetséges előforduló periódusok halmazát. A természetes számok Sarkovszkij rendezése a következő.

$$\begin{aligned}
& 3 >_S 5 >_S 7 >_S 9 >_S \dots \\
& >_S 2 \cdot 3 >_S 2 \cdot 5 >_S 2 \cdot 7 >_S 2 \cdot 9 >_S \dots \\
& >_S 2^2 \cdot 3 >_S 2^2 \cdot 5 >_S 2^2 \cdot 7 >_S 2^2 \cdot 9 >_S \dots \\
& \dots \\
& \dots >_S 2^4 >_S 2^3 >_S 2^2 >_S 2 >_S 1
\end{aligned}$$

A tétel állítása szerint, ha az f leképezésnek van pontosan n -szerint periodikus pontja, akkor minden $k <_S n$ természetes számra is kell lennie pontosan k -szerint periodikus pontjának. Az állítás megfordítása is igaz, amennyiben egy $Per \subset \mathbb{N}$ halmazra teljesül, hogy

$$(n \in Per) \wedge (k <_S n) \longrightarrow (k \in Per),$$

akkor van olyan f folytonos intervallumleképezés, hogy Per megegyezik f előforduló periódusszámainak halmazával.

A folytonos körleképezéseknek is ismeretek a lehetséges halmazai [2]. A Lorenz leképezés esetében teljes leírást ad a periodikus pályák pontos periódusainak halmazáról a [3] cikk. A bizonyítás nem általánosítható a mi esetünkre, ugyanis épít a forgatási számokra, ami negatív körülfordulási szám mellett értelmét veszíti. Folytonos körleképezéseknél is látható, hogy az irányítástartó és irányításváltó leképezések alapvetően másképp viselkednek.

Az első fejezetben, tisztázom a jelöléseket, valamint áttekintjük az előismereteket. A második fejezetben megvizsgáljuk az eseteket, amikor az egyik oldalon a meredekség -1 -nél kisebb, vagy pont -1 . A harmadik fejezetben a szimmetrikus leképezésekre, vagyis $L_{a,1-a,1/2}$ esetén bizonyítom, hogy amennyiben $a > 1/4 + \sqrt{5}/4 \approx 0,809016994$ teljesül az a paraméterre, annyiban a leképezésnek minden $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ esetén van periodikus pályája, melynek periódus száma n . Az utolsó fejezetben összefoglalom a szakdolgozat eredményeit.

1. fejezet

Előismeretek

Ebben a fejezetben összefoglalom a dolgozatban használt jelöléseket, az ismertnek tekintett fogalmakat, tételeket.

1.1. Jelölések, definíciók

A természetes számokat \mathbb{N} -nel jelölöm, vagyis $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. A pozitív természetes számokat \mathbb{N}^+ jelöli.

A bevezetésben említett függvényt a szakdolgozat során végig $L_{a,b,c}$ -vel fogom jelölni, ahol c a függvény szakadási helye, $L_{a,b,c}(0) = a$ és $L_{a,b,c}(1) = b$, valamint $L_{a,b,c}$ a c helyen a 0 és az 1 értékeket is felveszi. A folytonossági intervallumokon $L_{a,b,c}$ lineáris, valamint $a, b, c \in I$ és $c \neq 0, 1$, ahol $I = [0, 1]$ a zárt egységintervallum. A dolgozat további részében is I a zárt egységintervallumot jelöli, esetenként, amennyiben alul indexelt I szerepel, az tetszőleges intervallumot jelölhet. A szakdolgozat során intervallum alatt nem üres intervallumot értünk.

Megjegyzés. Tekinthejtük $L_{a,b,c}$ leképezést az egységkör egy leképezésének is $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ értelmezéssel. Egy $I \times I$ grafikon, szemléltethet egy $I \rightarrow I$, vagy egy $S^1 \rightarrow S^1$ leképezést is, utóbbi esetén $(0, y) \sim (1, y)$, valamint $(x, 0) \sim (x, 1)$ ekvivalencia áll fenn, vagyis ezeket a pontpárokat azonosnak tekintjük és $I \times I$ a tóruszt szemlélteti. Ekkor c nem szakadási hely, de $0 \equiv 1 \pmod{1}$ igen, amennyiben $a \not\equiv b \pmod{1}$.

Bizonyos esetekben egy egyparaméteres családot fogunk vizsgálni, nevezetesen az $L_{a,1-a,1/2}$ függvényeket, ekkor röviden az L_a jelölést használjuk.

A témában szokásos módon tetszőleges f leképezésre f^n az n -edik iteráltat jelöli, így $f^n(x) = f \circ f \circ \dots \circ f(x)$, ahol a jobb oldalon f n -szer szerepel. Megállapodás szerint $f^0(x) = x$.

1. Definíció. Egy $x \in X$ pontra azt mondjuk, hogy az $f: X \rightarrow X$ leké-

pezésnek periodikus pontja, ha van $n \in \mathbb{N}^+$, amire $f^n(x) = x$. Amennyiben nem okoz félreértést egyszerűen csak azt mondjuk, hogy x periodikus pont.

Egy periodikus pont alapperiódusa n , ($n \in \mathbb{N}^+$), vagy pontosan n szerint periodikus, amennyiben $f^n(x) = x$ és $f^k(x) \neq x$, $k \in \mathbb{N}^+$ és $k < n$ esetén.

Az egy periódusú pontokat fixpontnak nevezzük.

Egy $x \in X$ pont pályája $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$. Ha x periodikus, akkor periodikus, vagy ciklikus pályáról beszélünk.

A következő állítások, valamint bizonyításaik jól ismertek.

1. Állítás. *Egy $f: J \rightarrow J$ folytonos leképezésnek, ahol J egy korlátos zárt intervallum, mindig van fixpontja.*

Következő állításnak szerepeljen itt a fenti fixpont-tétel egy speciális esete, amire a továbbiakban Fixpont-tételként fogok hivatkozni.

2. Állítás (Fixpont-tétel). *Legyen $f: J \rightarrow K$ folytonos, differenciálható függvény, ahol J és K korlátos zárt intervallumok, hogy $K \subset J$. Amennyiben $|f'(x)| < 1$ minden $x \in J$ esetén, úgy az f függvénynek pontosan egy fixpontja van. $f(x_0) = x_0$ esetén, minden $x \in J$ pontra $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$, vagyis tetszőleges pontból indulva a függvény iteráltjai a fixponthoz tartanak.*

3. Állítás. *Legyen $f: I \rightarrow I$ folytonosan differenciálható leképezés, valamint J az I egy korlátos zárt részintervalluma, hogy $|f'(x)| > 1$ minden $x \in J$ pontra. Ekkor J minden pontja vagy fixpont, vagy van $n \in \mathbb{N}^+$, hogy $f^{n-1}(x) \in J$ és $f^n(x) \notin J$, valamint az $f|_J$ függvénynek legfeljebb egy fixpontja lehet.*

Az előző két állítás lesz segítségünkre a következő fejezetben, amikor azon $L_{a,b,c}$ leképezéseket vizsgáljuk, ahol az egyik oldali meredekség -1 -nél nagyobb.

Ezzel áttekintettük a jelöléseket, definíciókat, állításokat, amikre a második fejezet során szükségünk lesz.

1.2. Hurok, Lópatkó

A következő definíciók, állítások kulcsszerepet játszanak a harmadik fejezetben, amelyben bizonyítani fogjuk, hogy szimmetrikus esetben az L_a leképezésnek $a > 1/4 + \sqrt{5}/4$ paraméterérték mellett tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ esetén van n alapperiódusú periodikus pontja.

1.2.1. Hurok

2. Definíció. Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ egy folytonos leképezés, $I \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum. Továbbá K, J az I két korlátos zárt részintervalluma. Azt mondjuk, hogy K f -fedi J -t, (vagy, ha nem okoz félreértést K fedi J -t) ha az $f(K) \supset J$ tartalmazás fennáll.

Jelölés. Amennyiben K f fedi J -t a $K \xrightarrow{f} J$ jelölést fogjuk használni, amennyiben nem okoz félreértést a függvény nevét elhagyjuk.

A következő állítás következő alakja megtalálható a [2] könyvben. Ennek egy speciális változatát a mi esetünkre megfogalmazunk, de a teljesség kedvéért álljon itt az eredeti állítás.

4. Állítás. Legyenek $I_0, I_1, I_2, \dots, I_n$ az \mathbb{R} korlátos zárt intervallumai, melyekre $I_n = I_0$. Továbbá tegyük fel, hogy $f_i: I_i \rightarrow \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, hogy

$$I_0 \xrightarrow{f_0} I_1 \xrightarrow{f_1} I_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} I_n.$$

Ekkor van $x_i \in I_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$), hogy $f_i(x_i) = x_{i+1}$, amennyiben $i = 0, 1, \dots, n-1$ és $x_n = x_0$.

A következő speciálisabb formája az állításnak kulcsfontosságú a számunkra.

5. Állítás (hurok). Legyen $f: J \rightarrow J$ függvény, ahol J korlátos, zárt intervallum, továbbá legyenek $J_0, J_1, J_2, \dots, J_k$ a J intervallum részintervallumai, melyekre teljesül, hogy belsejük páronként diszjunkt. Ezenfelül $f|_{\cup_{i=0}^k J_i}$ folytonos. Ekkor, ha az

$$I_0 \xrightarrow{f} I_1 \xrightarrow{f} I_2 \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} I_n$$

fedési reláció fenn áll, ahol minden I_j intervallum megegyezik valamely J_i intervallummal, valamint $I_0 = I_n$, akkor van $x_i \in I_i$, ($i = 0, 1, \dots, n$), hogy $f(x_i) = x_{i+1}$, amennyiben $i = 0, 1, \dots, n-1$ és $x_n = x_0$.

Az állításban szereplő intervallumsorozatot huroknak fogjuk nevezni. Az állításra, mint hurok-állításra fogunk hivatkozni.

Megjegyzés. A fenti állításra szükségünk lesz majd a körleképezései esetén is. Ekkor az intervallumok helyett egyszerűen összefüggő zárt köríveket írunk. Tetszőleges körleképezés esetén problémát jelent a bizonyítás egy kulcslépése, az intervallumok szűkítése, ahol egy intervallumot úgy szűkítünk, hogy annak teljes képe legyen a következő intervallum, ne csak részhalmaza. Ez körleképezésnél nem feltétlenül tehető meg.

Amennyiben a köríveink és azok függvény szerinti képei egyszerűen összefüggők, vagyis sem a körívek, sem azoknak képei nem adják ki az egész kört,

annyiban a fenti állítás szó szerint átvihető intervallumok helyett körívekre. A következő definíció ezt az állítást segíti, a leírás egyszerűsítése miatt vezetjük be.

3. Definíció. Egy I zárt körívet egy $f: S^1 \rightarrow S^1$ szerint intervallumszerűnek nevezünk, ha $f|_I$ folytonos, valamint $I \neq S^1$ és $f(I) \neq S^1$ is teljesül.

