Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Algebra és Számelmélet Tanszék

p-adikus integrálás és alkalmazásai

Diplomamunka

Témavezető:
Zábrádi Gergely
egyetemi docens

Készítette:
Krutki Tamás
matematikus MSc

Budapest, 2020.

NYILATKOZAT

Név: Krutki Tamás

ELTE Természettudományi Kar, szak: matematikus MSc

NEPTUN azonosító: YK0Y5H

Diplomamunka címe: *p*-adikus integrálás és alkalmazásai

A **diplomamunka** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Krutki Tamás

Budapest, 2020.05.24.

a hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A racionális számtesten a szokásos euklideszi távolság helyett vehetjük az úgynevezett p-adikus metrikát, ahol két számot akkor tekintünk közelinek, ha különbségük egy rögzített p prím „nagy hatványával osztható”. $\mathbb{Q}$ ezen metrika szerinti teljessé tételével kapjuk a p-adikus számokat. Látni fogjuk, hogy a p-adikus számtestek topológiája és a rá épülő analízis merőben eltér a valós esettől.

A dolgozat célja, hogy áttekintést adjon p-adikus számokon értelmezett, p-adikus szám értékű függvények integrálásának elméleteiről. Ehhez először — a szükséges előismeretek rövid összefoglalása után — azt a kérdést vizsgáljuk meg, hogy a klasszikus mérték- és integrálelmélet átvihető-e a p-adikus esetre, illetve milyen más lehetőségeink vannak egy p-adikus integrálelmélet felépítésére. Foglalkozunk a (határozott) integrál és az antideriválás kapcsolatával is. Ezt a Volkenborn-integrál tárgyalása követi, majd bevezetjük a p-adikus disztribúciókat és mértékeket, amelyek segítségével egy általános elmélet építhető fel. Szó lesz a Shnirelman-integrálról is, amely a komplex vonalintegrál egyfajta p-adikus megfelelője. Ennek keretében belátjuk jól ismert komplex függvénytani tételek p-adikus analógjait. Végül néhány számelméleti alkalmazás kerül sorra: bizonyítunk több, Bernoulli-számokra és Bernoulli-polinomokra vonatkozó összefüggést, majd a Riemann-féle ζ-függvény p-adikus interpolációjával zárunk.

A p-adikus integrálelméletek bemutatása során az egyik cél a teljesség: lehetőleg az összes főbb, az irodalomban fellelhető elmélet szerepeljen legalább említés szintjén. Néhány utaláson kívül nem lesz szó azonban p-adikus antideriválásról, sem pedig p-adikus számokon értelmezett, valós vagy komplex értékű függvények integrálásáról. Ezek önálló, gazdag elméletek messzire mutató számelméleti alkalmazásokkal, így tárgyalásuk meghaladná egy dolgozat kereteit.

Köszönetnyilvánítás

Köszönetet mondok témavezetőmnek, Zábrádi Gergelynek, aki felkeltette érdeklődésemet a p-adikus számok és p-adikus analízis iránt, továbbá hasznos tanácsokkal és alapos ellenőrzéssel segítette a dolgozat elkészültét.

1. fejezet

p-adikus számok

1.1. Értékelések, ultrametrikus topológia

Az ebben az alfejezetben kimondott állítások és tételek bizonyításai megtalálhatók például [Gou97] 2. és 3. fejezetében vagy [Sch84] 1. fejezetében.

Az abszolútérték fogalmának általánosításával kezdünk.

1.1. Definíció. *Legyen K egy test. Egy $|\cdot| : K \to \mathbb{R}_0^+$ függvényt értékelésnek nevezünk, ha teljesülnek az alábbi tulajdonságok:*

1. $|x| \iff x = 0$
2. $|xy| = |x||y|$
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$

Minden értékelés indukál egy metrikát (és így egy topológiát) a $\rho(x, y) = |x - y|$ formulával.

1.2. Definíció. *Két értékelés ekvivalens, ha ugyanazt a topológiát határozzák meg.*

1.3. Tétel. *Az $|\cdot|_1$ és $|\cdot|_2$ értékelések akkor és csak akkor ekvivalensek, ha létezik $s > 0$, hogy $|\cdot|_1 = |\cdot|_2^s$.*

A $K = \mathbb{Q}$ esetet tekintve a „szokásos” abszolútérték egy értékelés, ezt a továbbiakban jelölje $|\cdot|_\infty$. Az a függvény, amely minden nem nulla elemhez 1-et, a nullelemhez pedig 0-t rendel szintén értékelés, ez a *triviális értékelés*.

Legyen p egy prím. Vezessük be a $\nu_p : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ függvényt a következőképpen: $\nu_p(a) := n$ ha $0 \neq a = p^n b$ ahol $p \nmid b$, továbbá legyen $\nu_p(0) := 0$. ν_p kiterjeszthető $\mathbb{Q}$-ra a $\nu_p(\frac{a}{b}) := \nu_p(a) - \nu_p(b)$ képlettel (ez jól definiált).

1.4. Állítás. *Az*

$$|x|_p := \begin{cases} p^{-\nu_p(x)} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

függvény egy értékelés $\mathbb{Q}$-n. Ezt p-adikus értékelésnek (vagy p-adikus abszolútértéknek) nevezzük.

Egy racionális szám p-adikus abszolútértéke akkor „kicsi”, ha p nagy hatványával „osztható”. Az indukált metrikában két szám akkor van „közel”, ha különbségük p nagy hatványával „osztható”. Ezt az értékelést fogjuk majd a p-adikus számok konstrukciójához használni.

1.5. Példa.

$$|12|_3 = 3^{-1} = \frac{1}{3}, \quad |12|_2 = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

$$|15|_2 = 2^0 = 1, \quad \left|\frac{39}{10}\right|_5 = 5^{-(0-1)} = 5$$

Könnyen látható, hogy $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$-ra $|x|_p \neq 1$ csak véges sok p-re. Igaz továbbá az úgynevezett szorzat-formula is:

1.6. Tétel (Szorzat-formula)**.**

$$|x|_\infty \prod_p |x|_p = 1 \quad (x \in \mathbb{Q},\ x \neq 0)$$

Felmerülnek a kérdések, hogy különböző prímekre vajon ekvivalensek-e ezek az értékelések, lehet-e egy p-adikus értékelés és $|\cdot|_\infty$ ekvivalens, illetve hogy még milyen más értékelések léteznek $\mathbb{Q}$-n? Ezekre a következő két tétel ad választ:

1.7. Tétel. *A p-adikus értékelés semmilyen p-re sem ekvivalens $|\cdot|_\infty$-nel. A p-adikus értékelések páronként inekvivalensek.*

1.8. Tétel (Ostrowski)**.** *$\mathbb{Q}$ bármely nemtriviális értékelése ekvivalens $|\cdot|_\infty$-nel vagy egy p-adikus értékeléssel.*

Vizsgáljuk most a p-adikus abszolútértékek által indukált metrikákat.
Ha x, $y \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$ és x, y, $x + y$ egyike sem 0, akkor

$$\begin{aligned}
\nu_p(x+y) &\geq \min\{\nu_p(ad), \nu_p(bc)\} - \nu_p(b) - \nu_p(d) \\
&= \min\{\nu_p(a) + \nu_p(d), \nu_p(b) + \nu_p(c)\} - \nu_p(b) - \nu_p(d) \\
&= \min\{\nu_p(a) - \nu_p(b), \nu_p(c) - \nu_p(d)\} \\
&= \min\{\nu_p(x), \nu_p(y)\}
\end{aligned}$$

amiből

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}. \tag{1.1}$$

Ha valahol 0 szerepel, akkor az egyenlőtlenség triviálisan teljesül.

Az előbbiekben a háromszög-egyenlőtlenség jelentős erősítését kaptuk, és innen erednek a p-adikus és valós esetek közti később látott eltérések is. Azokat az értékeléseket, amelyekre (1.1) teljesül *nem-arkhimédészi*nek nevezzük. Az indukált metrikára azt kapjuk, hogy

$$\rho(x, y) \leq \max\{\rho(x, z), \rho(z, y)\} \tag{1.2}$$

tetszőleges x, y, z-re. Az ilyen tulajdonsággal rendelkező metrikus terek az úgynevezett *ultrametrikus* terek, az (1.2) egyenlőtlenségre ultrametrikus egyenlőtlenségként hivatkozunk. Érdemes felsorolni az ultrametrikus terek néhány olyan, az ultrametrikus egyenlőtlenségből közvetlenül adódó tulajdonságát, amelyek eltérnek a klasszikus analízisben megszokottaktól.

1.9. Állítás (Minden háromszög egyenlőszárú)**.** *Egy ultrametrikus térben tetszőleges x, y, z pontokra $\rho(x, y)$, $\rho(y, z)$, $\rho(x, z)$ közül legalább kettő megegyezik.*

1.10. Definíció (Nyílt és zárt gömbök)**.** *Legyen M egy metrikus tér, $a \in M$, $r > 0$.*

$$\mathrm{B}(a,r) \coloneqq \{x \in M : \rho(a,x) < r\}$$

az a középpontú, r sugarú nyílt gömb,

$$\overline{\mathrm{B}}(a,r) \coloneqq \{x \in M : \rho(a,x) \leq r\}$$

az a középpontú, r sugarú zárt gömb.

1.11. Állítás (Minden gömb nyílt-zárt)**.** *Ultrametrikus térben az előbbi $\mathrm{B}(a,r)$ és $\overline{B}(a,r)$ halmazok (topológiai értelemben) nyíltak és zártak is. Nyílt gömb határa üres.*

1.12. Állítás (A gömb minden pontja középpont)**.** *Ultrametrikus térben ha $b \in \mathrm{B}(a,r)$, akkor $\mathrm{B}(a,r) = \mathrm{B}(b,r)$. Ha $b \in \overline{\mathrm{B}}(a,r)$, akkor $\overline{\mathrm{B}}(a,r) = \overline{\mathrm{B}}(b,r)$.*

1.13. Állítás (A gömbök lamináris halmazcsaládot alkotnak)**.** *Ultrametrikus térben bármely két nyílt gömbre igaz, hogy vagy diszjunktak, vagy az egyik tartalmazza a másikat. Ugyanez mondható el bármely két zárt gömbről is.*

1.14. Állítás (Zárt gömb partíciói)**.** *Ultrametrikus térben egy r sugarú zárt gömbben az r sugarú nyílt gömbök egy partíciót alkotnak. Bármely két ilyen nyílt gömb távolsága r.*

1.15. Állítás (Ultrametrikus tér teljesen összefüggéstelen)**.** *Ultrametrikus térben tetszőleges x pont összefüggő komponense $\{x\}$.*

Az előbbi állítások már sejtetik, hogy nem fogjuk tudni a klasszikus mérték- és integrálelméletet változatlanul átemelni a p-adikus esetre.

1.2. p-adikus számok: $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{C}_p$

Az ebben az alfejezetben követett felépítés [Gou97] 3. és 5., illetve [Kob84] 1. és 3. fejezetére épül, ahol a következőkben mondottak részletesen kifejtve, bizonyításokkal szerepelnek. A p-adikus számok egy kissé eltérő utat követő bevezetéséhez lásd [Sch84] és [Rob00] könyveket. Magyar nyelven [Saf09] és [Zá] áll rendelkezésre ha értékelésekről és p-adikus számokról szeretnénk olvasni.

A továbbiakban p egy rögzített prím.

1.16. Állítás. *$\mathbb{Q}$ nem teljes $|\cdot|_p$-re nézve, azaz léteznek a p-adikus abszolútértékkel Cauchy-sorozatok amelyeknek nincs $\mathbb{Q}$-beli határértéke.*

Konstruáljuk meg $\mathbb{Q}$ lezárását a p-adikus értékeléssel: tekintsük a $\mathbb{Q}$-beli a_n és b_n Cauchy-sorozatokat ekvivalensnek, ha $\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n|_p = 0$. Így egy, a műveletekkel kompatibilis ekvivalencia-relációt kapunk $\mathbb{Q}$ Cauchy-sorozatainak halmazán. Az ekvivalencia-osztályok testet alkotnak, ez $\mathbb{Q}$-nak a $|\cdot|_p$ értékelés szerinti teljessé tétele.

1.17. Definíció. *A $\mathbb{Q}$-nak $|\cdot|_p$ szerinti teljessé tételével kapott testet nevezzük a p-adikus számok testének. Jelölése $\mathbb{Q}_p$.*

$\mathbb{Q}_p$ a konstrukcióból adódóan persze beágyazva tartalmazza a racionális számok testét (mint a konstans sorozatok ekvivalencia-osztályai).

Tekintsünk egy nem nulla ekvivalencia-osztályt és ebből egy a_n reprezentáns sorozatot. Ekkor létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden $N \in \mathbb{N}$ mellett megfelelő $n_N > N$ indexszel $|a_{n_N}|_p > \varepsilon$. Ha N elég nagy, akkor tetszőleges n, $m > N$ mellett $|a_n - a_m|_p < \varepsilon$, speciálisan $|a_n - a_{n_N}|_p < \varepsilon$ is igaz. A 0, a_n, a_{n_N} pontokat tekintve és alkalmazva a korábbi megfigyelést miszerint minden háromszög egyenlőszárú, azt kapjuk, hogy $|a_n|_p = |a_{n_N}|_p$. Összefoglalva:

1.18. Állítás. *Ha a_n racionális számok egy Cauchy-sorozata, akkor létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ mellett $|a_n|_p$ konstans.*

Ez lehetőséget ad arra, hogy kiterjesszük $|\cdot|_p$-t $\mathbb{Q}_p$-re, mégpedig úgy, hogy minden ekvivalencia-osztályhoz egy reprezentánsának abszolútérték-sorozatát tekintjük, majd $|\cdot|_p$ értékének az előbbi állítás szerint létező konstanst választjuk. A kiterjesztés során $|\cdot|_p$ értékkészlete nem bővült (szemben a klasszikus abszolútérték $\mathbb{Q}$-ról $\mathbb{R}$-re való kiterjesztésével).

1.19. Definíció. *A $\mathbb{Z}_p := \{|x|_p \leq 1 : x \in \mathbb{Q}_p\}$ halmaz elemeit p-adikus egészeknek nevezzük.*

1.20. Állítás. *$\mathbb{Z}_p$ egy gyűrű és tartalmazza az egész számokat mint részgyűrűt.*

1.21. Állítás. *$\mathbb{Z}_p$ nem megszámlálható.*

1.22. Állítás. *$\mathbb{Q}$ sűrű $\mathbb{Q}_p$-ben, $\mathbb{Z}$ sűrű $\mathbb{Z}_p$-ben.*

1.23. Állítás. *$\mathbb{Q}_p$ lokálisan kompakt T_2 tér.*

1.24. Állítás. *$\mathbb{Z}_p$ kompakt.*

Jó lenne valamilyen, a szokásos tizedestörtekhez hasonló reprezentációt találni $\mathbb{Z}_p$ és $\mathbb{Q}_p$ elemeinek. Erre a következő tétel ad lehetőséget.

1.25. Tétel. *Minden $a \in \mathbb{Z}_p$ ekvivalencia-osztályhoz egyértelműen létezik egy olyan $(a_i)_{i\in\mathbb{N}^+}$ reprezentáns sorozat, hogy minden $i \in \mathbb{N}^+$ indexre*

$$0 \leq a_i < p^i \tag{1.3}$$

és

$$a_i \equiv a_{i+1} \pmod{p^i} \tag{1.4}$$

teljesül.

Ha $a \in \mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p$, akkor $|a|_p = p^n$ $(n \geq 1)$, $a' = p^n a \in \mathbb{Z}_p$ és így a-nak megfeleltethető az $(a'_i p^n)$ sorozat, ahol (a'_i) az a'-höz tartozó, előbbi tétel szerint létező sorozat.

Egy $a \in \mathbb{Z}_p$-hez tartozó sorozat elemeit felírhatjuk p alapú számrendszerben:

$$a_i = \sum_{j=0}^{i-1} b_j p^j \quad (b_j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}).$$

A (1.4) kongruencia miatt ekkor

$$a_{i+1} = \sum_{j=0}^{i} b_j p^j,$$

azaz a b_j együtthatók egyértelműen meghatározottak. Összességében azt kapjuk, hogy tetszőleges $a \in \mathbb{Q}_p$, $|a|_p = p^n$-re

$$a = \frac{b_0}{p^n} + \frac{b_1}{p^{n-1}} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{p} + b_n + b_{n+1}p + b_{n+2}p^2 + \ldots$$

amit p-adikus kifejtésnek nevezünk, ahol b_j-k felfoghatók mint „p-adikus számjegyek”. Ez nem csupán egy formális jelölés, ellenőrizhető, hogy az összeg $\mathbb{Q}_p$-ben valóban a-hoz konvergál. A valós esettől eltérően a p-adikus kifejtés mindig egyértelmű. Az összeadás, kivonás, szorzás és osztás a valós esethez hasonlóan végezhető p-adikus számjegyekkel is.

$\mathbb{Q}_p$ nem rendezett, így szigorúan véve intervallumokról nem beszélhetünk. Az intervallumok szerepét az $a+p^n\mathbb{Z}_p$ alakú halmazok veszik át, ahol $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Q}_p$. Ezek a halmazok nyílt-zártak, és bázisát alkotják $\mathbb{Q}_p$-nek mint metrikus térnek.

$\mathbb{Q}_p$ tehát tekinthető a valós számok p-adikus megfelelőjének. Mi a helyzet a komplex számokkal? Ahogy $\mathbb{R}$, úgy $\mathbb{Q}_p$ sem algebrailag zárt. Szeretnénk egy $\mathbb{Q}_p$-t tartalmazó, algebrailag zárt és teljes testet konstruálni, ami majd $\mathbb{C}$ p-adikus megfelelője lesz. Ehhez először kiterjesztjük $|\cdot|_p$-t $\mathbb{Q}_p$ algebrai lezártjára. A valós esettel ellentétben $\mathbb{Q}_p$ algebrai lezártja nem teljes, így ezt a már előbb alkalmazott módszerrel teljessé is kell tennünk. Előfordulhatna, hogy így ismét egy algebrailag nem zárt testet kapunk, de szerencsére nem ez a helyzet: $\mathbb{Q}_p$ algebrai lezártjának teljessé tétele algebrailag zárt (és teljes).

1.26. Tétel (Krull)**.** *Legyen L a K test egy bővítése és $|\cdot|$ egy nem-arkhimédészi értékelés K-n. Ekkor $|\cdot|$ kiterjeszthető L értékelésévé.*

1.27. Tétel (A kiterjesztés egyértelműsége)**.** *Ha K teljes a $|\cdot|$ értékelésre nézve, akkor az előző tételben szereplő kiterjesztés egyértelmű.*

$\mathbb{Q}_p$ algebrai lezártját $\mathbb{Q}_p^a$-val jelöljük. Megkaphatjuk például úgy, hogy $\mathbb{Q}_p$-t bővítjük az összes $\mathbb{Q}_p$ felett irreducibilis polinom gyökeivel. A valós esetben $\mathbb{C}$ egy másodfokú bővítése $\mathbb{R}$-nek. A p-adikus esetben más a helyzet:

1.28. Tétel. *$\mathbb{Q}_p^a$ ∞-dimenziós bővítése $\mathbb{Q}_p$-nek.*

Hogyan definiálhatjuk $|\cdot|_p$ a korábbi tételek szerint egyértelműen létező kiterjesztését $\mathbb{Q}_p^a$-ra? Legyen $\alpha \in \mathbb{Q}_p^a$. Ekkor $\mathbb{Q}_p \subseteq \mathbb{Q}_p[\alpha] \subseteq \mathbb{Q}_p^a$. A továbbiakban feltehető, hogy a $\mathbb{Q}_p[\alpha]/\mathbb{Q}_p$ véges bővítés normális. Ha nem így lenne, akkor nézzük helyette a normális lezártját, ami szintén véges bővítés lesz. Mivel most a karakterisztika 0, a normális bővítések Galois-bővítések is.

Ha $K/\mathbb{Q}_p$ egy n-edfokú normális bővítés, $|\cdot|$ pedig egy nem-arkhimédészi értékelés K-n, akkor tetszőleges $\sigma \in \mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q}_p)$ automorfizmusra $|\cdot| \circ \sigma$ szintén egy értékelés K-n, továbbá az értékelés kiterjesztésének egyértelműségére vonatkozó tétel miatt $|\cdot| \circ \sigma = |\cdot|$ is igaz. Mivel minden $\alpha \in K$-ra

$$\prod_{\sigma \in \mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q}_p)} \sigma(\alpha) \in \mathbb{Q}_p$$

és

$$\left| \prod_{\sigma \in \mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q}_p)} \sigma(\alpha) \right| = \prod_{\sigma \in \mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q}_p)} |\sigma(\alpha)| = |\alpha|^n,$$

ezért adódik a következő definíció $|\cdot|_p$ kiterjesztésére:

1.29. Definíció. *Legyen $\alpha \in \mathbb{Q}_p^a$, és $K \subseteq \mathbb{Q}_p^a$ egy n-edfokú, α-t tartalmazó normális bővítése $\mathbb{Q}_p$-nek.*

$$|\alpha|_p := \sqrt[n]{\left| \prod_{\sigma \in \mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q}_p)} \sigma(\alpha) \right|_p} = \sqrt[n]{\left|\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}_p}(\alpha)\right|_p}.$$

Ilyen K mindig létezik, $|\alpha|_p$ értéke pedig független K választásától.

