A Sidorenko-sejtés

Szakdolgozat
Matematikus mesterszak

készítette:
Markó Ádám

témavezető:
Dr. Frenkel Péter
Adjunktus
Algebra és Számelmélet tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematikai Intézet

Budapest, 2020

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani a témavezetőmnek, Frenkel Péternek a sok segítségért a dolgozat megírásában.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Legyen H és G két gráf. Nevezzük gráfhomomorfizmusnak azokat a H csúcshalmazából G csúcshalmazába tartó f függvényeket, ahol igaz az, hogy ha H-ban két csúcs között fut él, akkor az f szerinti G-beli képük között is fut él. A Sidorenko által megfogalmazott sejtés[7] szerint, ha a H gráf páros, becsülni tudjuk a homomorfizmusok számát a következő módon:

$$|\mathrm{Hom}(H,G)| \geq |V_G|^{|V_H|}\left(\frac{2|E_G|}{|V_G|^2}\right)^{|E_H|}.$$

Sidorenko megfogalmazta sejtés egy analitikus változatát is, ez az első fejezetben van leírva, és bizonyítva a két változat ekvivalenciája. Sidorenko bizonyította sejtést fákra, páros ciklusokra, és a teljes páros gráfokra, a szakdolgozatban minden ilyen gráfosztályra bizonyítjuk a Sidorenko-sejtést. Ezen kívül a páros gráfok egyéb osztályaira is bizonyítjuk a Sidorenko-sejtést, illetve a szakdolgozatban végigmegyünk azon módszereken, amivel a Sidorenko-sejtést bizonyították különböző gráf-osztályokra. A sejtés minden páros gráfra még nyitott.

· A második fejezetben egy példát mutatunk, hogyan lehet mátrixegyenlőtlenségekkel bizonyítani a Sidorenko-sejtést 3 hosszú utakra.

· A harmadik fejezetben a logaritmikus analízis eszközeivel bizonyítjuk bizonyos gráfosztályokra a Sidorenko-sejtést.

· A negyedik fejezetben bevezetjük az erős fa-felbontású gráfok osztályát, és arra bizonyítjuk a Sidorenko-sejtést.

· Az ötödik fejezetben az entrópiára vonatkozó információelméleti egyenlőtlenségek segítségével bizonyítjuk a Sidorenko-sejtést bizonyos gráfosztályokra.

0.1. A Sidorenko-sejtés két változata

Egy G gráf esetén jelöljük V_G-vel a csúcsok E_G -vel az élek halmazát. Legyen H, G két gráf. Egy $f : V_H \to V_G$ függvényt gráfhomomorfizmusnak hívunk, ha minden $u, v \in V_G$ csúcsra $(u, v) \in E_H$ esetén $(f(u), f(v)) \in E_G$. Jelöljük a H-ból G-be menő homomorfizmusok halmazát $\mathrm{Hom}(H, G)$-vel. Definiáljuk 2 gráf között a homomorfizmus-sűrűséget a következő módon:

$$t(H,G) := \frac{|\mathrm{Hom}(H,G)|}{|V_G|^{|V_H|}}.$$

A homomorfizmus-sűrűséget úgy is lehet értelmezni, mint annak a valószínűségét, hogy ha H csúcsait véletlenszerűen beleképezzük G csúcsaiba, az mekkora valószínűséggel lesz gráfhomomorfizmus. Például $t(K_2, G)$ azt jelöli, hogy G két véletlenszerűen kiválasztott csúcsa között mekkora valószínűséggel fut él. A dolgozat fő témája a homomorfizmusok számának vizsgálata.

Sejtés Tetszőleges G gráfra és H páros gráfra:

$$t(H,G) \geq t(K_2,G)^{|E_H|}.$$

Ha a homomorfizmussűrűség definícióját kifejtjük, a sejtést át lehet rendezni a következő alakba is:

$$|\mathrm{Hom}(H,G)| \geq |V(G)|^{|V(H)|}\left(\frac{2|E_G|}{|V(G)|^2}\right)^{|E_H|}.$$

Bár ez egy kicsit hosszabb, mint a sejtés eredeti formája, sok esetben könnyebben kezelhető, mint azt látni fogjuk.

Szeretnénk felírni a Sidorenko-sejtésnek egy analitikus változatát. Legyen μ a Lebesgue-mérték a $[0,1]$ halmazon és legyen $h : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ nemnegatív korlátos szimmetrikus Lebesgue-mérhető függvény. Ha H egy páros gráf, akkor legyen $V_H = S \cup T$ ahol $S = \{u_1, \ldots, u_t\}$ és $T = \{v_1, \ldots v_s\}$ felbontása a csúcsoknak úgy, hogy az S csúcsai között nincs él, és T csúcsai között sincs. Ekkor

$$\int_{x\in[0,1]^s y\in[0,1]^t} \prod_{(v_i,u_j)\in E_H} h(x_i,y_j)d\mu^{s+t} \geq \left(\int_{[0,1]^2} hd\mu^2\right)^{|E_H|}.$$

Állítás [7] A Sidorenko-sejtés analitikus és homorfizmus-sűrűséggel definiált változata ekvivalens állítások.

Bizonyítás Először tegyük fel, hogy a második egyenlőtlenség igaz. Legyen G tetszőleges gráf, $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ a csúcsok, A_G a G gráf incidenciamátrixa, azaz olyan $\{0,1\}^{n\times n}$ mátrix ahol $A_{Gij} = 1$ pontosan akkor, ha $\{v_i, v_j\} \in E_G$. Ekkor legyen $h_G : [0,1]^2 \to \{0,1\}$ olyan, hogy $(x,y) \in [0,1]$-re, $\frac{i-1}{n} < x \leq \frac{i}{n}$ és $\frac{j-1}{n} < y \leq \frac{j}{n}$ esetén $h(x,y) = 1$ pontosan akkor, ha $(v_i, v_j) \in E_G$. Ez szemléletesen azzal feleltethető meg, mintha az $[0,1]^2$ négyzetet felosztanánk n^2 kis négyzetre, és ahol az incidenciamátrixban 1 van, ott 1-et vennénk, ahol 0, ott 0-t.