6. Állítás. A hurok-állítás intervallumok helyett intervallumszerű körívekre is teljesül.

Bizonyítás. Legyen $g: S^1 \rightarrow S^1$ függvény, valamint J_0, J_1, \dots, J_k belsejükben páronként diszjunktak, és a g függvény szerint intervallumszerű körívek. Legyenek $K_0, K_1, \dots, K_n \subset S^1$ olyan zárt körívek, hogy mindegyikük J_0, J_1, \dots, J_k valamelyikével megegyezik. Ezekre a körívekre teljesüljön a $K_{i+1} \subset g|_{K_i}$, ahol $(i = 1, 2, \dots, n-1)$, továbbá a $K_0 = K_n$ összefüggés.

Ekkor van K_{n-1} -nek \widehat{K}_{n-1} részintervalluma, hogy $g(\widehat{K}_{n-1}) = K_n$. Ez a következőképpen érhető el. Legyenek a $g(K_{n-1})$ körív végpontjai a B és a C pontok. Tegyük fel például, hogy egy körüljárási irányt fixálva a

$$\max\{x \in K_{n-1} | g(x) = B\} > \max\{x \in K_{n-1} | g(x) = C\}$$

reláció teljesül. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\max\{x \in K_{n-1} | g(x) = C\} = D,$$

valamint

$$\min\{x \in K_{n-1} | x > D, g(x) = B\} = E.$$

Ekkor a körüljárási iránynak megfelelően a $g([D, E]) = K_n$ összefüggés teljesül, így valóban találtunk egy a feltételeknek megfelelő intervallumot.

Az eljárást tovább folytatva hátulról előrefelé, szűkíthetjük az intervallumokat. Végül K_n intervallumot lecserélhetjük a szűkebb $\widehat{K}_n = \widehat{K}_0$ intervallumra, ezzel még mindig teljesül a következő fedési lánc.

$$\widehat{K}_0 \xrightarrow{g} \widehat{K}_1 \xrightarrow{g} \widehat{K}_2 \xrightarrow{g} \dots \xrightarrow{g} \widehat{K}_n.$$

Ekkor a $g^n|_{\widehat{K}_0}$ folytonos függvényre nézve \widehat{K}_0 intervallumszerű körív. A konstrukciónak köszönhetően a $\widehat{K}_0 \subset K_n = g^n(\widehat{K}_0)$ összefüggés is fennáll, így a g^n leképezésnek van x_0 fixpontja a \widehat{K}_0 halmazban. A szűkítési eljárásnak köszönhetően az $x_i = g^i(x_0) \in \widehat{K}_i$ pontok teljesítik az állítás feltételeit. \square

A továbbiakban erre az állításra mint körhurok-állításra fogunk hivatkozni.

Ez azt jelenti számunkra, hogy, ha találunk egy $f: I \rightarrow I$ leképezéshez intervallumhurkot, (vagy körív hurkot körleképezés esetén) az állításban

megadott módon, akkor következtethetünk arra, hogy van egy $x \in I$, amire $f^n(x) = x$. Amennyiben a hurok nem tartalmaz ismétlődést (vagyis nem egy kisebb hurok többször egymásután írt változata), valamint ki tudjuk zárni, hogy az x pont valamelyik végponttal egybeessen, akkor következtethetünk arra is, hogy x az f egy pontosan n szerint periodikus pontja.

1.2.2. Lópatkó

4. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ korlátos zárt intervallum. Azt mondjuk, hogy az $f: I \rightarrow I$ folytonos leképezés lópatkóval rendelkezik, ha léteznek $J, K \subset I$ zárt, diszjunkt részintervallumok, hogy mind J , mind K fedje a J és K intervallumokat is.

7. Állítás. Amennyiben $f: I \rightarrow I$ folytonos leképezés, ahol $I \subset \mathbb{R}$ korlátos zárt intervallum, rendelkezik J, K intervallumok által alkotott lópatkóval, akkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén van f -nek pontosan n -szerint periodikus pontja, x , hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $f^k(x) \in J \cup K$.

Megjegyzés. A fenti állítás általánosítható arra az esetre, amikor az f leképezésnek csak a $J \cup K$ intervallumon tesszük fel a folytonosságát, mivel minden esetben kiterjeszthető egy ilyen tulajdonsággal rendelkező függvény $I \rightarrow I$ folytonos függvénné, mivel a $J \cup K$ halmazon f megegyezik a kiterjesztésével, így az állítás biztosít számunkra egy periodikus pályát minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén n periódussal.

Ennek az állításnak nem lesz szükségünk az általánosítására körleképezések esetére, de azért megjegyezném, hogy amennyiben $f: S^1 \rightarrow S^1$ szerint J , valamint K intervallumszerű körívek a fenti fedési tulajdonságokkal rendelkeznek, annyiban a

$$J \rightarrow K \rightarrow J \rightarrow J \rightarrow \dots \rightarrow J$$

hurokra alkalmazható a hurok-állítás.

2. fejezet

Elemi megközelítés

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk az

$$L_{a,b,c}(x) = \begin{cases} a - \frac{a}{c}x, & \text{ha } a \leq x \leq c, \\ \frac{1-cb}{1-c} - \frac{1-b}{1-c}x, & \text{ha } c \leq x \leq 1. \end{cases}$$

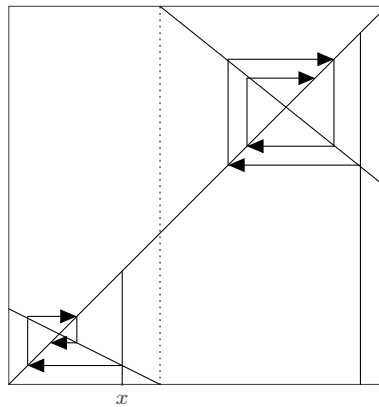
leképezés meghatározta diszkrét dinamikus rendszer hosszú távú viselkedését, abban az esetben, ha c egyik oldalán, az $|L'_{a,b,c}(x)| \leq 1$. Amikor szigorú egyenlőtlenség teljesül, arra néha csak úgy fogok utalni, hogy lapos eset. Hosszútávú viselkedés alatt, azt értjük, hogy szeretnénk meghatározni milyen x értékekre létezik $\lim_{n \rightarrow \infty} L_{a,b,c}^n(x)$, amennyiben létezik milyen értékeket vesz fel. Vannak-e periodikus pontok, ha igen, milyen periódusszámmal.

Ebben a fejezetben az $I_0 = [0, c]$, valamint az $I_1 = [c, 1]$ jelölést fogom használni. Az $L_{a,b,c}$ leképezést folytonosnak tekintjük mindkét intervallumon, tehát $L_{a,b,c}|_{I_0}(c) = 0$, $L_{a,b,c}|_{I_1}(c) = 1$.

2.1. Lapos - Lapos eset

Ebben az esetben $|L'_{a,b,c}(x)| < 1$ minden folytonossági pontban. Ez annyit jelent, hogy $|a/c| < 1$ és $|1-b|/|1-c| < 1$, vagyis $a < c$, valamint $c < b$. Ekkor I_0 és I_1 invariáns halmazok, vagyis $L_{a,b,c}(I_0) \subset I_0$ és $L_{a,b,c}(I_1) \subset I_1$. Az előismeretekben leírt Fixpont-tétel szerint, ekkor I_0 és I_1 intervallumokon is egy fixpont van. Jelölje ezeket rendre x_1 és x_2 . Szintén a Fixpont-tétel alapján minden $x \in I_0$ pontra $\lim_{n \rightarrow \infty} L_{a,b,c}^n(x) = x_1$, valamint minden $x \in I_1$ pontra $\lim_{n \rightarrow \infty} L_{a,b,c}^n(x) = x_2$. Ezzel jellemeztük ezt az esetet. Nem lehetnek sem 1-nél nagyobb periódusú pontok, sem olyan pontok, melyek pályája sűrű az I intervallumon.

Ez a viselkedés jól szemléltethető grafikus analízissel. Az ábrán $L_{a,b,c}$ látható. Ezenkívül az átló $f(x) = x$ grafikonja, vagyis az ezzel való metszet mutatja a leképezés fixpontját. A grafikus analízis során kijelölünk egy $x \in I$ pontot a vízszintes tengelyen, majd itt a tengelyre merőlegest állítunk. A függvény grafikonjával vett metszéspont $(x, L_{a,b,c}(x))$. Ebből a pontból vízszintes szakaszt húzunk az átlóhoz, így megkapjuk az $(L_{a,b,c}(x), L_{a,b,c}(x))$ pontot az átlón. Innen újra függőleges szakaszt húzunk a függvény grafikonjához, amivel megkapjuk a grafikonon $(L_{a,b,c}(x), L_{a,b,c}^2(x))$ pontot. Ezt az eljárást folytatva az átlón megjelenik egy fáziskép, ami szemlélteti a pontok mozgását az iteráció során.

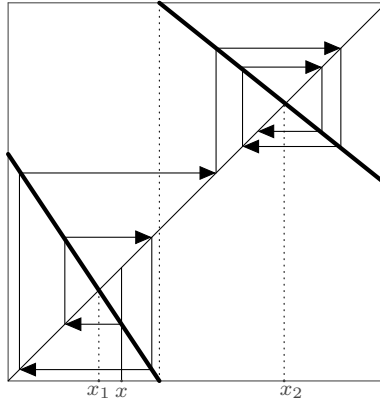


2.1. ábra. $L_{a,b,c}$ leképezés grafikus analízise a lapos-lapos esetben.

Ezt a szemléltető eljárást a többi példában is alkalmazni fogjuk.

2.2. Lapos - meredek

Vizsgáljuk meg azt az esetet amikor az egyik oldalon a grafikon meredeksége 1-nél kisebb abszolút értékű, a másik oldalon viszont annál nagyobb. Tegyük fel, hogy az I_0 intervallumon nagyobb a meredekség abszolút értéke. Ekkor az I_1 intervallum invariáns. A Fixpont-tétel alapján tehát pontosan egy fixpont lesz az I_1 intervallumon és minden $x \in I_1$ pontra teljesül, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} L_{a,b,c}^n(x) = x_2$, ahol x_2 az egyetlen fixpontot jelöli ezen az intervallumon. Az előismeretek (3) állítása szerint az I_0 intervallumon legfeljebb egy fixpont lehet és minden más pont elhagyja ezt az intervallumot. Az ábrán is jól látható, és számolással is könnyen igazolható, hogy van is egy fixpont. Jelölje ezt x_1 , ekkor az intervallumot minden $x \neq x_1$ pont elhagyja. Megszámlálhatóan sok pont éppen c értéket vesz fel az intervallum elhagyásakor,



2.2. ábra. $L_{a,b,c}$ leképezés grafikus analízise meredek-lapos esetben

mivel 0 és 1 pontok képei $I_1 \setminus \{c\}$ halmazba esnek és minden más pont az invariáns I_1 intervallum belsejébe jut, így végül ezekre a pontokra is teljesül $\lim_{n \rightarrow \infty} L_{a,b,c}^n(x) = x_2$.

