Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Projektív speciális lineáris csoportok szupercsoportjai

MSc Matematikus Szakdolgozat

Írta:

Sávoly János Gábor

Témavezető:

Dr. Szabó Csaba

Budapest, 2019

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, dr. Szabó Csabának, hogy az első egyetemi évemben felkeltette érdeklődésemet az absztrakt algebra iránt és felvetette ezt az érdekes témát.

Köszönettel tartozom továbbá dr. Ágoston Istvánnak, akire a tanszéken tanulmányi ügyekkel kapcsolatos kérdéseimmel kapcsolatban mindig számíthattam.

Köszönet illeti családomat, illetve barátaimat a türelmükért és támogatásukért.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Legyen $\mathbb{F}_q$ a $q = p^k$ $(k \geq 2)$ elemű véges test. A $PSL(d,q)$ csoport természetes módon hat a $PG(d-1,q)$ projektív téren, melynek $n := 1 + q + \cdots + q^{d-1}$ pontja van. Következésképpen $PSL(d,q)$-ra S_n részcsoportjaként is tekinthetünk.

Ismeretes, hogy az M_{12} és M_{24} sporadikus egyszerű csoportok rendre tartalmazzák $PSL(2,11)$-et, illetve a $PSL(2,23)$-at [7]. Természetes módon merül fel a következő kérdés: S_n mely részcsoportjai tartalmazzák $PSL(d,q)$-t?

A dolgozatomban az előbbi kérdéssel foglalkozom. Célom a $PSL(d,q)$ csoportok szupercsoportjainak vizsgálatával kapcsolatos főbb eredmények összefoglalása.

A legalább 3-dimenziós esetre vonatkozóan az 1970-es évek első felében született válasz. B. A. Pogorelov [2], R. List [3], W.M. Kantor és T.P. McDonough [5] egymástól függetlenül látták be a következő állítást:

Legyen $d > 2$ és $n := 1 + q + \cdots + q^{d-1}$. Ha $PSL(d,q) \leq G \leq S_n$, akkor vagy $G \leq P\Gamma L(d,q)$ vagy $G \leq A_n$.

A *2. fejezetben* véges Jordan-csoportokat fogjuk vizsgálni. Belátjuk Margraff és Jordan tételeit, melyek egy Jordan-csoport tranzitív részcsoportjának elemszámára adnak korlátot és a következő fejezetben kulcsfontosságúnak fognak bizonyulni. Ennek a résznek a megírása során elsősorban H. Wielandt klasszikus munkájának a témához kapcsolódó [1] elemeire támaszkodtam. Az abban szereplő szöveg jelöléseitől eltértem pár helyen.

Az előkészületeket követően a *3. fejezetben* belátjuk a fentebb említett szupercsoportokra vonatkozó állítást. Kétféle módon bizonyítjuk a szupercsoport-tételt, az első P.Batthacraya [4], a második pedig R. List [3] nevéhez fűződik.

A *4. fejezetben* néhány, a $d = 2$ esetre vonatkozó állítást ismertetek bizonyítás nélkül.

Az *5. fejezet* Rövid összefoglaló.

2. fejezet

Jordan-csoportok

2.1. A Jordan-csoportok alapvető tulajdonságai

A továbbiakban legyen G a véges Ω halmazon értelmezett permutációcsoport.

2.1. Definíció. *Egy egynél nagyobb elemszámú $\Gamma \subset \Omega$ halmazt Jordan-halmaznak nevezünk, amennyiben $G_{\Omega\setminus\Gamma}$ tranzitív módon hat Γ-n.*

Az $\Omega \setminus \Gamma$ halmazt az elkövetkezendőkben Δ-val fogjuk jelölni és a Γ halmaz Jordan-komplementumának nevezzük. Ha G k-tranzitív és $|\Delta| < k$, akkor Γ nyilván Jordan-halmaz. Az ilyen típusú halmazokat „triviális" Jordan-halmaznak fogjuk nevezni.

2.2. Definíció. *Ha egy G csoport tranzitív és rendelkezik „valódi" Jordan-halmazzal, akkor Jordan-csoportnak nevezzük.*

2.3. Állítás. *Ha Γ Jordan-halmaz, akkor tetszőleges $g \in G$-re $g\Gamma$ szintén Jordan-halmaz lesz [10].*

Bizonyítás: $g^{-1}G_{\Omega\setminus\Gamma}g$ fixen hagyja $\Omega \setminus g\Gamma$-t és tranzitív $g\Gamma$-n. □

2.4. Állítás. *Ha $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Gamma$ olyan Jordan-halmazok, melyekre $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$, akkor $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ Jordan-halmaz. $\langle G_{\Delta_1}, G_{\Delta_2} \rangle$ tranzitív lesz az egyesítésen és a többi pontot fixen hagyja [10].*

Bizonyítás: Ha $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ vagy $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, akkor kész vagyunk. Tegyük fel, hogy nem ezen esetek egyike áll fenn. Legyen Δ_1 és Δ_2 a G csoport Γ_1-hez és Γ_2-höz tartozó Jordan-komplementuma és H $:= \langle G_{\Delta_1}, G_{\Delta_2}\rangle$. H, a definiálásából fakadóan fixen hagyja a $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ komplementerének minden elemét. H-nak $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$-n való tranzitvitásához elég belátni, hogy létezik $g \in G$, amivel tetszőleges $\gamma_1 \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_2$ és $\gamma_2 \in \Gamma_2 \setminus \Gamma_1$ esetén $\gamma_2 = g\gamma_1$. Mivel létezik $y' \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$ és G_{Δ_1} tranzitív Γ_1-gyen ezért létezik $h_1 \in G_{\Delta_1}$, melyre $h_1\gamma_1 = \gamma'$. Hasonló elgondolás alapján létezik $h_2 \in G_{\Delta_2}$, mellyel $h_2\gamma' = \gamma_2'$, azaz $h_1h_2\gamma_1 = \gamma_2$. □

2.5. Tétel. *Legyen $\Gamma, \Delta \subseteq \Omega$ és G tranzitív Ω-n. Tegyük fel, hogy G_Γ tranzitív $\Omega \setminus \Gamma$-n és G_Δ tranzitív $\Omega \setminus \Delta$-n. Ekkor $|\Gamma| \leq |\Delta|$ esetén létezik olyan $g \in G$, amivel $g^{-1}G_\Delta g \leq G_\Gamma$.*

Bizonyítás: Ha $\Gamma = \emptyset$ és $\Delta = \Omega$, akkor $G_\Gamma = G$ és $G_\Delta = 1$, így a tétel állítása triviálisan teljesül.

Tegyük fel, hogy $\Gamma \neq \emptyset$ és $\Delta \neq \Omega$, amiből következik $\Delta \neq \emptyset$ és $\Gamma \neq \Omega$. G tranzitivitása miatt feltehetjük, hogy az $\Omega \setminus \Gamma \neq \emptyset$ és $\Omega \setminus \Delta \neq \emptyset$ halmazoknak létezik legalább egy közös pontja, hiszen ellenkező esetben G_Δ helyett, annak egy megfelelő $y^{-1}G_\Delta y$ konjugáltját is vehetnénk. A $H = \langle G_\Gamma, G_\Delta\rangle$ csoport tranzitív $\Omega \setminus (\Gamma \cap \Delta)$-n. Ekkor két eset lehetséges:

1. $\Omega \neq \Omega \setminus (\Gamma \cap \Delta)$, ekkor indukcióval adódik az állítás.
2. $\Omega = \Omega \setminus (\Gamma \cap \Delta)$, akkor $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$ és mivel $\Omega \setminus \Gamma$ és $\Omega \setminus \Delta$-nak van közös pontja kapjuk, hogy $|\Gamma| + |\Delta| < |\Omega|$. Ebből következik, hogy $\Omega \setminus \Gamma$-nak és $\Omega \setminus t\Delta$-nak van legalább egy közös pontja minden $t \in G$-re. Így, ha olyan $t \in G$-t választunk, melyre $\Gamma \cap t\Delta \neq \emptyset$, G_Δ helyett $t^{-1}G_\Delta t$-t tekintve visszatérünk az előző esethez.

□

2.6. Definíció. *Legyen G permutációcsoport Ω-n. A $B \subseteq \Omega$ halmazt a G blokkjának nevezzük, ha minden $g \in G$-re: $gB = B$ vagy $gB \cap B = \emptyset$.*

2.7. Állítás. *Ha B és B' a G blokkjai, akkor $B \cap B'$ szintén blokk.*

Bizonyítás: Legyen $A = B \cap B'$. Ha $A \cap gA \neq \emptyset$ valamely g-re, akkor $B \cap gB \neq \emptyset$ és $B' \cap gB' \neq \emptyset$. Mivel B és B' blokkok, ezért $gA = gB \cap gB' = B \cap B' = A$. □

Az $\emptyset$, illetve Ω és annak egy pontból álló halmazai ($\{\alpha\}$) minden esetben G blokkjai lesznek, így ezeket triviális blokknak nevezzük.