Most azt szeretnénk megmutatni, hogy tetszőleges H páros gráfra:

$$t(H,G) = \int_{x\in[0,1]^s y\in[0,1]^t} \prod_{(v_i,u_j)\in E_H} h(x_i,y_j)d\mu^{s+t}$$

és

$$t(K_2,G)^{|E_H|} = \left(\int_{[0,1]^2} hd\mu^2\right)^{|E_h|}.$$

Az első egyenletből azonnal következik a második, úgyhogy csak azzal foglalkozunk. Bevezetünk néhány jelölést: legyen $\underline{\alpha}, \underline{\beta} \in \mathbb{R}^n$ esetén α_i az $\underline{\alpha}$ vektor i-edik koordinátája, $[\underline{\alpha}, \underline{\beta}] := [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \times \ldots \times [\alpha_n, \beta_n]$. Ekkor

$$\int_{x\in[0,1]^s y\in[0,1]^t} \prod_{(v_i,u_j)\in E_H} h(x_i, y_j) d\mu^{s+t} =$$

$$= \sum_{\underline{\alpha}\in\{1,\ldots,n\}^s} \sum_{\underline{\beta}\in\{1,\ldots,n\}^t} \int_{x\in[\frac{1}{n}(\underline{\alpha}-\underline{1}),\frac{1}{n}\underline{\alpha}] y\in[\frac{1}{n}(\underline{\beta}-\underline{1}),\frac{1}{n}\underline{\beta}]} \prod_{(v_i,u_j)\in E_H} h(x_i, y_j) d\mu^{s+t} =$$

$$= \sum_{\underline{\alpha}\in\{1,\ldots,n\}^s} \sum_{\underline{\beta}\in\{1,\ldots,n\}^t} \frac{1}{n^{s+t}} \prod_{(v_i,u_j)\in E_H} \chi_{\{A_{Gij}=1\}} =$$

$$= \frac{1}{n^{|V_H|}} \sum_{\underline{\alpha}\in\{1,\ldots,n\}^s} \sum_{\underline{\beta}\in\{1,\ldots,n\}^t} \prod_{(v_i,u_j)\in E_H} \chi_{\{A_{Gij}=1\}} =$$

$$= \frac{1}{n^{|V_H|}} \sum_{f:V_H\to\{1,\ldots,n\}} \prod_{(v_i,u_j)\in E_H} \chi_{\{(f(u_i),f(v_j))\in E_G\}} =$$

$$= \frac{1}{n^{|V_H|}} \sum_{f:V_H\to V_G} \chi_{f\in\mathrm{Hom}(H,G)} = \frac{|\mathrm{Hom}(H,G)|}{|V_G|^{|V_H|}} = t(H,G).$$

Ezzel az ekvivalencia egyik felét beláttuk.

Most tegyük fel, hogy az egyenlőtlenség páros gráfokra igaz. A második egyenlőtlenséget elég csak $h : [0,1]^2 \to [0,1]$ szimmetrikus, mérhető függvényekre belátni, ebből már következik az egyenlőtlenség tetszőleges szimmetrikus, nemnegatív, korlátos mérhető függvényre a $[0,1]^2$ halmazon. Legyen h egy ilyen függvény, ekkor legyenek $G_n; (n \in \mathbb{N})$ olyan $n2^n$ csúcsú gráfok amikre $V_{G_n} = \{v_1, \ldots, v_{n2^n}\}$, és A_{G_n} olyan hogy tetszőleges $k, l \in \{1, \ldots, 2^n\}$ elemekre

$$\sum_{(i,j)\in\{(k-1)2^n,\ldots,k2^n\}\times\{(l-1)2^n,\ldots,l2^n\}} A_{G_n ij} = \left\lfloor 4^n \int_{x,y\in[\frac{k-1}{n2^n},\frac{k}{n2^n}]\times[\frac{l-1}{m2^n},\frac{l}{n2^n}]} h(x,y) d\mu^2 \right\rfloor.$$

Legyen h_{G_n} úgy definiálva, mint az ekvivalencia bizonyításának első felében. Ekkor tetszőleges $B \subset [0,1]^2$ mérhető halmazra

$$\lim_{n\to\infty} \int_B h_{G_n} d\mu^2 = \int_B h d\mu^2.$$

Lemma Legyen H tetszőleges páros gráf, ekkor

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x\in[0,1]^s y\in[0,1]^t}\prod_{(v_i,u_j)\in E_H} h_{G_n}(x_i,y_j)d\mu^{s+t}=\int_{x\in[0,1]^s y\in[0,1]^t}\prod_{(v_i,u_j)\in E_H} h(x_i,y_j)d\mu^{s+t}.$$

Bizonyítás A lemma állítása átírható a következő módon:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_{x\in[0,1]^s y\in[0,1]^t}\prod_{(v_i,u_j)\in E_H} h_{G_n}(x_i,y_j)-\prod_{(v_i,u_j)\in E_H} h(x_i,y_j)d\mu^{s+t}\right|=0.$$

Legyen $\{e_1,\dots,e_{|E_H|}\}$ a H gráf éleinek egy felsorolása, ahol $e_k=\{x_{i_k},y_{j_k}\}$. Ekkor

$$\left|\int_{x\in[0,1]^s y\in[0,1]^t}\prod_{k=1}^{|E_H|} h_{G_n}(x_{i_k},y_{j_k})-\prod_{k=1}^{|E_H|} h(x_{i_k},y_{j_k})d\mu^{s+t}\right|=$$

$$=\left|\sum_{k_0=1}^{|E_H|}\int_{x\in[0,1]^s y\in[0,1]^t}\left(\prod_{k_1=1}^{k_0-1} h_{G_n}(x_{i_{k_1}},y_{i_{k_1}})\right)(h_{G_n}(x_{i_{k_0}},y_{i_{k_0}})-h(x_{i_{k_0}},y_{i_{k_0}}))\prod_{k_2=k_0+1}^{|E_H|} h(x_{i_{k_2}},y_{i_{k_2}})d\mu^{s+t}\right|,$$

teleszkopikus összeggé alakítva amit felülről becsülhetünk a tagok összegével. Ezt felülről tudjuk becsülni, ha külön vesszük a tagok abszolút értékeinek összegét:

$$\sum_{k_0=1}^{|E_H|}\left|\int_{x\in[0,1]^s y\in[0,1]^t}\left(\prod_{k_1=1}^{k_0-1} h_{G_n}(x_{i_{k_1}},y_{i_{k_1}})\right)(h_{G_n}(x_{i_{k_0}},y_{i_{k_0}})-h(x_{i_{k_0}},y_{i_{k_0}}))\prod_{k_2=k_0+1}^{|E_H|} h(x_{i_{k_2}},y_{i_{k_2}})d\mu^{s+t}\right|.$$