Ezzel a kiterjesztéssel növeltük $|\cdot|_p$ értékkészletét, immár p tetszőleges racionális hatványát felveheti.

1.30. Tétel. *$\mathbb{Q}_p^a$ nem teljes a $|\cdot|_p$ értékeléssel.*

A $\mathbb{Q}$ esetén már látott teljessé tétel konstrukciót alkalmazzuk ismét, most $\mathbb{Q}_p^a$-ra.

1.31. Definíció. *Tegyük teljessé $\mathbb{Q}_p^a$-t a $|\cdot|_p$ értékelésre nézve. Az így kapott testet $\mathbb{C}_p$ jelöli.*

1.32. Tétel. *$\mathbb{C}_p$ a legszűkebb $\mathbb{Q}_p$-t tartalmazó algebrailag zárt és teljes test.*

Mint ahogy az első alkalommal is, $|\cdot|_p$ ismét az értékkészlet változása nélkül terjed ki $\mathbb{C}_p$-re. $\mathbb{C}_p$ felfogható a komplex számok p-adikus megfelelőjének, ám a valós esettel ellentétben ez egy ∞-dimenziós bővítése $\mathbb{Q}_p$-nek. Ha elfeledkezünk az értékelésről, az a talán meglepő állítás is belátható[1], hogy $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}_p$ és $\mathbb{Q}_p^a$ izomorfak mint testek (de $\mathbb{R}$ és $\mathbb{Q}_p$ nem).

1.33. Állítás. *$\mathbb{Q}_p^a$ sűrű $\mathbb{C}_p$-ben. $\mathbb{C}_p$ szeparábilis.*

1.34. Állítás. *$\mathbb{C}_p$ nem lokálisan kompakt.*

1.3. Folytonosság és differenciálhatóság

Ezen alfejezet tartalma bizonyításokkal együtt megtalálható [Sch84] 22., 23., 25.-29. és 51.-54. szakaszaiban.

A továbbiakban legyen $\mathbb{Q}_p \subseteq K \subseteq \mathbb{C}_p$, ahol K teljes $|\cdot|_p$ értékelésre nézve.

Az ultrametrikus esetben a Cauchy-sorozatok és végtelen összegek kezelése lényegesen egyszerűsödik, amint azt a következő két állítás szemlélteti.

1.35. Állítás. *Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K$ sorozat Cauchy akkor és csak akkor, ha $\lim_{n\to\infty} |a_n - a_{n+1}|_p = 0$.*

1.36. Állítás. *A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ összeg konvergens akkor és csak akkor, ha $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Utóbbi állításból az is következik, hogy nem lehet szó feltételes konvergenciáról. Ha egy összeg konvergens, akkor a tagjait bármilyen más sorrendben összegezve is az marad.

Egy $\mathbb{Z}_p \to K$ függvény folytonosságát és differenciálhatóságát a valós esettel megegyezően definiálhatjuk. A differenciálható függvények most is folytonosak lesznek.

1.37. Definíció. *Az $f : \mathbb{Z}_p \to K$ függvény folytonos egy x_0 pontban, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra létezik $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0|_p < \delta$ akkor $|f(x) - f(x_0)|_p < \varepsilon$.*

1.38. Definíció. *Az $f : \mathbb{Z}_p \to K$ differenciálható egy x_0 pontban ha létezik az*

$$f'(x_0) := \lim_{x\to 0} \frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x_0}$$

határérték.

Az analitikus függvény definíciója is megegyezik a klasszikus esettel.

1.39. Definíció. *Az $f : \mathbb{Z}_p \to K$ függvény lokálisan konstans, ha minden $x \in \mathbb{Z}_p$-nek van olyan U környezete, hogy az $f(U)$ halmaz 1 elemű.*

Könnyen látszik, hogy egy lokálisan konstans függvény folytonos. A klasszikus esetben a lokálisan konstans függvények pontosan a konstans függvények. Mivel $\mathbb{Z}_p$ nem összefüggő, a p-adikus esetben ez nem igaz.

[1] Ehhez szükség van a kiválasztási axiómára. Általánosan, egy algebrailag zárt testet a karakterisztikája és a prímteste feletti transzcendencia-foka izomorfizmus erejéig meghatároz.

1.40. Állítás. *Az $f : \mathbb{Z}_p \to K$ függvény lokálisan konstans akkor és csak akkor ha előáll mint nyílt-zárt halmazok karakterisztikus függvényeinek véges lineáris kombinációja.*

A lokálisan konstans függvények a klasszikus mérték- és integrálelméletbeli lépcsősfüggvényekhez hasonló szerepet fognak betölteni. A folytonos függvények alapvető tulajdonsága, hogy egyenletesen közelíthetők lokálisan konstans függvényekkel.

1.41. Tétel. *Legyen $f \in C(\mathbb{Z}_p \to K)$, $\varepsilon > 0$. Ekkor létezik egy olyan lokálisan konstans $g : \mathbb{Z}_p \to K$ függvény, hogy $|f(x) - g(x)|_p < \varepsilon$ $(x \in K)$. A lokálisan konstans függvények sűrűek a folytonos függvények terében. Tetszőleges $X \subseteq K$ halmazon a korlátos lokálisan konstans függvények sűrűek a korlátos folytonos függvények terében.*

A definícióból azonnal adódik, hogy egy lokálisan konstans függvény deriváltja minden pontban 0. Azt látjuk tehát, hogy léteznek nemkonstans függvények 0 deriválttal. A helyzet valójában még ennél is rosszabb.

1.42. Példa ([Sch84, 26.B.]). *Az $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$,*

$$f\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n p^n\Big) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n p^{n!}$$

függvény injektív, $f' \equiv 0$ és $f \in \mathrm{Lip}_a(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p)$ minden $a > 0$-ra.

Az inverzfüggvény-tételnek sincs közvetlen p-adikus megfelelője:

1.43. Állítás. *Létezik olyan $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ differenciálható függvény, hogy $f' \equiv 1$, de f nem injektív 0 semmilyen környezetében sem.*

Ezek, és egyéb a differenciálhatósággal kapcsolatos nehézségek miatt a folytonosan differenciálható függvények helyett egy szűkebb függvényosztály bevezetésére lesz szükségünk.

1.44. Definíció. *Legyen X egy nem üres, izolált pontot nem tartalmazó részhalmaza $\mathbb{Z}_p$-nek. Az $f : X \to K$ függvény első differenciahányadosa a*

$$\Phi_1 f(x,y) := \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad (x, y \in X,\ x \neq y)$$

kétváltozós függvény. Azt mondjuk, hogy f szigorúan folytonosan differenciálható[2] *egy $a \in X$ pontban, ha a*

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} \Phi_1 f(x,y)$$

határérték létezik. Ha ez minden $a \in X$ pontra igaz, akkor f-et szigorúan folytonosan differenciálhatónak nevezzük. Az ilyen függvények osztályát $S^1(X \to K)$ jelöli.

Az előbbi definíció lényege abban áll, hogy a határértékben a két változó egymástól függetlenül változhat. A szigorúan folytonosan differenciálhatóságból következik a folytonos differenciálhatóság. Az S^1 függvények már lényegesen jobban viselkednek, mint a (folytonosan) differenciálhatóak. Visszanyerjük az inverzfüggvény-tételt is:

1.45. Tétel. *Ha $f : X \to K$ szigorúan folytonosan differenciálható egy $a \in X$ pontban és $f'(a) \neq 1$, akkor létezik $r > 0$, hogy f a $\mathrm{B}(a,r)$ nyílt gömböt a $\mathrm{B}(f(a), r|f(a)|_p)$ gömbre képezi, itt invertálható, a $g : \mathrm{B}(f(a), r|f(a)|_p) \to \mathrm{B}(a,r)$ lokális inverz szigorúan folytonosan differenciálható $f(a)$-ban és $g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.*

[2] Az irodalomban nevezik még szigorúan differenciálhatónak (strictly differentiable) vagy folytonosan differenciálhatónak is. S^1 helyett C^1 jelölés is előfordul.

Értelmezzük a többszörös szigorúan folytonosan differenciálhatóságot is.

1.46. Definíció. *Legyen X egy nem üres, izolált pontot nem tartalmazó részhalmaza $\mathbb{Z}_p$-nek. Az $f : X \to K$ függvény n-edik differenciahányadosa a*

$$\Phi_n f(x_1, \ldots, x_{n+1}) := \frac{\Phi_{n-1} f(x_1, x_3, \ldots, x_{n+1}) - f(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1})}{x_1 - x_2}$$

$n + 1$ változós függvény (ahol értelmes). Azt mondjuk, hogy f n-szer szigorúan folytonosan differenciálható egy $a \in X$ pontban, ha a

$$\lim_{(x_1,\ldots,x_{n+1}) \to (a,\ldots,a)} \Phi_n f(x_1, \ldots, x_{n+1})$$

határérték létezik. Ha ez minden $a \in X$ pontra igaz, akkor f-et n-szer szigorúan folytonosan differenciálhatónak nevezzük. Az ilyen függvények osztályát $S^n(X \to K)$ jelöli. Végül legyen $S^\infty(X \to K) = \cap_{n=1}^\infty S^n(X \to K)$.

Következőnek megadjuk a folytonos függvények terének egy bázisát.

1.47. Tétel (Mahler-sorfejtés, Mahler-együtthatók)**.** *Legyen $f \in C(\mathbb{Z}_p \to K)$,*

$$a_n := \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(i) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n} \quad (x \in \mathbb{Z}_p)$$

ahol a konvergencia egyenletes $\mathbb{Z}_p$-n.

Bizonyítás [Boj74] alapján. Az a_k-k definícióját beírva ellenőrizhető, hogy

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} a_k \binom{n}{k} \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{1.5}$$

Mivel $\mathbb{N}$ sűrű $\mathbb{Z}_p$-ben, f pedig folytonos, így elég megmutatni, hogy

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|_p = 0 \tag{1.6}$$

hiszen ekkor $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \binom{x}{k}$ egyenletesen konvergens $\mathbb{Z}_p$-n és összege az előbbi miatt csak $f(x)$ lehet.

A továbbiakban $m, n \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Legyen

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k). \tag{1.7}$$

Ekkor teljesül

$$\Delta^n f(x) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \Delta^{n+j} f(x-m) \tag{1.8}$$

is, ugyanis

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \Delta^j f(x-m) &= \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} f(x-m+k)\\ &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k f(x-m+k) \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} \binom{j}{k}\end{aligned}$$

és

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}\binom{j}{k}=\begin{cases}(-1)^k & \text{ha } k=m,\\ 0 & \text{ha } 0\le k\le m-1\end{cases}$$

amiből

$$f(x)=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\Delta^j f(x-m).$$

Ez utóbbira alkalmazva a Δ^n operátort adódik (1.8). A (1.7) és (1.8) egyenletekben x helyére m-et írva, továbbá (1.8)-ban még kihasználva, hogy $\Delta^n f(0)=a_n$, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}a_{n+j}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(k+m). \tag{1.9}$$

f folytonos $\mathbb{Z}_p$-n ami kompakt, így f itt egyenletesen folytonos és korlátos is. Az egyenletes folytonosság miatt bármely s pozitív egészre létezik t pozitív egész, hogy ha $|x-y|_p\le p^{-t}$ akkor $|f(x)-f(x)|_p\le p^{-s}$ tetszőleges $x,y\in\mathbb{Z}_p$-re. Speciálisan

$$|f(k+p^t)-f(k)|_p\le p^{-s}\quad (k\in\mathbb{N}). \tag{1.10}$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $|f(x)|_p\le 1$ $(x\in\mathbb{Z}_p)$. Ekkor a_n definíciójából adódik, hogy $|a_n|_p\le 1$ is teljesül. (1.9) alapján így

$$a_{n+p^t}=-\sum_{j=1}^{p^t-1}\binom{p^t}{j}a_{n+j}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(f(k+p^t)-f(k)).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy p osztja $\binom{p^t}{j}$-t minden $j=1,\dots,p^t-1$-re. Ebből és (1.10)-ből

$$|a_{n+p^t}|_p\le\max\left\{\max_{j=1}^{p^t-1}\frac{|a_{n+j}|_p}{p},p^{-s}\right\} \tag{1.11}$$

tehát $|a_n|_p\le\frac{1}{p}$ ha $n\ge p^t$. Utóbbi egyenlőtlenséget használva és n-t $n+p^t$-re cserélve (1.11)-ben $|a_n|_p\le\frac{1}{p^2}$ $(n\ge 2p^t)$ adódik. Ezen eljárást $s-1$-szer megismételve az $|a_n|_p\le\frac{1}{p^s}$ $(n\ge sp^t)$ egyenlőséget kapjuk. Mivel s-t tetszőlegesen nagynak választhattuk, ebből (1.6) már következik. □

A Mahler-együtthatók az S^n függvénytereknek és az analitikus függvényeknek is szép karakterizációit szolgáltatják:

1.48. Tétel. *Legyenek $a_0,a_1,\dots$ egy $f\in C(\mathbb{Z}_p\to K)$ függvény Mahler-együtthatói. $f\in S^n(\mathbb{Z}_p\to K)$ akkor és csak akkor, ha $\lim_{m\to\infty}m^n|a_m|_p=0$. $f\in S^\infty(\mathbb{Z}_p\to K)$ akkor és csak akkor ha ez minden $1\le n$-re teljesül.*

1.49. Tétel. *Legyenek $a_0,a_1,\dots$ egy $f\in C(\mathbb{Z}_p\to K)$ függvény Mahler-együtthatói. f analitikus akkor és csak akkor, ha $\lim_{m\to\infty}\frac{a_m}{m!}=0$.*

Mivel $\mathbb{Z}$ (és $\mathbb{N}$ is) sűrű $\mathbb{Z}_p$-ben, ezért egy $f\in C(\mathbb{Z}_p\to K)$ függvényt az egész (vagy természetes) számokon felvett értékei egyértelműen meghatároznak. Ezt kihasználva bevezetjük az *indefinit összeg* operátort.

1.50. Definíció. *Egy $f \in C(\mathbb{Z}_p \to K)$ függvény indefinit összege az az egyértelműen meghatározott Sf folytonos függvény amelyre*

$$Sf(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) \quad (n \in \mathbb{N}^+).$$

A definícióból azonnal adódik, hogy $Sf(x+1) - Sf(x) = f(x)$ $(x \in \mathbb{Z}_p)$ és $Sf(0) = 0$.

1.51. Állítás (Indefinit összeg Mahler-együtthatói)**.** *Ha*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n} \quad (x \in \mathbb{Z}_p),$$

akkor

$$Sf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \binom{x}{n} \quad (x \in \mathbb{Z}_p).$$

Ebből és az S^n függvények Mahler-együtthatóit karakterizáló állításból azt kapjuk, hogy ha $f \in S^n(\mathbb{Z}_p \to K)$ akkor $Sf \in S^n(\mathbb{Z}_p \to K)$ is teljesül.

Végül bevezetünk egy normát a szigorúan folytonosan differenciálható függvények terén.

1.52. Tétel. *Legyen $f \in C(X \to K)$. Az f függvény szuprémum-normája*

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)|_p : x \in X\}.$$

$C(X \to K)$ Banach-tér a $\|\cdot\|_\infty$ normával. Jelölje

$$BC(X \to K) := \{\|f\|_\infty < \infty : f \in C(X \to K)\}$$

a folytonos és korlátos függvények terét. $BC(X \to K)$ Banach-tér a $\|\cdot\|_\infty$ normával.

1.53. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $f \in S^n(X \to K)$. Az*

$$\|f\|_n := \max\{\|f\|_\infty, \|\Phi_1 f\|_\infty, \dots, \|\Phi_n f\|_\infty\}$$

hozzárendelés egy norma. $S^n(X \to K)$ Banach-tér a $\|\cdot\|_n$ normával. Jelölje

$$BS^n(X \to K) := \{\|f\|_n < \infty : f \in S^n(X \to K)\}$$

a korlátos n-szer szigorúan folytonosan differenciálható függvények terét. $BS^n(X \to K)$ Banach-tér a $\|\cdot\|_n$ normával.

S^1-ben a következő kapcsolat áll fenn egy függvény és a hozzá tartozó indefinit összeg között:

1.54. Tétel. *Ha $f \in S^1(\mathbb{Z}_p \to K)$, akkor $Sf \in S^1(\mathbb{Z}_p \to K)$ és $\|f\|_1 \le \|Sf\|_1 \le p\|f\|_1$.*

1.4. $\exp_p$ és $\log_p$

1.55. Definíció. *Az*

$$\exp_p(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{C}_p,\ |x|_p < p^{\frac{1}{1-p}})$$

függvényt p-adikus exponenciális függvénynek nevezzük.

A klasszikus esettől eltérően az $\exp_p$-t definiáló hatványsor konvergenciasugara véges, sőt a konvergenciatartomány az egységkörlap egy valódi részhalmaza. Ezt az magyarázza, hogy $|n!|_p$ csökken ahogy n-t növeljük (hiszen egyre többször jelenik meg p prímtényezőként).

1.56. Definíció. *A*

$$\log_p(1+x) := \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \quad (x \in \mathbb{C}_p,\ |x|_p < 1)$$

függvényt p-adikus logaritmusnak nevezzük.

Igazak a következő, valós esettel analóg összefüggések.

1.57. Tétel. *Jelölje* $\exp_p(x)$ *konvergenciatartományát* E, $\log_p(1+x)$ *konvergenciatartományát pedig* L.

(a) $\exp_p(x+y) = \exp_p(x)\exp_p(y) \quad (x, y \in E)$

(b) $\exp_p'(x) = \exp_p(x) \quad (x \in E)$

(c) $\exp_p$ *egy izometria* E*-ről* $1+E$*-re*

(d) $\log_p(xy) = \log_p(x) + \log_p(y) \quad (x, y \in L)$

(e) $\log_p'(x) = x^{-1} \quad (x \in L)$

(f) $\log_p(\exp_p(x)) = x \quad (x \in E)$

(g) $\log_p$ *egy izometria* $1+E$*-ről* E*-re*

(h) $\exp_p(\log_p(y)) = y \quad (y \in 1+E)$

Ugyan az $\exp_p$ és $\log_p$ függvényeket definiáló hatványsorok által meghatározott „természetes" értelmezési tartományok szűkebbek, mint a klasszikus esetben, ezek kiterjeszthetők: $\exp_p$ egész $\mathbb{C}_p$-re, $\log_p$ pedig $\mathbb{C}_p \setminus \{0\}$-ra. Bevezethetjük a sin, cos stb. függvények p-adikus változatait is a „szokásos" hatványsorokat használva (a konvergenciatartományok persze itt sem lesznek azonosak a klasszikus esettel).

Bizonyításokért és további összefüggésekért lásd például [Sch84, 25., 44.-45.].

2. fejezet

p-adikus integrálelméletek

Ebben a fejezetben először azt vizsgáljuk, hogy átvihető-e a klasszikus mérték- és integrálelmélet a p-adikus esetre. Amint látni fogjuk, ez komoly nehézségekbe ütközik. Ezután az irodalomban található különböző p-adikus integrálelméletek rövid összefoglalása következik, amelyek közül néhányat a következő fejezetek fognak részletesebben tárgyalni.

A klasszikus analízis olyan eszközei mint a különböző középérték-tételek, a Darboux-tulajdonság, a monotonicitás vagy a Newton-Leibniz tétel nem vihető át jelentős változtatások nélkül a p-adikus esetre [Sch84, 22]. Ezek ugyanis $\mathbb{R}$ összefüggőségére, lokális kompaktságára vagy rendezettségére támaszkodnak amelyek közül egyik sem teljesül $\mathbb{C}_p$-re. Ebből következőleg az integrálás és az antideriválás is élesebben elválik mint a klasszikus esetben.