2.8. Definíció. *Az Ω-n ható G permutációcsoportot primitívnek nevezzük, ha csak triviális blokkokat tartalmaz.*

2.9. Definíció. *Legyen G permutációcsoport Ω-n. Azt mondjuk, hogy $\Delta \subseteq \Omega$ fix blokkja G-nek, ha $\Delta = G\Delta$. Ekkor $g \in G$ egy g_Δ permutációt indukál Δ-n. Ezen g_Δ-k összeségét a G^Δ-val jelöljük és a G Δ-ra vonatkozó alkotójának nevezzük.*

2.10. Állítás. *Ha G^Δ tranzitív, akkor Δ G orbitja.*

2.11. Definíció. *Legyen G egy az Ω-n ható permutációcsoport. Amennyiben G-nek van nem triviális blokkja, akkor azt mondjuk, hogy a csoport imprimitív. A szóban forgó blokkot az adott csoport imprimitivitási tartományának [9] nevezzük.*

Legyen $\mathbb{F}_q$ a $q = p^k$ $(k \geq 2)$ elemű véges test.

Példák Jordan-csoportokra:

1. Hasson az $AGL(d, q)$ csoport a q^n affin téren. $d \geq 2$ esetén, minden legfeljebb d-dimenziós affin altér komplentere Jordan-halmaz lesz.
2. Hasson a $PSL(d, q)$ csoport a $PG(d-1, q)$ projektív téren, ekkor $d \geq 3$ esetén a projektív lineáris alterek komplementerei Jordan-halmazok lesznek.
3. Tegyük fel, hogy G Wr H tranzitív és imprimitív módon hat az $\Gamma \times \Delta$ halmazon, ekkor látható, hogy rögzített $\delta \in \Delta$ esetén a $\{(\gamma, \delta) \mid \gamma \in \Gamma\}$ halmaz Jordan-halmaz.

2.12. Tétel. *Legyen G tranzitív Ω-n. Továbbá legyen $U \leq G$ és Δ az U egy orbitja. Ha U^Δ primitív Δ-n és $\Omega < 2|\Delta|$, akkor G primitív Ω-n.*

Bizonyítás: Legyen B a G blokkja és $\beta \in B$. Azt akarjuk megmutatni, hogy B triviális. Nyilvánvalóan B, valamint $U\beta = \Delta$ az U blokkjai. A **2.7. Állítás** miatt $\Delta \cap B$ az U-nak és ezáltal U^Δ-nek is blokkja. A feltételeink miatt $\beta \in \Delta \cap B$.
U^Δ primitivitása miatt $\Delta \cap B$ triviális, így két eset lehetséges:

1. $\Delta \cap B = \Delta$. Ekkor $\Delta \subseteq B$, ezért $B = \Omega$, hiszen $|B| \mid n = |\Omega|$ és $|B| \geq |\Delta| > \frac{n}{2}$.

2. $\Delta \cap B = \beta$. Ekkor minden $g \in G$-re $\Delta \cap gB$ blokkja lesz U^{Δ}-nak. Ha megegyezik Δ-val, akkor azt kapjuk mint az előbb, nevezetesen $gB = \Omega = B$. Tegyük most fel, hogy a $\Delta \cap gB$ blokk legfeljebb egy $g \in G$ elemet tartalmaz. Így a különböző gB-k száma nagyobb, mint $|\Delta| > \frac{n}{2}$. Mivel ez a szám n-nek osztója, meg kell hogy egyezzen n-nel. Ebből következik, hogy $|B| = 1$.

Mindkét alkalommal azt kaptuk, hogy B csak triviális blokk lehet, tehát G primitív. $\square$

2.13. Állítás. *Legyen G tranzitív csoport Ω-n, melyre $G = \langle C, D\rangle$, ahol $C, D \leq G$. Legyen C primitív $\Gamma \subset \Omega$-n és $C \leq G_{\Omega\setminus\Gamma}$, és D primitív $\Delta \subset \Omega$-n és $D \leq G_{\Omega\setminus\Delta}$. Ekkor G primitív Ω-n.*

Bizonyítás: Mivel G tranzitív, ezért $\Gamma \cup \Delta = \Omega$ és $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$. Ebből következik, hogy $|\Gamma| > n/2$ és $|\Delta| > n/2$. Az állítás következik a **2.12. Tételből**. $\square$

2.14. Tétel. *Ha $\Delta \subseteq \Gamma$ és $\alpha \in \Gamma$, akkor $\psi = \bigcap\limits_{\alpha \in g\Delta} g\Delta$ blokkja a tranzitív G csoportnak.*

Bizonyítás: Legyen $h \in G$ és $B \cap hB \neq \emptyset$. Ha $\alpha \in hB$, akkor $\alpha \in g\Delta$-ból következik $\alpha \in gh\Delta$, ennélfogva $B \subseteq hB$. Mivel $|B| = |hB|$, $B = hB$ adódik. Legyen most $\beta \in B \cap hB$. G tranzitivitása miatt létezik $k \in G$, amelyre $k\alpha = \beta$. Azaz $a \subseteq k^{-1}B$, $a \subseteq hk^{-1}B$ és $a \subseteq B$. Az előzőekből: $B = k^{-1}B = hk^{-1}B$. Ha alkalmazzuk k-t az utolsó egyenlőségre, akkor $B = hB$ adódik. Azt kaptuk, hogy$B$ a G csoport blokkja. $\square$

Egy gyakran használt megfigyelés:

2.15. Állítás. *Legyen $\emptyset \subset \Delta \subset \Gamma$. Ha G primitív Ω-n, akkor bármely két különböző $\alpha, \beta \in \Omega$-hoz létezik $g \in G$, melyre $\alpha \in g\Delta$ és $\beta \notin g\Delta$.*

Bizonyítás: Legyen $\alpha, \beta \in \Omega$. A **2.14. Tétel** alapján, ha $\Delta \subset \Gamma$ és $\alpha \in \Gamma$, akkor $\alpha = \bigcap\limits_{\alpha \in g\Delta} g\Delta$, amiből következik, hogy létezik g melyre $\beta \notin g\Delta$. $\square$

2.2. Jordan-tétel

2.16. Definíció. *Egy G csoportot Ω-n k-primitívnek ($k = 1, 2, \ldots, n$) nevezünk, ha k-tranzitív és azon részcsoportjai, melyek $k-1$ elemet fixen hagynak nem csak* *tranzitívak a többin, hanem primitívek is. G k-primitív Ω-n ($k \geq 2$), ha G tranzitív és G_α $(k-1)$-primitív $\Omega \setminus \alpha$-n.*

2.17. Feltételrendszer. *Tegyük fel, hogy az Ω-n értelmezett G permutációcsoportra teljesül a következő három feltételt:*

1. *G primitív Ω-n.*
2. *$\Omega = \Gamma \cup \Delta$ és $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$, továbbá $1 < |\Gamma| < |\Omega|$ és $1 \leq |\Delta| < \Gamma$.*
3. *G_Δ tranzitív Ω-n.*

2.18. Tétel (Jordan). *Induljunk ki egy a **2.17. Feltételrendszer** által leírt csoportból. Ekkor G 2-tranzitív. Továbbá, ha G_Δ primitív Γ-n, akkor G 2-primitív.*

Bizonyítás: A tételt $|\Delta|$-ra vonatkozó indukcióval fogjuk belátni. Amennyiben $|\Delta| = 1$, úgy az állítás triviálisan teljesül. Legyen tehát $|\Delta| > 1$. Az alábbi két esetet különböztetjük meg:

1. $2|\Delta| < |\Omega|$. Ekkor $2|\Gamma| > |\Omega|$, és így minden $g \in G$ esetén $\Gamma \cap g\Gamma \neq \emptyset$. Legyen α, $\beta \in \Delta$. A **2.15. Állítás** miatt létezik $g \in G$, melyre $\alpha \in g\Delta$ és $\beta \notin g\Delta$. Mivel $\Gamma \cap g\Gamma \neq \emptyset$, ezért $H = \langle G_\Delta, g^{-1}G_\Delta g \rangle$ tranzitív $\Gamma \cup g\Gamma$-n, hiszen G_Δ tranzitív Γ-n és $g^{-1}G_\Delta g$ tranzitív $g\Gamma$-n. Látható, hogy $\hat{\Delta} = \Delta \cap g\Delta$ azon pontok halmaza, melyeket H minden eleme fixen hagy. Mivel $\alpha \in \hat{\Delta}$ azt kapjuk, hogy $1 \leq |\hat{\Delta}|$ és mivel $\beta \notin \hat{\Delta}$, így $|\hat{\Delta}| < |\Delta|$ adódik. Az indukciós hipotézist használva kapjuk, hogy G 2-tranzitív. Ha G_Δ primitív, akkor a **2.13. Állítás** miatt H szintén primitív. A fenti indukciós érveléssel belátható G 2-primitivitása is.