Most megmutatjuk, hogy az összeg minden tagja nullához tart. Legyen $\varepsilon>0$, mivel $\prod_{k_1=1}^{k_0-1} h_{G_n}(x_{i_{k_1}},y_{i_{k_1}})\prod_{k_2=k_0+1}^{|E_H|} h(x_{i_{k_2}},y_{i_{k_2}})$ nemnegatív korlátos mérhető, ezért át tudjuk írni lépcsősfüggvények összegére. Legyen

$$\prod_{k_1=1}^{k_0-1} h_{G_n}(x_{i_{k_1}},y_{i_{k_1}})\prod_{k_2=k_0+1}^{|E_H|} h(x_{i_{k_2}},y_{i_{k_2}})=\sum_{m=1}^{\infty}c_m\chi_{B_m},$$

Ahol $B_m\subset[0,1]^{s+t}$ mérhető halmazok. Ekkor a fenti függvény korlátossága miatt létezik olyan $m_0\in\mathbb{N}$, hogy

$$\int_{[0,1]^{s+t}}\sum_{m=m_0}^{\infty}c_m\chi_{B_m}d\mu^{s+t}<\frac{\varepsilon}{2},$$

ekkor, mivel $-1\le h_{G_n}(x_{i_{k_0}},y_{i_{k_0}})-h(x_{i_{k_0}},y_{i_{k_0}})\le 1$, ezért

$$\left|\int_{[0,1]^{s+t}}h_{G_n}(x_{i_{k_0}},y_{i_{k_0}})-h(x_{i_{k_0}},y_{i_{k_0}})\sum_{m=m_0}^{\infty}c_m\chi_{B_m}d\mu^{s+t}\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re, tehát

$$\left| \int_{x\in[0,1]^s y\in[0,1]^t} (h_{G_n}(x_{i_{k_0}}, y_{i_{k_0}}) - h(x_{i_{k_0}}, y_{i_{k_0}})) \prod_{k_1=1}^{k_0-1} h_{G_n}(x_{i_{k_1}}, y_{i_{k_1}}) \prod_{k_2=k_0+1}^{|E_H|} h(x_{i_{k_2}}, y_{i_{k_2}}) d\mu^{s+t} \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x\in[0,1]^s y\in[0,1]^t} (h_{G_n}(x_{i_{k_0}}, y_{i_{k_0}}) - h(x_{i_{k_0}}, y_{i_{k_0}})) \sum_{m=1}^{m_0-1} c_m \chi_{B_m} d\mu^{s+t} \right| + \frac{\varepsilon}{2} \leq$$

$$\sum_{m=1}^{m_0-1} c_m \left| \int_{B_m} (h_{G_n}(x_{i_{k_0}}, y_{i_{k_0}}) - h(x_{i_{k_0}}, y_{i_{k_0}})) d\mu^{s+t} \right| + \frac{\varepsilon}{2},$$

aminél minden elég nagy $n \in \mathbb{N}$ re

$$\sum_{m=1}^{m_0-1} c_m \left| \int_{B_m} (h_{G_n}(x_{i_{k_0}}, y_{i_{k_0}}) - h(x_{i_{k_0}}, y_{i_{k_0}})) d\mu^{s+t} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

mivel minden B mérhető halmazon $\lim_{n\to\infty} \int_B h_{G_n} d\mu^{s+t} = \int_B h d\mu^{s+t}$. Ezzel az ekvivalencia második felét is beláttuk. $\square$

A sejtés második változatának van egy általánosítása: legyen $w : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ korlátos mérhető, nemnegatív, nem feltétlenül szimmetrikus függvény, a H gráf adott valamilyen rendezése, ekkor tetszőleges H páros gráfra

$$\int_{x\in[0,1]^s y\in[0,1]^t} \prod_{(v_i,u_j)\in E_H} w(x_i, y_j) d\mu^{s+t} \geq \left(\int_{[0,1]^2} w d\mu^2 \right)^{|E_H|}.$$

A sejtés ezen változatának ugyanúgy nincs cáfolása, mint a szimmetrikus függvényes változatnak, de csak kevesebb típusú páros gráfra van eddig bizonyítva.

Általánosságban a $[0,1]^2 \to \mathbb{R}$ korlátos, mérhető, nemnegatív, szimmetrikus függvényeket grafonoknak, vagy gráflimeszeknek nevezzük. Lovász László és Szegedy Balázs vezette be a fogalmat [5].

0.2. A Sidorenko-sejtés és a mátrixegyenlőtlenségek közötti kapcsolat

A következőkben szeretnénk a Sidorenko-sejtés és bizonyos mátrixegyenlőtlenségek között felírni a kapcsolatot. Ehhez felírunk egy mátrixegyenlőtlenséget, amivel a sejtést bizonyos páros gráfokra bizonyítani lehet. Ezt az egyenlőtlenséget F.V. Atkinson, G.A. Watterson, P.A.P. Moran bizonyította [1].

Legyen $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, ekkor definiáljuk a következő kifejezéseket:

$$a_{i.} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$$

$$a_{.j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

$$a_{..} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}.$$

Állítás Legyen $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ nemnegatív értékeket felvevő mátrix. Ekkor

$$mn \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} a_{i.} a_{.j} \geq (a_{..})^3.$$

Bizonyítás Legyen $\phi := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} a_{i.} a_{.j}$, legyen A minimális, ha ϕ értéke a lehető legkisebb fix $a_{..}$-ra. Azt szeretnénk megmutatni, hogy A akkor és csak akkor minimális, ha minden $a_{i.}$ megegyezik, vagy minden $a_{.j}$ megegegyezik. Először megnézzük, hogy a sor és az oszlopcserék nem változtatnak ϕ és $a_{..}$ értékén. Ekkor feltehetjük, hogy

$$a_{1.} \leq a_{2.} \leq \ldots \leq a_{n.}$$

és

$$a_{.1} \leq \ldots \leq a_{.m}.$$

Indukciót fogunk alkamazni. Feltehetjük, hogy minden m', n' párra ahol $m' \leq m$ és $n' < n$ vagy $n' \leq n$ és $m' < m$ már bizonyítottuk az állítást, az $m = 1, n = 1$ esetre az állítás triviális. Indirekten szeretnénk bizonyítani, tegyük fel, hogy $a_{1.} < a_{n.}$ és $a_{.1} < a_{.m}$. Ekkor az $a_{i.} = 0$ vagy $a_{.j} = 0$ esetben az állítás visszavezethető, egy indukció szerint már megoldott esetre. Ha ez nem áll fenn, akkor létezik olyan $r \in \{1, \ldots, n\}$, $s \in \{1, \ldots, m\}$, hogy $a_{sn} > 0$ és $a_{1r} > 0$. Ekkor vegyük azt az A' mátrixot, amire