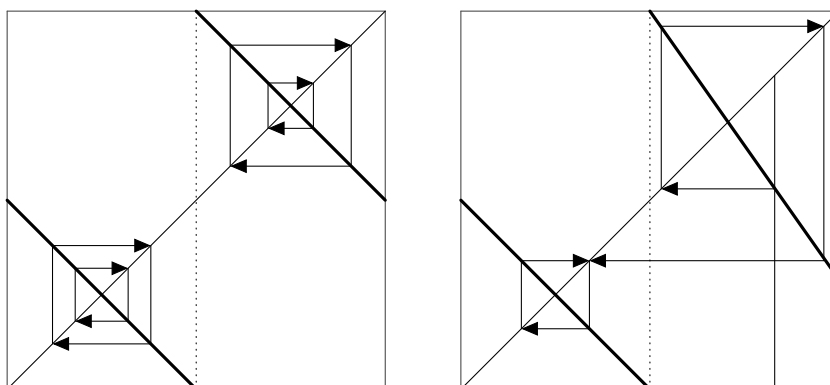
Tehát a leképezésnek két fixpontja van x_1 és x_2 , minden más pont, az x_2 fixponthoz tart.

Abban az esetben, amikor I_0 az invariáns intervallumom és I_1 -en a meredekség abszolút értéke 1-nél nagyobb, ez előzőhöz teljesen hasonlóan látható, hogy I_1 intervallumon lesz egy x_2 fixpont, minden más pont, az I_0 intervallum x_1 fixpontjához fog tartani.

Ezzel megvizsgáltuk azt az esetet, amikor legalább az egyik oldalon a leképezés lapos.

2.3. Végtelen sok kettő periodikus pálya

Vizsgáljuk, most azt az esetet, amikor fennáll az I_0, I_1 intervallumok valamelyikén az $L'_{a,b,c}(x) = -1$ egyenlőség. Ebben az esetben, ezen az oldalon a fixponton kívül minden pont 2 szerint periodikus lesz. Amennyiben a másik oldalon a deriváltra $|L'_{a,b,c}(x)| < 1$ teljesül, úgy a korábbiakban leírtak szerint ezen az oldalon minden az oldal fixpontjához fog tartani. Amennyiben 1 abszolút értékű a derivált, úgy szintén kettő periodikus pályák alakulnak ki ezen az oldalon is a fixpont kivételével. A harmadik esetben pedig, amikor a deriváltra $|f'(x)| > 1$ feltétel teljesül, annyiban a meredekebb oldalon a fixpont taszító lesz, előbb utóbb az iterálás során minden pálya elhagyja ezt az oldalt (persze a fixpont kivételével), így ezek mind végperiodikus pontok lesznek, vagyis, minden pont egy bizonyos iterálttól kezdve egy 2 periodikus



2.3. ábra. Grafikus analízis egyik oldalon -1 meredekség esetén.

pályán fog mozogni. Mindez konkrét számolással is könnyen igazolható az $a = c$, vagy $b = c$ összefüggéseket az $L_{a,b,c}$ képletébe helyettesítve.

Az egyik érdekessége ennek az esetnek, hogy klasszikus példákban (például logisztikus függvénycsalád) rendszerint, ha egy n periódusú pálya megszületik, akkor meg is marad nagyobb paraméter értékekre. Ebben az esetben nem ez történik. Szimmetrikus esetben az előbb látottak alapján $a = 0,5$ paraméterértéknél megszületik végtelen sok 2-periodikus pálya, majd rögtön el is tűnik. A következő paraméterérték, aminél megjelenik egy 2 periódusú pálya $a = 1$.

A kaotikus rendszer mintapéldája

Tekintsük azt az esetet, amikor $c = 0,5$, $a = 1$, $b = 0$. Az ábrán ennek a függvénynek két iteráltja látható, a második és a harmadik. Az iteráltak grafikonjának metszete az $f(x) = x$ függvény grafikonjával, ezen iterált fixpontjait jelenti, tehát az ábrán, a függvénygrafikon és az átló metszéspontjai. Az n -edik iterált egy fixpontja pedig egy periodikus pont, melynek alapperiódusa osztja n -et. Az is látható, hogy az n -edik iterált 2^n helyen metszi az átlót. Bevezetve a $\text{Per}(n)$ jelölést az n szerint periodikus pályák számára a következő összefüggést kapjuk.

$$2^n = \sum_{k|n} k \text{Per}(k).$$

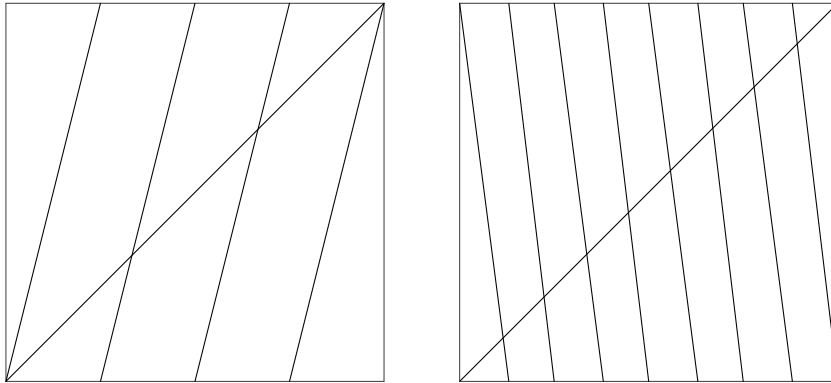
Ebből látható, hogy kettő fixpontunk van és ha n prímszám, akkor $(2^n - 2)/n$ a száma az n alapperiódusú pályáknak, speciálisan pozitív. Amennyiben n összetett szám, akkor kihasználva, hogy n minden valódi osztója, osztója egy n/p alakú természetes számnak is, ahol p az n egy prímosztója

$\sum_{k|n} k \text{Per}(k) < n \text{Per}(n) + \sum_{p|n} 2^{n/p}$ alakú becslést kapunk. Tovább becslve kihasználva, hogy az n számnak legfeljebb $\log_2(n)$ különböző prímosztója lehet azt kapjuk, hogy

$$2^n < n \text{Per}(n) + \log_2(n) 2^{n/2}.$$

Tehát, ha a $2^{n/2} > \log_2(n)$ összefüggés teljesül, akkor $\text{Per}(n) > 0$. Így minden $n \in \mathbb{N}^+$ természetes számra van n alapperiódusú pálya.

Ezeknél a konkrét paraméterértékeknél ($a = 1, b = 0$), az a különlegesség jegyezhető meg, hogy rögzített c paraméter mellett a leképezést körleképezésként tekintve, vagyis az ábrán látható négyzetet a tórusz ábrázolásának tekintve, ahol a szemközti pontokat azonosítjuk egymással a négyzet kerületén, ez az egyetlen olyan értékpár, $a > 0,5, b < 0,5$ mellett, ahol a leképezésnek nincsen szakadási pontja, folytonos. Így tekintve a leképezést, annak három fixpontja lesz, páros n esetén csak $2^n - 1$ metszéspontja lesz az n -edik iterátnak az átlóval, páratlan n esetén pedig $2^n + 1$.



2.4. ábra. L_1 leképezés második és harmadik iteráltja.

Könnyen láthatóan $J = [0; 1/2], K = [1/2; 1]$ teljesítik a fedési feltételeket, belsejük diszjunkt, de a hurok-állítás nem alkalmazható, mivel mindkét intervallum képe az egész kör.

Tekintsük $J \rightarrow K \rightarrow J$ hurkot. Ez szabályosnak mondható, ha J és K helyére találunk olyan intervallumokat/köríveket, hogy azokra megszorítva L_1 -et intervallumleképezést kapunk, vagyis egyik körív képe sem adja ki az egész kört. Az eredeti intervallumokból kiindulva, hátulról kezdve az intervallum szűkítést a

$$[0; 1/8] \rightarrow [3/4; 1] \rightarrow [0; 1/2]$$

eredményt kapjuk. Felhasználva, hogy egy fedési relációban a fedett intervallum szűkíthető, az utolsó intervallumot lecserélhetjük az elsőre, így már egy szabályos hurkot kapunk. A körleképezés megszorításai az adott körívekre tekinthetőek intervallum leképezéseknek. Erre már alkalmazhatóak az első állítások, valóban

$$0 \mapsto 1 \mapsto 0$$

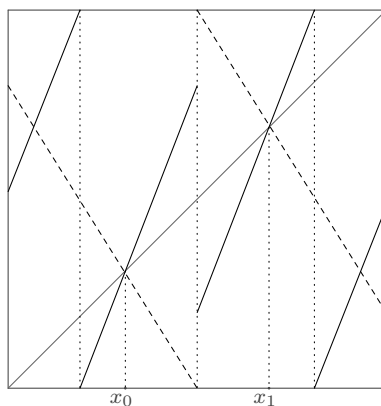
a közös végpontja (a körön) az intervallumainknak, ami ott fixpont. Az adott körleképezésnek egyáltalán nincsen 2-periodikus pontja. Mint intervallum leképezés, a 0-1 valóban egy ciklikus pálya 2-periódussal.

A jó hír, hogy tovább folytatva a hurkunkat $[0; 1/2]$ megszorításával balról a nagyobb n értékekre már nem lép fel ilyen probléma. Folytatva két elemmel a sort a

$$[8/32; 9/32] \rightarrow [7/16; 8/16] \rightarrow [0; 1/8] \rightarrow [3/4; 1] \rightarrow [8/32; 9/32]$$

hurkot kapjuk. Látható, hogy itt már nem szerepel 0 vagy 1 minden intervallumban, így a leképezések kompozíciójának fixpontja nem rendelkezhet kisebb periódusszámmal mint 4, mivel az utolsó előtti halmaz metszete bármelyik korábbival csak az 1 pont lehet (0 formájában), és ezt kizártuk.

Ez a módszer, ha a mi esetünkben nem is működött zökkenőmentesen, sikerült belátnunk segítségével, hogy L_1 -nek van n -ciklusa minden $n > 2$ esetén, valamint 2-periodikus pályája is van 1, ha mint intervallumleképezésre gondolunk rá, valamint eddig is láttuk már, hogy 2 fixpontja van. A teljesség kedvéért álljon itt egy ábra, ami szemlélteti, hogy valóban nincsen más kettő periodikus pályája.



2.5. ábra. L_a leképezés, valamint annak második iteráltja $a > 1/2$ esetén

Az ábrán az eredeti függvényt szaggatott vonal jelöli, a szakadási helyeket mindkét függvény esetében pontozott vonal. A második iteráltat sima vonal jelöli. Halványabban az átló, vagyis az $f(x) = x$ függvény grafikonja látható.

Ezen az ábrán nem $a = 1$ szerepel, hanem egy $0,5 < a < 1$, mivel ez más paraméterértékekre is teljesül. Látható, hogy az átlót a második iterált csak az x_0 és x_1 fixpontokban metszi. A mi paraméterértékünknel a 0 és 1 pontokban is láthatnánk metszéspontot.