Nézzük meg, mi történik ha a Riemann-integrált a szokásos módon próbáljuk definiálni. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Az intervallumok szerepét most az $m + p^n\mathbb{Z}_p$ (páronként diszjunkt) halmazok töltik be:

$$\mathbb{Z}_p = \bigcup_{m=0}^{p^n-1} (m + p^n\mathbb{Z}_p).$$

Minden ilyen „intervallumból” válasszunk egy tetszőleges $x_{m,n}$ pontot. Egy $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p$ függvény n-edik Riemann-összege ekkor

$$S_n = \sum_{m=0}^{p^n-1} f(x_{m,n}) \frac{1}{p^n}.$$

2.1. Példa ([Kob84])**.** *Számoljuk ki az $f(x) = x$ ($f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p$) függvény n-edik Riemann-összegét. Legyen először $x_{m,n} = m$. Ekkor*

$$S_n = \sum_{m=0}^{p^n-1} m \frac{1}{p^n} = \frac{1}{p^n} \frac{(p^n-1)p^n}{2} = \frac{p^n-1}{2}.$$

Tehát így

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -\frac{1}{2}.$$

Legyen $0 \neq m_0 \in \mathbb{Z}_p$ mellett $x_{0,n} = m_0 p^n$ ($\in p^n\mathbb{Z}_p$), a többi $x_{m,n}$ ($m \neq 0$) ugyanaz mint az előbb. Most

$$S_n = \frac{m_0 p^n}{p^n} + \sum_{m=0}^{p^n-1} m \frac{1}{p^n} = m_0 + \frac{p^n-1}{2}$$

és
$$\lim_{n\to\infty} S_n = m_0 - \frac{1}{2}.$$

A példa azt mutatja, hogy a Riemann-összegeknek nem létezik egyértelmű határértéke, már a legegyszerűbb esetekben sem.

A Riemann-integrál helyett próbálkozzunk inkább a Lebesgue-mértékkel. Jelölje egy X halmaz kompakt részhalmazait $\mathfrak{C}(X)$. Legyen $m : \mathfrak{C}(\mathbb{Q}_p) \to \mathbb{Q}_p$ halmazfüggvény. Azt szeretnénk, ha m úgy viselkedne, mint a Lebesgue-mérték. Ehhez legalábbis szükség van arra, hogy m additív, transzláció-invariáns és korlátos legyen.

2.2. Tétel ([Sch84, 30.4])**.** *Legyen $A, B \in \mathfrak{C}(\mathbb{Q}_p)$. Ha $m : \mathfrak{C}(\mathbb{Q}_p) \to \mathbb{Q}_p$ olyan halmazfüggvény, amelyre*

1. $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ $(A \cap B = \emptyset)$ *(additivitás),*
2. $m(a + A) = m(A)$ $(a \in \mathbb{Q}_p)$ *(transzláció-invariancia),*
3. $\sup\{|m(A)|_p : A \subseteq \mathbb{Z}_p, A$ *kompakt és nyílt*$\} < \infty$ *(korlátosság)*

teljesül, akkor $m \equiv 0$.

Bizonyítás. Mint azt a Riemann-összegeknél már felhasználtuk, tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re az $a+p^n\mathbb{Z}_p$ $(a \in \{0, \dots, p^n-1\})$ halmazok $\mathbb{Z}_p$ egy partícióját alkotják. Az additivitás és transzláció-invariancia miatt így $m(\mathbb{Z}_p) = p^n m(p^n\mathbb{Z}_p)$. Mivel feltettük, hogy $\sup\{|m(p^n\mathbb{Z}_p)|_p\} < \infty$, ezért csak $m(\mathbb{Z}_p) = 0$ lehetséges, de ekkor $m(p^n\mathbb{Z}_p) = p^{-n}m(\mathbb{Z}_p) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$ és így ismét a transzláció-invariancát használva minden gömb mértéke is 0. Mivel minden kompakt részhalmaz megkapható mint véges sok diszjunkt gömb uniója, ezért az additivitásból $m \equiv 0$ következik. □

Az előbbi tétel duálisa a következő.

2.3. Tétel. *Legyen $f, g \in C(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p)$, λ, $\mu \in \mathbb{Q}_p$, $(\tau_s f)(x) := f(x+s)$ pedig az eltolás operátor. Ha $\int$ egy $\mathbb{Q}_p$ értékű funkcionál a $C(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p)$ függvénytéren amelyre*

1. $\int(\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g$,
2. $\int \tau_s f = \int f$ $(s \in \mathbb{Z}_p)$,
3. $|\int f|_p \leq c\|f\|_\infty$ *egy rögzített c konstanssal*

akkor $\int \equiv 0$.

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előző tételt az $A \to \int \chi_A$ halmazfüggvényre ahol χ_A az A halmaz karakterisztikus függvénye. Használjuk fel, hogy tetszőleges lokálisan konstans függvény előáll, mint nyílt-zárt halmazok karakterisztikus függvényeinek véges lineáris kombinációja, továbbá hogy a lokálisan konstans függvények sűrűek a folytonos függvények terében. □

Megjegyzés. *Az előbbi tétel az $\int$ funkcionálra tett 3. feltétel elhagyásával is igaz marad.*

Az additivitás, transzláció-invariancia és korlátosság együttes megkövetelésével tehát nem kerültünk közelebb egy „Lebesgue-mérték-szerű” halmazfüggvény konstruálásához.

Vizsgáljuk meg mi történik, hogy ha a megközelítésünkön egy kicsit módosítva inkább $\mathbb{Z}_p$ Borel-halmazain próbálunk meg egy σ-additív mértéket definiálni, de semmilyen más megkötést nem teszünk.

Jelölje $\mathbb{Z}_p$ Borel-halmazait $\mathfrak{B}$. Ez tehát az a legszűkebb halmazrendszer, amely tartalmazza $\mathbb{Z}_p$ nyílt részhalmazait és zárt a megszámlálható unióra és metszetre. Tekintsünk egy $\mu : \mathfrak{B} \to \mathbb{Q}_p$ halmazfüggvényt. A σ-additivitás az egyetlen tulajdonság amit most megkövetelünk:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

tetszőleges $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{B}$ páronként diszjunkt halmazsorozatra. Egy példa ilyen halmazfüggvényre tetszőleges $x \in \mathbb{Z}_p$ választás mellett a δ_x *x pontban koncentrált Dirac-mérték*. Ennek értéke 1 minden x-et tartalmazó halmazon, az x-et nem tartalmazó halmazokon pedig 0. Könnyen ellenőrizhető, hogy egy $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}^+} \in \mathbb{Q}_p$ nullsorozattal és tetszőleges $(x_i)_{i\in\mathbb{N}^+} \in \mathbb{Z}_p$ középpont-sorozattal

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \delta_{x_i}$$

szintén egy σ-additív halmazfüggvény $\mathfrak{B}$-n (az összeg 1.36 miatt konvergens). A következő tétel azt mondja ki, hogy minden σ-additív halmazfüggvény ilyen alakú.

2.4. Tétel. *Ha a $\mu : \mathfrak{B} \to \mathbb{Q}_p$ halmazfüggvény σ-additív, akkor megfelelő $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}^+} \in \mathbb{Q}_p$ nullsorozattal és $(x_i)_{i\in\mathbb{N}^+} \in \mathbb{Z}_p$ középpont-sorozattal*

$$\mu \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \delta_{x_i}.$$

Bizonyítás. Az $\{x \in \mathbb{Z}_p : |\mu(\{x\})|_p \geq r\}$ halmaz véges ha $r > 0$, ugyanis ha tartalmazna egy végtelen $x_1, x_2, \dots$ sorozatot, akkor

$$\mu(\{x_1, x_2, \dots\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\{x_i\})$$

lenne ahol a bal oldalon nyílt halmazok uniójának mértéke áll, a jobb oldal viszont nem konvergens. Így az $\{x \in \mathbb{Z}_p : |\mu(\{x\})|_p \neq 0\}$ halmaz megszámlálható. Jelölje az elemeinek egy felsorolását $x_1, x_2, \dots$ (ez lehet véges vagy végtelen). Legyen $\lambda_i = \mu(\{x_i\})$. Ha a felsorolás véges volt, akkor a többi λ_i értéke legyen 0. Így tehát kaptunk egy $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}^+}$ nullsorozatot $\mathbb{Q}_p$-ben. Ekkor

$$\mu_1 := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \delta_{x_i}$$

egy σ-additív halmazfüggvény (és ez jól definiált). Legyen

$$\nu := \mu - \mu_1.$$

ν értéke $\mathbb{Z}_p$ minden 1 elemű részhalmazán 0. Ha sikerülne belátni, hogy $\nu \equiv 0$ akkor készen vagyunk. Tekintsünk ehhez egy tetszőleges $A \in \mathfrak{B}$ halmazt és $\mathbb{Z}_p$ egy tetszőleges partícióját $B_1, \dots, B_n$ gömbökre. Ha $|\nu(A \cap B_j)|_p \leq \varepsilon$ minden $j = 1, \dots, n$-re akkor

$$|\nu(A)|_p = \left| \sum_{i=1}^{n} \nu(A \cap B_j) \right|_p \leq \varepsilon$$

is igaz ahol ε tetszőleges választása miatt csak $\nu \equiv 0$ lehet. Rögzítsük ε-t és keressünk egy ilyen partíciót. Minden $x \in \mathbb{Z}_p$-hez megadunk egy B_x gömböt amely tartalmazza x-et és

$|\nu(A \cap B_x)|_p \leq \varepsilon$. Legyen tehát $x \in \mathbb{Z}_p$ tetszőleges és $R_n = \{y \in \mathbb{Z}_p : |x-y|_p = p^{-n-1}\}$. Az $\{x\}, R_1, \ldots$ egy páronként diszjunkt halmazsorozat amelynek uniója $\mathbb{Z}_p$, továbbá $A \cap \{x\}, A \cap R_1, \ldots$ egy páronként diszjunkt Borel-halmazokra való felbontása A-nak.

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A \cap R_n),$$

azaz $\nu(A \cap R_n)$ egy nullsorozat. Választható $N \in \mathbb{N}$, hogy $|\nu(A \cap R_n)|_p \leq \varepsilon$ ha $N \leq n$. Legyen $B_x = \{x\} \cup R_N \cup R_{N+1} \cup \ldots$ amivel

$$|\nu(A \cap B_x)|_p = \left| 0 + \sum_{N \leq n} \nu(A \cap R_n) \right|_p \leq \varepsilon.$$

$\mathbb{Z}_p$ kompaktsága miatt véges sok ilyen B_x gömb megadja $\mathbb{Z}_p$ egy keresett tulajdonságú partícióját. □

A bizonyítás során a következő, önmagában is érdekes állítást is beláttuk.

2.4.1. Következmény. *Ha a $\mu : \mathfrak{B} \to \mathbb{Q}_p$ halmazfüggvény σ-additív és $\mu(\{x\}) = 0$ minden $x \in \mathbb{Z}_p$-re, akkor $\mu \equiv 0$.*

Az előző tétellel megkaptuk a $\mathbb{Z}_p$ Borel-halmazain értelmezett σ-additív függvények teljes leírását. Sajnos így sem kerültünk közelebb egy hasznos ultrametrikus mérték- és integrálelméletet felépítéséhez. Ehhez egyszerűen nincs elegendő „érdekes” σ-additív halmazfüggvényünk.

Összefoglalva, azt kaptuk tehát, hogy a klasszikus mértékelmélet sem vihető át változtatás nélkül a p-adikus esetre. Hogyan lehetne mégis valamilyen p-adikus integrált definiálni? Erre több különböző megközelítés is kínálkozik (lásd még [Sch84, 30]):

Az integrálható függvények körének szűkítése és a korlátossági feltétel elhagyása. Az additivitás és a transzláció-invariancia már egy multiplikatív konstanstól eltekintve meghatározza a korábban látott m halmazfüggvényt. Tegyük m-et egyértelművé a $m(\mathbb{Z}_p) = 1$ előírással. Ekkor $m(p^n\mathbb{Z}_p) = p^{-n}$, ami azért érdekes, mert a $p^n\mathbb{Z}_p$ szűkülő halmazsorozatra az $|m(p^n\mathbb{Z}_p)|_p$ értékek nőni fognak, ami pont az ellenkezője annak amit egy mértéktől várnánk (és persze a korábbi korlátossági feltétel sem fog teljesülni). Ha ezen m mellett csak szigorúan folytonosan differenciálható függvényeket integrálunk, akkor a korábban látott Riemann-összegek már egy jól definiált integrált adnak. Ezt hívjuk Volkenborn-integrálnak, amely valójában nem más mint $S^1(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p)$ topologikus duálisának egy eleme.

A transzláció-invarianca elhagyása. Ekkor több ekvivalens módon is felépíthető egy mérték- és integrálelmélet.

Koblitz [Kob84, II.] először a lokálisan konstans függvények terén vezet be disztribúciókat, majd ezekből egy regularizációs eljárással készít mértékeket amelyek szerint már tudunk folytonos függvényeket integrálni. Schikhof [Sch84, A5] a folytonos függvények terének topologikus duálisát vizsgálja. Ezen tér elemeit tekinti integráloknak, és innen kiindulva definiál mértékeket.

A két felépítés ekvivalens, ugyanis érvényes a Riesz–Markov–Kakutani reprezentációs tétel p-adikus megfelelője, amely az integrálok és mértékek közt teremt kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést. Ezek a mértékek ugyan nem transzláció-invariánsak, de a korábban tett additivitási és korlátossági feltételek teljesülni fognak. A téma részletes tárgyalása a nem-arkhimédészi funkcionálanalízis szemszögéből megtalálható [VR78]-ban.

A komplex vonalintegrállal analóg integrál $\mathbb{C}_p$-n. Ez az előző két esettől alapjaiban különböző konstrukció az úgynevezett Shnirelman[1]-integrál. Segítségével bizonyíthatók olyan,

[1]Lev Genrikhovich Schnirelmann (Лев Генрихович Шнирельман) orosz matematikus. Az irodalomban Shnirelman, Schnirelmann és Shnirel'man írásmód is előfordul.

a komplex függvénytanból jól ismert tételek p-adikus megfelelői mint például a Cauchy-féle integráltétel, a reziduum-tétel vagy a maximumelv. A témakör itteni tárgyalása [Kob80]-on és [Ada66]-on alapul.

Az értékkészlet megváltoztatása. Legyen $\mathbb{Q}_p$ helyett a halmazfüggvényünk egy $q \neq p$ prímre $\mathbb{Q}_q$ értékű. Belátható, hogy ilyenkor egyértelműen létezik egy additív, transzláció-invariáns és korlátos m mérték, amelyre $m(\mathbb{Z}_p) = 1$. Ekkor ugyan kaptunk egy integrált amely megfelel az elvárásainknak, de ezzel csak $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_q$ függvényeket tudunk integrálni. Mivel sok érdekes eset $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ vagy $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p$ függvényekre vezet (és az irodalomban is inkább az ilyen függvények játsszák a főszerepet), ez az integrál csak korlátozott hasznosságú. Részletes tárgyalásáért lásd [VR78]-at.

Integrál antideriválásból. Ugyan a p-adikus esetben a Newton-Leibniz tételnek nincs direkt megfelelője, ha sikerülne találni egy „jó” antiderivált leképezést (jelölje P), akkor bevezethető lenne egy

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \mathrm{P}f(a) - \mathrm{P}f(b) \quad (a, b \in \mathbb{Z}_p)$$

„integrál”. Mivel az antideriválás is jelentősen eltér a klasszikus és a p-adikus esetben, az sem világos, hogy milyennek kellene lennie egy „jó” antiderivált leképezésnek ahhoz, hogy valamilyen értelmes integrált nyerjünk vissza belőle?

Ezen dolgozatnak ugyan nem tárgya a p-adikus antideriválás elmélete, de pár alapvető tényt érdemes itt megemlíteni. Bizonyítható, hogy minden folytonos $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ függvénynek létezik szigorúan folytonosan differenciálható antideriváltja [Sch84, 30.2]. Ha egy függvénynek létezik antideriváltja, akkor az antideriváltjai sűrűek a folytonos függvények terében (ugyanis a lokálisan konstans függvények sűrűek ebben a térben). Amint a következő tétel mutatja, nem számíthatunk arra, hogy könnyű lesz találnunk egy „jó” antiderivált leképezést:

2.5. Tétel ([Sch84, 30.C]). *Nem létezik olyan* $\mathrm{P} : C(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p) \to S^1(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p)$ *leképezés amelyre egyszerre teljesül*

1. $(\mathrm{P}f)' = f \quad (f \in C(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p))$,
2. $\mathrm{P} : (C(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p), \|\cdot\|_\infty) \to (S^1(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p), \|\cdot\|_1)$ *egy folytonos lineáris leképezés,*
3. $\mathrm{P}x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$.

Jelenleg nem ismert antideriválásból kiinduló p-adikus integrálelmélet. Nyitott kérdés, hogy egyáltalán lehetséges-e bármilyen hasznos integrált konstruálni ilyen módon [Sch84, 30]. p-adikus antideriválásról olvashatunk többek között a [Mah81], [Sch84] és [VR78] könyvekben.

3. fejezet

A Volkenborn-integrál

3.1. Definíció és alapvető tulajdonságok

Az előző fejezetben vázoltaknak megfelelően most azt az integrált vizsgáljuk, amelyet úgy kapunk, hogy szűkítjük az integrálandó függvények körét és elhagyjuk a korábban látott m „mértékre” tett korlátossági feltételt. Az itt követett felépítés nem az m halmazfüggvényből indul ki (bár ez is egy járható út lenne), hanem először közvetlenül definiálunk egy integrált és majd ebből származtatjuk később az m „mértéket”. A fejezet [Sch84] 55. és 57. szakaszait továbbá [Rob00, V.5.] egyes részeit dolgozza fel.

Amint azt már korábban láttuk, a klasszikus Riemann-féle közelítő összeg p-adikus megfelelője általában nem lesz egyértelmű folytonos függvényekre. Nézzük meg mi történik, ha csak szigorúan folytonosan differenciálható függvények integrálására szorítkozunk. Egy $f \in S^1(\mathbb{Z}_p \to K)$ függvényre az n-edik Riemann-féle közelítő összeg az $x_{m,n} = m$ $(\in m + p^n\mathbb{Z}_p)$ alappontokkal:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{m=0}^{p^n-1} f(m)\frac{1}{p^n} \\ &= \frac{f(0) + \cdots + f(p^n-1)}{p^n} \\ &= \frac{(Sf(1) - Sf(0)) + \cdots + (Sf(p^n) - Sf(p^n-1))}{p^n} \\ &= \frac{Sf(p^n) - Sf(0)}{p^n} \end{aligned}$$

amiből

$$\lim_{n\to\infty} S_n = (Sf)'(0),$$

ahol felhasználtuk azt, hogy $Sf(0) = 0$ és most $f \in S^1$ miatt $Sf \in S^1$ is teljesül, tehát az előbbi határérték létezik.

3.1. Definíció. *Egy $f \in S^1(\mathbb{Z}_p \to K)$ függvény Volkenborn-integrálja*

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\mathrm{d}x := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^n} \sum_{m=0}^{p^n-1} f(m) = (Sf)'(0).$$

Megjegyzés. *Vigyázzunk arra, hogy az alappontok választása itt nem tetszőleges.*

A definícióból és az S^1-beli függvény és indefinit összegének normája közti kapcsolatról szóló tételből (1.54.) kapjuk, hogy

$$\left| \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)\mathrm{d}x \right|_p = |(Sf)'(0)|_p \leq \|Sf\|_1 \leq p\|f\|_1.$$

Ez azt jelenti, hogy $\int_{\mathbb{Z}_p}$ egy folytonos lineáris funkcionál az $S^1(\mathbb{Z}_p \to K)$ téren. Ha egy $f_n \in S^1(\mathbb{Z}_p \to K)$ függvénysorozatra

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0,$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f_n = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f.$$

Felhasználva az indefinit összeggel való kapcsolatot, kifejezhetjük a Volkenborn-integrál értékét a Mahler-együtthatókból. Az indefinit összeg Mahler-együtthatóira (1.51) vonatkozó állításból adódik az $S\binom{x}{n} = \binom{x}{n+1}$ összefüggés. Az indefinit összeg 0-beli deriváltja most

$$\left(S\binom{x}{n}\right)'(0) = \binom{x}{n+1}'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\binom{x}{n+1}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\binom{x-1}{n}}{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1},$$

másrészt viszont ez éppen $\int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{n}\mathrm{d}x$. A Mahler-sor egyenletesen konvergál $\mathbb{Z}_p$-n, így $\|\cdot\|_1$ normában is. Ez azt jelenti, hogy felcserélhetjük az összegzést és az integrált:

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{n}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Kaptuk tehát a következő tételt.

3.2. Tétel. *Legyen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\binom{x}{n} \in S^1(\mathbb{Z}_p \to K)$. Ekkor*

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Megjegyzés. *Belátható, hogy a hatványsorok $\|\cdot\|_1$ normában is konvergensek a konvergenciatartományuk belsejében, tehát az integrálás és az összegzés felcserélhető. Ez azt jelenti, hogy ha f analitikus $\mathbb{Z}_p$-n, azaz $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(x \in \mathbb{Z}_p)$, akkor*

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_{\mathbb{Z}_p} x^n \mathrm{d}x.$$

Eddig $\mathbb{Z}_p$-n integráltunk. A „szokásos” módon definiálhatjuk a Volkenborn-integrált $\mathbb{Z}_p$ nyílt-zárt részhalmazain is.