$$a'_{1r} := a_{1r} - \epsilon \quad a'_{1n} := a_{1n} + \epsilon$$

$$a'_{sn} := a_{sn} - \epsilon \quad a'_{sr} := a_{sr} + \epsilon$$

és

$$a'_{ij} = a_{ij}$$

minden más ij párra. Ekkor ha ϵ kellően kicsi, akkor a mátrix minden felvett értéke nemnegatív. Ekkor minden i és j indexre $a'_{i.} = a_{i.}$ és $a'_{.j} = a_{.j}$, mivel ahány ϵ értéket hozzáadtunk a sorhoz, vagy oszlophoz, annyit ki is vontunk. Az is nyilvánvaló, hogy $a'_{..} = a_{..}$, nézzük meg, hogy ϕ' hogyan változik. Ekkor

$$\phi - \phi' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}a_{i.}a_{.j} - a'_{ij}a'_{i.}a'_{.j} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_{ij} - a'_{ij})a_{i.}a_{.j} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_{ij} - a'_{ij})a_{i.}a_{.j} =$$

$$= \epsilon(a_{1.}a_{.r} - a_{1.}a_{.m} + a_{.m}a_{s.} - a_{.r}a_{s.}) =$$

$$\epsilon(a_{1.} - as.)(a_{.r} - a_{.n}) \geq 0,$$

és egyenlőség csak akkor áll fenn ha $a_{.r} = a_{.m}$ vagy $a_{1.} = a_{s.}$. Most $\epsilon = \min(a_{1r}, a_{sm})$ választással elérhető, hogy tudjunk készíteni olyan A' mátrixot, amire $a_{1m} > 0$. Hasonló módon elérhető, hogy legyen $a_{n1} > 0$. Most tegyük fel, hogy A olyan mátrix, ami minimális, $a_{n1} > 0$ és $a_{1m} > 0$. Ekkor változtassuk meg A értékeit úgy, hogy legyen

$$a'_{11} = a'_{11} + 2x$$

$$a'_{n1} := a_{n1} - x \quad a'_{1m} := a_{1m} - x.$$

Képzeljük el ϕ-t mint x függvényét. Az fogjuk megmutatni, hogy ha teljesül az indirekt feltétel, akkor ϕ deriváltja a 0-ban negatív. Ezt azt jelenti a ϕ függvény a nullában csökkenő, de ekkor nem lehet minimális. Tehát

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = ((a_{11}+2x)(a_{1.}+x)(a_{.1}+x))'+((a_{1m}-x)(a_{1.}+x)a_{.m})'+((a_{n1}-x)(a_{.1}+x)a_{n.})'+$$

$$+\sum_{i=2}^{n-1} a_{i1}(a_{.1} + x)'a_{i.} + \sum_{j=2}^{m-1} a_{1j}(a_{1.} + x)'a_{.j} + \sum_{i=2}^{n-1} a_{im}(a_{.m} - x)'a_{i.}+$$

$$\sum_{j=2}^{m} a_{nj}(a_{.n} - x)' + a_{nm}((a_{.m} - x)(a_{n.} - x))' =$$

$$= 2(a_{1.} + x)(a_{.1} + x) + (a_{11} + 2x)(a_{.1} + x) + (a_{11} + 2x)(a_{.1} + x)+$$

$$+(-1)(a_{1.} + x)a_{.m}) + (a_{1m} - x)a_{.m} + (-1)(a_{.1} + x)a_{n.} + (a_{n1} - x)a_{n.}+$$

$$+\sum_{i=2}^{n-1} a_{i1}a_{i.} + \sum_{j=2}^{m-1} a_{1j}a_{.j} + (-1)\sum_{i=2}^{n-1} a_{im}a_{i.}+$$

$$+(-1)\sum_{j=2}^{m} a_{nj}a_{.j} + (-1)a_{nm}(a_{n.} - x) + (-1)a_{nm}(a_{.m} - x) =$$

$$= 2a_{1.}a_{.1} + a_{11}a_{1.} + a_{11}a_{.1} - a_{1.}a_{.m} - a_{.1}a_{n.} + a_{1m}a_{.m} + a_{n1}a_{n.}+$$

$$+\sum_{i=2}^{n-1} a_{i1}a_{i.} + \sum_{j=2}^{m-1} a_{1j}a_{.j} - \sum_{i=2}^{n-1} a_{im}a_{i.} - \sum_{j=2}^{m-1} a_{nj}a_{.j} - a_{nm}a_{n.} - a_{nm}a_{.m} + c_1x + c_2x^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i.} + \sum_{j=1}^{m} a_{1j}a_{.j} - \sum_{i=1}^{n} a_{im}a_{i.} - \sum_{j=1}^{m} a_{nj}a_{.j} + 2a_{1.}a_{.1} - a_{1.}a_{.m} - a_{.1}a_{n.} + c_1x + c_2x^2$$

ahol c_1, c_2 x-től független konstansok, az $x = 0$ helyen nem kell számolni velük. Most felhasználjuk, hogy a mátrix sorösszegei és oszlopösszegei monoton növekednek:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i.} \leq \sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{n.} = a_{.1}a_{n.}$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{1j}a_{.j} \leq \sum_{j=1}^{m} a_{1j}a_{.m} = a_{1.}a_{.m}$$

$$-\sum_{i=1}^{n} a_{im}a_{i.} \leq -\sum_{i=1}^{n} a_{im}a_{1.} = a_{1.}a_{.m}$$

$$-\sum_{i=1}^{n} a_{im}a_{i.} \leq -\sum_{i=1}^{n} a_{im}a_{1.} = a_{1.}a_{.m}.$$

Ezeket behelyettesítve, a derivált nullában felvett értéke tovább becsülhető:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(0) \leq 2a_{1.}a_{.1} - a_{1.}a_{.m} - a_{.1}a_{n.}$$

Ami az indirekt feltevésünk szerint kisebb mint nulla, tehát A nem minimális. Ebből következik, hogy vagy a sor, vagy az oszlopösszegek megegyeznek. Ekkor ha feltesszük, hogy a sorösszegek megegyeznek, akkor le lehet osztani egy sorösszeggel, és a sorok számával, és így megkapjuk a Cauchy egyenlőtlenséget. Ezzel az állítást beláttuk. □

A Sidorenko-sejtés két változatához hasonlóan a mátrixegyenlőtlenség is ekvivalens egy integrálos egyenlőtlenséggel. Itt az ekvivalencia bizonyítása nagyon hasonló ahhoz, mint amit a Sidorenko-sejtésnél láttunk.