3. fejezet

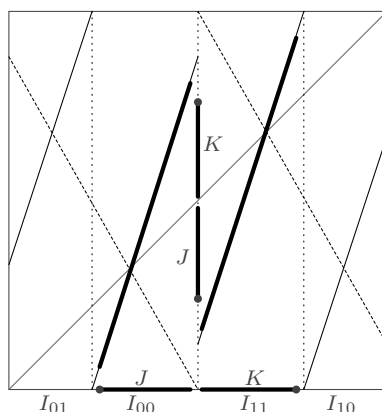
n -ciklusok nagy a esetén

Ebben a fejezetben az egyparaméteres L_a függvényosztályt fogjuk vizsgálni periodikus pályák tekintetében nagy a értékekre. A korábban bevezetett jelöléseket fogjuk használni, vagyis L_a -val azt az $I \rightarrow I$ függvényt jelöljük, mely lineáris a $[0; 1/2)$ valamint az $(1/2; 1]$ intervallumokon és $L_a(0) = a$, $0,5$ szakadási helyen a bal oldali határérték 0 , a jobboldali határérték 1 és $L_a(1) = 1 - a$. Úgy tekintjük, hogy a leképezés kétértékű a szakadási helyen, így ott a 0 és 1 értékeket is felveszi. Az első részben megmutatom, hogy elég nagy a esetén L_a^2 rendelkezik lópatkóval, valamint minden magasabb rendű iteráltja is. Ebből következtethetünk hat szerint periodikus pont előfordulására. Ezt az eredményt a második részben kiaknázzuk és P-gráfok segítségével megmutatjuk, hogy ebből a mi esetünkben következik minden n -ciklus létezése $n > 3$ esetén. Végül az utolsó részben megvizsgáljuk, mi a helyzet $n = 3$ esetén.

3.1. Lópatkó az L_a^2 leképezésben és ennek következményei

Ebben a részben megvizsgáljuk, hogy a milyen értékeire tudjuk garantálni, hogy az L_a^2 leképezés rendelkezik lópatkóval. Egy monoton csökkenő függvény második iteráltja monoton növekedő. Feltehető, hogy $a > c$, mivel $a \leq c$ esetben már ismerjük a függvény dinamikáját az előző fejezetből. Így $L_a^{-1}(c)$ kételemű halmaz, az egyik elem a $(0; c)$, a másik a $(c; 1)$ intervallumba esik. A függvénynek így három szakadási helye van, $L_a^{-1}(c)$ két eleme, valamint c . Ez négy intervallumra osztja az egységintervallumot, jelöljük őket rendre I_{01} , I_{00} , I_{11} , I_{10} -val. Az indexek arra utalnak, hogy a pont c melyik oldalára esik a növekvő iterációk során. Például I_{01} azon pontok halmazának lezártja, amelyek a 0 -dik iterálás során (identitás, ő maga) c -nél kisebb, míg első iteráltjuk

(L_a értéke) c -nél nagyobb. Az ábrán is látható, hogy az intervallumok leírt sorrendje a valódi sorrend. Azt fogom belátni, hogy I_{00} és I_{11} lópatkónak tekinthető. Pontosabban ebből a két intervallumból mindkét végén levágva keveset, olyan intervallumokat kapunk, amik diszjunktak, a leképezésünk ezekre megszorítva már folytonos. Látni fogjuk, hogy a lópatkó tulajdonság ezekkel az általánosabb feltételekkel is alkalmazható.



3.1. ábra. Lópatkó L_a^2 leképezésben.

Egyszerű számítással adódik, használva a grafikon középpontos szimmetriáját, hogy

$$L_a^{-1}(c) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4a}.$$

Az is világos, hogy $L_a^2(c-0) = a$, ahol $f(c-0) = \lim_{x \nearrow c} f(x)$ jelölést használjuk a baloldali határértékre. Akkor fedi I_{00} képe I_{11} -t, ha $a > \max L_a^{-1}(c)$. Az adódik, hogy a kívánt fedések az arany metszés fele fölött teljesülnek, vagyis $a > 1/4 + \sqrt{5}/4 \approx 0,809$ esetén I_{00} és I_{11} teljesítik a lópatkó definíciójában szereplő fedési feltételeket. Mivel határozott egyenlőtlenséget követeltünk meg, így van az I_{00} intervallumnak olyan részintervalluma, hogy arra a fedés még mindig teljesül, továbbá a két végpontot, vagyis L_a^2 szakadási helyeit ne tartalmazza. Így nyerünk egy $J \subset I_{00}$, valamint szimmetrikusan az $1/2$ helyre egy $K \subset I_{11}$ zárt intervallumot, melyekre megszorítva L_a^2 leképezést, már folytonos függvényt kapunk.

Megjegyzés. Az ábrát tovább vizsgálva, a fedéshez elegendőek a két fixpont által meghatározott zárt intervallummal vett metszeteik is. Ezzel számolva a fedéshez elegendő az $a > 1/\sqrt{2} \approx 0,707$ érték is. Ezután az intervallumok c felé eső végéből levághatunk egy megfelelően kicsit, hogy a végpontok ne okozzanak problémát. (Ezért kell mindenhol határozott egyenlőtlenség.)

Jelöljük az így nyert intervallumokat a J és K betűkkel. A következőt állíthatjuk.

1. Lemma. *Legyen $f: I \rightarrow I$ leképezés, ahol I egy korlátos, zárt intervallum. Legyenek J, K diszjunkt zárt intervallumok, melyek kölcsönösen fedik egymást és magukat, továbbá legyenek az $f|_K$ és $f|_J$ megszorítások folytonosak. Ekkor f minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén rendelkezik n -ciklussal.*

Bizonyítás. Ha f folytonos lenne, akkor készen lennénk, hiszen rendelkezne lópatkóval. A bizonyítás lényege az egyszerű észrevétel, hogy f viselkedése a megadott intervallumokon kívül semmilyen hatással sincs a lemma feltételeire. $K \cup J$ egy zárt részhalmaza a korlátos zárt I intervallumnak, tehát $f|_{K \cup J}$ folytonos és kiterjeszthető I -re folytonosan. Így nyerünk egy \tilde{f} folytonos függvényt, amire már alkalmazható a lópatkó állítás. Az e szerint garantált periodikus pontok pályáikkal együtt a $K \cup J$ halmazba esnek, ott pedig a két függvény megegyezik, így a lemmát beláttuk. \square

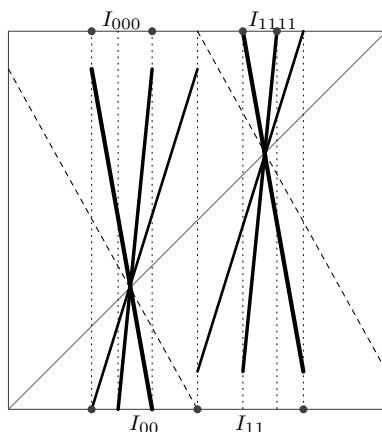
A korábban definiált K és J intervallumokra, valamint az L_a^2 leképezésre nyilvánvalóan teljesülnek a lemma feltételei, így beláttuk a következőt:

8. Állítás. *Az L_a^2 leképezésnek $a > 1/\sqrt{2}$ esetén minden n pozitív egész érték esetén van n alapperiódusú pontja.*

Most vizsgáljuk meg, hogy ez mit jelent számunkra. Ha x az f^k leképezés pontosan n -szerint periodikus pontja, ahol $k \in \mathbb{N}^+$, akkor az f leképezésnél nem tudhatjuk pontosan a periódusát, de az biztos, hogy $k_1 n$ alakú, ahol $k_1 | k$ pozitív egész szám. Ezek szerint minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén L_a leképezésnek van ciklikus pontja n vagy $2n$ periódussal, amennyiben $a > 1/\sqrt{2}$. Ezt összevetve azzal, hogy L_a -nak nincs 2-periódusa, csak egy dolgot állíthatunk biztosan, L_a leképezésnek van ciklikus pontja 4 periódussal.

Ennél nekünk többre van szükségünk. Megvizsgálva az első néhány iterált grafikonját látható, hogy a $[0, c]$ intervallum feletti részt a második iterált megfordítja, a kisebbik fixpont függőleges tengelye körül és lekicsinyíti ugyanezen tengely megtartásával (lásd a 3.2 ábrát). A következő iteráltak is mind ezt teszik. Így mindig lesz a fixpont körül egy intervallumunk, amin a függvény lineárisan összeköti a 0 értéket az a értékkel. Ez talán egy túlságosan szemléletes, geometriai leírás, de könnyen precízzé tehető. Amennyiben $L_a^n(x) = L_a^{n-1}(-2ax+a)$ módon tekintjük, figyelembe véve, hogy $a \in (1/2; 1)$, akkor ez pont a leírt függvénytranszformációt adja meg a $[0; c]$ intervallumon. Mivel L_a^3 esetén ez a lineáris rész a min $L_a^{-1}(1/2)$ értéknél kezdődik, állíthatjuk, hogy a korábban megadott $a > 0,80982$ értékekre L_a^3 leképezésnek minden n pozitív természetes számhoz található n alapperiódusú pontja. A fenti gondolatmenetből az is következik, hogy ezen érték felett nem csak a

harmadik, és a második iterált rendelkezik minden periódusszámmal, hanem minden magasabb rendű iterált is.



3.2. ábra. Az $I_{00..0}$, illetve az $I_{11..1}$ intervallumok, mint lópatkók.

Nekünk mindebből csak egy apróságra lesz szükségünk a következő részhez.

9. Állítás. Minden $a > 1/4 + \sqrt{5}/4$ érték esetén az L_a leképezésnek van pontosan 6 szerint periodikus pályája.

Bizonyítás. Ez előbbieken láthattuk, hogy az L_a^3 leképezésnek az adott paraméter érték mellett van 2-ciklusa. Ekkor $L_a^6(x) = x$ ezen ciklus egy pontjára. Az x pont L_a szerinti periódusa csak 6 osztója lehet. L_a^3 -nak x nem fixpontja, valamint tudjuk, hogy L_a -nak nincs pontosan kettő szerint periodikus pontja. Ezeket összevetve nyerjük, hogy x az L_a egy periodikus pontja, 6 alapperiódussal. \square

Megjegyzés. Ebben a fejezetben elért eredményekhez nem szükségszerű az egyparaméteres családot használni. Azért tettem mégis ezt, mert ez nagyban megkönnyíti a konkrét számításokat. Ahhoz sem szükséges a szimmetria, hogy belássuk a magasabb rendű iteráltak lópatkó tulajdonságát, hiszen ehhez pont azokat az intervallumokat használtuk, amiknek elemei még sosem „jártak” a túloldalon, nincs rájuk hatással a leképezés c -n túli része.