3.3. Definíció. *Legyen $U \subseteq \mathbb{Z}_p$ nyílt-zárt χ_U karakterisztikus függvénnyel.*

$$\int\limits_U f(x)\mathrm{d}x := \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)\chi_U(x)\mathrm{d}x.$$

3.4. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $m \in \{0, 1, \dots, p^n - 1\}$, $f \in S^1(\mathbb{Z}_p \to K)$. Ekkor*

$$\int\limits_{m+p^n\mathbb{Z}_p} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{p^n\mathbb{Z}_p} f(x+m)\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(p^n x + m)\mathrm{d}x$$

és

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p\setminus p\mathbb{Z}_p} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \frac{f(px)}{p}\mathrm{d}x.$$

Bizonyítás. Az első azonosság következik abból, hogy

$$\int\limits_{m+p^n\mathbb{Z}_p} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{p^n\mathbb{Z}_p} f(x+m)\mathrm{d}x = \lim_{s\to\infty} \frac{f(j) + f(j+p^n) + \cdots + f(j + (p^{s-n}-1)p^n)}{p^s}$$

ami egy $g(x) = f(j + p^n x)$ helyettesítéssel

$$\lim_{s\to\infty} \frac{g(0) + g(1) + \cdots + g(p^{s-n}-1)}{p^s} = \frac{1}{p^n} \int\limits_{\mathbb{Z}_p} g(x)\mathrm{d}x$$

alakra hozható. A második rögtön adódik az

$$\int\limits_{p\mathbb{Z}_p} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{p} \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(px)\mathrm{d}x$$

egyenlőségből (ami igaz mert $\mathbb{Z}_p = \bigsqcup_{m=0}^{p-1}(m + p\mathbb{Z}_p)$). □

Következzen néhány konkrét példa a Volkenborn-integrál kiszámítására.

3.5. Példa.

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} 1\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{p^n}{p^n} = 1.$$

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} x\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \cdots + p^n - 1}{p^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(p^n-1)p^n}{2p^n} = -\frac{1}{2}.$$

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} x^2\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \cdots + (p^n-1)^2}{p^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(p^n-1)p^n(2p^n-1)}{6p^n} = \frac{1}{6}.$$

3.6. Példa. *Az előbb már láttuk, hogy*

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{n}\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

3.7. Példa. *Legyen $t \in \mathbb{C}_p$ olyan, hogy $0 < |t|_p < 1$ és $f_t(x) = (1+t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \binom{x}{n}$. A Volkenborn-integrál értékének Mahler-együtthatókkal való kifejezését használva azt kapjuk, hogy*

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f_t(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{(-1)^n}{n+1} = \frac{1}{t}\log_p(1+t).$$

3.2. Integrál és eltolás

Szeretnénk valamilyen m „mértéket” definiálni nyílt-zárt halmazokon a Volkenborn-integrál segítségével. Kérdés, hogy ez mennyit őriz meg a korábban látott, p-adikus „mértékekre” vonatkozó kívánatos tulajdonságok (korlátosság, transzláció-invariancia, additivitás) közül?

Első lépésként vizsgáljuk meg a Volkenborn-integrál és az eltolás operátor kapcsolatát.

3.8. Tétel. *Legyen $f \in S^1(\mathbb{Z}_p \to K)$, $\mathrm{P}f$ egy tetszőleges S^1-beli antideriváltja f-nek és $s \in \mathbb{Z}_p$. Igazak a következők:*

$$(Sf)'(s) - (Sf')(s) = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)\mathrm{d}x \tag{3.1}$$

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} \tau_s f(x)\mathrm{d}x = (Sf)'(s) \tag{3.2}$$

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} \tau_s f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)\mathrm{d}x = (Sf')(s) \tag{3.3}$$

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} \tau_{s+1} f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \tau_s f(x)\mathrm{d}x = f'(s) \tag{3.4}$$

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} \tau_1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)\mathrm{d}x + f'(0) \tag{3.5}$$

$$Sf(s) = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \tau_s \,\mathrm{P}f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{P}f(x)\mathrm{d}x \tag{3.6}$$

$$f(s) = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \tau_{s+1} \,\mathrm{P}f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \tau_s \,\mathrm{P}f(x)\mathrm{d}x \tag{3.7}$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy (3.1) jobb oldalán nem szerepel s, tehát ez az egyenlőség azt is jelenti, hogy a bal oldal értéke s-től függetlenül konstans.

Jelölje a differenciálás operátort D ($D : S^1(\mathbb{Z}_p \to K) \to C(\mathbb{Z}_p \to K)$), és legyen $\Delta f = \tau_1 f - f$ ($\Delta : C(\mathbb{Z}_p \to K) \to C(\mathbb{Z}_p \to K)$). Könnyen ellenőrizhető, hogy $\Delta D = D\Delta$, $\Delta S = \mathrm{Id}$ és $(S\Delta f)(s) = f(s) - f(0)$. Ezekből $SD = SD\Delta S = S\Delta DS$ és így $(SDf)(s) = (DSf)(s) - (DSf)(0)$. Tehát

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)\mathrm{d}x = (DSf)(0) = (Sf)'(s) - (Sf')(s)$$

ami bizonyítja (3.1)-et. (3.2) bizonyításához vegyük észre, hogy

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} \tau_s f(x)\mathrm{d}x = DS\tau_s f(0) = \tau_s DSf(0) = (Sf)'(s).$$

(3.3)–(3.5) könnyen következik az előző kettőből ha felhasználjuk még, hogy $Sf(x+1) - Sf(x) = f(x)$ ($x \in \mathbb{Z}_p$). (3.3)-at és (3.4)-et f helyett $\mathrm{P}f$-re felírva kapjuk az utolsó két egyenlőséget. $\square$

Az előző tétel értelmében a Volkenborn-integrál általában nem transzláció-invariáns. Azonban ha csak azokat az S^1-beli függvényeket tekintjük, amelyek deriváltja 0 akkor már teljesül a transzláció-invariancia. Emlékezzünk rá, hogy a klasszikus esettel ellentétben ilyen függvényből „sok” van (a lokálisan konstans függvények sűrűek a folytonos függvények terében).

3.8.1. Következmény. *Ha $f \in S^1(\mathbb{Z}_p \to K)$ és $f' \equiv 0$, akkor*

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} \tau_s f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)\mathrm{d}x \quad (s \in \mathbb{Z}_p).$$

Bizonyítás. Triviálisan következik (3.4)-ből. □

Most már tudjuk definiálni a keresett m „mértéket”, amely additív és transzláció-invariáns. Az abszolút korlátosságról le kell mondanunk, de a fejezet elején látottak szerint a gyengébb $|m(U)|_p \leq p\|\chi_U\|_1$ egyenlőtlenség teljesül.

3.8.2. Következmény. *Legyen $\Omega = \{U \subseteq \mathbb{Z}_p : U$ nyílt-zárt$\}$. Az*

$$m(U) := \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \chi_U(x)\mathrm{d}x$$

hozzárendeléssel definiált halmazfüggvényre teljesülnek a következők:

1. $m(B_a(p^{-n})) = p^{-n} \quad (a \in \mathbb{Z}_p,\ n \in \mathbb{N})$,
2. $m(U \cup V) = m(U) + m(V) \quad (U, V \in \Omega,\ U \cap V = \emptyset)$,
3. $m(s + U) = m(U) \quad (U \in \Omega,\ s \in \mathbb{Z}_p)$,
4. $m(U) \in \mathbb{Q} \quad (U \in \Omega)$.

Bizonyítás. A felsorolt tulajdonságok azonnal következnek a 3.8. tételből és a Volkenborn-integrál tulajdonságaiból. □

Zárásul bizonyítunk még egy formulát, amely páratlan függvények Volkenborn-integráljának kiszámítását könnyíti meg.

3.9. Állítás. *Legyen $f \in S^1(\mathbb{Z}_p \to K)$. Ekkor*

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(-x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \tau_1 f(x)\mathrm{d}x.$$

Speciálisan ha f egy páratlan függvény, akkor

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)\mathrm{d}x = -\frac{f'(0)}{2}.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(-x)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \frac{p(0)+p(-1)+\dots+p(-p^n+1)}{p^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{Sf(1)-Sf(1-p^n)}{p^n} \\ &= (Sf)'(1) \\ &= \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \tau_1 f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ha $f(-x) = -f(x)$, akkor

$$-\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(-x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \tau_1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)\mathrm{d}x + f'(0),$$

azaz

$$0 = 2\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)\mathrm{d}x + f'(0)$$

amit átrendezve kapjuk a tétel állítását. □

3.10. Példa. *Legyen* $|a|_p < p^{\frac{1}{1-p}}$ *rögzített. Ekkor*

$$\sin_p(ax) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

egész $\mathbb{Z}_p$*-n konvergens. Az előző tételt felhasználva*

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} \sin_p(ax)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!} \int\limits_{\mathbb{Z}_p} x^{2n+1}\mathrm{d}x = -\frac{a}{2}$$

ugyanis az $n = 0$ *eset kivételével* $(x^{2n+1})'(0) = 0$.

4. fejezet

Disztribúciók és mértékek

4.1. Disztribúciók

A fejezet során K végig egy $\mathbb{Q}_p \subseteq K \subseteq \mathbb{C}_p$, a p-adikus értékelésre nézve teljes testet jelöl, X pedig K egy kompakt-nyílt részhalmazát. $\Omega(X)$ az X kompakt-nyílt[1] részhalmazaiból álló halmazrendszer.

A fejezet nagyrészt a [Kob84]-beli felépítést követi kiegészítve [Sch84] A5 és A6 függelékeinek egyes részeivel.

4.1. Definíció. *A lokálisan konstans $X \to K$ függvények egy vektorteret alkotnak K felett. Ezen tér duálisának elemeit p-adikus disztribúcióknak nevezzük.*

A p-adikus disztribúciók kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők $\Omega(X)$-en értelmezett K-értékű additív halmazfüggvényeknek. Ha adott egy μ disztribúció, akkor ez meghatároz egy $\Omega(X) \ni A \to \mu(\chi_A)$ halmazfüggvényt. Fordítva, legyen M egy additív halmazfüggvényt $\Omega(X)$-en. Minden lokálisan konstans függvény felírható mint véges sok $\Omega(X)$-beli halmaz karakterisztikus függvényének lineáris kombinációja. A $\chi_A \to M(A)$ hozzárendelést a lineáris kombinációkra kiterjesztve egy disztribúciót kapunk. Ezen ekvivalenciát kihasználva ezentúl az előbbi halmazfüggvényekre is p-adikus disztribúcióként fogunk hivatkozni.

A mérték- és integrálelmélet most következő felépítésében a 4.14. tételig bezárólag élünk a $K = \mathbb{Q}_p$ feltevéssel. Lehetséges lenne végig az általánosabb $\mathbb{Q}_p \subseteq K \subseteq \mathbb{C}_p$ megkötéssel dolgozni, de így egyszerűbb lesz a tárgyalás, anélkül hogy a lényeg elvészne. A későbbi tételeknél már elhagyjuk ezt a megszorítást.

Ahogy azt már korábban tárgyaltuk, az ultrametrikus esetben az $a + p^n\mathbb{Z}_p$ ($a \in \mathbb{X}$, $n \in \mathbb{N}$) alakú halmazok töltik be az intervallumok szerepét. Az X-beli intervallumok halmazát jelölje $I(X)$. A következő tétel szerint egy, az intervallumokon megfelelően megadott halmazfüggvény már egyértelműen meghatároz egy disztribúciót.

4.2. Tétel. *Egy $\mu : I(X) \to \mathbb{Q}_p$ halmazfüggvény amire teljesül*

$$\mu(a + p^n\mathbb{Z}_p) = \sum_{b=0}^{p-1} \mu(a + bp^n + p^{n+1}\mathbb{Z}_p) \quad (a + p^n\mathbb{Z}_p \in I(X))$$

egyértelműen kiterjeszthető egy p-adikus disztribúcióvá.

[1] Itt mondhatnánk nyílt-zártat is. Mivel X kompakt, X egy részhalmaza pontosan akkor kompakt-nyílt, ha nyílt-zárt.

Bizonyítás. Mivel X kompakt, a nyílt-zárt részhalmazai egyben kompaktak is, így felírhatók véges sok diszjunkt intervallum uniójaként (hiszen az intervallumok most egyben gömbök is és két gömb vagy diszjunkt vagy az egyik tartalmazza a másikat). Ha egy $A \in \Omega(X)$ halmazt

$$A = \bigcup_{i=0}^{n} I_i$$

alakban írtunk fel diszjunkt intervallumok uniójaként, akkor legyen

$$\mu(A) := \sum_{i=1}^{n} \mu(I_i).$$

Ellenőrizni kell, hogy μ jóldefiniált. Ha

$$A = \bigcup_{j=0}^{m} I'_j$$

egy másik, diszjunkt intervallumokkal való előállítása A-nak, akkor vegyük az I_i és I'_j intervallumrendszerek egy közös finomítását. Ha ebben

$$I_i = \bigcup_{j=1}^{k_i} I_{ij}$$

és $I_i = a + p^n\mathbb{Z}_p$ alakú volt, akkor az I_{ij} intervallumok $a' + p^{n'}\mathbb{Z}_p$ alakúak ahol $n' \geq n$ és $a' \equiv a \pmod{p^n}$. Ekkor a feltevést szükség szerint többször alkalmazva a

$$\mu(I_i) = \mu(a + p^n\mathbb{Z}_p) = \sum_{j=0}^{p^{n'-n}-1} \mu(a + jp^n + p^{n'}\mathbb{Z}_p) = \sum_{j=0}^{k_i} \mu(I_{ij})$$

egyenlőségre jutunk, amiből

$$\sum_{i=0}^{n} \mu(I_i) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k_i} \mu(I_{ij}) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{k'_i} \mu(I_{ij}) = \sum_{i=0}^{m} \mu(I'_i).$$

Még μ additivitását kell megmutatni, de ez triviálisan következik az előző gondolatmenetből és abból, hogy $\Omega(X)$ tetszőleges eleme felírható véges sok diszjunkt intervallum uniójaként. $\square$

Nézzünk néhány példát p-adikus disztribúcióra.

1. **Haar-disztribúció.**
$$\mu_{\mathrm{Haar}}(a + p^n\mathbb{Z}_p) := \frac{1}{p^n}$$
Az előző tétel alapján ez könnyen ellenőrizhetően egy disztribúció. Konstans szorzótól eltekintve ez az egyértelműen meghatározott transzláció-invariáns disztribúció, azaz
$$\mu_{\mathrm{Haar}}(a + U) = \mu_{\mathrm{Haar}}(U) \quad (a \in X,\, U \in \Omega(X)).$$

2. **Dirac-disztribúció.** A

$$\mu_x(U) := \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in U, \\ 0 & \text{ha } x \notin U. \end{cases}$$

definícióval megadott halmazfüggvényt az *x pontra koncentrált Dirac-disztribúció*nak nevezzük. μ_x additivitása a definícióból azonnal adódik.

3. **Mazur-disztribúció.** Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy amikor egy $a + p^n\mathbb{Z}_p$ intervallumról beszélünk, a egy racionális egész 0 és $p^n - 1$ között (a természetes számok $\mathbb{Z}_p$-beli sűrűsége miatt). Ezzel a feltevéssel élve legyen

$$\mu_{\text{Mazur}}(a + p^n\mathbb{Z}_p) := \frac{a}{p^n} - \frac{1}{2}.$$

Ez egy speciális esete a most következő Bernoulli-disztribúcióknak.

4. **Bernoulli-disztribúciók.**

4.3. Definíció. *A*

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

exponenciális generátorfüggvény által meghatározott $B_0(x)$, $B_1(x)$, ... polinomsorozatot Bernoulli-polinomoknak nevezzük.

Az n-edik ($n \geq 0$) Bernoulli-polinom zárt alakban a

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}x^k$$

képlettel is definiálható, ahol b_i az i-edik Bernoulli-számot jelöli. A következő tételben megadjuk a Bernoulli-polinomok néhány jól ismert tulajdonságát.

4.4. Tétel. *Jelölje $B_k(x)$ és b_k a k-adik Bernoulli-polinomot, illetve Bernoulli-számot.*

(a)

$$B_k(0) = b_k \quad (k \geq 0),$$

(b)

$$\int_0^1 B_k(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = 0, \\ 0 & \text{ha } k > 0, \end{cases}$$

(c)

$$B_k'(x) = kB_{k-1}(x) \quad (k > 0).$$

Az első néhány Bernoulli-polinom:

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1, \\ B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\ B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\ B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

Mint a Mazur-disztribúciónál, a továbbiakban is feltesszük, hogy amikor egy $a + p^n\mathbb{Z}_p$ intervallumról beszélünk, akkor a egy racionális egész és $0 \leq a \leq p^n - 1$. Rögzített $k \in \mathbb{N}$ mellett a k-adik Bernoulli-disztribúciót a

$$\mu_{\mathrm{B},k}(a + p^n\mathbb{Z}_p) := p^{n(k-1)}B_k(\frac{a}{p^n})$$

képlettel definiáljuk $I(X)$-en. A $k = 0$ esetben a Haar-disztribúciót, a $k = 1$ esetben pedig a Mazur-disztribúciót kapjuk. Be kell látnunk, hogy ez a definíció valóban disztribúciót határoz meg.

4.5. Tétel. *Az előbb definiált $\mu_{B,k}$ halmazfüggvény kiterjed disztribúcióvá $\Omega(X)$-en.*

Bizonyítás. A 4.2. tételben megadott feltétel teljesülését kell ellenőrizni, ami a Bernoulli-disztribúció definícióját a jobb oldalon beírva most így hangzik:

$$\mu_{\mathrm{B},k}(a + p^n\mathbb{Z}_p) = p^{(n+1)(k-1)}\sum_{b=0}^{p-1} B_k\left(\frac{a + bp^n}{p^{n+1}}\right).$$

Szorozva $p^{-n(k-1)}$-nel és az $\alpha = \frac{a}{p^{n+1}}$ helyettesítést elvégezve a

$$B_k(p\alpha) = p^{k-1}\sum_{b=0}^{p-1} B_k\left(\alpha + \frac{b}{p}\right)$$

alakhoz jutunk. B_k definíciója szerint a jobb oldal nem más mint t^k együtthatója a

$$\begin{aligned}
k!p^{k-1}\sum_{b=0}^{p-1}\frac{te^{(\alpha+\frac{b}{p})t}}{e^t - 1} &= k!\frac{p^{k-1}te^{\alpha t}}{e^t - 1}\sum_{b=0}^{p-1} e^{\frac{bt}{p}} \\
&= k!\frac{p^{k-1}te^{\alpha t}}{e^t - 1}\frac{e^t - 1}{e^{\frac{t}{p}} - 1} \\
&= k!p^k\frac{\frac{t}{p}e^{\frac{p\alpha t}{p}}}{e^{\frac{t}{p}} - 1} \\
&= k!p^k\sum_{j=0}^{\infty} B_j(p\alpha)\frac{(\frac{t}{p})^j}{j!}
\end{aligned}$$

kifejezésben, ahol a második egyenlőséghez a mértani sorozat összegképletét, az utolsóhoz pedig ismét B_j definícióját használtuk. Ebből már leolvasható t^k együtthatója, ami $B_k(p\alpha)$. Ez pont az amit bizonyítani akartunk. □

Megjegyzés. *Megmutatható, hogy a Bernoulli-polinomok az egyetlen polinomsorozat amely felhasználható disztribúciók definiálására az előbbiekben látott módon.*

Megjegyzés. *Az előbbi disztribúciók rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy „zsugorodó" intervallumokon egyre nagyobb abszolútértékű értékeket vesznek fel. Például μ_{Haar} esetén*

$$|\mu_{Haar}(a + p^n\mathbb{Z}_p)|_p = p^n.$$

Ez pont az ellenkezője annak amit várnánk. Sőt, még az is igaz, hogy ha egy μ disztribúcióra

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\leq a<p^n}|\mu(a + p^n)|_p = 0$$

teljesül, akkor csak $\mu \equiv 0$ lehetséges. Ezek alapján nem meglepő, hogy egy disztribúció általában nem határoz meg egy integrált a folytonos függvények terén. A következőkben ezt a problémát fogjuk orvosolni, legalábbis a Bernoulli-disztribúciók esetében.

4.2. Mértékek, regularizáció, integrál

4.6. Definíció. *A μ p-adikus disztribúciót mértéknek nevezzük ha korlátos, azaz létezik $M \geq 0$, amivel*

$$|\mu(A)|_p \leq M \quad (A \in \Omega(X)).$$

Az előző szakaszban látott disztribúciók közül egyedül a Dirac-disztribúció mérték. A következőkben bevezetünk egy regularizációs eljárást amellyel Bernoulli-disztribúciókból készíthetünk mértékeket. Könnyen ellenőrizhető, hogy disztribúciók (mértékek) összege és skalárszorosa szintén disztribúció (mérték). Legyen α egy 1-től különböző, p-vel nem osztható racionális egész. Ekkor definiáljuk a

$$\mu_{\mathrm{B},k,\alpha}(A) := \mu_{\mathrm{B},k}(A) - \alpha^{-k}\mu_{\mathrm{B},k}(\alpha A)$$

regularizált Bernoulli-disztribúciót. Amint a következő tételekben látni fogjuk, az így kapott $\mu_{\mathrm{B},k,\alpha}$ egy mérték.