Tétel Legyen $K : [0, a] \times [0, b] \to \mathbb{R}$ nemnegatív korlátos mérhető függvény, ekkor:

$$ab \int_0^a \int_0^b \int_0^a \int_0^b K(x,t)K(x,y)K(s,y)dxdydsdt \geq \left(\int_0^a \int_0^b K(x,y)dxdy \right)^3$$

Ha feltesszük, hogy K szimmetrikus és $a = b = 1$, akkor

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K(t,x)K(x,y)K(y,s)dxdydsdt \geq \left(\int_0^1 \int_0^1 K(x,y)dxdy \right)^3,$$

ami ekvivalens a Sidorenko-sejtéssel három hosszú utakra. Atkinson és Watterson bebizonyította a Sidorenko-sejtést $2^s 3^l$ hosszú utakra is, és megfogalmazták a sejtés utakra vonatkozó változatát. Ezt a módszerük általánosításával végül H.P. Mulholland és Cedric Smith bizonyította [6] még jóval a Sidorenko-sejtés általános kimondása előtt.

0.3. A Sidorenko-sejtés és a logaritmikus analízis

A következőkben más módszert mutatunk, amivel a Sidorenko-sejtést bizonyítani lehet bizonyos gráfokra. Először ezzel bizonyítani fogjuk a Sidorenko-sejtést utakra. Jelöljük a várható értéket $\mathbb{E}$-vel. A módszert a Sidorenko-sejtés különböző eseteinek bizonyítására J.L Xiang Li és Szegedy Balázs dolgozta ki [4].

Lemma(Jensen-egyenlőtlenség) Legyen (Ω, μ) egy valószínűségi mező, $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum, és $g : \Omega \to I$ egy mérhető függvény, $c_1 : I \to \mathbb{R}$ egy konvex függvény és $c_2 : I \to \mathbb{R}$ egy konkáv függvény. Ekkor

$$\mathbb{E}(c_1 \circ g) \geq c_1(\mathbb{E}(g))$$

és

$$\mathbb{E}(c_2 \circ g) \leq c_2(\mathbb{E}(g)).$$

Továbbá, ha $f : \Omega \to \mathbb{R}$ egy nemnegatív mérhető függvény, amire $\mathbb{E}(f) = 1$, akkor

$$\mathbb{E}(f(c_1 \circ g)) \geq c_1(\mathbb{E}(fg))$$

és

$$\mathbb{E}(f(c_2 \circ g)) \leq c_2(\mathbb{E}(fg)).$$

Bizonyítás Az első állítás a klasszikus Jensen-egyenlőtlenség várható értékre. A másodikat úgy kapjuk meg, hogy vesszük a μ mérték helyett azt a μ^* mértéket, amit f határoz meg az Ω halmazon. Ekkor a második egyenlőtlenség következik az első egyenlőtlenségből. $\square$

Definíció Legyen $g : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, és ekkor legyen

$$\mathbb{E}_x(g) := \int_0^1 g(x,y)dy,$$

általánosabban $g : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ mérhető függvény, és $S \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$ esetén legyen

$$\mathbb{E}_S(g) := \int_0^1 \cdots \int_0^1 g \prod_{x_i \notin S} dx_i,$$

Azaz ez egy többdimenziós integrál, ahol azon x_i-k szerint integrálunk, amik nincsenek S-ben. Ekkor persze $\mathbb{E}(g) = \mathbb{E}(\mathbb{E}_S(g))$.

Tétel Legyen $W : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ nemnegatív mérhető szimmetrikus függvény, legyen $d = \mathbb{E}(W)$, és legyen H egy n élű út. Ekkor

$$\mathbb{E}\Bigg(\prod_{(v_i,v_j) \in E_H} W(x_i,x_j) \Bigg) \geq d^n.$$

Bizonyítás Legyen

$$d(x) := \mathbb{E}_x(W(x,y))$$

és legyen

$$f := \Bigg(\prod_{i=1}^{n-1} W(x_i,x_{i+1}) \Bigg) d^{-1} \Bigg(\prod_{i=2}^{n} d(x_i)^{-1} \Bigg).$$

Ekkor

$$\log\Bigg(\mathbb{E}\Bigg(\prod_{(v_i,v_j) \in E_H} W(x_i,x_j) \Bigg) \Bigg) = \log\Bigg(\mathbb{E}\Bigg(fd \prod_{i=2}^{n} d(x_i) \Bigg) \Bigg) \geq$$

$$\geq \log d + \mathbb{E}\Bigg(f \log \prod_{i=2}^{n} d(x_i) \Bigg),$$

ahol azt használjuk ki, hogy a log konkáv függvény, és így alkalmazhatjuk a Jensen-egyenlőtlenség fent belátott következményét. A kapott kifejezést tovább alakítva

$$\log d + \mathbb{E}\Bigg(f \sum_{i=2}^{n} \log(d(x_i)) \Bigg) = \log d + \sum_{i=2}^{n} \mathbb{E}(f \log(d(x_i))) =$$

$$= \log d + \sum_{i=2}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{E}_{x_i}(f \log(d(x_i)))) = \log d + \sum_{i=2}^{n} d^{-1}\mathbb{E}(d(x_i)\log(d(x_i))) \geq$$

$$\geq \log d + (n-1)d^{-1} d \log d = \log d^n,$$

ahol pedig a Jensen-egyenlőtenség következményét az $x \log x$ függvényre alkalmazzuk, ami pedig konvex. $\square$

Következmény Tetszőleges n természetes számra, ha H egy n hosszú út, akkor H-ra teljesül a Sidorenko-sejtés.

Tétel Legyen H egy olyan páros gráf, aminek csúcshalmaza legyen

$V = \{u, y_1, \dots, y_m, v_1, \dots, v_k\}$ és u össze van kötve éllel az összes v_i ponttal. Az y_i pontok legyenek összekötve az $S_i \subset \{v_1, \dots, v_k\}$ pontokkal, ahol S_i elemszámát jelöljük a_i-val. Ha a felsoroltakon kívül más él nincs a gráfban, akkor $W : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ nemnegatív mérhető függvény esetén, $d = \mathbb{E}(W)$ esetén:

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{k} W(\alpha, \beta_i) \prod_{(y_i, v_j) \in E_H} W(\gamma_i, \beta_j)\right) \geq d^{|E_H|}$$