2. $2|\Delta| \geq |\Omega|$. α, $\beta \in \Gamma$ esetén **2.15 Állítás** miatt létezik olyan $g \in G$, amelyre $\alpha \in g\Gamma$ és $\beta \notin g\Gamma$. Ekkor $\alpha \in \Gamma \cap g\Gamma \neq \emptyset$ és $H = \langle G_\Delta, g^{-1}G_\Delta g \rangle$ megint tranzitív lesz $\Gamma \cup g\Gamma$-n. $2|\Gamma| \leq |\Omega|$-ből következik, hogy $\Gamma \cup g\Gamma \subset \Omega$. Mivel $g\Gamma \neq \Gamma$ kapjuk, hogy $\Gamma \subset \Gamma \cup g\Gamma$. Ebből az indukciós hipotézissel megkapható a primitivitás vagy 2-primitivitás (G_Δ primitivitásától függően).

□

A későbbiekben szükségünk lesz a következő többszörösen tranzitív, illetve primitív csoportokra vonatkozó állításokra.

2.19. Állítás. *Legyen G tranzitív Ω-n és $\alpha \in \Omega$. Ekkor G akkor és csak akkkor $(k+1)$-tranzitív Ω-n, ha G_α k-tranzitív $\Omega \setminus \alpha$-n. Ha G k-tranzitív Ω-n és $\Delta \subset \Omega$, melyre $|\Delta| = d < k$, akkor G_Δ $(k-d)$-tranzitív $\Omega \setminus \Delta$-n.*

2.20. Tétel (Witt). *Legyen G k-tranzitív Ω-n és legyen $\Gamma \subseteq \Omega$, melyre $|\Gamma| = k$. Legyen az $U \leq G_\Gamma$ részcsoport konjugált G_Γ-ban minden olyan G_Γ által tartalmazott V csoporttal, amelyik konjugált G-ben U-val. Ekkor az $\mathbf{N}(U)$ normalizátor k-tranzitív az U által fixen hagyott pontok halmazán.*

2.21. Állítás. *Legyen $\Delta \subset \Omega$, G k-tranzitív Ω-n, $2 \leq k \leq |\Delta| + 1$ és G_Δ tranzitív $\Omega \setminus \Delta$-n. Ekkor G_Δ normalizátora $(k-1)$-tranzitív Δ-n.*

Bizonyítás: Tekintsük egy $\Gamma \subset \Delta$ halmazt, melyre $|\Gamma| = k-1$. Ekkor nyilvánvalóan G_Γ tranzitív $\Omega \setminus \Gamma$-n. A **2.5. Tétel** miatt minden G_Δ-val konjugált csoport, amelyik G_Γ-ban van konjugált G_Δ-val G_Γ-ban. A **2.20. Tétel** miatt $U = G_\Delta$. □

2.22. Tétel. *Minden 2-tranzitív permutációcsoport primitív.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy G 2-tranzitív Ω-n. Legyen B a G blokkja és b_1, $b_2 \in B$, melyekre $b_1 \neq b_2$. Legyen $c_1 \in \Omega \setminus B$. A 2-tranzitivitás miatt létezik $g \in G$, melyre $gb_1 = b_1$ és $gb_2 = 1_2$. Ekkor azonban $gB \cap B \neq \emptyset$, mert b_1 mindkét halmazban benne van. Továbbá $gB = B$ és mivel $c_1 \in B$ is teljesül, ami csak $B = \Omega$ esetén lehetséges. □

2.23. Tétel. *Legyen G tranzitív Ω-n és $\alpha \in \Omega$. G akkor és csak akkor $k+1$ tranzitív Ω-n, ha G_α k-tranzitív $\Omega \setminus \alpha$-n. Ha G k-tranzitív Ω-n és $\Delta \subseteq \Omega$ úgy, hogy $|\Delta| = d < k$, akkor G_Δ $(k-d)$-tranzitív $\Omega \setminus \Delta$-n.*

2.24. Tétel. *Ha $|\Omega| = n$, akkor $Sym(\Omega)$ n-tranzitív $(n \geq 1)$ és $Alt(\Omega)$ $(n-2)$-tranzitív $(n \geq 3)$.*

Bizonyítás: A szimmetrikus csoport esetén, annak definíciójából egyből adódik a tétel. Az alternáló csoport $n = 3$-ra 1-tranzitív. $n-1$-re teljesül az állítás, a **2.23. Tételt** alkalmazva n-re adódik a tétel helyessége. □

2.25. Tétel. *Legyen G primitív Ω-n és G_Δ primitív $\Omega \setminus \Delta = \Gamma$-n, továbbá $1 < |\Gamma| = m < n = |\Omega|$, akkor G $(n-m+1)$-primitív.*

Bizonyítás: $|\Delta| = n - m$-re vonatkozó indukciót alkalmazunk. Ha $n - m = 1$, akkor a feltevés triviálisan teljesül. Tegyük fel, hogy $n - m > 1$. Legyen $\delta \in \Delta$. Ekkor $\Gamma \subset \Omega \setminus \delta$ teljesül és G a **2.18. Tétel** miatt 2-primitív. G_δ így primitív $\Omega \setminus \delta$-n és az indukciós hipotézis miatt azt kapjuk, hogy G_δ $(n - m)$-primitív. Mivel G tranzitív, így a **2.19. Tételből** következik a tétel helyessége. $\square$

$m = 2$ esetén G $(n - 1)$ tranzitív lesz, $m = 3$ esetén pedig $n - 2$ tranzitív, így adódik:

2.26. Következmény. *Ha egy primitív csoport tartalmaz transzpozíciót, akkor szimmetrikus csoport. Ha egy primitív csoport tartalmaz 3-ciklust, akkor alternáló vagy szimmetrikus.*

2.27. Definíció. *Az Ω-n ható G permutációcsoportot regulárisnak nevezzük, ha minden $\alpha \in \Omega$ esetén $G_\alpha = 1$ és G tranzitív.*

2.28. Állítás. *Legyen N reguláris normális részcsoportja G-nek. Legyen $\alpha \in \Omega$. Legyen továbbá A az N-nek azon automorfizmuscsoportja, amely a $g \in G_\alpha$ elemekkel való konjugálásokból áll. A-ra $N \setminus 1$ fölötti permutációcsoportként tekintünk. Ekkor az $\Omega \setminus \alpha$-n értelmezett G_α permutációcsoportok és az $N \setminus 1$-gyen értelmezett A csoport csak a pontok helyzetében különböznek.*

2.3. Marggraf tételek

Most megmutatjuk, hogy egy n-edfokú primitív Jordan-csoport nem tartalmazhat olyan tranzitív részcsoportokat, melyek foka n-hez képest „kicsi”.

2.29. Tétel (Marggraf 1.). *Legyen G primitív Ω-n és G_Δ tranzitív $\Omega \setminus \Delta = \Gamma$-n. Tegyük fel, hogy $1 < |\Gamma| \leq \frac{1}{2}|\Omega|$. Ekkor G 3-tranzitív Ω-n.*

2.30. Tétel (Marggraf 2.). *Ha teljesüljenek az előző tétel feltételei, továbbá $|\Gamma| < \frac{1}{2}|\Omega|$, akkor a G csoport alternáló vagy szimmetrikus.*

Margraff tételeinek a bizonyításához szükségünk lesz a következő két lemmára. A **2.17. Feltételrendszer** keretei között teljesül:

2.31. Lemma. *Létezik egy $\Gamma^\star \subset \Omega$ halmaz, melyre $\Gamma \subset \Gamma^* \subset \Omega$, hogy $\Delta^\star = \Omega \setminus \Gamma^\star$ és $\psi = \Gamma^\star \setminus \Gamma$ következő tulajdonságokkal rendelkezik:*

1. *$G_{\Delta^\star}$ tranzitív $\Gamma^\star$-on.*
2. *$|\psi|$ valódi osztója $|\Gamma|$-nak.(Így $|\psi| \leq \frac{1}{2}|\Gamma|$.)*
3. *Legyen $N = \boldsymbol{N}(G^\star_\Delta)$, ekkor $N_{\Delta^*} = N \cap G^*_\Delta$ tranzitív Ψ-n.*

Bizonyítás:

1. Létezik $g \in G$, melyre $g\Gamma \neq \Gamma$ és $g\Gamma \cap \Gamma \neq \emptyset$, mert különben Γ blokkja lenne G-nek és így G imprimitív lenne. Válasszunk egy olyan $g \in G$ permutációt, melyre $\Gamma \cup g\Gamma = \Gamma^*$ elemszáma minimális. $\langle G_\Delta, g^{-1}G_\Delta g\rangle$ tranzitív Γ^*-on és részcsoportja G_{Δ^*}-nak. Azaz G_{Δ^*} szintén tranzitív Γ^*-on.