4.7. Állítás ($k = 0$ eset)**.** *Ha $k = 0$, akkor*

$$\mu_{B,0,\alpha} \equiv 0.$$

Bizonyítás. Elég megmutatni, hogy tetszőleges $I = a + p^n\mathbb{Z}_p$ intervallum esetén $\mu_{\mathrm{B},0}(A) = 0$, hiszen $\Omega(X)$ elemei előállnak ilyen alakú halmazok véges, diszjunkt uniójaként. αa legkisebb nemnegatív maradékát modulo p^n jelöljük a'-vel. $|\alpha|_p = 1$ ezért $\alpha I = a' + p^n\mathbb{Z}_p$, tehát I és αI Haar-mértéke egyaránt p^{-n}. □

A továbbiakban az $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ számmal modulo p^n kongruens, 0 és $p^n - 1$ közti racionális egészt jelölje $\{\alpha\}_n$.

4.8. Tétel ($k = 1$ eset)**.** *Ha $k = 1$, akkor*

$$|\mu_{B,1,\alpha}|_p \leq 1.$$

Bizonyítás. $\mu_{\mathrm{B},1,\alpha}$ definíciója a következőképpen írható át:

$$\begin{aligned}\mu_{\mathrm{B},1,\alpha}(a + p^n\mathbb{Z}_p) &= \frac{a}{p^n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\{\alpha a\}_n}{p^n} - \frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{\frac{1}{\alpha} - 1}{2} + \frac{a}{p^n} - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha a}{p^n} - \left\lfloor\frac{\alpha a}{p^n}\right\rfloor\right)\\ &= \frac{\frac{1}{\alpha} - 1}{2} + \frac{1}{\alpha}\left\lfloor\frac{\alpha a}{p^n}\right\rfloor.\end{aligned}$$

Ha $p \neq 2$, akkor $\frac{1}{\alpha}$ és $\frac{1}{2}$ is $\mathbb{Z}_p$ eleme. Ha $p = 2$, akkor $\frac{1}{\alpha} - 1 \equiv 0 \pmod 2$. Ez azt jelenti, hogy $\frac{\frac{1}{\alpha}-1}{2}$ eleme $\mathbb{Z}_p$-nek p választásától függetlenül és így $\mu_{\mathrm{B},1,\alpha}(a + p^n\mathbb{Z}_p)$ is. Ezzel megkaptuk, hogy $I(X)$ elemein $\mu_{\mathrm{B},1,\alpha}$ értéke ≤ 1. Tetszőleges $A \in \Omega(X)$ felírható véges sok diszjunkt p-adikus intervallum uniójaként, legyen egy ilyen felírás

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$$

de akkor

$$|\mu_{\mathrm{B},1,\alpha}(A)|_p = \left|\sum_{i=1}^{n}\mu_{\mathrm{B},1,\alpha}(I_i)\right|_p \leq \max_{1\leq i\leq n}|\mu_{\mathrm{B},1,\alpha}(I_i)|_p \leq 1.$$

□

A következő tétel kapcsolatot teremt $\mu_{\mathrm{B},k,\alpha}$ $(k > 1)$ és $\mu_{\mathrm{B},1,\alpha}$ között.

4.9. Tétel. *Legyen d_k a $B_k(x)$ polinom együtthatóiban a nevezők legkisebb közös többszöröse. Így például $d_1 = 2$, $d_2 = 6$, $d_3 = 2$ stb. Ekkor*

$$d_k \mu_{B,k,\alpha}(a + p^n\mathbb{Z}_p) \equiv d_k k a^{k-1} \mu_{1,\alpha}(a + p^n\mathbb{Z}_p) \pmod{p^n}$$

ahol a kongruencia mindkét oldala $\mathbb{Z}_p$-beli.

Bizonyítás. $\mu_{\mathrm{B},k,\alpha}$ definíciója szerint

$$d_k \mu_{\mathrm{B},k,\alpha}(a + p^n\mathbb{Z}_p) = d_k p^{n(k-1)} \left(B_k\left(\frac{a}{p^n}\right) - \alpha^{-k} B_k\left(\frac{\{\alpha a\}_n}{p^n}\right)\right).$$

$d_k B_k(x)$ egy egész együtthatós, k-adfokú polinom, továbbá

$$d_k B_k(x) = d_k B_0 x^k + d_k k B_1 x^{k-1} + \cdots = d_k x^k - d_k \frac{k}{2} x^{k-1} + \ldots .$$

Elég az első két taggal foglalkoznunk, a többi ugyanis most p^n-nel osztható. Ezt onnan láthatjuk, hogy amikor x helyére beírjuk a $\mu_{\mathrm{B},k,\alpha}$ definíciójában szereplő megfelelő értékeket, a nevezőben mindig p^n áll, így amikor x-et $k-1$-nél kisebb hatványra emeljük, a $p^{n(k-1)}$ szorzó miatt a megfelelő tag együtthatója p^n többszöröse lesz.

Felhasználva az

$$\alpha a \equiv \{\alpha a\}_n \pmod{p^n}$$

és

$$\frac{\{\alpha a\}_n}{p^n} = \frac{\alpha a}{p^n} - \left\lfloor \frac{\alpha a}{p^n} \right\rfloor$$

összefüggéseket, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&d_k \mu_{\mathrm{B},k,\alpha}(a + p^n\mathbb{Z}_p) \\
&\equiv d_k p^{n(k-1)} \left(\frac{a^k}{p^{nk}} - \alpha^{-k} \left(\frac{\{\alpha a\}_n}{p^n}\right)^k - \frac{k}{2}\left(\frac{a^{k-1}}{p^{n(k-1)}} - \alpha^{-k}\left(\frac{\{\alpha a\}_n}{p^n}\right)^{k-1}\right)\right) \pmod{p^n} \\
&= d_k \left(\frac{a^k}{p^n} - \alpha^{-k} p^{n(k-1)} \left(\frac{\alpha a}{p^n} - \left\lfloor \frac{\alpha a}{p^n}\right\rfloor \right)^k - \frac{k}{2}\left(a^{k-1} - \alpha^{-k} p^{n(k-1)} \left(\frac{\alpha a}{p^n} - \left\lfloor \frac{\alpha a}{p^n}\right\rfloor\right)^{k-1}\right)\right) \\
&\equiv d_k \left(\frac{a^k}{p^n} - \alpha^{-k}\left(\frac{\alpha^k a^k}{p^n} - k\alpha^{k-1} a^{k-1} \left\lfloor \frac{\alpha a}{p^n}\right\rfloor\right) - \frac{k}{2}(a^{k-1} - \alpha^{-k}(\alpha^{k-1}a^{k-1})\right) \pmod{p^n} \\
&= d_k k a^{k-1} \left(\frac{1}{\alpha} \left\lfloor \frac{\alpha a}{p^n} \right\rfloor + \frac{\frac{1}{\alpha} - 1}{2}\right) \\
&= d_k k a^{k-1} \mu_{\mathrm{B},1,\alpha}(a + p^n\mathbb{Z}_p).
\end{aligned}$$

□

4.9.1. Következmény. *$\mu_{B,k,\alpha}$ $(k > 1)$ mérték.*

Bizonyítás. Az előző tétel alapján

$$\begin{aligned}
|\mu_{\mathrm{B},k,\alpha}(a + p^n\mathbb{Z}_p)|_p &\le \max\left\{ \left|\frac{p^n}{d_k}\right|_p, |k a^{k-1} \mu_{\mathrm{B},1,\alpha}(a + p^n\mathbb{Z}_p)|_p \right\} \\
&\le \max\left\{ \left|\frac{1}{d_k}\right|_p, |\mu_{\mathrm{B},1,\alpha}(a + p^n\mathbb{Z}_p)|_p \right\}.
\end{aligned}$$

Most $\frac{1}{d_k}$ rögzített, azt már pedig láttuk, hogy $|\mu_{\mathrm{B},1,\alpha}|_p \leq 1$, tehát $\mu_{\mathrm{B},k,\alpha}$ korlátos, azaz mérték. □

Ahogy azt a 2.1. példa mutatja, egy disztribúció nem határoz meg egy egyértelmű integrált a folytonos függvények terén (a hivatkozott példában lényegében a μ_{Haar} disztribúció szerint próbáltunk Riemann-összegeket képezni). A következő tétel szerint mértékeket használva már nem áll fenn ez a probléma.

4.10. Tétel. *Legyen $\mu : \Omega(X) \to \mathbb{Q}_p$ egy p-adikus mérték, $f : X \to \mathbb{Q}_p$ egy folytonos függvény, $(x_{a,n})_{n\in\mathbb{N},0\leq a<p^n}$ egy tetszőleges olyan alappontrendszer, hogy $x_{a,n} \in a + p^n\mathbb{Z}_p$. Ekkor az*

$$S_{n,(x_{a,n})} = \sum_{\substack{0\leq a<p^n \\ a+p^n\mathbb{Z}_p\in\Omega(X)}} f(x_{a,n})\mu(a + p^n\mathbb{Z}_p)$$

Riemann-féle közelítő összegek sorozata konvergál egy $\mathbb{Q}_p$-beli határértékhez ami nem függ az $(x_{a,n})$ alappontrendszer választásától.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $|\mu(A)|_p \leq B$ $(A \in \Omega(X))$. Becsüljük $|S_{n,(x_{a,n})} - S_{m,(x_{a,m})}|_p$ értékét, ha $m > n$. X-et véges sok intervallum uniójaként felírva, ha n elég nagy, akkor minden $a+p^n\mathbb{Z}_p$ halmaz vagy X-beli vagy diszjunkt X-től. Legyen n még olyan is, hogy $|f(x) - f(y)|_p < \varepsilon$ ha $x \equiv y \pmod{p^n}$ (mivel X kompakt, ezért f egyenletesen folytonos, tehát van ilyen n). μ additív, így

$$S_{n,(x_{a,n})} = \sum_{\substack{0\leq a<p^m \\ a+p^m\mathbb{Z}_p\subseteq X}} f(x_{a',n})\mu(a + p^m\mathbb{Z}_p),$$

ahol a' jelöli αa legkisebb nemnegatív maradékát modulo p^n. Ebből

$$\begin{aligned}
|S_{n,(x_{a,n})} - S_{m,(x_{a,m})}|_p &= \left| \sum_{\substack{0\leq a<p^m \\ a+p^m\mathbb{Z}_p\subseteq X}} (f(x_{a',n}) - f(x_{a,m}))\mu(a + p^m\mathbb{Z}_p) \right|_p \\
&\leq \max\left\{|f(x_{a',n}) - f(x_{a,m})|_p|\mu(a + p^m\mathbb{Z}_p)|_p\right\} \\
&\leq \varepsilon B
\end{aligned}$$

ugyanis $x_{a',n} \equiv x_{a,m} \pmod{p^n}$. Ez azt jelenti, hogy a Riemann-féle közelítő összeg konvergens tetszőleges $x_{a,n}$ alappontrendszer mellett. Ugyanígy kapjuk az alappontrendszer választásától való függetlenséget is. Legyen $x_{a,n}$ és $x'_{a,n}$ két tetszőlegesen választott alappontrendszer. Ekkor

$$\begin{aligned}
|S_{n,(x_{a,n})} - S_{n,(x'_{a,n})}|_p &= \left| \sum_{\substack{0\leq a<p^n \\ a+p^n\mathbb{Z}_p\subseteq X}} (f(x_{a,n}) - f(x'_{a,n}))\mu(a + p^n\mathbb{Z}_p) \right|_p \\
&\leq \max\left\{|f(x_{a,n}) - f(x'_{a,n})|_p|\mu(a + p^n\mathbb{Z}_p)|_p\right\} \\
&\leq \varepsilon B.
\end{aligned}$$

□

Most már minden készen áll arra, hogy definiáljuk a mérték szerinti integrál fogalmát.

4.11. Definíció. *Legyen* $\mu : \Omega(X) \to \mathbb{Q}_p$ *egy p-adikus mérték,* $f : X \to \mathbb{Q}_p$ *egy folytonos függvény. Az* f *függvény* μ *szerinti integrálja a Riemann-féle közelítő összegek határértéke, amely az előző tétel értelmében egyértelműen létezik. Jelölése*

$$\int f \mathrm{d}\mu \quad \textit{vagy} \quad \int f(x)\mathrm{d}x\mu.$$

4.12. Definíció. *Legyen* $U \in \Omega(X)$ *nyílt-zárt* χ_U *karakterisztikus függvénnyel. Egy* μ *mérték* U*-ra való megszorítása szintén mérték* ($\Omega(U)$*-n). Jelölése*

$$\mu_U \coloneqq \mu|_{\Omega(U)}\,.$$

Egy f *függvény* U*-n vett integrálját a* μ_U *mérték szerinti integráljaként definiáljuk:*

$$\int\limits_U f\mathrm{d}\mu \coloneqq \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f\mathrm{d}\mu_U = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f\chi_U \mathrm{d}\mu.$$

4.13. Állítás. *Legyen* $\mu : \Omega(X) \to \mathbb{Q}_p$ *egy p-adikus mérték,* $f : X \to \mathbb{Q}_p$ *egy folytonos függvény. Ha* $|f(x)|_p \le K_1$ $(x \in X)$ *és* $|\mu(A)|_p \le K_2$ $(A \in \Omega(X))$*, akkor*

$$\left|\int f\mathrm{d}\mu\right|_p \le K_1K_2.$$

Bizonyítás. A Riemann-összegekre tett triviális

$$\left|\sum_{\substack{0\le a<p^n\\ a+p^n\mathbb{Z}_p\in\Omega(X)}} f(x_{a,n})\mu(a+p^n\mathbb{Z}_p)\right|_p \le \max_{0\le a<p^n} |f(x_{a,n})|_p|\mu(a+p^n\mathbb{Z}_p)|_p$$

becslésből azonnal adódik. □

4.13.1. Következmény. *Legyenek* $f, g : X \to \mathbb{Q}_p$ *folytonos függvények. Tegyük fel, hogy* $|f(x) - g(x)|_p \le \varepsilon$ $(x \in X)$*. Az előző állítást az* $f - g$ *függvényre a* $K_1 = \varepsilon$ *korláttal alkalmazva azt kapjuk, hogy*

$$\left|\int f\mathrm{d}\mu - \int g\mathrm{d}\mu\right|_p \le \varepsilon K_2.$$

Mit mondhatunk általában a $\mu_{\mathrm{B},1,\alpha}$ és $\mu_{\mathrm{B},k,\alpha}$ $(k > 1)$ mértékek (és az általuk meghatározott integrálok) közti kapcsolatról? Erre a következő tétel ad választ.

4.14. Tétel. *Legyen* $A \in \Omega(X)$*,* $k \in \mathbb{N}^+$*.*

$$\int\limits_A 1\mu_{B,k,\alpha}(x) = k\int\limits_A x^{k-1}\mu_{B,1,\alpha}(x).$$

Bizonyítás. A 4.9. tétel szerint

$$\mu_{\mathrm{B},k,\alpha}(a+p^n\mathbb{Z}_p) \equiv ka^{k-1}\mu_{\mathrm{B},1,\alpha}(a+p^n\mathbb{Z}_p) \pmod{p^{n-\nu_p(d_k)}}.$$

Ha n elég nagy, akkor A felírható $a + p^n\mathbb{Z}_p$ alakú intervallumok uniójaként. Így tehát

$$\begin{aligned}
\int_A 1\mu_{\mathrm{B},k,\alpha}(x) &= \sum_{\substack{0\le a<p^n \\ a+p^n\mathbb{Z}_p\subseteq A}} \mu_{\mathrm{B},k,\alpha}(a+p^n\mathbb{Z}_p) \\
&\equiv \sum_{\substack{0\le a<p^n \\ a+p^n\mathbb{Z}_p\subseteq A}} ka^{k-1}\mu_{\mathrm{B},1,\alpha}(a+p^n\mathbb{Z}_p) \pmod{p^{n-\nu_p(d_k)}} \\
&= k\sum_{\substack{0\le a<p^n \\ a+p^n\mathbb{Z}_p\subseteq A}} x^{k-1}\big|_{x=a}\,\mu_{\mathrm{B},1,\alpha}(a+p^n\mathbb{Z}_p).
\end{aligned}$$

Az $n \to \infty$ határátmenettel kapjuk a kívánt eredményt. □

Az X-en értelmezett K értékű mértékek egy normált teret alkotnak a $\|\mu\| := \sup_{A\in\Omega(X)} |\mu(A)|_p$ szuprémum-normával. Jelölje ezt $M(X \to K)$. A következő tétel, amely felfogható a Riesz–Markov–Kakutani reprezentációs tétel ultrametrikus megfelelőjeként, rávilágít az $M(X \to K)$ és $C(X \to K)'$ közti kapcsolatra.

4.15. Tétel. *Tetszőleges $\varphi \in C(X \to K)'$ esetén $\mu_\varphi : A \to \varphi(\chi_A)$ egy mérték. A $\varphi \to \mu_\varphi$ leképezés egy szürjektív K-lineáris izometria $C(X \to K)'$ térről $M(X \to K)$ térre.*

Bizonyítás. A K-linearitás és az, hogy μ_φ valóban egy mérték könnyen ellenőrizhető. Teljesül a

$$\|\mu_\varphi\| = \sup\{|\varphi(\chi_A)\}|_p : A \in \Omega(X)\} \le \|\varphi\|$$

egyenlőtlenség is. A másik irány igazolásához legyen $f \in C(X \to K)$ egy olyan lokálisan konstans függvény, hogy $\|f\|_\infty \le 1$. Mivel a lokálisan konstans függvények pontosan azok, amelyek felírhatók nyílt-zárt halmazok karakterisztikus függvényeinek véges lineáris kombinációjaként, ezért megfelelő $A_1, \dots, A_n \in \Omega(X)$ és $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mellett $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i\chi_{A_i}$ ahol $|\lambda_i| \le 1$ $(i = 1, \dots, n)$. Így

$$|\varphi(f)|_p \le \max\{|\lambda_i|_p|\varphi(\chi_{A_i})|_p : 1 \le i \le n\} \le \max\{|\mu_\varphi(A_i)|_p : 1 \le i \le n\} \le \|\mu_\varphi\|.$$

A lokálisan konstans függvények sűrűségéből következik, hogy ez minden $f \in C(X \to K)$ függvényre is igaz amire $\|f\|_\infty \le 1$. X kompaktsága és a leképezés linearitása alapján tehát $\|\varphi\| \le \|\mu_\varphi\|$, amivel az izometriát igazoltuk. A szürjektivitás igazolásához egy tetszőleges $\mu \in M(X \to K)$ mértékhez kell mutatnunk olyan φ-t, hogy $\mu \equiv \mu_\varphi$. Ehhez tekintsünk egy tetszőleges $f \in C(X \to K)$ lokálisan konstans függvényt. Választható X-nek egy olyan $A_1, \dots, A_n$ nyílt-zárt partíciója és $a_i \in A_i$ pontok, hogy $f = \sum_{i=1}^n f(a_i)\chi_{A_i}$. Definiáljuk φ-t a következőképpen:

$$\varphi(f) := \sum_{i=1}^n f(a_i)\mu_{A_i}.$$

Be kell látnunk, hogy ez jóldefiniált a lokálisan konstans függvények terén. Jelöljön $B_1, \dots, B_m$ és $b_i \in B_i$ egy másik, f-hez tartozó partíciót és pontsorozatot. Véve a két partíció egy közös $C_1, \dots, C_l$ finomítását és tetszőleges $c \in C_i$ alappontokat,

$$\sum_{i=1}^n f(a_i)\chi_{A_i} = \sum_{i=1}^l f(c_i)\chi_{C_i} = \sum_{i=1}^m f(b_i)\chi_{B_i}.$$

Hasonlóan látható, hogy φ valóban K-lineáris (a lokálisan konstans függvények terén). Az előbbi f-re

$$|\varphi(f)|_p \leq \left| \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\mu(A_i) \right|_p \leq \|f\|_\infty \|\mu\|.$$

K most egy szférikusan teljes test, így érvényes az ultrametrikus Hahn-Banach tétel (lásd [Sch84, A8]) ami szerint φ kiterjeszthető a $C(X \to K)$ térre. Már csak azt kell ellenőrizni, hogy $\varphi(\chi_A) = \mu(A)$ $(A \in \Omega(X))$ teljesül, de ez azonnal adódik φ definíciójából. $\square$

4.3. További összefüggések

Ebben a szakaszban néhány további hasznos tétel kerül kimondásra bizonyítás és részletes tárgyalás nélkül. A bizonyítások megtalálhatók a [Sch84] könyv A5 és A6 függelékében. [VR78] a téma egy mélyebb tárgyalását tartalmazza a funkcionálanalízis szemszögéből.