Bizonyítás Először tegyük fel, hogy W szigorúan pozitív. Bevezetünk néhány fogalmat. Legyen

$$q := \mathbb{E}_x(W(x, z))$$

és

$$f := d^{-1} q^{1-k} \prod_{i=1}^{k} W(x, \beta_i),$$

az előző tétel bizonyításához hasonló módon, és legyen

$$s_t := \mathbb{E}_{S_t}\left(\prod_{v_j \in S_t} W(\gamma, \beta_j)\right)$$

és

$$f_t := s_t^{-1} q^{a_t - k} \prod_{i=1}^{k} W(x, \beta_i).$$

Most

$$\mathbb{E}(f) = \mathbb{E}\left(d^{-1} q^{1-k} \prod_{i=1}^{k} W(x, \beta_i)\right) = d^{-1}\mathbb{E}\left((\mathbb{E}_x(W(x,z)))^{1-k} \prod_{i=1}^{k} W(x, \beta_i)\right) =$$

$$= d^{-1}\mathbb{E}\left(\mathbb{E}_x\left((\mathbb{E}_x(W(x,z)))^{1-k} \prod_{i=1}^{k} W(x, \beta_i)\right)\right) =$$

$$= d^{-1}\mathbb{E}((\mathbb{E}_x(W(x,z)))^{1-k}(\mathbb{E}_x(W(x,z)))^{k})) = d^{-1}\mathbb{E}(W(x,z)) = 1,$$

és hasonló számolással $\mathbb{E}(f_t) = 1$. Ekkor

$$\log\left(\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{k} W(\alpha, \beta_i) \prod_{(y_i, v_j) \in E_H} W(\gamma_i, \beta_j)\right)\right) = \log\left(\mathbb{E}\left(f q^{k-1} d \prod_{i=1}^{k} s_i\right) \geq\right.$$

$$\geq \mathbb{E}\Bigg(f \log\Big(q^{k-1} d \prod_{i=1}^{k} s_i\Big)\Bigg),$$

a Jensen-egyenlőtlenségből következő egyenlőtlenségünk felhasználásával. A kapott kifejezést tovább alakítva

$$(k-1)d^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{E}_x(f \log q)) + \log d + \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}(f \log s_i) =$$

$$= (k-1)d^{-1}\mathbb{E}(q \log q) + \log d + \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}(f \log s_i) \geq$$

$$\geq d^{-1}(k-1)d \log d + \log d + \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}(f \log s_i) = \log d^k + \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}(f \log s_i),$$

ahol a Jensen-egyenlőtlenséget használjuk a $x \log x$ függvényre. A $\sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}(\log s_i)$ kifejezést tagonként becsüljük. Legyen $h_t := s_t q^{1-a_t}$, ekkor

$$\mathbb{E}_x(f_t h_t) = q, \qquad \mathbb{E}(f_t h_t) = d,$$

ugyanolyan számolással, mint amit fent láttunk. Most ismét a Jensen-egyenlőtlenségből következett állításunk felhasználásával:

$$\mathbb{E}(f \log s_t) = d^{-1}\mathbb{E}(f_t h_t \log h_t) + (a_t - 1)d^{-1}d^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{E}_x(f_t h_t \log q)) \geq$$

$$d^{-1}((a_t - 1)\mathbb{E}(f_t h_t \log h_t) + \mathbb{E}(q \log q)) \geq d^{-1}(a_t d \log d) = \log d^{a_t}.$$

Most ezzel becsüljük az eredeti egyenlőtlenséget

$$\log\Bigg(\mathbb{E}\Bigg(\prod_{i=1}^{k} W(\alpha, \beta_i) \prod_{(y_i, v_j) \in E_H} W(\gamma_i, \beta_j)\Bigg)\Bigg) \geq$$

$$k \log d + \sum_{i=1}^{m} a_t \log d = \log d^{|E_H|}$$

Amit az exp függvénnyel kombinálva megkapjuk a tétel állítását pozitív függvényekre. Mivel tetszőleges mérhető nemnegatív függvényt tudtunk közelíteni pozitív mérhető függvényekkel ezért ebből következik a tétel nemnegatív mérhetőkre is. □

Következmény Legyen H olyan páros gráf, ahol $V_H = S \cup T$, és S-beli csúcs csak T-belivel van összekötve, és fordítva, és van olyan S-beli csúcs, ami minden T-belivel össze van kötve. Ekkor H-ra teljesül a Sidorenko-sejtés.

Következmény A teljes páros gráfokra teljesül a Siderenko-sejtés.

0.4. A Sidorenko sejtés fákra és erős fa-felbontású gráfokra

A következőkben először bizonyítani fogjuk a Sidorenko sejtést fákra, majd a módszer általánosításával a páros gráfok egy nagyobb osztályára is, amit erős-fa felbontású gráfoknak nevezünk. Fákra a sejtést először maga Sidorenko bizonyította, a dolgozat egy másik bizonyítást mutat, amit David Conlon, Jeong Han Kim Choongbum és Lee Joonkyung Lee írtak le [2].

Legyen S egy véges halmaz. Ekkor egy S-beli értékű X valószínűségi változónak az entrópiáját a következő módon értelmezzük:

$$H(X) := -\sum_{x\in S} P(X = x)\log(P(X = x)).$$

Legyen X, Y két S-beli értékű valószínűségi változó, ekkor Y-nak az X-re vett feltételes entrópiáján a

$$H(Y \mid X) := H(X, Y) - H(X)$$

kifejezést értjük. Ha X, Y és Z három valószínűségi változó, akkor X-et és Y-t feltételesen függetlennek mondjuk Z-re nézve, ha

$$H(X \mid Z) = H(X \mid Y, Z).$$

Lemma Legyen S véges halmaz, és X egy S-beli értékű valószínűségi változó, akkor

$$H(X) \leq \log(|S|).$$

Bizonyítás Legyen $f(x) := x\log x + (c - x)\log(c - x)$, ekkor $f'(x) = \log x - \log(c - x)$, ami akkor vesz fel nullát, ha $x = c - x$, illetve $k \in \mathbb{N}$ esetén legyen $g(x) = kx\log(x) + (c - kx)\log(c - kx)$, ekkor $g'(x) = k\log(x) - k\log(c - kx)$, tehát indukcióval belátható, hogy $H(X)$ a maximumát az egyenletes X eloszlásra veszi fel. Ez alapján:

$$H(X) = -\sum_{x\in S} P(X = x)\log(P(X = x)) \leq -\sum_{x\in S}\frac{1}{|S|}\log(\frac{1}{|S|}) = \log(|S|).$$

□

Most nézzük a fák esetét. Legyen $H = T$ egy fa. Jelöljünk ki egy csúcsot a fánkon, legyen ez r. Rendezzük sorba a T fa csúcsait olyan módon, hogy egy tetszőleges $v \in T$ csúcsra az r és a v közötti út összes csúcs már benne van a felsorolás v előtti elemeiben. Legyen $|T|= k + 1$-re ez $v_1, v_2 \ldots, v_k$. Ekkor egy G gráf esetén a T-ből G-be menő gráfhomomorfizmusokon definiáljuk a következő valószínűségi eloszlást: annak a valószínűsége, hogy a homomorfizmusunk r-t egy $g \in G$ csúcsba viszi, legyen

$$\frac{\deg g}{2|E_G|}.$$

Ha ez megvan, megyünk sorba T csúcsain a fent meghatározott rendezés szerint. Ha új csúcshoz érünk, legyen ez u, akkor megkeressük azt az v csúcsot, ami u-val szomszédos, és már szerepel a felsorolásban, tehát hozzárendeltük már valamelyik csúcshoz a korábbiakból, jelöljük u képét g-vel, v képét válasszuk ki a g-vel szomszédos G-beli csúcsok közül egyenletes eloszlással.