3.2. A 6 periódusok

Az előző részben beláttuk, hogy az L_a leképezésnek elég nagy a paraméterérték esetén van 6-periódusú ciklikus pályája. Ezt a ciklikus pályát L_a^3 egy

2-periódusú pontjából nyertük, így létezik olyan pont, x_0 , hogy az pontosan 6-szerint periodikus és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $L_a^{3n}(x_0) \in J \cup K$ teljesüljön, az előző fejezet jelöléseivel. Kizárható, hogy a 6-periódusú pályánknak része legyen a $c, 0, 1$ pontok bármelyike. Egyik pont sem eleme a $J \cup K$ halmaznak, $L_a^{-1}(0) = L_a^{-1}(1) = c$ és $L_a(0), L_a(1) \notin J \cup K$ összefüggések alapján lehetetlen, hiszen a pályának lenne 3 egymást követő iteráltja, amik nem esnek $J \cup K$ halmazba.

A periodikus pályára a $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ jelölést fogjuk használni, ahol a pontok indexelése a természetes rendezés alapján történik. Ekkor az $L_a(p_i) = p_{\varphi(i)}$ összefüggés egyértelműen meghatároz egy $\varphi : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ permutációt, vagyis bijekciót. Ennek a permutációnak ciklikusnak kell lennie, hiszen csak így lehet pontosan 6 szerint periodikus a pálya.

A permutációkat a ciklus felbontásuk alapján fogom felírni, ekkor például $(16)(253)$ jelöli a permutációt, ahol $\varphi(1) = 6, \varphi(6) = 1, \varphi(2) = 5, \varphi(5) = 3, \varphi(3) = 2$ és $\varphi(4) = 4$. Ez a felírás egyértelmű, eltekintve a ciklusok sorrendjétől és a ciklusokban a kezdőelem választásától. Így az előbb leírt permutáció írható például $(532)(61)$ alakba is.

3.2.1. A lehetséges 6 ciklusok

Az előzőek alapján jelölje $\varphi : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ azt a permutációt, melyre $L(p_i) = L(p_{\varphi(i)})$. Azon kívül, hogy a φ permutációnak ciklusnak kell lennie, P sorba rendezésének és L tulajdonságainak köszönhetően φ monoton csökkenő a c előtti és a c utáni elemeken is. Tehát c két részre osztja P -t és ezeken a részekén φ , mint leképezés, monoton csökkenő.

Ezek után egy nem túl gyors, de egyszerű kombinatorika feladatot kell megoldanunk. Főleg esetszétválasztással dolgozunk. A fejezet végén megtalálható a 3.2.1 táblázatban az összes fenti feltételeknek eleget tevő 6-ciklus. Most részletesen megtárgyaljuk, hogy hogyan kapható e táblázat.

Kezdjük azzal, hogy hogyan osztja fel c a P halmazt, a két rész elemszámát vizsgálva. A $0 + 6$ felosztás nem lehetséges, mivel egy monoton csökkenő $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ bijekció csak $\phi = (16)(25)(34)$ lehetne, ami nem 6-ciklus. Természetesen pont ugyanígy a $6 + 0$ felbontás sem lehetséges. Általában is igaz, hogy $i + j$ és $j + i$ megfeleltethetőek egymással pont az előbb leírt $(16)(25)(34)$ bijekcióval vett konjugálás segítségével. Ez megfelel az $f(x) = 1 - x$ homeomorfizmussal vett konjugálásnak a függvények esetén. Ezek szerint elég vizsgálnunk $3 + 3, 2 + 4, 1 + 5$ eseteket.

Először is tekintsük a $3 + 3$ esetet. Tegyük fel, hogy $\phi(1) = 6$. A monotonitás ebben az esetben azt jelenti, hogy $\varphi(1) > \varphi(2) > \varphi(3)$, valamint $\varphi(4) > \varphi(5) > \varphi(6)$. Ebből látható, hogy az 1 csak a 6, vagy a 3 képe lehet. Így csak a 3-at képezheti az 1-be, különben egy kisebb ciklusunk alakulna

ki, tehát $\varphi(3) = 1$. Ekkor a 6-ot nem rendelheti 3-hoz, mert az egy 3-ciklust adna, 4-hez, vagy 5-höz sem, mert ekkor a monotonitás miatt a 4-et és az 5-öt nem lenne hová képeznie, tehát csak a 2-t rendelheti a 6-hoz. A 3-at csak az 5-höz rendelhetem ezek után, mivel a 2-höz rendelve kisebb ciklus alakul ki, a 4-hez rendelve pedig nem maradna az 5-nek a monotonitásnak megfelelő elem, tehát $\varphi(5) = 3$. Végül a kisebb ciklust, csak egyféleképpen tudom elkerülni, tehát az adódik, hogy az egyetlen 3+3-as ciklus, ami az 1-et 6-ba képzí: (162453).

Vizsgáljuk tovább azt az esetet, amikor c előtt is, után is 3 eleme van a ciklikus pályának. Tegyük fel, hogy $\varphi(1) = 6$ nem teljesül. A monotonitás miatt 6 csak az 1, vagy a 4 képe lehet, tehát ebben az esetben $\varphi(4) = 6$. Általában is igaz ebben a felosztásban, hogy $\varphi(1)$ csak 4, 5 vagy 6 lehet, mivel $\varphi(3) < \varphi(2) < \varphi(1)$, így 2 nem lehet, valamint $\varphi(1) = 3$ esetén $\varphi(2) = 2$ lenne, ami lehetetlen egy 6 ciklus esetén. Tehát az előzőek alapján két esetünk maradt $\varphi(1) = 4$, valamint $\varphi(1) = 5$.

Tekintsük először azt az esetet, amikor $\varphi(1) = 4$. Ekkor $\varphi(2) = 3$, mivel $\varphi(2) < 4$, 2 nem lehet (akkor nem 6-ciklust kapnánk) és $\varphi(3) < \varphi(2)$ alapján 1 sem, így valóban csak $\varphi(2) = 3$ lehetőség maradt. 3 képe ekkor csak 1 lehet, a monotonitás alapján ezenkívül csak 2 jöhetne szóba, de ekkor egy 2-ciklus alakulna ki. Már csak két értékünk hiányzik és $\varphi(6) = 2$ esetén egy 5-ciklus alakul ki, tehát nem lehetséges, $\varphi(6) = 5$ -ből pedig $\varphi(5) = 2$ sérti a monotonitást, tehát ellentmondásra jutottunk. Tehát $\varphi(1) = 4$ nem lehetséges $\varphi(4) = 6$ mellett.

Az előzőek alapján abban az esetben, amikor c előtt és után is 3 pontja van a ciklusnak az az eset vár megvizsgálásra, amikor $\varphi(4) = 6$ és $\varphi(1) = 5$. A monotonitás miatt φ csak a 3-at, vagy a 6-ot képezheti az 1-be.

E szerint folytatjuk esetszétválasztással, tekintsük elsőnek a $\varphi(6) = 1$ esetet. Ebben az esetben vizsgáljuk elsőnek, hogy melyik szám képe a 4. Az 5-é nem lehet, mivel ekkor egy 4 ciklus alakulna ki. A 3 képe sem lehet a 4, mivel ekkor a monotonitás miatt 2 képe 5, 1 képe 6 lenne szükségszerűen, ami lehetetlen. Mivel már fixáltuk, hogy $\varphi(1) = 5$ így 1 képe se lehet már a 4. Egy lehetőség maradt, $\varphi(2) = 4$. Ekkor 5 képe nem lehet 2, mivel ekkor záródna egy 5-ciklus, tehát csak a $\varphi(5) = 3$, és a $\varphi(3) = 2$ eset lehetséges. Tehát kaptunk még egy a feltételeknek megfelelő 6-ciklust, nevezetesen az (153246) permutációt, ami valóban teljesíti a monotonitási feltételeket is.

Most folytatjuk azzal az esettel, amikor $\varphi(3) = 1$.

A feltevéseink szerint most $\varphi(4) = 6$, $\varphi(1) = 5$ és $\varphi(3) = 1$. Ekkor meg kell még határoznunk, hogy a 2, 5 valamint a 6 számok melyikéhez rendeli a bijekció a 2, 3, valamint a 4 értékeket. $\varphi(5) = 2$ nem lehetséges, mert ez csak $\varphi(6) = 1$ mellett lehetséges a megadott monotonitási feltételek mellett. $\varphi(2) = 2$ is kizárt, így csak a 6-hoz rendelheti 2-t, vagyis $\varphi(6) = 2$.

$\varphi(2) = 4$ ekkor ciklust zárna be, így csak $\varphi(2) = 3$ és ebből adódóan $\varphi(5) = 4$ lehetséges. Ezzel megkaptuk az utolsó lehetséges ciklusunkat, az (154623)-t, abban az esetben, ha c előtt és után ugyanannyi pontja van P -nek.

Következhetnek a más felosztásokhoz tartozó ciklusok. Tekintsük most azon ciklusokat, amelyeknél $p_1, p_2 < c$, valamint p_3, p_4, p_5 és p_6 nagyobb c értékénél. Ebben az esetben a monotonitás alapján a 6 értéket csak 1 vagy a 3 helyen veheti fel a φ , hasonlóan az 1 érték csak a 2, vagy a 6 helyekhez tartozhat. Először tegyük fel, hogy $\varphi(1) = 6$. Ekkor $\varphi(6) = 1$ nem lehetséges (ezzel egy 2-periodikus pályát kapnánk), így szükségképpen $\varphi(2) = 1$. Mivel meghatároztuk az 1 és 2 képét, így a hozzárendelést a monotonitási feltétel, valamint az egy-egyértelműség egyértelműen meghatározza már a következő bijekciót.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ebben a felírásmódban az alsó sor minden eleme a felette álló szám képe. Jól látható, hogy így $\varphi(4) = 4$ adódik, ami ellentmond a feltételeinknek. Így kizárhatjuk a $\varphi(1) = 6$ esetet, így csak a $\varphi(3) = 6$ lehetséges. Az előzőek alapján φ az 1 értéket csak a 6, vagy a 2 helyeken veheti fel. Tegyük fel, hogy $\varphi(6) = 1$. 1 képe ekkor csak 4, vagy 5 lehet, ugyanis 1 és 3 esetén kisebb ciklus alakulna ki, míg 2 esetén $\varphi(2) = 1$ adódna a monotonitás alapján, ami lehetetlen. Újabb esetszétválasztással vizsgáljuk elsőnek a $\varphi(1) = 4$ esetet. Ekkor $\varphi(2) < \varphi(1)$ alapján $\varphi(2) = 3$, mivel 2 nem lehet, az 1-et pedig már máshoz rendeltük. Az 1 és a 2 képét meghatározva a leképezésünk megint csak egyértelműen meghatározott, csak az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

permutáció jöhet szóba. Ezt a permutációt felírva ciklus felbontása alapján, (145236), rögtön látható, hogy ez valóban egy 6-ciklus.