Elsőként megadjuk a Fubini-tétel ultrametrikus változatát.

4.16. Tétel (Fubini)**.** *Legyenek $\mathfrak{X}$ és $\mathfrak{Y}$ kompakt ultrametrikus terek a μ és ν mértékekkel, $f : \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} \to K$ pedig egy folytonos függvény. Ekkor*

$$\int_{\mathfrak{X}} \int_{\mathfrak{Y}} f(x, y) \mathrm{d}\nu(y) \mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathfrak{Y}} \int_{\mathfrak{X}} f(x, y) \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\nu(y).$$

Lehetséges az integrálható függvények körének a folytonos függvényeken túli bővítése is. Ehhez egy rögzített μ mérték mellett először a folytonos függvények terén vezetünk be egy $\|\cdot\|_\mu$ félnormát a

$$\|f\|_\mu \coloneqq \sup \left\{ \frac{|\int fg \mathrm{d}\mu|}{\|g\|_\infty} : g \in C(X \to K), g \neq 0 \right\}$$

definícióval.

Megjegyzés. *A valós értékű esetben ez a definíció a $\|f\|_\mu = \int |f| \mathrm{d}\mu$ félnormához vezet.*

Belátható a következő tétel.

4.17. Tétel. *Létezik egy $N_\mu : X \to \mathbb{R}_0^+$ felülről féligfolytonos függvény, amivel*

$$\|f\|_\mu = \sup_{x \in X} |f(x)|_p N_\mu(x) \quad (f \in C(X \to K)).$$

Az előbbi tétel segítségével $\|\cdot\|_\mu$ kiterjeszthető tetszőleges $f : X \to K$ függvényre az

$$\|f\|_\mu \coloneqq \sup_{x \in X} |f(x)|_p N_\mu(x)$$

definícióval.

4.18. Definíció. *Legyen $\mu \in M(X \to K)$ mérték. Azt mondjuk, hogy egy $f : X \to K$ függvény μ-integrálható, ha létezik olyan $f_1, f_2, \ldots$ függvénysorozat a $C(X \to K)$ térben amivel*

$$\lim_{n \to \infty} \|f - f_n\|_\mu = 0.$$

Az $f \sim g \iff \|f-g\|_\mu = 0$ reláció egy ekvivalenciareláció a μ-integrálható függvények terén. Bevezethetjük az $L^1(X,\mu)$ teret mint az integrálható függvények $\sim$ reláció szerinti faktorterét. Ezek után a klasszikus elmélettel analóg módon folytatható az integrálelmélet felépítése. A részletek megtalálhatóak például a [VR78] könyvben.

Végezetül a következő tételekben megadjuk az $S^n(\mathbb{Z}_p \to K)'$ $(n = 0, 1, \ldots, \infty)$ terek formális hatványsorokkal való jellemzését. Jelölje $K\langle x\rangle$ a korlátos együtthatójú K feletti formális hatványsorok terét. A

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right\| := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|_p$$

definícióval megadott $\|\cdot\|$ függvény egy norma a $K\langle x\rangle$ téren és ezzel a normával $K\langle x\rangle$ egy Banach-tér.

4.19. Tétel ($n = 0$ eset)**.** *A*

$$\varphi \to \sum_{n=0}^{\infty} \varphi\left(\binom{x}{n}\right) x^n$$

leképezés egy izometrikus izomorfizmus $C(\mathbb{Z}_p \to K)'$ és $K\langle x\rangle$ Banach-terek között.

4.20. Tétel ($n \in \mathbb{N}$ eset)**.** *Legyen $n, m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Ekkor*

1. *a $\varphi \to \sum_{n=0}^{\infty} \varphi\left(\binom{x}{n}\right) x^n$ leképezés egy bijekció $S^n(\mathbb{Z}_p \to K)'$ és azon $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ formális hatványsorok között amelyekre $\{\frac{|a_j|_p}{j^n} : j \in \mathbb{N}\}$ halmaz korlátos,*
2. *ha $\varphi_1 \in S^n(\mathbb{Z}_p \to K)'$ és $\varphi_2 \in S^m(\mathbb{Z}_p \to K)'$, akkor a hozzájuk tartozó hatványsorok szorzata megfelel $S^{n+m}(\mathbb{Z}_p \to K)'$ egy elemének.*

A korábban látott Volkenborn-integrál $S^1(\mathbb{Z}_p \to K)'$ eleme és így nem egy integrál az ebben a fejezetben használt értelemben, hiszen itt $C(\mathbb{Z}_p \to K)'$ elemeit neveztük integráloknak. Az előbbi tétel szerint azonban megfeleltethető egy formális hatványsornak.

4.21. Példa. *A Volkenborn-integrálhoz a*

$$\frac{\log_p(1+x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$$

formális hatványsor tartozik (ezt már láttuk a a 3.2. tétel előtti levezetésben).

4.22. Tétel ($n = \infty$ eset)**.** *A $\varphi \to \sum_{n=0}^{\infty} \varphi\left(\binom{x}{n}\right) x^n$ leképezés egy bijekció $S^\infty(\mathbb{Z}_p \to K)'$ és azon $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ formális hatványsorok között amelyekre az $\{\frac{|a_j|_p}{j^n} : j \in \mathbb{N}\}$ halmaz korlátos legalább egy $n \in \mathbb{N}$-re.*

5. fejezet

A Shnirelman-integrál

5.1. Definíció és alapvető tulajdonságok

A Shnirelman-integrál a komplex vonalintegrál egyfajta p-adikus analógiája. Segítségével megkaphatjuk alapvető komplex függvénytani tételek p-adikus megfelelőit. A Shnirelman-integrál lényegesen eltér az eddig vizsgált integráloktól: az integrálandó függvényeink most $\mathbb{C}_p$-n vannak értelmezve és nem valamiféle „mértékből” vagy a folytonos(an differenciálható) függvények terén értelmezett funkcionálból indulunk ki, hanem a „szokásos” vonalintegrál mintájára próbálunk meg felírni egy definíciót.

Shnirelman eredetileg a Weierstrass faktorizációs tétel p-adikus megfelelőjének bizonyításához vezette be ezt az integrált. A p-adikus analízisen kívül az analitikus számelméletben is hasznos eszköznek bizonyult. [Ada66] transzcendencia-tételek bizonyításához használja, [Coa69] diofantoszi egyenletek vizsgálatánál alkalmazza. Ez a fejezet a [Kob80] és [Ada66]-beli tárgyaláson alapul.

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ olyan, hogy $p \nmid n$ és jelölje $\xi_i^{(n)}$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$ az $x^n - 1$ polinom gyökeit. Ekkor $|\xi_i^{(n)}|_p = 1$. Legyen továbbá $a, \rho \in \mathbb{C}_p$. Az $\{a + \rho\xi_i^{(n)} : n \in \mathbb{N}^+, i \in \{1, \ldots, n\}\}$ halmazt egy a középpontú, $r = |\rho|_p$ sugarú *diszkrét körvonal*nak nevezzük.

5.1. Definíció. *Legyen f egy (a, ρ) diszkrét körvonalon értelmezett, $\mathbb{C}_p$ értékű függvény. Ekkor f Shnirelman-integrálja a körvonalon*

$$\int_{a,\rho} f = \int_{a,\rho} f(x)\mathrm{d}x := \lim_{\substack{n\to\infty \\ p\nmid n}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + \rho\xi_i^{(n)})$$

ha ez a határérték létezik.

5.2. Tétel. *Legyen $a, \rho \in \mathbb{C}_p$ és f egy olyan $\mathbb{C}_p$-értékű függvény, hogy*

1. *minden $z \in \mathbb{C}_p$-re ahol $|z|_p = |\rho|_p$, $a + z$ benne van f értelmezési tartományában,*
2. *$\int_{a,\rho} f$ létezik.*

Ekkor

$$\left| \int_{a,\rho} f \right|_p \leq \max_{\substack{n\in\mathbb{N}^+ \\ 1\leq i\leq n}} |f(a + \rho\xi_i^{(n)})|_p \leq \max_{|z|_p = |\rho|_p} |f(a + z)|_p.$$

Bizonyítás. Az első egyenlőtlenség adódik a Shnirelman-integrál definíciójából. A második triviális $|\rho\xi_i^{(n)}|_p = |\rho|_p$ miatt. □

5.3. Tétel. *Legyen* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(z)$ *olyan, hogy a jobb oldal egyenletesen konvergens a* $\{z \in \mathbb{C}_p : |z-a|_p = |\rho|_p\}$ *halmazon. Ha* $\int_{a,\rho} f_n$ *létezik minden* $n \in \mathbb{N}$*-re, akkor* $\int_{a,\rho} f$ *is létezik és*

$$\int\limits_{a,\rho} f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_{a,\rho} f_n.$$

Bizonyítás. A határérték és integrál felcserélhetőségét kell belátni. Az egyenletes konvergencia miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ választás mellett létezik N, hogy ha $n > N$, akkor

$$\max_{|z|_p=|\rho|_p} |(f-f_n)(a+z)|_p < \varepsilon.$$

Az előző tételbeli becslést felhasználva így

$$\left| \int\limits_{a,\rho} f - \int\limits_{a,\rho} f_n \right|_p = \left| \int\limits_{a,\rho} (f-f_n) \right|_p \le \max_{|z|_p=|\rho|_p} |(f-f_n)(a+z)|_p < \varepsilon \quad (n > N).$$

□

5.4. Tétel. *Legyen* n *egy rögzített pozitív egész,* $s \in \mathbb{Z}$ *olyan, hogy* $0 < |s| < n$*. Ekkor*

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(n)^s} = 0.$$

Bizonyítás. Mivel a $\xi_i^{(n)}$ $(i \in \{1,\dots,n\})$ számok a szorzás művelettel csoportot alkotnak, a $\{\xi_1^{(n)},\dots,\xi_n^{(n)}\}$ és $\{\xi_1^{(n)^{-1}},\dots,\xi_n^{(n)^{-1}}\}$ halmazok megegyeznek, így feltehető, hogy $s > 0$. Ismert, hogy az $x_1^s + \cdots + x_n^s$ n-változós polinom felírható mint a $\sigma_1,\dots,\sigma_s$ n-változós elemi szimmetrikus polinomok konstans tag nélküli polinomja. Mivel $\xi_i^{(n)}$ gyöke az $x^n - 1$ polinomnak, a gyökök és együtthatók közti összefüggésből kapjuk, hogy $\sigma_k(\xi_1^{(n)},\dots,\xi_n^{(n)}) = 0$ $(1 \le k < n)$. Most $s < n$, amiből adódik a bizonyítandó állítás. □

5.5. Tétel. *Legyen* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *hatványsor konvergens egy* $R > 0$ *sugarú,* 0 *középpontú nyílt körlapon. Ha* $|a|_p < R$ *és* $|\rho|_p < R$*, akkor* $\int_{a,\rho} f$ *létezik és*

$$\int\limits_{a,\rho} f = f(a).$$

Bizonyítás. A 5.3. tétel alapján elég megmutatni, hogy

$$\int\limits_{a,\rho} x^k \mathrm{d}x = a^k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

A definíciót felírva azt kapjuk, hogy

$$\int\limits_{a,\rho} x^k \mathrm{d}x = \lim_{\substack{n\to\infty \\ p\nmid n}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (a+\rho\xi_i^{(n)})^k = \lim_{\substack{n\to\infty \\ p\nmid n}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k-j} \rho^j \xi_i^{(n)^j}.$$

A jobb oldal átírható

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\nmid n}} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k-j} \rho^j \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(n)^j}$$

alakba, ahol 5.4 miatt a belső összeg 0 ha $n > k$ és $j > 0$. □

Megjegyzés. *Az integrál értéke nem függ ρ választásától, sőt még a $|\rho|_p$ értéktől sem, feltéve, hogy $|\rho|_p < R$ teljesül.*

Megjegyzés. *Az előző tételnek igaz egy általánosabb formája is. Legyen $R_1 \leq |\rho|_p \leq R_2$ és az*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

Laurent-sor konvergens az $R_1 \leq |z-a|_p \leq R_2$ zárt körgyűrűn. Ekkor $\int_{a,\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^k}\mathrm{d}z$ létezik és értéke

$$\int_{a,\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^k}\mathrm{d}z = a_k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

5.2. Komplex függvénytani tételek p-adikus megfelelői

Először a Cauchy-féle integráltétel és a Cauchy-integrálképlet p-adikus változatát látjuk be. Ezek formailag nagyon hasonlóak lesznek a komplex függvénytanból jól ismert tételekhez, csupán egy $(z-a)$ tényező megjelenésében különböznek.

5.6. Tétel (Cauchy-féle integráltétel)**.** *Legyen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ hatványsor konvergens egy $R > 0$ sugarú, 0 középpontú nyílt körlapon. Ha $|a|_p < R$ és $|\rho|_p < R$, akkor $\int_{a,\rho} f(z)(z-a)\mathrm{d}z$ létezik és*

$$\int_{a,\rho} f(z)(z-a)\mathrm{d}z = 0.$$

Bizonyítás. Az 5.5. tétel következménye. □

5.7. Lemma. *Legyen $n \in \mathbb{N}$.*

$$\int_{0,\rho} \frac{1}{(z-w)^n}\mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & \text{ha } |w|_p < |\rho|_p, \\ \left(\frac{-1}{x^n}\right)^n & \text{ha } |w|_p > |\rho|_p. \end{cases}$$

Bizonyítás. Az integrandus analitikus ha $|z|_p < |w|_p$, ez az eset így következik az 5.5. tételből. Ha $x \in \mathbb{C}_p$ és $|x|_p < 1$, akkor

$$\frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{t=0}^{\infty} a_t x^t,$$

ahol $a_t \in \mathbb{Z}$ ($t \in \mathbb{N}$). Ez a binomiális sor egy speciális esete, mint konvergens hatványsorokra vonatkozó azonosság. Tehát ha $|w|_p < |z|_p$, akkor

$$\frac{1}{(z-w)^p} = \frac{1}{z^n} \frac{1}{(1-\frac{w}{z})^n} = \sum_{t=0}^{\infty} a_t \frac{w^t}{z^{p+t}}.$$

Elég tehát $k \geq 1$ mellett az

$$\int\limits_{0,\rho} \frac{1}{z^k} \mathrm{d}z = \lim_{\substack{m\to\infty \\ p\nmid m}} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{(\rho\xi_i^{(m)})^k}$$

integrált kiszámolni, ami az 5.4. tétel és bizonyítása szerint 0 ha $m > k$. □

5.8. Tétel (Cauchy-integrálképlet)**.** *Az előző tétel jelölései mellett legyen $w \in \mathbb{C}_p$ olyan, hogy $|w|_p < R$. Ekkor*

$$\int\limits_{a,\rho} \frac{f(z)(z-a)}{z-w} \mathrm{d}z = \begin{cases} f(w) & \text{ha } |w-a|_p < |\rho|_p, \\ 0 & \text{ha } |w-a|_p > |\rho|_p. \end{cases}$$

Bizonyítás. Szükség szerint egy $z \to z + a$ eltolást alkalmazva feltehető, hogy $a = 0$. Így

$$\int\limits_{0,\rho} \frac{f(z)z}{z-w} \mathrm{d}z = \int\limits_{0,\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k z^{k+1}}{z-w} \mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{0,\rho} \frac{a_k z^{k+1}}{z-w} \mathrm{d}z,$$

továbbá

$$\begin{aligned} \int\limits_{0,\rho} \frac{z^{k+1}}{z-w} \mathrm{d}z &= \int\limits_{0,\rho} \frac{z^{k+1} - w^{k+1} + w^{k+1}}{z-w} \mathrm{d}z \\ &= \int\limits_{0,\rho} \sum_{l=0}^{k} w^l z^{k-l} \mathrm{d}z + \int\limits_{0,\rho} \frac{w^{k+1}}{z-w} \mathrm{d}z \\ &= w^k + w^{k+1} \int\limits_{0,\rho} \frac{1}{z-w} \mathrm{d}z \end{aligned}$$

ahol kihasználtuk az 5.1 tételt. Alkalmazva az előző lemmát kapjuk a bizonyítandó állítást. □

5.9. Tétel (Cauchy-integrálképlet deriváltakra)**.** *Az előző tétel jelölései mellett*

$$f^{(n)}(w) = n! \int\limits_{a,\rho} \frac{f(z)(z-a)}{(z-w)^{n+1}} \mathrm{d}z \quad (|w-a|_p < |\rho|_p).$$

Bizonyítás. Ismét feltehetjük, hogy $a = 0$.

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!} a_{n+k} z^k$$

és

$$n! \int\limits_{0,\rho} \frac{f(z)z}{(z-w)^{n+1}} \mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{\infty} n! \int\limits_{0,\rho} \frac{a_k z^{k+1}}{(z-w)^{n+1}} \mathrm{d}z.$$

Ha $k < n$, akkor

$$\int\limits_{0,\rho} \frac{z^{k+1}}{(z-w)^{n+1}} \mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n+1} \int\limits_{0,\rho} \frac{A_i}{(z-w)^i} \mathrm{d}z$$

ahol az A_i-k w-től függő konstansok. Az 5.7. lemma szerint a jobb oldalon minden tag 0. Ha $k = n + h$ ahol $h \geq 0$, akkor

$$\int\limits_{0,\rho} \frac{z^{n+h+1}}{(z-w)^{n+1}} \mathrm{d}z = \int\limits_{0,\rho} z^h + (n+1)z^{h-1}w + \cdots + (n+1)\cdots(n+h)w^h \mathrm{d}z + \int\limits_{0,\rho} \frac{g(z)}{(z-w)^{n+1}} \mathrm{d}z$$

ahol g egy legfeljebb n-edfokú polinom. Az utolsó integrál 0 az előző eset szerint. A maradékra az 5.1. tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy az integrál értéke $(n+1)\cdots(n+h)w^h$. □

A következő tétel a maximumelv és a Cauchy-becslés p-adikus megfelelőit adja meg. A maximumelv ezen változatában egy diszkrét körvonalon adott korlátról látjuk be, hogy az érvényes marad a megfelelő nyílt körlapon is.

5.10. Tétel (Maximumelv)**.** *Legyen $a, \rho \in \mathbb{C}_p, 0 \neq \rho$ és f egy olyan $\mathbb{C}_p$ értékű függvény, amely értelmezve van a $|\rho|_p$ sugarú, a középpontú zárt körlapon, továbbá a nyílt körlapon a Cauchy-integrálképlet előállítja f-et, azaz*

$$\int\limits_{a,\rho} \frac{f(z)(z-a)}{z-w} \mathrm{d}z = f(w) \quad (|w-a|_p < |\rho|_p).$$

Tegyük fel, hogy

$$|f|_p < M$$

az (a, ρ) diszkrét körvonalon. Ekkor

$$|f|_p < M$$

az a középpontú, $|\rho|_p$ sugarú nyílt körlapon is, továbbá ha f itt analitikus, akkor

$$\left| \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right|_p < \frac{M}{|\rho|_p^n}.$$

Bizonyítás. Triviálisan következik az 5.2. tételbeli becslésből és a Cauchy-integrálképlet deriváltakra vonatkozó alakjából. □

Az ultrametrikus Liouville-tétel szóról szóra megegyezik a klasszikus változattal.

5.11. Tétel (Liouville-tétel)**.** *Ha az $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ hatványsor konvergens egész $\mathbb{C}_p$-n (azaz f egy egészfüggvény) és $|f|_p$ korlátos, akkor f konstans.*

Bizonyítás. Az előző tételből a klasszikus eset mintájára bizonyítható: f egész $\mathbb{C}_p$-n analitikus, tehát a Cauchy-becslést bármilyen nagy $|\rho|_p$ sugár mellett alkalmazhatjuk f Taylor-sorának együtthatóira, így azok csak nullák lehetnek. □

Végül a reziduum-tétel p-adikus változatát látjuk be. Ehhez először szükség lesz pár lemmára.

5.12. Lemma. *Legyen $\rho \in \mathbb{C}_p$, $f(z)$ és $g(z) = (z-a_1)^{\nu_1} \cdots (z-a_k)^{\nu_k}$ pedig polinomok és tegyük fel, hogy $g(z)$-nek nincs $|\rho|_p$ abszolútértékű gyöke. Jelölje $\frac{f}{g}$ pólusait $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Ekkor*

$$\int\limits_{0,\rho} \frac{f(z)}{g(z)} z \mathrm{d}z = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ |\alpha_i|_p < |\rho|_p}} \mathrm{Res}_{\alpha_i} \frac{f}{g}$$

.