2. Megmutatjuk, hogy $\psi = \Gamma^* \setminus \Gamma$ blokkja G_{Δ^*}-nak. Ehhez a következő összefüggést fogjuk vizsgálni: $\Gamma^* \setminus (\psi \cap h\psi) = \Gamma \cup h\Gamma$, ahol $h \in G_{\Delta^*}$. Mivel $\Gamma \cup h\Gamma \subseteq \Gamma^*$ és $\Gamma \cap g\Gamma \neq \emptyset$, ezért $h\Gamma \cap \Gamma \neq \emptyset$ áll fenn. Γ^* minimalitása miatt $\Gamma \cup h\Gamma = \Gamma^*$ vagy $\Gamma \cup h\Gamma = \Gamma$, azaz $\psi \cup h\psi = \emptyset$ vagy ψ. Ez azt jelenti, hogy ψ egy blokk. G^*_Δ tranzitivitása miatt Γ^* és így Γ is ψ-vel konjugált blokkok összege. Mivel $\Gamma \cap g\Gamma \neq \emptyset$ és $\Gamma \neq g\Gamma$, Γ legalább 2 ilyen blokkból áll, azaz $|\Gamma| = k|\psi|$, ahol $k \geq 2$, ahogy feltettük. A $|\psi| \leq \frac{1}{2}|\Gamma|$ összefüggés is fennáll.

3. Legyenek $\alpha, \beta \in \psi$. Ekkor létezik $h \in G_{\Delta^*}$, melyre $h\alpha = \beta$. Mivel $\alpha \notin \Gamma$ kapjuk, hogy $\beta \notin h\Gamma$. $\Gamma \cup g\Gamma$ minimalitásából következik, hogy $h\Gamma = \Gamma$, így $h\Delta = \Delta$ Így kapjuk, hogy $h^{-1}G_\Delta h = G_\Delta$, azaz $h \in N$.

□

2.32. Lemma. *$N^\Delta = \boldsymbol{N}(G_\Delta)$ primitív Δ-n.*

Bizonyítás: A bizonyítást négy lépésben hajtjuk végre:

(a) N tranzitív Δ-n. Ez következik a **2.21. Állításból**, hiszen G a **2.18. Tétel** miatt 2-tranzitív.

(b) Legyen $\alpha \in \Gamma$. Ekkor $N = N_\alpha G_\Delta$ és ezért $(N_\alpha)^\Delta = N^\Delta$. Ennek igazolásához vegyük észre, hogy $N_\alpha G_\Delta \leq N$. Tekintsünk egy $n \in N$ elemet. Mivel N fixen hagyja Δ-t következik, hogy $n\alpha = \beta \in \Delta$. G_Δ tranzitív Γ-n, emiatt létezik $h \in G_\Delta$, melyre $h\alpha = \beta$. Ekkor $n' = nh^{-1} \in N_\alpha$ és így $n = n'h \in N_\alpha G_\Delta$.

(c) N^Δ primitivitását különböző elemszámú Δ halmazokra fogjuk belátni: $|\Delta| = 1$ esetén az állítás triviálisan teljesül. Legyen $2 \leq |\Delta| \leq \frac{1}{2}|\Omega|$. Ezen feltételek mellett többet fogunk belátni, nevezetesen azt, hogy N^Δ 2-tranzitív. Legyenek α, β, α', $\beta' \in \Delta$ adottak. Szeretnénk találni egy olyan $n \in N$ elemet, amellyel $n\alpha = \alpha'$ és $n\beta = \beta'$, vagyis n a következő alakú permutáció:

$$n = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots \\ \alpha' & \beta' & \cdots \end{pmatrix}.$$

G 2-tranzitivitása miatt létezik $g \in G$, melyre $g\alpha = \alpha'$ és $g\beta = \beta'$. Megmutatjuk, hogy $H = \langle G_\Delta, g^{-1}G_\Delta g\rangle$ tranzitív $\Gamma \cup g\Gamma$-n. Ehhez elég belátni, hogy $\Gamma \cap g\Gamma \neq \emptyset$. Ez a reláció természetesen teljesül $|\Delta| < \frac{1}{2}|\Omega|$ esetén.
Vizsgáljuk meg mi történik, ha $|\Gamma| = |\Delta| = \frac{1}{2}|\Omega|$. $\Gamma \cap g\Gamma = \emptyset$-ből következik, hogy $g\Delta = \Gamma$, ami ellentmondásban áll $\alpha' \in \Delta$-val. A **2.5. Tételből** kapjuk, hogy létezik $h \in H$, melyre $g^{-1}G_\Delta g = h^{-1}G_\Delta h$. Ekkor $n = gh^{-1}$ rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal.

(d) Tegyük fel, hogy $|\Delta| > \frac{1}{2}|\Omega|$, azaz $|\Delta| > |\Gamma|$. N^Δ primitivitását $|\Delta|$-ra vonatkozó indukcióval fogjuk belátni. **2.31 Lemma(b)** részéből következik, hogy $|\psi| \leq \frac{1}{2}|\Gamma| < \frac{1}{2}|\Delta|$ és ezért $|\Delta^*| = |\Delta| - |\psi| > \frac{1}{2}|\Delta|$. Legyen $N^* = N_G(G_{\Delta^*})$ és $\alpha \in \psi$. Ekkor a **2.31 Lemma(b)** rész és az indukciós hipotézis miatt $(N^*_\alpha)^{\Delta^*} = (N^*)^{\Delta^*}$ primitív Δ^*-on. Legyen $n \in N^*_\alpha$. Mivel $\alpha \notin \Gamma \cup n\Gamma$, és emiatt $\Gamma \cup n\Gamma \subset \Gamma^*$, megállapíthatjuk a Γ^* minimalitásából az **2.31 Lemma(a)**-hoz hasonlóan, hogy $n\Gamma = \Gamma$ és így $n\Delta = \Delta$. Ebből következik, hogy $N^*_\alpha \leq N$. A **2.12. Tétel** Δ-ra és Δ^*-ra való alkalmazásával adódik N^Δ Δ-ra vonatkozó primitivitása.

□

Ennyi előkészület után be tudjuk bizonyítani Maggraff tételeit:

Bizonyítás: [**Maggraff 1.**] Legyen $\alpha \in \Gamma$. Ekkor a **2.32. Lemma** miatt $(N_\alpha)^\Delta = N^\Delta$ primitív Δ-n. $(N_\alpha)^\Delta$ foka $|\Delta|$ és G_α foka $|\Omega \setminus \alpha| = |\Omega| - 1$, így a **2.18. Tétel** miatt G_α tranzitív $\Omega \setminus \alpha$-n. A $|\Gamma| \leq \frac{1}{2}$ feltételből következik, hogy $|\Delta| > \frac{1}{2}|\Gamma \setminus \alpha|$. A **2.12. Tétel** hipotéziseit kielégíti G_α és $U = N_\alpha$, így G_α primitív $\Omega \setminus \alpha$-n. Legyen

$\delta \in \Delta$. Mivel G_δ és G_α hasonlók, G_δ primitív $\Omega \setminus \delta$-n. A **2.18. Tétel** miatt, mivel $G_\Delta \leq G_\delta$, G_δ 2-tranzitív $\Omega \setminus \delta$-n. Tehát G 3-tranzitív Ω-n. □

Bizonyítás: **[Marggraf 2.]** A tétel nyilvánvalóan teljesül, ha $|\Omega| = 1$. Legyen $|\Omega| = n > 1$. Alkalmazzunk indukciót n-re. Vezessük be Δ^*-t és Ψ-t úgy, mint a **2.31. Lemmában**. Két esetet különböztetünk meg:

1. $|\psi| > 1$. A **2.32. Lemma** miatt N^Δ primitív Δ-n. Továbbá teljesül, hogy $|\psi| \leq \frac{1}{2}|\Gamma| < \frac{1}{2}|\Delta|$ a **2.31. Lemma (b)** része miatt. Mivel $|\psi| > 1$, a **2.31. Lemma (c)** részét alkalmazva N^Δ-ra, Δ-ra és ψ-re (rendre G, Ω és Γ helyett) az indukciós hipotézist, valamint a **2.32. Lemma** bizonyításának (b) részét felhasználva adódik $(N_\alpha^\Delta)^\Delta = N^\Delta \geq Alt(\Delta)$, minden $\alpha \in \Gamma$-ra. Tehát $|N_\alpha| \geq \frac{1}{2}|\Delta|!$. $|N_\alpha^\Gamma| \leq (|\Gamma| - 1)!$ és $N_\alpha^\Gamma \cong N_\alpha / N_\Gamma$-ból következik, hogy

$$N_\Gamma \geq \frac{|N_\alpha|}{(|\Gamma|-1)!} \geq \frac{\frac{1}{2}|\Delta|}{(|\Gamma|-1)!} \geq \frac{1}{2}|\Delta|(|\Delta| - 1).$$

   Ha $|\Delta| > 3$, akkor a $\frac{1}{2}|\Delta|(|\Delta| - 1) > |\Delta|$. Ebben az esetben N_Γ nem reguláris Δ-n. Másrészt $(N_\Gamma)^\Delta = N_\Gamma \neq 1$ normális részcsoportja N^Δ-nak és így $Alt(\Delta)$-nak vagy $Sym(\Delta)$-nak. Azonban ez csak akkor lehetséges, ha $N_\Gamma \geq Alt(\Delta)$. Ha α, β, $\gamma \in \Delta$, akkor $(\alpha\beta\gamma) \in N \leq G$, A **2.26. Következmény** következtében G 3-tranzitív vagyis $Alt(\Omega) \leq G$.
   Legyen most $\Delta \leq 3$. A feltételünk következményeként $|\Gamma| < |\Delta|$, ezért $n \leq 5$. A **2.29. Tétel** miatt G-ről tudjuk, hogy 3-tranzitív következik, hogy $Alt(\Omega) \leq G$.