Ezzel még nem vagyunk készen a $\varphi(3) = 6$, $\varphi(6) = 1$ feltevésünkkel, meg kell még vizsgálnunk a $\varphi(1) = 5$ esetet is. Ekkor a 2, 4 és 5 számokhoz kell még hozzárendelni a 2, 3, 4 értékeket. A 4-hez 4-et nem rendelhetünk és a monotonitás miatt 2-t sem, így a $\varphi(4) = 3$ lehetőség marad csak. Ezt, csak egy módon fejezhetjük be kisebb ciklus kialakulása nélkül, így az (152436) 6-ciklushoz jutunk, ami valóban teljesíti a monotonitási feltételt is.

A $p_1 < p_2 < c < p_3 < p_4 < p_5 < p_6$ esetből már csak az maradt hátra, amikor $\varphi(3) = 6$, valamint $\varphi(6) \neq 1$, ekkor $\varphi(2) = 1$. Mivel a legkisebb fennmaradó érték 2, így az vagy a 6-nak, vagy az 1-nek a képe, amiből csak az első eset lehetséges, különben 2-ciklus alakulna ki. A bijekciót, a megmaradó 3 hely és 3 érték között két módon fejezhetjük be a monotonitási, valamint

$\varphi(4) \neq 4$ feltételeket szem előtt tartva, így

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ x & 1 & 6 & 5 & x & 2 \end{pmatrix}$$

alakú permutációkat kapunk, ahol az x -ek helyére a 3 és a 4 értékeket lehet írni. Tetszőleges sorrend mellett a monotonitási feltétel teljesül. Ciklus felbontást használva felírjuk a két lehetséges permutációt, így $(1362)(45)$, valamint (145362) ciklus felbontásokat kapjuk, amiből látható, hogy az egyik eset nem 6-ciklus, így ebből az esetből csak az (145362) permutáció felel meg a feltételeknek.

Végül tekintsük azt az esetet, amikor $p_1 < c < p_2 < p_3 < p_4 < p_5 < p_6$ teljesül. Ahogy azt az előző esetekben láthattuk a monotonitási feltételnek köszönhetően, amennyiben a $\varphi(1)$ értéket meghatározzuk, az már egyértelműen meghatározza a permutációt. Mivel $\varphi(1) = 1$ nem lehetséges, így a monotonitás alapján $\varphi(6) = 1$ teljesül. Szintén a monotonitás miatt a 6 értéket az 1-hez, vagy 2-höz rendelhetjük, mivel 2-ciklus alakulna ki $\varphi(1) = 6$ esetén, így $\varphi(2) = 6$. A 2 értéket csak az 5-höz, vagy az 1-hez rendelhetem, mivel ez a legkisebb megmaradt értékem, de $\varphi(1) = 2$ esetén 3 ciklusom alakulna ki, így csak $\varphi(5) = 2$ lehetséges. Ekkor $\varphi(1) = 5$ kizárható, hiszen így egy kisebb ciklus alakulna ki, tehát a monotonitás alapján $\varphi(3) = 5$. Hasonlóan az 1 képe nem lehet 3, hisz ekkor kisebb ciklus alakulna ki, így csak $\varphi(1) = 4$ lehet, így már adja magát az utolsó pár $\varphi(4) = 3$. Ezzel ezt az esetet is áttekintettük, az egyetlen szóba jövő permutáció az (143526) , ami valóban teljesíti a feltételeket.

Az összes esetet végigvizsgálva azt kaptuk, hogy a lehetséges 6-ciklusok a szerint, hogy c a P halmazt milyen elemszámú halmazokra bontja szét, a következők. Abban az esetben, ha c előtt és után is 3 elem van (162453) , (153246) és (154623) lehetséges, 2+4-es felosztásból (145236) , (152436) és (145362) jöhet szóba, 1+5-ösből pedig (143526) . Tehát összesen 11 ciklus felel meg a feltételeknek a 120-ból (hiszen az utolsók kettő helyett állnak, képviselve a 4+2 és 5+1 szétosztásokat is). Megvizsgálni P -gráffal viszont csak 6-ot kell, mivel a felsorolt hét közül az első kettő egymás konjugáltja $(16)(25)(34)$ szerint. Az (154623) permutáció konjugáltja önmaga, így ez ezért nem szerepel „duplán”.

A következő táblázat összefoglalja ennek a fejezetnek az eredményeit és előre vetíti a következő fejezetek tartalmát.

ciklus	felbontás	kezelése
(162453)	3 + 3	P -gráf
(153246)	3 + 3	
(154623)	3 + 3	P -gráf
(145236)	2 + 4	Kizárható ilyen ciklus létezése
(163254)	4 + 2	az L_a leképezés esetén.
(152436)	2 + 4	P -gráf
(162534)	4 + 2	
(145362)	2 + 4	Az általunk biztosított 6 ciklus
(156324)	4 + 2	nem lehet ilyen alakú.
(143526)	1 + 5	P -gráf
(163425)	5 + 1	

3.3. ábra. A lehetséges 6 ciklusok

A táblázat mind a 11 ciklust tartalmazza, egy rubrikában vannak a konjugáltak. A következő fejezetben vizsgáljuk azokat, amelyek P -gráfja hurkot biztosít számunkra. A két eltérő ciklust külön fejezetben vizsgáljuk.

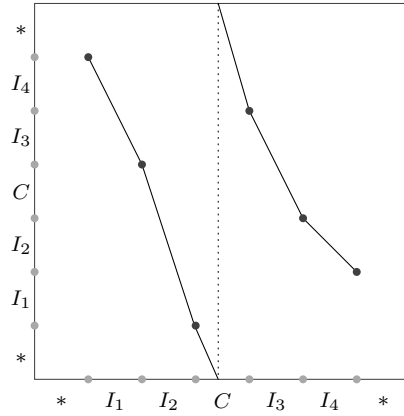
3.3. P -gráfok

Ebben a fejezetben egy igen erőteljes eszközt fogunk használni, Markov-gráfokat, vagy P -gráfokat. A Markov-gráf egy intervallumfelosztáshoz tartozó fedési relációk ábrázolása irányított gráf formájában. Ha az intervallumokat egy ciklikus pálya határozza meg, akkor P -gráfról beszélünk. Hasonlóan az előző fejezethez használjuk a $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ jelölést a 6-ciklikus pályájára, ahol itt is, az indexelés az egységintervallumon vett rendezésük szerint történik, ez értelmes akkor is, ha körleképezésről beszélünk. Az előismeretekben láttuk, hogy ha sikerül bizonyos feltételekkel hurkot csinálnunk, azzal garantálhatjuk bizonyos ciklikus pályák létezését. Néhány esetben ezzel nem fogunk tudni n -ciklusokat garantálni minden $n > 3$ természetes szám esetén, ezekkel az esetekkel a következő fejezetekben foglalkozunk.

Ebben a fejezetben az L_a leképezést körleképezésnek tekintem, vagyis $L_a : S^1 \rightarrow S^1$, ekkor L_a folytonos az $1/2$ helyen, viszont $0 \equiv 1 \pmod{1}$ helyen szakadása lehet, ahol ebben az esetben kétértékűnek tekintjük.

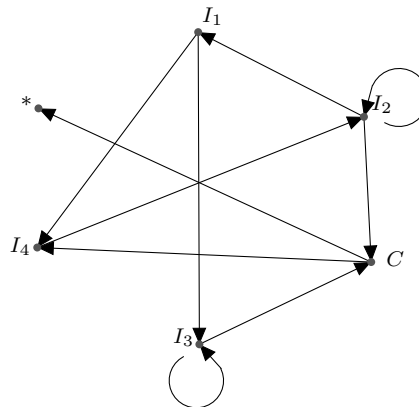
Menjünk sorra az előző fejezetben talált ciklusokon. Kezdjük az (162453) ciklussal. Az ábrán egy sematikus ábra látható erről a ciklusról.

A ciklus legkisebb eleme előtti, valamint a legnagyobbik utáni részt nem ábrázoltam, mivel ezen a részen a függvény nem folytonos körleképezésként



3.4. ábra. Az (162453) ciklus sematikus ábrája.

tekintve, így ezt az intervallumot nem használhatjuk egy hurokhoz. Az ábra nem méretarányos és nem is lineáris a függvény, de a monotonitás kapcsán, P sorrendjét tekintve teljesen hiteles. Így könnyen leolvasható róla, hogy mely intervallumok mely intervallumokat fednek, valamint jól látható, hogy jogosan használjuk az intervallum szót, hiszen minden körív valóban intervallumszerű, hiszen egyik képe se adja ki a teljes körívet. A $[p_1, p_2]$, $[p_2, p_3]$, $[p_4, p_5]$ és $[p_5, p_6]$ intervallumokra rendre az I_1 , I_2 , I_3 és I_4 jelölést fogom használni, valamint $[p_3, p_4]$ intervallumot C -vel fogom jelölni. A cikluson kívül eső részre, vagyis a $[0, p_1] \cup [p_6, 1]$ halmazra a $*$ jelölést használva a következő P -gráf adódik:



3.5. ábra. Az (162453) ciklus P -gráfja.

Látható, hogy van egy körünk a gráfban, mégpedig $I_2 \rightarrow I_1 \rightarrow I_4 \rightarrow I_2$,

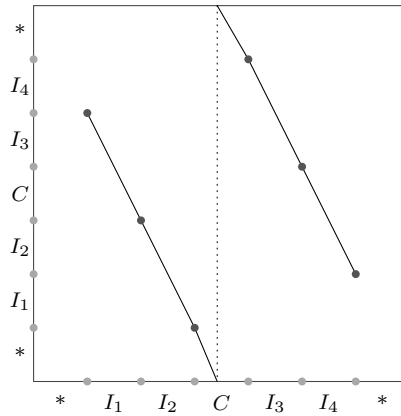
ahol az I_2 intervallum magát is fedi, tehát $I_2 \subset L_a(I_2)$ is teljesül. Továbbá minden intervallum végpontja P egy pontja.

A körhurok-állítást fogom használni az

$$I_2 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_2 \rightarrow I_1 \rightarrow I_4 \rightarrow I_2$$

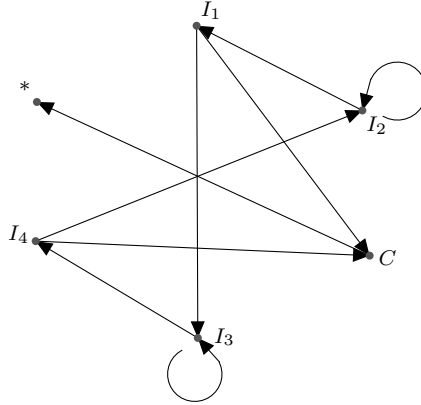
hurokra. Ez minden $n \geq 3$ esetén előállítható. A körhurok-állítás feltételei teljesülnek, mivel az adott három körív a bevezetett definíciók alapján intervallumszerű. Amennyiben az intervallum végpontjait ki tudjuk zárni, úgy a felírt hurkok szükségszerűen egy n -periódusú pontot biztosítanak, mivel az ívek belseje diszjunkt és a hurok nem tartalmaz ismétlődést. A végpontok kizárhatóak, mivel P pontjai, viszont egyik intervallumban sem szerepel a p_4 pont. Ezzel készen vagyunk ezzel a ciklussal, amennyiben L_a leképezésünkben olyan 6-os ciklus van, aminek pontjai az (162453) , vagy az (153246) permutációnak megfelelően mennek körbe, úgy L_a -nak minden $n > 2$ ciklusa van. Azt már eddig is tudtuk, hogy $a < 1$ esetén kettő ciklusa nincsen a leképezésünknek.