Bizonyítás. $\frac{f(z)}{g(z)}$ átírható

$$f_1(z) + \frac{A_{11}}{z-a_1} + \cdots + \frac{A_{1\nu_1}}{(z-a_1)^{\nu_1}} + \frac{A_{k1}}{z-a_k} + \cdots + \frac{A_{k\nu_k}}{(z-a_k)^{\nu_k}}$$

alakba. Ekkor ha $a_1, \ldots, a_h$ g azon gyökei amelyek abszolútértéke kisebb mint $|\rho|_p$, akkor

$$\int\limits_{0,\rho} \frac{f(z)}{g(z)} z\mathrm{d}z = A_{11} + \cdots + A_{h1}$$

amit bizonyítani akartunk. □

5.13. Lemma. *Az előző lemma jelöléseivel és egy olyan $t \in \mathbb{C}_p$-t választva, hogy a $|t|_p$ sugarú, a_i $(1 \le i \le k)$ középpontú nyílt körlapok páronként diszjunktak teljesül*

$$\int\limits_{0,\rho} \frac{f(z)}{g(z)} z\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{a_i,t} \frac{f(z)(z-a_i)}{g(z)} \mathrm{d}z.$$

Bizonyítás.

$$\int\limits_{a_i,t} \frac{f(z)(z-a_i)}{g(z)} \mathrm{d}z = A_{i1} \quad (1 \le i \le h).$$

□

5.14. Tétel. *Legyen az $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ hatványsor konvergens az $R > 0$ sugarú nyílt körlapon. Legyen $\rho \in \mathbb{C}_p$ olyan, hogy $|\rho|_p < R$ és $g(z) = (z-a_1)^{k_1} \cdots (z-a_n)^{k_n}$ egy olyan polinom, hogy $|a_i|_p < |\rho|_p$ $(1 \le i \le n)$. Végül válasszuk $0 \ne t \in \mathbb{C}_p$-t úgy, hogy $|a_i - a_j|_p > |t|_p$ $(1 \le i, j \le n, i \ne j)$. Ekkor*

$$\int\limits_{0,\rho} \frac{f(z)}{g(z)} z\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{a_i,t} \frac{f(z)(z-a_i)}{g(z)} \mathrm{d}z.$$

Bizonyítás. f-et átírjuk

$$f = f_1 + (z-a_1)^{k_1} \overline{f}(z)$$

alakba, ahol

$$f_1(z) = b_0 + b_1(z-a_1) + \cdots + b_{k_1-1}(z-a_1)^{k_1-1}$$

és

$$\overline{f}(z) = b_{k_1} + b_{k_1+1}(z-a_1) + \cdots$$

majd n szerinti indukcióval bizonyítunk. Az $n = 1$ esetben az

$$\int\limits_{0,\rho} \frac{f(z)z}{(z-a_1)^k} \mathrm{d}z = \int\limits_{a_1,t} \frac{f(z)(z-a_1)}{(z-a_1)^{k_1}}$$

egyenlőséget kell belátnunk. Itt a korábbi Cauchy-integrálképlet deriváltakra vonatkozó változata alapján mindkét oldal értéke

$$\frac{1}{(k_1-1)!} f^{(k_1-1)}(a_1).$$

Ha $n > 1$, akkor

$$\int\limits_{0,\rho} \frac{f(z)z}{g(z)}\mathrm{d}z = \int\limits_{0,\rho} \frac{f_1(z)z}{g(z)}\mathrm{d}z + \int\limits_{0,\rho} \frac{\overline{f}(z)z}{(z-a_2)^{k_2}\cdots(z-a_n)^{k_n}}\mathrm{d}z.$$

Az indukciós feltevést alkalmazva azt kapjuk, hogy ez nem más mint

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{0,\rho} \frac{f_1(z)z}{g(z)}\mathrm{d}z + \sum_{i=2}^{n} \int\limits_{a_i,t} \frac{\overline{f}(z)(z-a_i)}{(z-a_2)^{k_2}\cdots(z-a_n)^{k_n}}\mathrm{d}z \\
&= \int\limits_{0,\rho} \frac{f_1(z)z}{g(z)}\mathrm{d}z + \sum_{i=2}^{n} \int\limits_{a_i,t} \frac{f(z)(z-a_i)}{g(z)}\mathrm{d}z - \sum_{i=2}^{n} \int\limits_{a_i,t} \frac{f_1(z)(z-a_i)}{g(z)}\mathrm{d}z \\
&= \int\limits_{a_i,t} \frac{f_1(z)(z-a_i)}{g(z)}\mathrm{d}z + \sum_{i=2}^{n} \int\limits_{a_i,t} \frac{f(z)(z-a_i)}{g(z)}\mathrm{d}z - \sum_{i=2}^{n} \int\limits_{a_i,t} \frac{f_1(z)(z-a_i)}{g(z)}\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Utóbbi egyenlőséghez az 5.13. lemmát használtuk. Folytatva az átalakításokat a

$$\sum_{i=2}^{n} \int\limits_{a_i,t} \frac{f(z)(z-a_i}{g(z)}\mathrm{d}z + \int\limits_{a_1,t} \frac{f_1(z)(z-a_1)}{g(z)}\mathrm{d}z$$

alakhoz jutunk. Itt az utolsó integrálból még hiányzik

$$\int\limits_{a_1,t} \frac{\overline{f}(z)(z-a_1)^{k_1}(z-a_1)}{g(z)}$$

ahhoz, hogy a kívánt állítást megkapjuk, de ez a Cauchy-féle integráltétel szerint 0. □

5.14.1. Következmény (Reziduumtétel)**.** *Legyen f és g mint az előző tételben. Válasszunk olyan $a, \rho \in \mathbb{C}_p$ pontokat, hogy $|a|_p < R$ és $|\rho|_p < R$. Jelölje $\frac{f}{g}$ pólusait $a_1, \ldots, a_h$. Ekkor*

$$\int\limits_{a,\rho} \frac{f(z)}{g(z)}(z-a)\mathrm{d}z = \sum_{\substack{1\le i\le h \\ |a_i-a|_p<|\rho|_p}} \mathrm{Res}_{a_i} \frac{f}{g}.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{a,\rho} \frac{f}{g}(z)(z-a)\mathrm{d}z &= \int\limits_{0,\rho} \frac{f}{g}(z+a)z\mathrm{d}z \\
&= \sum_{i=1}^{h} \int\limits_{a_i-a,t} \frac{f}{g}(z+a)(z-a_i+a)\mathrm{d}z \\
&= \sum_{i=1}^{h} \mathrm{Res}_{a_i-a} \frac{f}{g}(z+a) \\
&= \sum_{i=1}^{h} \mathrm{Res}_{a_i} \frac{f}{g}(z).
\end{aligned}$$

□

6. fejezet

Alkalmazások

Ez a fejezet a p-adikus integrálás néhány számelméleti alkalmazását mutatja be. Az első alfejezetben a Volkenborn-integrál segítségével látunk be Bernoulli-számokra, Bernoulli-polinomokra és hatványösszegekre vonatkozó összefüggéseket, többnyire [Rob00]-t követve. A második alfejezet a p-adikus disztribúciók és mértékek elméletének segítségével a Riemann-féle ζ-függvény egy p-adikus megfelelőjét és ennek a klasszikus esettel való kapcsolatát tárgyalja [Kob84] alapján.

6.1. Bernoulli-számok

A Bernoulli-disztribúciókról szóló részben már találkoztunk a Bernoulli-polinomokkal és a 4.4. tételben ki is mondtuk néhány fontos tulajdonságukat. Most a Volkenborn-integrál segítségével[1] be is látjuk ezeket és néhány további összefüggést, nagyrészt a [Rob00] és [Sch84] könyveket követve.

Bernoulli-polinomok helyett azonban kezdjünk először Bernoulli-számokkal. Az egyik klasszikus definíció így hangzik: a

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{t^k}{k!}$$

generátorfüggvény által meghatározott b_k számsorozatot nevezzük Bernoulli-számoknak.

Láttuk már (3.7. példa), hogy

$$\int_{\mathbb{Z}_p} (1+t)^x \mathrm{d}x = \frac{1}{t} \log_p(1+t)$$

teljesül ha $0 < |t|_p < 1$, $t \in \mathbb{C}_p$. Legyen $s = \log_p(1+t)$ és $|t|_p < r_p$. Ekkor $t = e^s - 1$, $|s|_p = |t|_p < r_p$ és az előző egyenlőségbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\int_{\mathbb{Z}_p} e^{sx} \mathrm{d}x = \frac{s}{e^s - 1}.$$

[1] A Volkenborn-integrálról szóló rész szándékosan nem használ Bernoulli-polinomokra vonatkozó összefüggéseket, így nem kell körkörös érveléstől tartani.

Beírva e^{sx} helyére a hatványsorát, majd felcserélve az integrált és az összegzést (amit megtehetünk mert $x \to e^{sx}$ analitikus $\mathbb{Z}_p$-n) azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int\limits_{\mathbb{Z}_p} x^k \mathrm{d}x\right)\frac{s^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{t^k}{k!}.$$

Az együtthatók egyenlősége alapján tehát

$$b_k = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} x^k \mathrm{d}x.$$

Azt látjuk, hogy ezek az integrálok függetlenek p választásától. A definícióból látható, hogy $b_k \in \mathbb{Q}$. A Volkenborn-integrál abszolútértékre vonatkozó egyenlőtlenség szerint most

$$|b_k|_p = \left|\int\limits_{\mathbb{Z}_p} x^k \mathrm{d}x\right|_p \leq p\|x^k\|_1 = p,$$

azaz $pb_k \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p$ (tetszőleges p prím esetén).

6.1. Állítás. $b_0 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_{2k+1} = 0$ $(k \in \mathbb{N}^+)$.

Bizonyítás. $b_0 = \int_{\mathbb{Z}_p} 1\mathrm{d}x$ értékét már korábban kiszámoltuk. Ha $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ egy analitikus függvény $\mathbb{Z}_p$-n, akkor

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\int\limits_{\mathbb{Z}_p} x^k \mathrm{d}x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n b_n.$$

Ezt az $f(x) = x^{2n+1}$ $(n \geq 0)$ függvényekre alkalmazva és felhasználva a páratlan függvények Volkenborn-integráljára adott 3.9. formulát kapjuk a bizonyítandó állítást. □

6.2. Állítás.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} b_k = 0 \ (n \geq 2).$$

Bizonyítás. Emlékezzünk a Volkenborn-integrál és az eltolás operátor kapcsolatát jellemző, korábban bizonyított formulákra. Láttuk, hogy

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} \tau_1 f - \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f = f'(0).$$

Ezt az $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ függvényekre alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} (x+1)^n \mathrm{d}x - \int\limits_{\mathbb{Z}_p} x^n \mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & \text{ha } n = 1, \\ 0 & \text{ha } n \neq 1. \end{cases}$$

Másrészt

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} (x+1)^n \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int\limits_{\mathbb{Z}_p} x^k \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} b_k.$$

Utóbbit az első egyenlőségbe helyettesítve kapjuk a keresett állítást. □

Megjegyzés. *Az előző bizonyításból $b_0 = 1$ is kijön (ha az $n = 1$ esetet tekintjük). Vegyük észre, hogy így már a bizonyított összefüggés egyértelműen meghatározza a b_k számokat, tehát ez egy alternatív definíciónak is tekinthető.*

A Bernoulli-polinomokat már a 4. fejezetben bevezettük. Ismétlésül, ezek a

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

generátorfüggvénnyel meghatározott $B_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ polinomok. A definícióból azonnal adódik, hogy $B_k(0) = b_k$.

A

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{xt} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{m=0,n=0}^{\infty} \frac{x^m t^m}{m!} b_n \frac{t^n}{n!}$$

helyettesítésből a

$$B_k(x) = k! \sum_{m+n=k} b_n \frac{x^m}{m!n!} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} b_{k-i} x^i$$

zárt alak adódik. Ebből az is látszik, hogy $B_k(x)$ egy k-adfokú főpolinom.

A fejezet elején láttuk, hogy

$$\int_{\mathbb{Z}_p} e^{ty} \mathrm{d}y = \frac{t}{e^t - 1}$$

és így most

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{xt} \int_{\mathbb{Z}_p} e^{ty} \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{Z}_p} e^{t(x+y)} \mathrm{d}y.$$

Az együtthatók azonossága alapján a

$$B_k(x) = \int_{\mathbb{Z}_p} (x + y)^k \mathrm{d}y$$

képlethez jutunk.

6.3. Állítás.

$$B_k(x + 1) - B_k(x) = kx^{k-1}.$$

Bizonyítás. A 3.8. tételbeli

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \tau_{s+1} f(x) \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{Z}_p} \tau_s f(x) \mathrm{d}x = f'(x)$$

azonosságot az $f(x) = x^k$ és $s = y$ esetre felírva, majd a $B_k(x)$-re előbb kapott integrálformulát használva adódik a bizonyítandó állítás. □

Megjegyzés. *Speciálisan ha $k \geq 2$ és $x = 0$, akkor $B_k(1) = B_k(0)$ amiből az $x \to B_k(x - [x])$ hozzárendeléssel folytonos, 1-periodikus függvényeket kapunk $\mathbb{R}$-en.*

6.4. Állítás.

$$B_k(x) = x^k - \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} B_j(x).$$

Bizonyítás.

$$(y+x+1)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (y+x)^j$$

és így az előzőek alapján

$$(k+1)x^k = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} (x+y)^j \mathrm{d}y = (k+1)B_k(x) + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} B_j(x)$$

amit átrendezve kapjuk a keresett összefüggést. □

Megjegyzés. *Speciálisan az $x = 0$ helyettesítéssel $k \geq 1$ mellett a*

$$b_k = B_k(0) = -\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} b_j$$

rekurziót kapjuk a Bernoulli-számokra.

6.5. Állítás.

$$B'_k(x) = kB_{k-1}(x) \quad (k \in \mathbb{N}^+).$$

Bizonyítás. A 3.8. tételbeli

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} \tau_{s+1} f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \tau_s f(x)\mathrm{d}x = f'(x)$$

azonosságot az $f(x) = B_k(x)$ és $s = x$ választással valamint a 6.3. állítást felhasználva:

$$B'_k(x) = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \tau_{x+1} B_k(y) - \tau_x B_k(y)\mathrm{d}y = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} (y+x)^{k-1}\mathrm{d}y = kB_{k-1}(x).$$

□

Megjegyzés. *Azokat a polinom-sorozatokat, amelyekre $p'_n(x) = np_{n-1}(x)$ $(n \geq 1)$ teljesül Appell-sorozatoknak nevezzük. A triviális $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat és a Bernoulli-polinomok mellett ilyenek például még a Hermite-polinomok és az Euler-polinomok is. Az Appell-sorozatok halmaza egy megfelelően definiált kompozíció művelettel csoportot alkot, amely az általánosabb Sheffer-sorozatok csoportjának egy részcsoportja.*

6.6. Állítás.

$$B_k(1-x) = (-1)^k B_k(x).$$

Bizonyítás. Legyen f tetszőleges Volkenborn-integrálható függvény. A 3.9. állítást felírva a $g(x) = f(x-1)$ függvényre adódik, hogy

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(-x-1)\mathrm{d}x.$$

Ezt az azonosságot felhasználva

$$\begin{aligned} B_k(1-x) &= \int\limits_{\mathbb{Z}_p} (y+1-x)^k \mathrm{d}y \\ &= \int\limits_{\mathbb{Z}_p} (-1-y+1-x)^k \mathrm{d}y \\ &= (-1^k) \int\limits_{\mathbb{Z}_p} (y+x)^k \mathrm{d}y \\ &= (-1)^k B_k(x). \end{aligned} \tag{6.1}$$

□

Most nézzük meg, hogyan nyerhetünk az előzőekből általános képletet n-edik hatványok összegére.

6.7. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$.*

$$\sum_{i=0}^{n} i^k = \frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{k} \binom{k+1}{j} b_{k+1-j}(n+1)^j + \frac{(n+1)^{k+1}}{k+1}.$$

Bizonyítás. Rögzített $k \geq 1$ mellett az $f(x) = B_k(x+1) - B_k(x)$ függvényre alkalmazzuk az indefinit összeg operátort. Tekintsük Sf-et az $x = n \in \mathbb{N}^+$ helyen. Egyrészt az indefinit összeg definíciójából $Sf(n) = B_k(n) - B_k(0)$, másrészt mivel $f(x) = kx^{k-1}$, így $Sf(x) = kSx^{k-1}$. Ezeket összevetve azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^{k-1} = Sx^{k-1}(n) = \frac{B_k(n) - B_k(0)}{k} = \frac{B_k(n) - b_k}{k}.$$

Beírva $B_k(n)$ helyére a korábban látott, Bernoulli-polinomokat Bernoulli-számokkal kifejező képletet, majd k-t $k+1$-re, n-t $n+1$-re cserélve és végül megfelelően átrendezve a bizonyítandó formulához jutunk. Könnyen ellenőrizhető, hogy $k = 1$ választással valóban visszakapjuk a jól ismert $\frac{n(n+1)}{2}$ képletet. □

Megjegyzés. *A $j = 1$ tagot külön írva és az összegzést átalakítva az előbbi formula egy alternatív alakja az alábbi:*

$$b_k(n+1) + \frac{1}{k+1} \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j-1} b_{k+1-j} \frac{(n+1)^j}{j} + \frac{(n+1)^{k+1}}{k+1}.$$

6.8. Tétel. *Legyen p egy páratlan prím, $k \in \mathbb{N}^+$. Ekkor*

$$\sum_{i=0}^{p-1} i^k \equiv pb_k \pmod{pk\mathbb{Z}_p}.$$

Ha $p = 2$, akkor

$$1 \equiv 2b_k \pmod{k\mathbb{Z}_2}.$$

Bizonyítás. Már korábban láttuk, hogy $pb_k \in \mathbb{Z}_p$ ($k \geq 0$). Írjuk fel $n = p-1$-re az előbb bizonyított összeg-formulát:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{p-1} i^k &= pb_k + \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j-1} b_{k+1-j} \frac{p^j}{j} + \frac{p^{k+1}}{k+1} \\ &= pb_k + pk \sum_{j=2}^{k} \binom{k-1}{j-2} pb_{k+1-j} \frac{p^{j-2}}{j(j-1)} + pk \frac{p^k}{k(k+1)} \\ &= pb_k + pk \left(\sum_{j=2}^{k} \binom{k-1}{j-2} pb_{k+1-j} \frac{p^{j-2}}{j(j-1)} + \frac{p^k}{k(k+1)} \right).\end{aligned}$$

Azt kell megmutatni, hogy a zárójeles rész $\mathbb{Z}_p$-beli. A korábbiak szerint $pb_{k+1-j} \in \mathbb{Z}_p$. Ha $p \neq 2$, akkor a Legendre-képlet segítségével a következő becslést tehetjük:

$$\nu_p(j(j-1)) \leq \nu_p(j!) = \frac{j - s_p(j)}{p-1} \leq \frac{j-1}{p-1} < j-1,$$

ahol $s_p(j)$ jelöli j p-alapú számrendszerben vett felírásában a számjegyek összegét. Ez alapján $\frac{p^{j-2}}{j(j-1)}$ is $\mathbb{Z}_p$ eleme. Ha $p = 2$, akkor $\nu_2(j(j-1)) = \max\{\nu_2(j), \nu_2(j-1)\} \leq j-1$. Mivel itt egyenlőség is előfordulhat, ez magyarázatot ad a $p = 2$ esetben „hiányzó” szorzóra a bizonyított kongruenciában. $\square$

6.8.1. Következmény. *Tetszőleges p prímre $b_{2n} \in \mathbb{Q} \cap p^{-1}\mathbb{Z}_p$ ($n \in \mathbb{N}^+$).*

6.9. Tétel (Clausen–von Staudt)**.** *b_{2n} nevezője pontosan azon l prímek szorzata, amelyekre $l-1 \mid 2n$. Megfelelő $m_{2n} \in \mathbb{Z}$ mellett*

$$b_{2n} = -\sum_{\substack{l \text{ prím} \\ l-1 \mid 2n}} \frac{1}{l} + m_{2n}.$$

Bizonyítás. Abból, hogy $pb_{2n} \in \mathbb{Z}_p$ minden p-re azonnal adódik, hogy b_{2n} nevezőjének prímtényezős felbontásában minden tényező első hatványon szerepel.