2. $|\psi| = 1$. Ebben az esetben G_Δ^* 2-tranzitív a **2.31. Lemma (b)** miatt, és így primitív Γ^*-on. G $|\Delta|$-szoros tranzitivitása G következik a **2.25 Tételből**. Azaz G úgy permutálja Δ pontjait, mint $Sym(\Delta)$. $g\Delta = \Delta$-ból és $g \in G$-ből következik, hogy $g \in N$. Ezért $N^\Delta = Sym(\Delta) \geq Alt(\Delta)$. Azt kaptuk, hogy $Alt(\Omega) \leq G$.

□

2.33. Tétel (Jordan). *Legyen p prím és G egy $n = p+k$ fokú primitív csoport, ahol $k \leq 3$. Ha G tartalmaz egy p-edrendű elemet, akkor G alternáló vagy szimmetrikus.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy G tartalmazza az $(1, 2, \ldots p) = g$ ciklust. Legyen Δ az előbbi permutáció által fixen hagyott pontok $\{p + 1, \ldots n\}$ halmaza. Ekkor $\langle g \rangle$ p-Sylow részcsoportja G_Δ-nak. A **2.25. Tétel** miatt G k-tranzitív Ω-n következésképpen a **2.20. Tétel** miatt $\langle g \rangle$ N normalizátora is k-tranzitív Δ-n. Így $N^\Delta = S^\Delta$. A **2.32. Lemma** bizonyításának (b) részében használt érveléssel kapjuk, hogy $(N_\alpha)^\Delta = Sym(\Delta)$ $\alpha \in 1, 2, \ldots p$ esetén. A **2.28. Állítás** miatt N_α izomorf $\langle g \rangle$ egy automorfizmuscsoportjával, így Abel-csoport. Tekintsük N_α kommutátorcsoportját: $N'_\alpha = K$. $K^{\Omega \setminus \Delta} = 1$ és $K^\Delta = Sym'(\Delta) = Alt(\Delta)$. Így tartalmaz egy harmadrendű c ciklust. $c \in G$-ből és G primitivitásából a **2.26. Következményből** kapjuk, hogy $Alt(\Omega) \geq G$. □

2.34. Tétel (Jordan). *Legyen G egy t-tranzitív csoport az Ω halmazon és $\Delta \subset \Omega$ egy olyan t elemszámú halmaz, amelyre $\Omega \setminus \Delta$ tartalmaz Jordan-halmazt. Ha $t \geq 2$, akkor egyértelműen létezik a Γ_0 maximális Jordan-halmaz $\Omega \setminus \Delta$-ban.*

2.35. Tétel (Marggraf). *Legyen G az Ω-n ható Jordan-csoport. Legyen továbbá Γ_1 egy olyan nemtriviális Jordan-halmaz, mely nem imprimitív blokkja G-nek. Legyen Γ_2 minimális Γ_1-gyet valódi módon tartalmazó Jordan-halmaz. Ha $\Theta := \Gamma_2 \setminus \Gamma_1$, akkor Θ imprimitív blokkja Γ_2-nek a G_Θ-ra nézve.*

3. fejezet

A $d > 2$ eset

3.1. Szupercsoport-tétel

Tekintsük a $PSL(d, q)$ csoportot a természetes hatásával a $PG(d-1, q)$ projektív téren, amely $n := 1 + q + \cdots + q^{d-1}$ pontot tartalmaz. Legyen d > 2 és $PSL(d, q) \leq G \leq S_n$.

3.1. Tétel. ***(Szupercsoport-tétel)*** *Legyen $d > 2$ és $PSL(d, q) \leq G \leq S_n$. Ekkor $G \leq P\Gamma L(d, q)$ vagy $A_n \leq G$ ($G = A_n$ vagy $G = S_n$).*

3.2. P. Bhattacharya bizonyítása

Bizonyítás: A bizonyítás két részből fog állni. Először megmutatjuk, hogy a tétel igaz a $d = 3$ esetben. Ebből induktív módon fogjuk belátni $d > 3$-ra.

1. eset: $d = 3$. Ω-val fogjuk jelölni a $PG(2, q)$ projektív sík pontjait. Ekkor $|\Omega| = 1 + q + q^2$. Könnyen ellenőrizhető, hogy a pontok és egyenesek Ω-ra vonatkozó komplementerei „valódi” Jordan-halmazok lesznek, azaz $PSL(3, q)$ Jordan-csoport.

3.2. Lemma. *A $PSL(3, q)$ hatása alatt Ω Jordan-halmazai megegyeznek a pontok és egyenesek komplementereivel.*

Bizonyítás: [**3.2.Lemma**] Legyen Γ a $PSL(3, q)$ csoport „valódi” Jordan-halmaza. Tegyük fel továbbá, hogy $|\Omega \setminus \Gamma| \geq 2$. Legyen u és v két különböző pont $\Omega \setminus \Gamma$-ban. Ha lehetséges, akkor tegyük fel azt is, hogy az uv egyenes nincs benne az $\Omega \setminus \Gamma$

halmazban. Legyen w az uv egyenes olyan pontja, melyre $w \in \Gamma$. Legyen $x \in \Gamma$ egy olyan pont, ami nem illeszkedik az uv egyenesre. Mivel Γ Jordan-halmaz, így $G_{\Omega \setminus \Gamma}$ tranzitív Γ-n. Emiatt létezik egy $g \in G_{\Omega \setminus \Gamma}$, melyre $gw = x$. Azonban g fixen hagyja az u és v pontokat, így az uv egyenest is. Ellentmondásra jutottunk. Azt kaptuk, hogy amennyiben létezik 3 nem kollineáris pont $\Omega \setminus \Gamma$-ban, akkor $\Omega \setminus \Gamma = \Omega$. Vagyis $\Omega \setminus \Gamma$ meg kell, hogy egyezzen az uv egyenessel. Az előbbiek miatt az $\Omega \setminus \Gamma$ halmaz lehetséges elemszámai: 0, 1 vagy $q + 1$.

1. $\Omega \setminus \Gamma = 0$, akkor $\Omega = \Gamma$, ami nem lehetséges hiszen Γ „valódi” Jordan-halmaz.

2. $\Omega \setminus \Gamma = 1$, akkor Γ egy pont komplementere.

3. $\Omega \setminus \Gamma = q + 1$, akkor Γ egy egyenes komplementere.

□

Legyen mostantól G olyan csoport, melyre $PSL(3, q) < G \leq Sym(G)$. Ekkor $PSL(3, q)$ bármely Jordan-halmaza, a G-nek is Jordan-halmaza lesz.

3.3. Lemma. *1. Tegyük fel, hogy a G Jordan halmazai megegyeznek $PSL(3, q)$ Jordan-halmazaival, ekkor $G \leq P\Gamma L(3, q)$.*

2. Ha G Jordan-halmazainak száma szigorúan nagyobb $PSL(3, q)$ Jordan-halmazainak a számánál, akkor létezik Jordan-halmazoknak egy $\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \Gamma_3 \in G$ lánca, ahol Γ_1 egy egyenes komplementuma, Γ_3 pedig egy pont komplementuma, továbbá $G_{\{\Gamma_1\}}$ $(1 + q)$-fokú szimmetrikus csoportként hat $\Omega \setminus \Gamma_1$-gyen.

Bizonyítás: A **3.2. Lemma** miatt G Jordan halmazai egyenesek vagy pontok Ω-beli komplementerei. Tegyük fel, hogy Γ egy olyan halmaz, melynek a komplementuma egy egyenes $PG(2, q)$-ban. Ha $g \in G$, akkor $g\Gamma$ szintén Jordan-halmaz, ami számosságbeli megfontolások alapján csak egyenes komplementere lehet. Azaz G egyenest egyensbe visz, vagyis $PG(2, q)$ egy kollineációcsoportja. Azt kaptuk, hogy $G \leq P\Gamma L(3, q)$.