Állítás Annak a valószínűsége, hogy egy a fenti módszerrel véletlenszerűen kiválasztott homomorfizmusunk megegyezik egy $w : T \to G$ gráfhomomorfizmussal, nem függ az r csúcs megválasztásától, vagy a többi csúcs sorrendjétől megfelelő sorbarendezésben.

Bizonyítás Annak a valószínűségét, hogy a T képe $w(T)$ a fenti véletlen algoritmusra, a következő módon lehet felírni

$$P(h = w) = \frac{\deg_G h(r)}{2|E_G|}\left(\frac{1}{\deg_G h(r)}\right)^{\deg_T r} \prod_{v\in V_T\setminus\{r\}} \left(\frac{1}{\deg_G h(v)}\right)^{\deg_T v-1}$$

ahol $\deg_G$ a G-beli, a $\deg_T$ pedig a T-beli fokot jelöli. Ezt úgy lehet elképzelni, hogy az r csúcsból, $\deg_T r$ szomszédnak kell jó helyre mennie, és a többi csúcsnál pedig $\deg_T v - 1$-nek mert egy szomszédjának a képét már meghatároztuk előtte. Ezt a kifejezést át lehet alakítani a következő módon:

$$P(h = w) = \frac{1}{2|E_G|}\left(\frac{1}{\deg_G h(r)}\right)^{\deg_T r-1} \prod_{v\in V_T\setminus\{r\}} \left(\frac{1}{\deg_G h(v)}\right)^{\deg_T v-1} =$$

$$= \frac{1}{2|E_G|} \prod_{v\in V_T} \left(\frac{1}{\deg_G h(v)}\right)^{\deg_T v-1}.$$

Ez a kifejezés független attól, hogy melyik T-beli elemet választottuk kezdésnek, és attól is, hogy a kiválasztott elemen kívüliek milyen sorrendben kerültek elő. Az is látszik, hogy tetszőleges $w \in \mathrm{Hom}(T, G)$-re

$$P(w = h) > 0,$$

tehát minden homomorfizmus pozitív valószínűséggel fordul elő. $\square$

Most ha van egy T fa, és annak egy S részgráfja ami szintén fa, akkor a fenti módszerrel definiáltunk egy valószínűségi eloszlást a $\mathrm{Hom}(S, G)$ halmazra is. Ezt úgy lehet megállapítani, hogy nézzük ha van egy $h : T \to G$ gráfhomomorfizmusunk, akkor h megszorítása csak az S-beli csúcsokra nézve ismét egy gráfhomomorfizmust ad. Ennek a valószínűségi mezőnek van egy érdekes tulajdonsága:

Állítás Legyen T egy fa és legyen S egy részgráfja T-nek ami egy fa.Ha $h \in \mathrm{Hom}(T, G)$, legyen h_S a h függvény megszorítása az S gráf csúcsaira. Legyen $w_s \in \mathrm{Hom}(S, G)$ Ekkor

$$P_T(h; h_s = w_s) = P_S(h = w_s),$$

ami, ekvivalens azzal, hogy

$$\sum_{g \in \mathrm{Hom}(T,G); g_s = w_s} P_T(h = g) = P_S(h = w_s).$$

Bizonyítás Most felírhatjuk, hogy

$$P_S(h = w_s) = \frac{1}{2|E_H|} \prod_{v \in T} \left(\frac{1}{\deg_G w_s(v)} \right)^{\deg_s v - 1},$$

képzeljük el egy $g \in \mathrm{Hom}(T, G)$ függvény pontjainak lerakását, mintha először az S-beli csúcsokat raknánk le, aztán a többit, ha először az S beli csúcsokat rakjuk le véletlenszűen - ezt megtehetjük az előző állítás szerint - akkor annak a valószínűsége, hogy ezek G-ben a w_s-nek megfelelő helyre kerülnek, az pont a fenti kifejezés, a többi csúcs pedig bárhova kerülhet, ha a $P_T(h; h_s = w_s)$ valószínűséget nézzük. $\square$

Következmény Ha T egy fa és G egy véges gráf, ahol $e_1 = (u, v)$; $e_1 \in E_T$ és $e_2 = (s, t)$; $e_2 \in E_G$ ekkor

$$P_T(h; h(u) = s; h(v) = t) = \frac{1}{2|E_G|}$$

és ha nem nézzük melyik csúcs melyikbe megy, akkor

$$P_T(h(e_1) = e_2) = \frac{1}{|E_G|}.$$

A második egyenlőség úgy jön ki az elsőből, hogy összeadjuk a két eset valószínűségét. Ez azt jelenti, hogy ha van egy fánk, abból kiválasztunk egy élet, akkor annak a valószínűsége, hogy az egy a fenti véletlen algoritmussal konstruált homomorfizmus szerint egy konkrét élbe esik egyenletes a G gráf élein.