Legyen $k \in \mathbb{N}^+$ és számítsuk ki a $\sum_{i=0}^{p-1} i^k$ összeget modulo p. Jelölje ezt $S_{k,p}$. Ezt felfoghatjuk, mint $\mathbb{F}_p$ elemeinek összegzését. Tetszőleges $0 \neq u \in \mathbb{F}_p$ választással

$$S_{k,p} = \sum_{x \in \mathbb{F}_p} x^k = \sum_{x \in \mathbb{F}_p} (xu)^k = u^k \sum_{x \in \mathbb{F}_p} x^k = u^k S_{k,p},$$

tehát $(1-u^k)S_{k,p} = 0$. Ha $p-1 \nmid k$, akkor $\mathbb{F}_p^\times$ ciklikussága miatt u választható úgy, hogy $u^k \neq 1$ azaz ekkor $S_{k,p} = 0 \in \mathbb{F}_p$. Ha viszont $p-1 \mid k$, akkor

$$S_{k,p} = \sum_{x \in \mathbb{F}_p} x^k = p-1 = -1 \in \mathbb{F}_p.$$

A $k = 2n$ választással alkalmazva az előző tételt és következményét, a $pb_{2n} \equiv S_{2n,p} \pmod{p\mathbb{Z}_p}$ kongruenciát kapjuk. $S_{2n,p}$ előbb kiszámolt értékét figyelembe véve az adódik, hogy

$$p \left(b_{2n} + \sum_{\substack{l \text{ prím} \\ l-1 \mid 2n}} \frac{1}{l} \right) \in \mathbb{Q} \cap p\mathbb{Z}_p$$

és ez független p prím választásától, azaz

$$b_{2n} + \sum_{\substack{l \text{ prím} \\ l-1|2n}} \frac{1}{l} \in \mathbb{Q} \cap \left(\bigcap_{p \text{ prím}} \mathbb{Z}_p \right) = \mathbb{Z}.$$

□

6.2. A Riemann-féle ζ-függvény p-adikus interpolációja

Tekintsük a Riemann-féle ζ-függvényt:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s > 1).$$

Kíséreljük meg ζ-t folytonosan kiterjeszteni az 1-nél nagyobb egészekről $\mathbb{Z}_p$-re (hívhatjuk ezt ζ p-adikus interpolációjának is), vagy ha ez nem megy, akkor definiáljuk ζ valamilyen p-adikus megfelelőjét és keressünk kapcsolatot a klasszikus esettel. A kiterjesztés legkézenfekvőbb módjaként próbálkozhatunk azzal, hogy az $s \to \frac{1}{n^s}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ függvényeket egyenként kiterjesztjük, majd vesszük az összegüket. Ez azonban nem fog működni. Ez könnyen látható ha arra gondolunk, hogy ha $p \mid n$, akkor $|\frac{1}{n^s}|_p \geq p^s$, így ilyen n-re nem kaphatunk folytonos függvényt $\mathbb{Z}_p$-n. Ahhoz tehát, hogy egyáltalán esélyünk legyen ζ kiterjesztésre, valahogy el kell tüntetnünk azokat a tagokat ahol $p \mid n$. Ehhez a következőt tesszük:

$$\zeta(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ p|n}}^{\infty} \frac{1}{n^s} + \sum_{\substack{n=1 \\ p\nmid n}}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^s n^s} + \sum_{\substack{n=1 \\ p\nmid n}}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{p^s}\zeta(s) + \sum_{\substack{n=1 \\ p\nmid n}}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s > 1).$$

Átrendezve,

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \sum_{\substack{n=1 \\ p\nmid n}}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s > 1).$$

$$\zeta^*(s) := \sum_{\substack{n=1 \\ p\nmid n}}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \zeta(s) \quad (s > 1).$$

ζ^* jelöli ζ azon részét, amiből kiküszöböltük a p-vel osztható tagokat.

Megjegyzés. *Ha a ζ-függvény Euler-féle alakjából indulunk ki, akkor azt látjuk, hogy az előbbi számolásban nem csináltunk mást, mint hogy kiemeltük a p-hez tartozó Euler-tényezőt:*

$$\zeta(s) = \prod_{q \text{ prím}} \frac{1}{1 - \frac{1}{q^s}},$$

$$\zeta^*(s) = \prod_{\substack{q \neq p \\ q \text{ prím}}} \frac{1}{1 - \frac{1}{q^s}}.$$

Sajnos a $p \mid n$ típusú tagok eltüntetése sem lesz elég. Ellenőrizhető, hogy általában még az ilyen tagok kihagyásával kapott összeg is divergens lesz $\mathbb{Z}_p$-ben. Ennek ellenére folytassuk az $s \to \frac{1}{n^s}$ alakú függvények p-adikus interpolációjának vizsgálatát. További megszorításként rögzítsünk egy $s_0 \in \{0, 1, 2, \ldots, p-2\}$ számot és s-et korlátozzuk azon nemnegatív egészek halmazára, amelyekre $s \equiv s_0 \pmod{p-1}$. Miért éppen ezt a megkötést tesszük? A folytonossághoz azt kell elérnünk, hogy „közeli" számokhoz „közeli" függvényértékek tartozzanak. Tegyük fel tehát, hogy $s = s_0 + (p-1)s_1$ és $s' = s_0 + (p-1)s_1'$, $s > s'$ és ezek még „közeliek" is, azaz $|s - s'|_p = |(p-1)(s_1 - s_1')|_p = |s_1 - s_1'|_p = \frac{1}{p^N}$ (vagy másképp: $s_1 - s_1' = s'' p^N$ ahol $p \nmid s''$). Ekkor

$$\left|\frac{1}{n^s} - \frac{1}{n^{s'}}\right|_p = \left|\frac{n^{s'} - n^s}{n^{s'+s}}\right|_p = |n^{s'} - n^s|_p = |n^{s'}|_p |1 - n^{s-s'}|_p = |1 - n^{s-s'}|_p$$
$$= |1 - n^{(p-1)(s_1 - s_1')}|_p = |1 - (1+mp)^{(s_1 - s_1')}|_p = |1 - (1+mp)^{(s'' p^N)}|_p$$
$$= \left|1 - (1 + s'' p^N mp + \frac{s'' p^N (s'' p^N - 1)}{2}(mp)^2 + \cdots + (mp)^{s'' p^N})\right|_p = \frac{1}{p^{N+1}}$$

ahol kihasználtuk, hogy $n^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Azt kaptuk tehát, hogy a fentebb tett megkötés mellett ha $|s - s'| < \frac{1}{p^N}$, akkor $\left|\frac{1}{n^s} - \frac{1}{n^{s'}}\right|_p < \frac{1}{p^{N+1}}$.

Most már könnyen látható, hogy az

$$s \to \frac{1}{n^s} \quad (s \equiv s_0 \pmod{p-1})$$

függvény kiterjeszthető folytonosan $\mathbb{Z}_p$-re. Tetszőleges $s \in \mathbb{Z}_p$-hez vegyünk egy hozzá konvergáló és a fenti kongruencia-feltételt teljesítő nemnegatív egészekből álló $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sorozatot (ilyen létezik, mert az s_0-val modulo $p-1$ kongruens nemnegatív egészek sűrűek $\mathbb{Z}_p$-ben). Legyen

$$f_{n,s_0}(s) = \frac{1}{n^s} := \lim_{i \to \infty} \frac{1}{n^{s_i}}.$$

Ugyanez az érvelés lényegében változtatás nélkül elmondható akkor is, ha az $s \to \frac{1}{n^s}$ függvények helyett az $s \to n^s$ függvényeket vizsgáljuk, azaz tetszőleges $s \in \mathbb{Z}_p$-re az előbbi feltételek mellett definiálható a

$$g_{n,s_0}(s) = n^s := \lim_{i \to \infty} n^{s_i}$$

folytonos függvény.

Ne feledkezzünk el arról, hogy ezek a kiterjesztések csak $p \nmid n$ esetén érvényesek, továbbá függnek s_0 választásától.

Szükségünk lesz még a következő tételre, amely ζ pozitív páros egész helyeken felvett értékeire ad formulát a Bernoulli-számok segítségével.

6.10. Tétel.

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \pi^{2k} \frac{2^{2k-1}}{(2k-1!)} \frac{b_{2k}}{2k} \quad (k \in \mathbb{N}^+).$$

Egy elemi, p-adikus számokat nem igénylő bizonyításért lásd [Kob84, II. 1.].

A Bernoulli-számok és a p-adikus integrálás kapcsolatát már jól ismerjük. Érdemesnek tűnik tehát az előbbi tételt figyelembe véve először $\frac{b_{2k}}{2k}$ interpolációjával foglalkozni.

Idézzük fel a 4.14. tételt: ha $A \in \Omega(\mathbb{Z}_p)$ és $k \in \mathbb{N}^+$ akkor

$$\int_A 1 \mu_{\mathrm{B},k,\alpha}(x) = k \int_A x^{k-1} \mu_{\mathrm{B},1,\alpha}(x).$$

Itt a jobb oldalon szereplő x^{k-1} integrandusról a korábbiak alapján tudjuk, hogy interpolálható, feltéve, hogy $x \not\equiv 0 \pmod p$. Ahhoz, hogy ez teljesüljön, $\mathbb{Z}_p$ helyett integráljunk $\mathbb{Z}_p^\times$ halmazon. Persze mi korábban x^k interpolációjának lehetőségét elemeztük, nem az integráljáét. Szerencsére ez nem jelent problémát, ugyanis alkalmazhatjuk a 4.13.1. következményt. Ha $k \equiv k'$ $\pmod{p-1}$ és $k' \equiv k \pmod{p^n}$, akkor a korábbiak szerint

$$|x^{k'-1} - x^{k-1}|_p \leq \frac{1}{p^{n+1}} \quad (x \in \mathbb{Z}_p^\times),$$

amit az említett következménybe beírva azt kapjuk, hogy

$$\left| \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{k'-1} \mathrm{d}\mu_{\mathrm{B},1,\alpha}(x) - \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{k-1} \mathrm{d}\mu_{\mathrm{B},1,\alpha}(x) \right|_p \leq \frac{1}{p^{n+1}} \tag{6.2}$$

ami azt jelenti, hogy ez az integrál is ugyanúgy interpolálható (k-ban) mint a korábban látott $s \to \frac{1}{n^s}$ és $s \to n^s$ függvények. Pontosabban fogalmazva arra jutottunk, hogy a

$$h_{s_0}(s) = \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{s_0+s(p-1)-1} \mathrm{d}\mu_{\mathrm{B},1,\alpha}(x) \quad (s \in \mathbb{N}^+)$$

függvény kiterjeszthető $\mathbb{Z}_p$-re úgy, hogy $\mathbb{Z}_p$ elemeit pozitív egészek sorozatával közelítjük (ahol továbbra is $s_0 \in \{0, \dots, p-2\}$ rögzített).

A 4.14. tételt, a Bernoulli-disztribúciók definícióját és a normalizálás képletét felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{k-1} \mathrm{d}\mu_{\mathrm{B},1,\alpha}(x) &= \frac{1}{k} \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\times} 1 \mathrm{d}\mu_{\mathrm{B},k,\alpha}(x) \\
&= \frac{1}{k} \mu_{\mathrm{B},k,\alpha}(\mathbb{Z}_p^\times) \\
&= \frac{1}{k}(1-\alpha^{-k})(1-p^{k-1}) b_k \\
&= \frac{1}{k}(1-\alpha^{-k})(1-p^{k-1}) \mu_{\mathrm{B},k}(\mathbb{Z}_p).
\end{aligned}$$

Átrendezve:

$$-(1-p^{k-1})\frac{b_k}{k} = \frac{1}{\alpha^{-k}-1} \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{k-1} \mathrm{d}\mu_{\mathrm{B},1,\alpha}. \tag{6.3}$$

Vegyük észre, hogy a bal oldal független α választásától.

Most már minden rendelkezésre áll, hogy bevezessük a ζ függvény egy p-adikus interpolált változatát a korábbi interpolációk mintájára.

6.11. Definíció. *Legyen $s_0 \in \{0, \dots, p-2\}$ rögzített, $s \in \mathbb{Z}_p$ ($s \neq 0$ ha $s_0 = 0$), $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$ pedig pozitív egészek egy tetszőleges, s-hez tartó sorozata.*

$$\begin{aligned}
\zeta_{p,s_0}(s) &:= -\lim_{i \to \infty} (1 - p^{s_0+(p-1)k_i-1}) \frac{b_{s_0+(p-1)k_i}}{s_0+(p-1)k_i} \\
&= \frac{1}{\alpha^{-(s_0+(p-1)k_i)}-1} \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{s_0+(p-1)k_i-1} \mathrm{d}\mu_{B,1,\alpha}(x).
\end{aligned}$$

Megjegyzendő, hogy $\zeta_{p,s_0}(s)$ is független α választásától, az $s_0 = s = 0$ esetet pedig azért kellett kizárnunk, mert ekkor a jobb oldalon a nevező eltűnik. Könnyen látszik $\zeta_{p,s_0}(s)$ folytonossága is: az interpolációról eddig mondottak alapján a definícióban szereplő integrál folytonos, az előtte szereplő törtnek pedig csak a már kizárt $s_0 = s = 0$ szingularitása van.

Az előbbi definícióval van azonban egy probléma: egy $k = s_0 + (p-1)k_0$ pozitív egész helyen a $\zeta_{p,s_0}(k) = -(1-p^{k-1})\frac{b_k}{k}$ értéket kapjuk. Kapcsolatot szeretnénk teremteni a klasszikus ζ-függvénnyel, de ha visszaemlékszünk $\zeta^*(s)$ definíciójára, ott a kiemelt Euler-tényező $1 - p^{-k}$ volt, nem pedig $1 - p^{k-1}$! Úgy néz ki, mintha $\zeta(k)$ helyett a $\zeta(1-k)$ függvényt interpoláltuk volna. Azért, hogy ezt orvosoljuk, vezessünk be egy új ζ_p függvényt (amit csak a nemnegatív egészeken fogunk értelmezni):

6.12. Definíció. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges, $k = s_0 + (p-1)k_0$ ahol $s_0 \in \{0, \dots, p-2\}$.*

$$\zeta_p(1-k) \coloneqq \zeta_{p,s_0}(k_0) = -(1-p^{k-1})\frac{b_k}{k}.$$

Megjegyzés. *Ezzel a definícióval a korábban kizárt $k = s_0 = 0$ eset $\zeta_p(1)$-nek felel meg, azaz ζ_p-nek a klasszikus esettel egyezően szingularitása van 1-ben. A ζ_{p,s_0} függvények a komplex függvénytan analógiájára felfoghatók a p-adikus ζ-függvény ágaiként.*

Most már meg fogjuk tudni teremteni a kapcsolatot a klasszikus és a p-adikus eset között. A fejezet eddig részében a klasszikus ζ-függvény értelmezési tartományának az 1-nél nagyobb valós számok halmazát vettük. A továbbiakban az analitikus folytatással kapott, $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ halmazon értelmezett függvénnyel dolgozunk.

Jól ismert a következő, klasszikus ζ-függvényre érvényes függvényegyenlet:

6.13. Tétel.

$$\zeta(1-s) = \frac{2\cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\zeta(s) \quad (s \neq 0).$$

A függvényegyenlet segítségével meghatározhatjuk $\zeta(1-k)$ értékeit 1-nél nagyobb egész k esetén. Ha $k > 1$ páratlan, akkor a jobb oldalon a cos függvény értéke 0, így $\zeta(1-k)$ is 0. Ha $k = 2l$ páros, akkor

$$\zeta(1-2l) = \frac{2\cos(\pi l)(2l-1)!}{(2\pi)^{2l}}\zeta(2l) = -\frac{2(-1)^l(2l-1)!}{(2\pi)^{2l}}\frac{(-1)^l\pi^{2l}2^{2l-1}}{(2l-1)!}\frac{b_{2l}}{2l} = -\frac{b_k}{k}$$

ahol felhasználtuk a 6.10. tételt. Összefoglalva, azt kaptuk, hogy

$$\zeta(1-k) = -\frac{b_k}{k} \quad (k = 2, 3, \dots).$$

Már csak az maradt hátra, hogy ezt összevessük $\zeta_p(1-k)$ definíciójával, amiből megkapjuk a keresett összefüggést a klasszikus és p-adikus eset között:

$$\zeta(1-k) = \frac{\zeta_p(1-k)}{1-p^{k-1}} = -\frac{b_k}{k} \quad (k = 2, 3, \dots).$$

Ha visszagondolunk rá, hogyan definiáltuk ζ_p-t és ζ_{p,s_0}-t, akkor azt látjuk, hogy az előző összefüggésben lényegében a klasszikus ζ-függvényt sikerült bizonyos helyeken felírnunk p-adikus integrálként.

Megjegyzés (Kummer-kongruenciák)**.** *Az alábbi két, a klasszikus számelméletből ismert, Bernoulli-számokra vonatkozó összefüggés a ζ-függvény p-adikus interpolációjának elméletével került új megvilágításba.*

1. Ha $p-1 \nmid k$, akkor $\frac{b_k}{k} \in \mathbb{Z}_p$ (azaz $\left|\frac{b_k}{k}\right|_p \leq 1$).

2. Ha $p-1 \nmid k$, $k \equiv k' \pmod{p-1}$ és $k \equiv k' \pmod{p^n}$ akkor

$$(1-p^{k-1})\frac{b_k}{k} \equiv (1-p^{k'-1})\frac{b_{k'}}{k'} \pmod{p^{n+1}}.$$

A $p-1 \nmid k$ feltétel szükségességét az magyarázza, hogy ekkor a Bernoulli-disztribúciók regularizálása során szereplő α paraméter választható úgy, hogy $\left|\frac{1}{\alpha^{-k}-1}\right|_p = 1$. A második állításban a k-ra és k'-re tett feltételek pontosan ugyanazok, mint amiket a korábbi interpolációk során tettünk (k és k' kongruensek modulo $p-1$ és p-adikus értelemben „közel" vannak egymáshoz).

Ezeket figyelembe véve az állítások a 6.2. és 6.3. egyenletek egyenes következményei. A második állítás lényegében a „közeli függvények integrálja is közeli" összefüggés egy speciális esete.

A bizonyításokért lásd [Kob84, II. 6.].

Megjegyzés. *Egy pozitív valós számokon értelmezett $f(x)$ függvény* Mellin-transzformáltja *a*

$$g(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) \mathrm{d}x$$

függvény (ha létezik). Például $s > 1$ esetén igaz a

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty x^{s-1} \frac{1}{e^x - 1} \mathrm{d}x$$

összefüggés, amit úgy is mondhatunk, hogy $\frac{1}{e^x-1}$ Mellin-transzformáltja $s \to \Gamma(s)\zeta(s)$ $(s > 1)$.

Láttuk, hogy a

$$-(1-p^{k-1})\frac{b_k}{k}$$

kifejezést p-adikusan interpoláló függvény „lényegében" nem más mint

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{s-1} \mathrm{d}\mu_{B,1,\alpha}(x)$$

(eltekintve s_0-tól és az integrál előtti szorzótól). Ez alapján a p-adikus ζ-függvény felfogható mint a konstans 1 függvény „p-adikus Mellin-transzformáltja" a $\mu_{B,1,\alpha}$ regularizált mérték szerint.

Megjegyzés. *A ζ és ζ_p közti kapcsolat tovább általánosítható. Ha χ egy nemtriviális karakter és*

$$L_\chi(s) := \sum_{n=1}^\infty \frac{\chi(n)}{n^s} \quad (s > 0)$$

a hozzá tartozó L-függvény akkor egy ζ_p-hez hasonló konstrukcióval bevezethetők az $L_{\chi,p}$ „p-adikus L-függvények" amelyek interpolálják $L_\chi(1-k)$-t a $k = 0, 1, \ldots$ helyeken. Lásd [Kob84, II. 7.].

Irodalomjegyzék

[Ada66] William W. Adams, *Transcendental numbers in the p-adic domain*, American Journal of Mathematics **88** (1966), no. 2, 279–308.

[Boj74] R. Bojanic, *A simple proof of Mahler's theorem on approximation of continuous functions of a p-adic variable by polynomials*, Journal of Number theory **6** (1974), no. 6, 412–415.

[Coa69] J. Coates, *An effective p-adic analogue of a theorem of Thue*, Acta Arithmetica **15** (1969), no. 3, 279–305.

[Gou97] Fernando Q. Gouvêa, *p-adic Numbers An Introduction*, 2 ed., Springer, 1997.

[Kob80] Neal Koblitz, *p-adic Analysis: A Short Course on Recent Work*, Cambridge University Press, 1980.

[Kob84] ———, *p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions*, 2 ed., Springer Science & Business Media, 1984.

[Mah81] Kurt Mahler, *p-adic Numbers and their Functions*, 2 ed., Cambridge University Press, 1981.

[Rob00] Alain M. Robert, *A Course in p-adic Analysis*, Springer Science & Business Media, 2000.

[Saf09] Igor R. Safarevics, *Algebra*, Typotex Kiadó, 2009.

[Sch84] W. H. Schikhof, *Ultrametric Calculus: An Introduction to p-adic Analysis*, Cambridge University Press, 1984.

[VR78] Arnoud Van Rooij, *Non-Archimedean Functional Analysis*, Dekker, 1978.

[Zá] Zábrádi Gergely, *Algebrai számelmélet jegyzet*, `https://zabradi.web.elte.hu/Jegyzetek/algszamjegyzet.pdf`.