Legyen Γ_1 egy l egyenes Ω-beli komplementuma, Γ_3 pedig az l egyenesen fekvő α pont komplemenutma. β legyen egy az l egyenesre illeszkedő α-tól különböző pont.

A **2.34. Tételt** használva kapjuk, hogy egyértelműen létezik az $\Omega \setminus \{\alpha, \beta\}$-ban maximális Γ_2 Jordan-halmaz. Az így adódó $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subset \Gamma_3 \in G$ láncot fogjuk vizsgálni. Ha $\Gamma_1 = \Gamma_2$, akkor G egyenest egyenesre képez, így a $PG(2, q)$ projektív sík egy kollineációcsoportja. Vagyis azt kaptuk, hogy $G \leq P\Gamma L(3, q)$.

A **3.2. Lemmához** hasonlóan belátható, hogy $PG(2, q)$ Jordan-halmazai a $P\Gamma L(3, q)$ hatása alatt megegyeznek a pontok és egyenesek komplementereivel. Ellentmondásra jutottunk, hiszen feltettük, hogy G-nek pontok és egyenesek komplementerén kívül van egyéb Jordan-halmaza is. Γ_1 valódi részhalmaza Γ_2-nek. A Γ_2 Jordan-halmazt úgy választjuk meg, hogy a Γ_1-gyet valódi módon tartalmazó halmazok között minimális legyen.

Mivel a G csoport 2-tranzitív, így primitív. Így Γ_1 nem lehet imprimitív blokkja G-nek. A **2.35. Tétel** felhasználásával azt kapjuk, hogy a $\Gamma_2 \setminus \Gamma_1$ halmaz a $G_{\{\Gamma_2\}}$ Γ_2-beli imprimitív blokkja.
$|\Gamma_1| = (1 + q + q^2) - (1 + q) = q^2$ és $|\Gamma_3| = (1 + q + q^2) - 1 = q + q^2$.
Amennyiben $t = |\Gamma_2 \setminus \Gamma_1|$, akkor $t \mid q^2$, ami megegyezik $|\Gamma_1|$-el. Legyen $q = p^\alpha$, ahol p prím. Ekkor t felírható $t = p^\beta$ alakban. $|\Gamma_3 \setminus \Gamma_1| = (q^2 + q) - q^2 = q$. Így $t \leq \frac{q}{p} \leq \frac{q+1}{2} = \frac{|\Omega \setminus \Gamma_1|}{2}$.

Használjuk a **2.30. Tételt**. Jelen esetben $t = 1$ és így G $(q + 2)$-tranzitív, emiatt $G_{\{\Gamma_1\}}$ S_{q+1}-ként, hat $\Omega \setminus \Gamma_1$-gyen. Egyébként, ha $t > 1$, akkor $\Gamma_2 \setminus \Gamma_1$ Jordan-halmaza a $\Omega \setminus \Gamma_1$-gyen ható $G_{\{\Gamma_1\}}$ csoportnak. Azt is megmutattuk, hogy $|\Gamma_2 \setminus \Gamma_1| < \frac{1}{2}|\Omega \setminus \Gamma_1|$. Továbbá mivel G_{Γ_1} 2-tranzitív és így primitív $\Omega \setminus \Gamma_1$-gyen, A **2.30. Tételt** felhasználva kapjuk, hogy $G_{\{\Gamma_1\}}$ úgy hat $\Omega \setminus \Gamma_1$-gyen, mint az alternáló vagy a szimmetrikus csoport. □

3.4. Definíció. *Egy G csoport szekciója alatt [12] olyan H/N faktorcsoportot értünk, amelyre $H \leq G$ és $N \trianglelefteq G$.*

3.5. Lemma. *Legyen p prím és X egy p^m-rendű tranzitív permutációcsoport, melynek létezik P normális és tranzitív p-részcsoportja. Ekkor $k \geq m^2 \log p$ esetén X-nek nem létezik A_k-val izomorf szekciója.*

Bizonyítás: Indukciót fogunk alkalmazni m-re. Két esetet különböztetünk meg:

1. Tegyük fel, hogy X imprimitív Ω-n. Az imprimitív blokkakat jelölje rendre $\Gamma_1, \Gamma_2 \dots \Gamma_{p^r}$. Méretük p^s, ahol $r+s = m$. Legyen $\Gamma := \Gamma_1$. Ekkor $X_{\{\Gamma\}}$ tranzitív Γ-n és tartalmazza P^Γ-t, mint p-részcsoportot. Így, ha $X_1 := X^\Gamma_{\{\Gamma\}}$, akkor az indukciós hipotézis miatt X_1-nek nincs olyan A_k-val izmorf szekciója, melyre $k_1 \geq s^2$ log p. Ha $\Delta := \Gamma_1, \dots, \Gamma^r_p$ és $X_2 := X^\Delta$, akkor X_2 tartalmazza P^Δ-t, mint egy tranzitív normális részcsoporot, így ismétetlen az indukciós hipotézisre hivatkozva X_2-nek nincs A_{k_2}-vel izmorf szekciója, ahol $k_2 \geq r^2$ log p. Most $X \subset X_1$ Wr X_2. Így X-nek nincs A_k-val izomorf szekciója, ha $k \geq$ max $\{r^2 \text{ log } p, s^2 \text{ log } p\}$ és méginkább nincs olyan A_k szekciója, melyre $k \geq m^2$ log p.

2. Tegyük fel, hogy X primitív. Most P elemi Abel p-csoport, ami p^m-rendű reguláris csoport és így kapjuk, hogy X részcsoportja $AGL(m, p)$-nek. X bármely A_k-val izomorf szekciója $GL(m, p)$-nek is szekciója lenne, melynek rendje kisebb, mint p^m. Így, ha X-nek nincs A_k-val izomorf szekciója, akkor $k! < p^{m^2}$. A Stirling approximációs formulát használva és logaritmust véve kapjuk, hogy
$$k \text{ log } k - k < m^2 \text{ log } p.$$
Ekkor elég nagy k esetén ($k \geq e^2$) adódik a
$$k \text{ log } k - k \geq k$$
egyenlőtlenség, így $k < m^2$ log p. Vagyis, ha $k \geq m^2$ log p, akkor X-nek nincs A_k-val izomorf szekciója.

□

A következő lemma a **3.1.Tétel** a $d = 3$ esetben.

3.6. Lemma. *Ha $PSL(3, q) \leq G \leq S_n$, akkor vagy $G \leq P\Gamma L(3, q)$ vagy $G \leq A_n$.*

Bizonyítás: Ha G Jordan-halmazai megegyeznek $PSL(3,q)$ Jordan-halmazaival, akkor a **3.2. Lemma** miatt $G \leq P\Gamma L(3,q)$. Ezek után tegyük fel, hogy G-nek több Jordan halmaza van, mint $PSL(3,q)$-nak. Ekkor a **3.3. Lemma** 2. pontja miatt miatt létezik Jordan-halmazoknak egy $\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \Gamma_3$ lánca, melyre $|\Gamma_1| = q^2$, $|\Gamma_3| = q^2 + q$ és $G_{\{\Gamma_1\}}$ úgy hat $\Omega \setminus \Gamma_1$-gyen, mint A_{q+1} vagy S_{q+1}.

Legyen P a $G_{\Omega\setminus\Gamma_1}$ p-Sylow részcsoportja. Mivel Γ_1 Jordan-halmaz, így P tranzitív Γ_1-gyen. Legyen $X := N(P)$. A Frattini-elv miatt $N(P)^{\Omega\setminus\Gamma_1} = G^{\Omega\setminus\Gamma_1}$, mert $G_{\Gamma\setminus\Omega_1}$ normális $G_{\{\Gamma\setminus\Omega_1\}}$-ban, ami megegyezik $G_{\{\Gamma_1\}}$-el. Így $N(P)$-nek van A_{q+1}-el izomorf kompozíciófaktora. A **3.5. Lemma** miatt tudjuk, hogy X-nek nincs A_k-val izomorf szekciója $k > (2a)^2 \log p$ esetén, ahol $q = p^a$. Ekkor $q + 1 = p^a + 1 \geq (2a)^2$ $\log p$, ha q elég nagy ($q \geq 2^8$ már elég).

Következik, hogy $N(P)$ A_{q+1} kompozíciófaktora $N(P)_{\{\Gamma_1\}}$-ben van. Azaz $N(P)$ tartalmaz egy Γ_1-gyet pontonként fixen hagyó részcsoportot, ami A_{q+1}-ként hat $\Omega \setminus \Gamma_1$-gyen, ha q elég nagy. Alkalmazva a **2.33. Tételt** kapjuk, hogy $A_n \leq G$, hiszen $\Omega \setminus \Gamma_1$ megfelelően nagy q-ra többszörösen tranzitív Jordan-halmaz. $\square$

2. eset: $d > 3$. Legyen Γ_1 a $PG(d-1,q)$ projektív tér hipersíkja. Ha az Γ_1-gyet tartalmazó Jordan-halmazok k-alterek komplementumai ($0 \leq k \leq d-2$), akkor G a $PG(d-1,q)$ tér egy automorfizmus csoportja vagyis a $P\Gamma L(d,q)$ részcsoportja.