Következő permutációnak nézzük az (154623) -t. Ennek sematikus képe látható az ábrán.



3.6. ábra. Az (154623) ciklus sematikus ábrája.

Ennek a ciklusnak a P -gráfja a következő lesz.



3.7. ábra. Az (154623) ciklus P -gráfja.

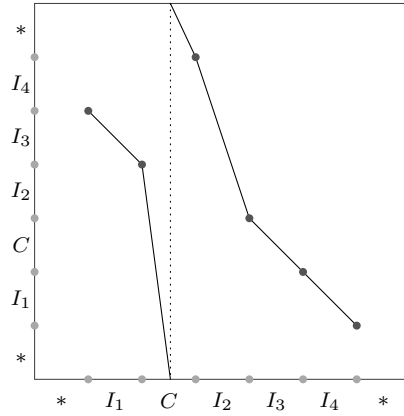
Ebben az esetben látható, hogy a gráf tartalmaz egy négy hosszú kört, nevezetesen az $I_1 \rightarrow I_3 \rightarrow I_4 \rightarrow I_2 \rightarrow I_1$ hurkot, valamint az I_2 intervallum fedi önmagát. Ez a fedés megfelel az általános fedés feltételeinek, a szemantikus ábrán jól látható, hogy egyik intervallum sem fedi az egész kört. Ennek köszönhetően minden $n > 3$ esetén meg tudunk adni egy

$$I_1 \rightarrow I_3 \rightarrow I_4 \rightarrow I_2 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_2 \rightarrow I_1$$

típusú hurkot, ahol legalább egy I_2 szerepel. A hurok-állításnak köszönhetően tehát minden $n > 3$ esetén lesz egy $x \in [p_1, p_2] = I_1$ pontunk, aminek a megfelelő iteráltjai a hurok megfelelő intervallumaiban lesznek az n hosszú hurkot tekintve, valamint $L_a^n(x) = x$. Amennyiben ki tudjuk zárni a végpontokat x lehetséges értékei közül, úgy ez egy n -ciklust fog garantálni. A végpontokat, P pontjait kizárhatjuk $6 \nmid n$ esetén, valamint akkor is, ha az I_2 intervallum több mint 2-szer ismétlődik, hiszen tudjuk, hogy $L_a(p_2) = p_3$ és $L_a(p_3) = p_1$.

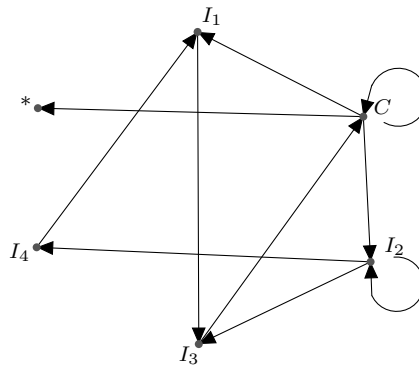
Ezzel minden $n > 3$, $n \neq 6$ esetén kizártuk P pontjait, így ebben az esetben azt kaptuk, hogy az L_a leképezésnek minden $n > 3$ esetén van n periódusú pontja. Ezzel végeztünk azon permutációkkal, ahol c mindkét oldalán három pontja van P -nek.

Folytassuk a vizsgálatot az (152436) permutációval.



3.8. ábra. Az (152436) ciklus sematikus ábrája.

Egy sematikus ábra segítségével itt is látható, hogy az összes folytonossági körív intervallumszerű, tehát egyik intervallum képe sem fedi S^1 -et. Ezek szerint a P -gráf segítségével kereshetünk hurkokat és azokra alkalmazhatjuk a körhurok-állítást. Az ábrán ezen gráf látható.



3.9. ábra. Az (152436) ciklus P -gráfja.

Ebben a gráfban több kör is van, ami tartalmaz olyan intervallumot, mely fedi magát, így használhatjuk a korábban látott módszert. Ez az első eset azonban, hogy jelentőseggel bír, hogy körleképezésnek tekintjük az L_a függvényt, mivel ezek a hurkok mind tartalmazzák a C intervallumot. Tekintsük például a következő, ismétlődést nem tartalmazó hurkokat, ahol megköveteljük, hogy a végén legalább egy C legyen, vagyis tényleg hurokról

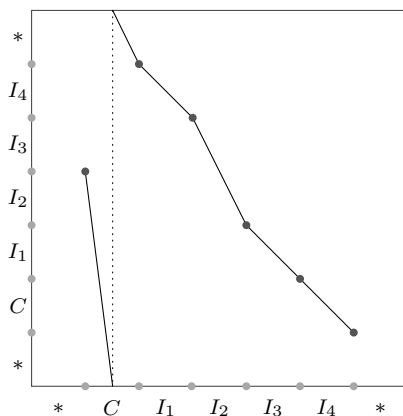
beszélhessünk.

$$C \rightarrow I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow C \rightarrow C \rightarrow \dots \rightarrow C.$$

Meg kell még vizsgálni, hogy P elemei nem teljesíthetik a feltételeket, tehát a körhurok-állítás P pontjaitól eltérő pontot ad, ekkor már biztosak lehetünk benne, hogy egy n ciklust nyerünk, hiszen a különböző intervallumok belseje diszjunkt és a hurkunkban nincs ismétlődés. P pontjai, viszont valóban nem teljesíthetik a feltételeket, hiszen azok pályája tartalmazza a p_1 pontot, ami nem része egyik intervallumnak sem a három hurkot alkotó közül.

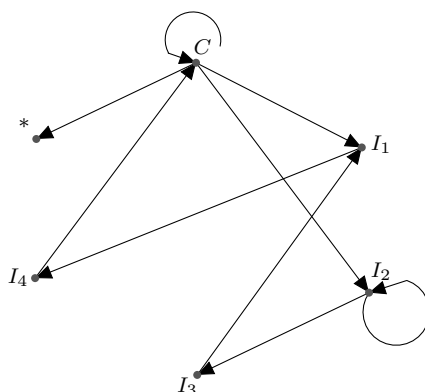
Ezzel beláttuk, hogy ebben az esetben is kell lennie minden $n > 3$ esetén n ciklusnak. Bár ebben az esetben 3 ciklusnak is kell lennie.

Van még egy $2 + 4$ felosztású ciklusunk, de mivel ez más megközelítést igényel, így ezt külön tárgyaljuk. Tekintsük tehát az (143526) permutációt.



3.10. ábra. Az (143526) ciklus sematikus ábrája.

A sematikus ábrán itt is látható, hogy minden körív intervallumszerű.



3.11. ábra. Az (143526) ciklus P -gráfja.

A P -gráfon látható, hogy megjelenik egy kör, amiben van olyan intervallum, ami fedi magát. Ezek szerint vehetjük a

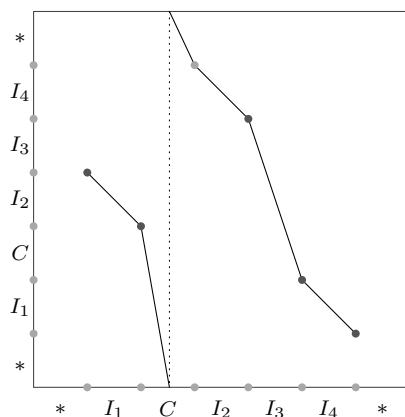
$$C \rightarrow I_1 \rightarrow I_4 \rightarrow C \rightarrow C \rightarrow \dots \rightarrow C$$

hurkokat és a körhurok-állítás segítségével ezek minden $n > 3$ esetén biztosítanak nekünk egy n -ciklust, mivel p_4 -et egyik intervallum sem tartalmazza, így P pontjai nem jöhetnek szóba. Tehát az intervallumok belsejének páronkénti diszjunktsága és a hurok ismétlődésmentessége biztosít számunkra egy $x \in C \cup I_1 \cup I_4 \subset S^1$ pontot, melyre $L_a^n(x) = x$ és x alapperiódusa n .

A maradék két ciklust a következő fejezetekben vizsgáljuk meg.

3.4. A kizárható ciklus

A következő permutációnk az (145236) ciklus. Erről is szerepeltetek egy szemantikus ábrát, mivel ez segítségünkre lesz, ha nem is a P -gráf megrajzolásában. Az intervallumokat újra úgy jelölve, hogy valós függvényként tekintve, az ábra szerint a C intervallumba essen a szakadás, tehát az intervallumok rendre $*, I_1, C, I_2, I_3, I_4$ és $*$.



3.12. ábra. Az (145236) ciklus sematikus ábrája.

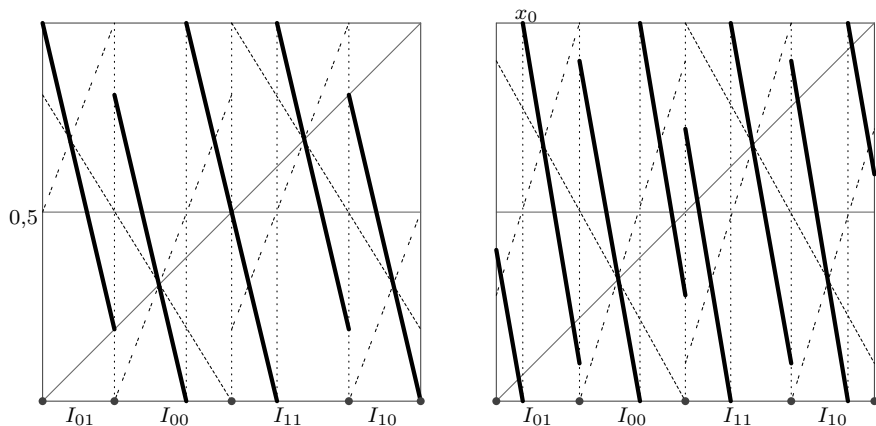
Tekintsük a sematikus ábrát figyelembe véve, hogy lineáris csökkenő függvényről van szó. Legyen e lineáris leképezés meredekségének abszolút értéke m , a meredekség fogalma természetesen körleképezések esetén is értelmezhető lenne, de az egyszerűség kedvéért tekintsük újra a leképezésünket, mint $I \rightarrow I$ leképezést. Azt biztosan feltehetjük, hogy $m > 1$, ennél többet is feltehetnénk, de nem lesz rá szükségünk. Kihhasználjuk azt is, hogy az egyparaméteres családban vagyunk, tehát a két folytonossági intervallumon a meredekség megegyezik. A következő összefüggések olvashatóak le az ábráról használva a $|J|$ jelölést egy J intervallum hosszára. $m|I_1| = |I_2|$, $m|I_2| = |I_4|$, $m|I_4| = |I_1|$. A három egyenletből egyszerűen adódik, hogy $m^3|I_1| = |I_1|$, ami lehetetlen, hiszen tudjuk, hogy $m > 1$ és $|I_1| > 0$. Ezzel ezt az esetet kizártuk.