Tegyük fel, hogy nem csak k-alterek tartalmazzák Γ_1-gyet. Innen d-re vonatkozó indukcióval bizonyítjuk az állítást. A $d = 3$ esetben már láttuk, hogy igaz. Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden $PSL(n,q)$-t tartalmazó csoportra, ahol $n \leq d$.

Az $\Omega \setminus \Gamma_1$-gyen ható $G_{\{\Gamma_1\}}$ csoport $\Omega \setminus \Gamma_1$ tartalmazza $PSL(d-1,q)-t$. Az induktív hipotézis miatt $G^{\Omega\setminus\Gamma_1} \leq Alt(\Omega \setminus \Gamma_1)$. Legyen P a $G_{\{\Gamma_1\}}$ p-Sylow részcsoportja. Ekkor P q^{d-1} fokú tranzitív csoport Γ_1-gyen. Azt kapjuk, hogy $Alt(\Omega \setminus \Gamma_1) \leq N(P)^{\Omega\setminus\Gamma_1}$. Így $N(P)$ rendelkezik egy $Alt(q^{d-2}+q^{d-3}+\cdots+q+1)$-vel izomorf kompozíciófaktorral.

Másrészt, ha $X := N(P)$, akkor X tranzitív P normális p-részcsoporttal és a **3.1. Lemma** miatt X-nek nincs olyan A_k szekciója, melyre $k > a^2(d-1)^2 \log p$, ahol $p = q^\alpha$. Így $N(P)$-nek van Γ_1-gyet pontonként fixáló részcsoportja, amely alternáló csoportként hat $\Omega \setminus \Gamma_1$-gyen. A **2.33. Tétel** miatt $A_n \leq G$ elég nagy q-ra. Kis q értékekre kézi számítások alkalmazásával viszonylag könnyen adódik az állítás. $\square$

3.3. R. List bizonyítása

3.7. Tétel. ***(R. List tétel kimondása)*** *Legyen p prím, $q = p^v$ és $|\Omega| = (q^n - 1)/(q-1)$, $n \geq 3$. Ha H a $Sym(\Omega)$ $PSL(n,q)$-t tartalmazó részcsoportja, akkor $H \subseteq P\Gamma L(n,q)$ vagy $H \subseteq Alt(\Omega)$.*

Legyen $G = PSL(n,q)$ és tegyük fel, hogy $H \subsetneq P\Gamma(n,q)$. G 2-tranzitív Ω-n. Legyenek a és b az Ω különböző elemei, valamint $\Psi = \{a, b\}$, ekkor $H_\Psi \supset G_\Delta$. Ha $\sigma \in H \setminus P\Gamma(n,q)$, akkor létezik egy l egyenes, aminek a σ-val vett képe nem egyenes lesz és, ha x és y az l egyenes pontjai, akkor létezik $\rho \in G$, melyre $\rho\sigma x = x$ és $\rho\sigma y = y$. A 2-tranzitivitás miatt feltehetjük, hogy $x = a$ és $y = b$. G_Ψ orbitjai: $\{a\}$, $\{b\}$, $l \setminus \{a, b\}$ és $\Gamma \setminus l$. Létezik $t \in l$, melyre $\rho\sigma t \notin l$, egyébként σ az l egyenest σ^{-1} l-képébe vinné, ami ellentmond l választásának, melyről feltettük, hogy σ-képe nem egyenes lesz. Ebből következik, hogy H_Ψ tranzitív $\Omega \setminus \Psi$-n, azaz H 3-tranzitív Ω-n.

Tegyük fel, hogy H k-tranzitív Ω-n, ahol $3 \leq k \leq q$. Legyen $\Sigma_k = \{a_1, \ldots, a_k\}$ k pont az l egyenesen és legyen $\Sigma_{k-1} = \{a_1, \ldots, a_{k-1}\}$. Tekintsük $H_{\Sigma_{k-1}}$-re $\Omega \setminus \Sigma_{k-1}$-en értelmezett permutációcsoportként. Mivel G_{Σ_k} az l összes pontját fixen hagyja és tranzitív $\Omega \setminus l$-en következik, hogy amennyiben Δ a H_{Σ_k} leghosszabb orbitja az $\Omega \setminus \Sigma_{k-1}$-en, úgy $|\Delta| > [(q^n - 1)/(q-1)] - (q+1)$. Rendezzük a H_{Σ_k} $\Omega \setminus \Sigma_{k-1}$-beli orbitjait növekvő sorrendbe: $1 = n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_s = |\Delta|$. Nyilvánvalóan $n_{s-1} < q - 1$. Két eset lehetséges:

1. $s = 2$ és $H_{\Sigma_{k-1}}$ 2-tranzitív $\Omega \setminus \Sigma_{k-1}$-gyen.
2. $n_2 \cdot n_{s-1} \leq n_s$ és $H_{\Sigma_{k-1}}$ imprimitív $\Omega \setminus \Sigma_{k-1}$-gyen az [1] hivatkozásban szereplő 17.4 Tétel alapján.

Tegyük fel, hogy $H_{\Sigma_{k-1}}$ imprimitív $\Omega \setminus \Sigma_{k-1}$-en. Mivel $G_{\Sigma_k} = G_l$ tranzitív $\Omega \setminus l$-en, ezért az $\Omega \setminus l$ és $l \setminus \Sigma_{k-1}$ halmazok a $H_{\Sigma_{k-1}}$ $\Omega \setminus \Sigma_{k-1}$-beli imprimitív blokkjainak az uniója. Ebből következik, hogy a blokkok hossza kisebb, mint $q - 1$.

Ha $\mathbb{F}_q$ minden eleme négyzetelem, akkor G_l tartalmazza $J \cong GL(n-2, q)$-t. J

$(q+1)$ darab $q^{n-2}-1$ hosszú és egy $(q^{n-2}-1)/(q-1)$ hosszú Λ orbitot indukál $\Omega \setminus l$-en. J projektív módon hat Λ-n és lineárisan a többi $q^{n-2}-1$ hosszú orbiton, így 2-tranzitív Λ-n. J_α, $\alpha \in \Lambda$, felbontja az egyes $q^{n-2}-1$ hosszú orbitokat $q^{n-2}-q$ és $q-1$ hosszú orbitokra. (Figyeljük meg, hogy $n=3$ esetén, Λ egy pontból áll és a $q-1$ hosszú orbitok változatlanok maradnak.)

Ha $\mathbb{F}_q$ tartalmaz nem négyzetelemeket, akkor F_q nem zérus elemeinek fele négyzetelem lesz és G_l tartalmaz egy K részcsoportot, amely izomorf $GL(n-2,q)$-nak egy 2-indexű részcsoportjával. Ha K felváltja J-t, akkor létezik $2(q+1)$ darab $(q^{n-2}-1)/2)$ orbit, melyek mindegyike $(q^{n-2}-q)/2$ és $(q-1)/2$ méretű orbitokra particionálódik és egy Λ orbitra, amelynek hossza $(q^{n-2}-1)/(q-1)$ és amin K 2-tranzitív módon hat.

Ha $\alpha \in \Lambda$, akkor az α-t tartalmazó blokk mérete legalább $1+(q-1)$ vagy $1+[(q-1)/2]$ kell, hogy legyen és ezek rendre F_q nem zérus elemeihez tartoznak, melyek mindegy négyzetelem vagy nem négyzetelem. $|l \setminus \Sigma_{k-1}|$ nem fejezhető ki q és $(q+1)/2$ egész többszöröseként. Így $H_{\Sigma_{k-1}}$ nem imprimitív $\Omega \setminus \Sigma_{k-1}$-en. Ebből következik, hogy H $k+1$-tranzitív Ω-n és így indukcióval H $(q+1)$-tranzitív Ω-n. Mivel G_l tranzitív $\Omega \setminus l$-en, H $(q+2)$-tranzitív Ω-n.

Tegyük fel, hogy $n=3$. Ekkor H $(q+2)$-tranzitív és q^2+q+1 fokú csoport. Egy permutációcsoport fokára vonatkozóan léteznek határok a tranzitivitásának függvényében. Például egy k-tranzitív n-edfokú csoport, amely nem szimmetrikus vagy alternáló teljesíti a $k < 3log(n)$ összefüggést [1] **(21.oldala)**. Mivel $q+2 > 3log(q^2+q+1)$ teljesül $q \geq 19$, ezért $H \supseteq Alt(\Omega)$. $q \leq 19$ esetén könnyen belátható, hogy $H \supseteq Alt(\Omega)$. Például a $q=2$, $q=3$ és $q=5$ esetek kivételével létezik található prím (q^2+q+1)-3 és $(q^2+q+1)-(q+2)$, így alkalmazható a **2.33. Tétel**.