Megjegyzés. Ez az eset nem szimmetrikus esetben is kizárható, elég feltenni, hogy mindkét folytonossági intervallumon a meredekség abszolút értéke egynél nagyobb.

Mielőtt megvizsgáljuk az utolsó permutációt, rátérünk a három-ciklusok vizsgálatára. Ennek eredményeit felhasználjuk az (145362) ciklus vizsgálatakor.

3.5. A három ciklusok

Eddig láttuk, hogy az L_a leképezésnek nincsen kettő ciklusa, amennyiben $a < 1$. A fenti eredmények bizonyos esetekben csak $n > 3$ esetén garantálnak pontosan n -periodikus pályát. Meg kell vizsgálnunk, hogy mi a helyzet 3-ciklusokkal. Az ábra az első három iteráltat mutatja $a = 0,808$, valamint $a > 0,808$ esetén.



3.13. ábra. Az L_a^3 leképezés az $a = 1/4 + \sqrt{5}/4$ paraméterérték mellett és ennél nagyobb paraméterértékkel.

A harmadik iterált a vastaggal jelölt vonal, az első szaggatott, a második a felemásan szaggatott.

Egy korábbi fejezetben már láttuk, hogy L_a^2 szakadási helyei $1/2 \pm 1/4a$, valamint az $1/2$ helyeken vannak $a > 1/2$ esetén és ilyen paraméterérték mellett valóban három szakadási hely van. A szakadási helyek az I egységintervallumot a korábbi jelöléssel az I_{01} , I_{00} , I_{11} és I_{10} intervallumokra osztják. Ezeken az intervallumokon L_a^2 lineáris és növekvő. Az I_{01} intervallumon a felvett értékek $L_a^2(0)$ -tól növekednek 1-ig. Amennyiben $L_a^2(0) < 1/2$, annyiban lesz egy $x_0 \in I_{01}$ pont, amelyre $L_a^2(x_0) = 1/2$. Ebben a pontban az L_a^3 leképezésnek szakadási helye lesz, melyre $\lim_{x \rightarrow x_0-0} L_a^3(x) = 0$, más szakadási hely nem lesz az I_{01} intervallum belsejében, így a $[0, x_0]$ intervallumon az L_a^3 leképezés folytonos, monoton csökkenő, tehát lesz fixpontja. Mivel az L_a leképezés fixpontja az I_{00} intervallumba esik és 2-periodikus pályája nincsen, így az L_a^3 előbb talált fixpontja az L_a leképezésnek egy 3-periódusú pontja lesz. Már csak meg kell vizsgálni, hogy milyen esetben lesz $L_a^2(0) < 1/2$. Szimmetrikus esetben az

$$L_a(x) = \begin{cases} a - 2ax, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 1 + a - 2ax, & \text{ha } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

alakot ölti a leképezésünk. Mivel $L_a(0) = a > 1/2$, így

$$L_a^2(0) = L_a(a) = 1 + a - 2a^2.$$

Egy egyszerű másodfokú egyenlőtlenség megoldásaként adódik, hogy a kívánt $L_a^2(0) < 1/2$ egyenlőtlenség pozitív a esetén az $a > 1/4 + \sqrt{5}/2$ esetén teljesül.

Ezzel beláttuk, hogy $a > 1/4 + \sqrt{5}/2$ esetén az L_a leképezésnek van 3-periodikus pontja. Igazából ennél több is igaz, az $a < 1/4 + \sqrt{5}/2$ esetén nincs a leképezésnek 3-periodikus pontja. Ez abból látható, hogy ekkor az előbb elmondottak alapján az L_a^3 leképezésnek legfeljebb 6 ága lehet, vagyis 5 szakadási pontja. Minden ág lineáris csökkenő függvény, így legfeljebb 1-szer metszheti az átlót. 2 metszéspont az eredeti leképezés fixpontja. Ekkor szimmetria miatt, ha csak $L_a^3(1/2) \neq 1/2$, ami pont metszéspont is, akkor a leképezés, csak 2, vagy 4 helyen metszheti az átlót, mindkettő lehetetlen, hiszen a fixpontól eltérő periodikus pontok mind egy 3-periódusú pálya pontjai. Könnyű számolással adódik, valamint az ábrán is látható, hogy az adott $L_a^3(1/2) = 1/2$ kritérium csak $a = 1/4 + \sqrt{5}/2$ esetén áll fenn.

3.6. Az utolsó ciklus

Végül térjünk rá az (145362) ciklus vizsgálatára. Ehhez a ciklushoz nem rajzolunk sematikus ábrát, sem P -gráfot, de megemlítjük, hogy az nem tartalmaz hurkot. A hat ciklus létezését oly módon bizonyítottuk, hogy beláttuk, hogy az L_a^3 leképezésnek van kettő periodikus pályája, mégpedig annak a folytonossági intervallumnak a belsejében, amely a fixpontot is tartalmazza, mivel ebben megadható egy lópatkó. Ezt a két intervallumot fogjuk elsőként jobban megvizsgálni. Ekkor a két megfelelő folytonossági intervallumot jelöljük I_{000} , illetve I_{111} módon.

Megjegyzés. Ez összhangban van a korábban használt jelöléssel, vagyis I_{000} azon pontok halmazának lezártját jelöli, melyek az $I_0 = [0, c)$ intervallumba esnek, valamint ebbe az intervallumba esik az első és második iteráltjuk is.

Ekkor ez $I'_{000} \rightarrow I'_{111} \rightarrow I'_{000}$ hurok olyan 2 periódusú pályát biztosít, mely I_{000} eleme és képe I_{111} -ben fekszik. Ez az L_a leképezésre azt jelenti, hogy van egy 6-periódusú pályája, melynek az az I_{000} és az I_{111} intervallumokban is van pontja.

Hasonlóan az előző fejezetben leírtakhoz számolható, hogy

$$I_{000} = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4a}; \frac{1}{2} - \frac{1}{4a} + \frac{1}{8a^2} \right].$$

Ezután rátérhetünk a vizsgálandó ciklusra. Tudjuk, hogy

$$p_1 < p_2 < 1/2 < p_3 < p_4 < p_5 < p_6$$

teljesül. Meg fogjuk mutatni, hogy $p_1 < 1/2 - 1/4a$, valamint $p_2 > 1/2 - 1/4a + 1/8a^2$ minden esetben teljesül, így az a ciklus, amit mi biztosítottunk nem lehet ilyen típusú. Mivel ismerjük pontosan L_a képletét és azt is tudjuk,

hogy p_1 iteráltjai $1/2$ melyik oldalára esnek, így könnyen kiszámolható $p_1 = L_a^6(p_1)$ kibontásával, hogy a $b = 2a$ egyszerűsítő jelölést használva

$$p_1 = \frac{b(b-1)(b^4 - b^2 - 1)}{2(b^6 - 1)}.$$

Ekkor a kívánt egyenlőtlenség, vagyis $p_1 < \min(I_{000})$ felírható a b paraméterrel. Ekkor az a paraméter lehetséges értékei alapján az $1,5 < b < 2$ becslés teljesül. Így az egyenlőtlenség kiírása után egyszerűsíthetünk a $b-1 > 0$ szorzótényezővel, valamint szorozhatjuk az egyenlőtlenséget a $b^3 - 1$, valamint a $b^3 + 1$ kifejezésekkel, hiszen ezek pozitívak. Végül a

$$b^4 + b^2 - 1 > 0$$

egyenlőtlenségre jutunk, ami $b > 1,5$ alapján teljesül. Tehát $(1 + \sqrt{5})/4$ felett a tetszőleges értékére teljesül, hogy $p_1 < \min(I_{000})$.

Mivel ebben az esetben $\varphi(2) = 1$ és $p_2 < 1/2$, így $p_1 = a - 2ap_2$, erről az imént láttuk be, hogy $p_1 < 1/2 - 1/4a$. Az egyenlőtlenségbe behelyettesítve p_1 értékét a és p_2 változókkal kifejezve pont a kívánt $p_2 > \max I_{000}$ eredményre jutunk. Ezek szerint $P \cap I_{000} = \emptyset$, vagyis (145362) típusú ciklus nem lehet az a ciklus, amit L_a^3 leképezés lópatkója garantál.

Ezzel beláttuk, hogy az általunk garantált 6-ciklus nem lehet (145362) típusú permutáció. Így szükségképpen a 3.2.1 táblázat egy másik permutációja is előkerül az $a > (1 + \sqrt{5})/4$ paraméterérték tartományban, ami garantálja, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$ esetén van az L_a leképezésnek n alapperiódusú ciklikus pályája.

4. fejezet

Összefoglaló

A szakdolgozatban beláttuk, hogy az L_a leképezésnek $1 \geq a > \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ esetén minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ mellett van ciklikus pontja n periódussal. Ez a határ éles határ, $a < (1 + \sqrt{5})/4$ esetén nincsen 3-periodikus pálya. Azt is láttuk, hogy 2-periodikus pálya nincsen $1/2 < a < 1$, valamint $a < 1/2$ paraméterérték esetén, de meglepően, $a = 1/2$ mellett végtelen sok van. Azt is láttuk, hogy egy ilyen leképezésnek csak speciális ciklusokat követhetnek a ciklikus pályáik, amiket $n = 6$ esetén át is tekintettünk. Megjegyzem, hogy volt olyan ciklus, amiről beláttam, hogy, bár az alapfeltételeket teljesíti mégsem jöhet szóba, de egyik ciklusról sem bizonyítottam, hogy ténylegesen létezik. Az utolsó fejezetben látott módszerrel ez vizsgálható. Látható, hogy a paraméter rögzítése mellett p_1 kifejezhető a függvényében. Ez bizonyítja, hogy egy típusú ciklussal csak egy pálya fordulhat elő.

Az is látható az eredményekből, hogy a Sarkovszkij tétel nem teljesül az L_a leképezéscsaládra. Folytonos esetben, ha van fixponton kívül periodikus pálya, akkor pontosan 2-szerint periodikus pálya is van, de a mi esetünkben elég nagy a esetén minden periódusú pálya van, kivétel 2. Azonban, ha a 2-től eltekintünk, akkor megkaptuk eredményül, hogy az utolsó periódus, ami „megszületik” a 3, ami összhangban van a Sarkovszkij elmélettel.

Irodalomjegyzék

- [1] Robert L. Devaney *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems (Second Edition)*, Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [2] L. Alsedà, J. Llibre, M. Misiurewicz *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One (Second Edition)*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2000.
- [3] L. Alsedà, J. Llibre, M. Misiurewicz and C. Tresser, *Periods and entropy for Lorenz-like maps*, Ann. Inst. Fourier 39 (1989), 929–952.
- [4] M. Misiurewicz, W. Geller *Farey-Lorenz permutations for interval maps*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 28 (2018), 1850021