Tegyük fel hogy $n \geq 3$. Legyen P a G p-Sylow részcsoportja, ahol $q=p^v$. P tartalmaz egy T részcsoportot azzal a $(*)$ tulajdonsággal, hogy fixen hagyja egy hipersík pontjait és tranzitív Ω q^{n-1} fennmaradó pontján. Legyen T' a H-nak egy olyan R p-Sylow részcsoportja, amely maximális a $(*)$ tulajdonságra nézve. Ha T'' R-nek egy $(*)$ tulajdonságú részcsoportja és $T' \supsetneq T''$, akkor $\langle T', T''\rangle$-nek kell, hogy legyen egy legalább $p \cdot q^{n-1}$ hosszú orbitja. De $p \cdot q^{n-1} > (q^{n-1})/(q-1)$ minden p prímre és $n \geq 0$ egészre. Így T' egy egyedi részcsoportja R-nek, ami maximális a $(*)$

tulajdonságra nézve.

Látszódik, hogy amennyiben a h hipersík a $PG(n-1,q)$-ban és $h \supseteq l$, akkor H_h konjugált H_l-ben minden H_l alakú részcsoporttal, amellyel konjugált H-ban. **A 2.20. Tétel** miatt H_h $(q+2)$-tranzitív h-n, a H_h fixponthalmazán. G_h h-n értelmezett csoport tartalmazza $PG(n-1,q)$-t. Így H_h h-n értelezett csoport tartalmazza $Alt(h)$-t n-re való indukció alkalmazásával. A [1]-ban szereplő **15.1. Tétel (W. A. Manning)** alapján azon 4-tranzitív és m fokú csoport minimális foka, amely nem szimmetrikus vagy alternáló legalább $(m-1)/2$.

A következő lemma egyszerű következménye annak, hogy H minimális foka kisebb, mint $(|\Omega|-1)/2$, ahol H_h és $\Omega \setminus h$ szerepét megfelelően K és Δ játssza.

3.8. Lemma. *Legyen K részcsoportja $Sym(\Delta)$-nak, ahol $|\Delta| = q^r, r \geq 3$ és tegyük fel, hogy K tartalmaz egy $Alt(M)$-mel izomorf kompozíciófaktort, melyre $|M| = m = (q^r-1)/(q-1)$. Ekkor létezik egy $\sigma \in K$ elem, amely a Δ több, mint $\frac{1}{2}(q^r+1)$ pontját fixen hagyja.*

Bizonyítás: Az $Alt(M)$ csoport legkisebb permutáció reprezentációjának a fokai $m > 9$ esetén m és $\frac{1}{2}m(m-1)$. Mivel $Alt(M)$ a K egy kompozíciófaktora, ezért $K \supseteq N_1 \cong L \setminus Alt(M)$, L_1-nek $Alt(M)$-mel vett bővítése. L_1 orbitjai az N_1 imprimitív tartományai. Ebből következik, hogy N_1 tartalmaz egy $N_2 \cong L_2 \setminus Alt(M)$ részcsoportot, azzal a tulajdonsággal, hogy az N_2 Δ-n vett reprezentációi primitívek 1 vagy m hosszú orbitokkal, amelyek az $Alt(M)$ triviális és természetes reprezentációihoz tartoznak vagy imprimitív blokkok, melyek hossza legfeljebb $q-1$. Ha $q \neq 2$, válasszunk a $q-1$ és $2(q-1)$ közé eső tetszőleges p prímet. Ha $q = 2$, legyen $p = 3$ és tartozzon σ egy $Alt(M)$-beli p-ciklushoz. $Alt(M)$ természetes reprezentációjában σ több, mint $\frac{1}{2}(m+1)$ blokkot fixen hagy és a σ által fixen hagyott blokkoknak pontonként fixnek kell lenniük.
Végezetül megjegyezzük, hogy amennyiben $m < 9$, $q = 2$ és $n = 4$, úgy H 4-tranzitív 15 fokú csoport, és így $H \supseteq Alt(\Omega)$. $\square$

4. fejezet

A $d = 2$ eset

Ebben a fejezetben a $PSL(2,p) \leq X \leq A_{p+1}$ relációt kielégítő X csoportokat keressük [8]. Az ilyen alakú csoportok meghatározásának kérdését $p \geq 7$ esetén prímszám esetén Mathieu [11] vetette fel. Példák p-re, amikor X nem maximális részcsoportja A_{p+1}-nek:

1. p = 7, $PSL(2,7) \leq AGL(3,2) \leq A_8$
2. p = 11, $PSL(2,11) \leq M_{12} \leq A_{12}$
3. p = 23, $PSL(2,23) \leq M_{24} \leq A_{24}$

4.1. Mathieu problémája

4.1. Tétel. *Ha $p > 7$ prím, akkor X 4-tranzitív $p+1$-fokú permutációcsoport.*

4.2. A prímhatványok esete

A prímhatványok körében a következő eredmény született:

4.2. Tétel. *Legyen X olyan csoport, melyre $PSL(2, q) < X \leq A_{q+1}$, ahol q prímhatvány. Ekkor X vagy 3-tranzitív vagy X részcsoportja $P\Gamma L(2, q)$.*

5. fejezet

Összefoglalás

Dolgozatomban ismertettem a véges testek feletti projektív speciális lineáris csoportokra vonatkozó „szupercsoport tételt”, amely ezen csoportok szupercsoportjait írja le a $d \geq 3$ esetben.

A tétel két bizonyítását mutattam be. Ezek közül a P. Bhattacharya által bemutatott módszerre fókuszáltam elsősorban. A projektív speciális csoportok (természetes hatásuk alatt kibotankozó) Jordan-csoport voltát használja ki. A dolgozatom első felében közelebbről megismerkedtünk a Jordan-csoportok (többszörös) primitivitásának, illetve tranzitivitásának a csoportra struktúrájára gyakorolt hatásaival, illetve a Jordan-halmazok bizonyos tulajdonságaival.

6. fejezet

Jelölések

$G_{\{\Delta\}}$: az Δ halmaz stabilizátora. (3.fejezet)
G_{Δ}: az Δ halmaz pontokénti stabilizátora.
$PSL(d,q)$: d-edrendű projektív speciális lineáris csoport a q test fölött.
$P\Gamma L(d,q)$: d-edrendű projektív szemilineáris csoport
$\mathbf{N}(\Delta)$: Δ G-beli normalizátora.
G Wr H: a G csoport H-val vett koszorúszorzata.

Irodalomjegyzék

[1] H. Wielandt, Finite Permutation Groups. *Academic Press*, New York and London, 1964.

[2] B. A. Pogorelov, Maximal subgroups of subgroups of symmetric groups that are defined on projective spaces over finite fields (translated from Russian), *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR Volume 16 Issue 1*, 640?645, 1974. doi: 10.1007/BF01098818

[3] R. List, Groups containing $PSLn(q)$ as a subgroup, *Geometriae Dedicata Volume 4 Issue 2-4*, Springer, 373-375, 1975. doi: 10.1007/BF00148769

[4] P. Bhattacharya, On groups containing the protective special linear group, *Archiv der Mathematik Volume 37 Issue 1*, Springer, 295-299, 1981. doi: 10.1007/BF01234360

[5] W. M. Kantor and T.P. Macdonough, On the maximality of $PSL(d-1,q)$, $d>2$. *Journal of the London Mathematical Society Volume s2-8 Issue 3*, 426, 1974. doi: 10.1112/jlms/s2-8.3.426

[6] M. Bhattacharjee, D. Macpherson, R. G. Möller, P. M. Neumann, Notes on Infinite Permutation Groups: Springer, 1998. doi: 10.1007/BFb0092550

[7] J. H. Conway, Three Lectures on Exceptional Groups, *Sphere Packings, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften (A Series of Comprehensive Studies in Mathematics) vol 290*, Springer, 267-298, 1993. doi: 10.1007/978-1-4757-2249-9_10

[8] P. Bhattacharya, Permutation groups containing projective special linear groups of the same degree: A problem of Mathieu, *Archiv der Mathematik Volume 37 Issue 1*, Springer, 198-205, 1981. doi: 10.1007/BF01234346

[9] Pongrácz András, Csoportelmélet jegyzet, 24. oldal URL: http://math.unideb.hu/media/pongracz-andras/oktatasi-anyagok/csopelmEA.pdf

[10] M. Bhattacharjee, R. G. Möller, D. Macpherson, P. M. Neumann, Notes on Infinite Permutation Groups, 87-97, 1998. doi: 10.1007/BFb0092550

[11] É. Mathieu, Sur la fonction cinq fois transitive de 24 quantites. *J. Pures Appl. (2), 18*,25-46, 1873.

[12] URL: https://groupprops.subwiki.org/wiki/Subquotient