A következőkben visszatérünk az entrópiára. Az előző következmény szerint

$$H(h(u) = s, h(v) = t) = \frac{1}{2|E_G|}\log(2|E_G|),$$

ami a biztos eseményre

$$H(h(u); h(v) \in E_G) = \log(2|E_G|).$$

Állítás Legyen T egy fa, G egy véges gráf, P a fent definiált valószínűségi eloszlás a T-ből G- be menő gráf homomorfizmusokon

$$H(h \in \mathrm{Hom}(T, G)) \geq \log\left(|V(G)|^{|V(T)|}\left(\frac{2|E_G|}{|V_G|}\right)^{|E_T|}\right).$$

Bizonyítás Először a tekintett valószínűségi eloszlás szerint, kiválasztunk egy $r = v_0 \in T$ csúcsot, és egy a feltételeknek megfelelő $v_1, \dots v_k$ sorozatát a többi csúcsnak, ahol $k := |V_T|-1$. Most felírhatjuk az entrópiát a következő módon:

$$H(h \in \mathrm{Hom}(T, G)) = -\sum_{w \in \mathrm{Hom}(G,T)} P(h = w)\log P(h = w) =$$

$$= -\sum_{w \in \mathrm{Hom}(G,T)} P(h(v_0) = w(v_0), \dots, h(v_k) = w(v_k))\log P(h(r) = w(r), \dots, h(v_k) = w(v_k)).$$

Legyen

$$P(h_i = w_i) := P(h(v_0) = w(v_0), \dots, h(v_i) = w(v_i)),$$

ekkor az entrópia átalakítható a következő teleszkopikus összeggé:

$$H(h = w) = -P(h(r) = w(r))\log(P(h(r) = w(r)))+$$

$$+(-1)\sum_{i=1}^{k}(P(h_i - w_i)\log(P(h_i = w_i)) - P(h_{i-1} - w_{i-1})\log(P(h_{i-1} = w_{i-1}))) =$$

$$= H(h(r) = w(r)) + \sum_{i=1}^{k} H(h_i = w_i) - H(h_{i-1} = w_{i-1}) =,$$

ami a feltételes entrópia definíciójának felhasználásával

$$= H(h(r) = w(r)) + \sum_{i=1}^{k} H(h_i = w_i \mid h_{i-1} = w_{i-1}) =$$

$$= H(h(r) = w(r)) + \sum_{i=1}^{k} H(h(v_i) = w(v_i) \mid h_{i-1} = w_{i-1})$$

Legyen $v_i \in V_T$ csúcsra $u_i \in V_T$ az a csúcs ami az r és a v_i közti úton a v_i szomszédos csúcsa. Ekkor a felsorolásban a feltételek szerint u_i előtt szerepel, mint v_i, és v_i helyzete a korábbi csúcsokból csak u_i helyzetétől függ, tehát

$$H(h(v_i) = w(v_i) \mid h_{i-1} = w_{i-1}) = H(h(v_i) = w(v_i) \mid h(u_i) = w(u_i)).$$

Ha behelyettesítünk az egész valószínűségi mezőn értelmezett entrópiába:

$$H(h \in \mathrm{Hom}(T, G)) =$$

$$= \sum_{w \in \mathrm{Hom}(G,T)} \left(H(h(r) = w(r)) + \sum_{i=1}^{k} H(h(v_i) = w(v_i) \mid h(u_i) = w(u_i)) \right) =$$

$$= H(h(r) = w(r) \mid w \in \mathrm{Hom}(G, T)) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{w \in \mathrm{Hom}(G,T)} H(h(v_i) = w(v_i) \mid h(u_i) = w(u_i)).$$

Most egy $u_i \in T$ csúcsra legyen $C_{u_i} \subset V_T$ azon csúcsok halmaza, amik az u_i csúcs után következnek az a véletlenszerű eloszlásnál használt sorrendben, és azzal szomszédosak. Ekkor a fenti kifejezés átírható a következő módon:

$$H(h(r) = w(r) \mid w \in \mathrm{Hom}(G, T)) + \sum_{w \in \mathrm{Hom}(G,T)} \sum_{u_i \in T} \sum_{v_i \in C_{u_i}} H(h(v_i) = w(v_i) \mid h(u_i) = w(u_i)).$$

Most ismét kihasználjuk a feltételes entrópia definícióját.

$$\sum_{v_i \in C_{u_i}} H(h(v_i) = w(v_i) \mid h(u_i) = w(u_i)) =$$

$$= \sum_{v_i \in C_{u_i}} (H(h(v_i) = w(v_i), h(u_i) = w(u_i)) - H(h(v_i) = w(v_i))).$$

Tudjuk, hogy $u, v \in V_T$, $(u, v) \in E_T$ esetén

$$\sum_{w \in \mathrm{Hom}(G,T)} H(h(u) = w(u), h(v) = w(v)) = \log(2|E_G|).$$

Vegyük észre, hogy

$$\sum_{w \in \mathrm{Hom}(H,G)} \sum_{u_i \in T} \sum_{v_i \in C_{u_i}} H(h(v_i) = w(v_i), h(u_i) = w(u_i)) =$$

$$= \sum_{w \in \mathrm{Hom}(H,G)} \sum_{(u,v) \in E_T} H(h(v_i) = w(v_i), h(u_i) = w(u_i)) = |E_T| \log(2|E_G|),$$

mivel minden élre egyszer számoljuk a homomorfizmusokon az entrópiát. Most az összeg másik részét nézzük

$$-H(h(r) = w(r) \mid w \in \mathrm{Hom}(G,T)) + \sum_{w \in \mathrm{Hom}(G,T)} \sum_{u_i \in T} \sum_{v_i \in C_{u_i}} H(h(u_i) = w(u_i))) =$$

$$\sum_{w \in \mathrm{Hom}(G,T)} \sum_{u_i \in T} (\deg(u_i) - 1) H(h(u_i) = w(u_i)) =$$

$$= \sum_{u_i \in T} (\deg(u_i) - 1) \sum_{w \in \mathrm{Hom}(G,T)} H(h(u_i) = w(u_i)) =$$

$$= (2|E_T| - |V_T|) \sum_{w \in \mathrm{Hom}(G,T)} H(h(u_i) = w(u_i)) \leq (2|E_T| - |V_T|) \log |V_G|,$$

ahol alkalmazzuk az entrópiára a korábban bizonyított felső becslést. Összegezve az eddigieket

$$H(h \in \mathrm{Hom}(T,G)) \geq |E_T| \log(2|E_G|) - (2|E_T| - |V_T|) \log |V_G| =$$

$$\log \left(|V(G)|^{|V(T)|} \left(\frac{2|E_G|}{|V_G|} \right)^{|E_T|} \right),$$

amivel megkaptuk az állítást. □

Tétel A fákra teljesül a Sidorenko-sejtés.

Bizonyítás Alkalmazzuk a korbábban bizonyított állítást az entrópia felső becslésére:

$$H(h \in \mathrm{Hom}(T,G)) \leq \log(|\mathrm{Hom}(T,G)|),$$

az előző állítást alkalmazva mind a két oldalnak az exponenciálisát véve, megkapjuk a tételt. □

Erős fa-felbontású gráfok

A következőkben bevezetjük gráfoknak egy új osztályát, aminek az elemeire teljesül a Sidorenko-sejtés. A gráfok fa felbontását R. Halin vezette be [3].

Definíció Legyen H egy gráf, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(V_H)$ egy osztálya H csúcsai különböző részhalmazainak, és $\mathcal{T}$ pedig egy $\mathcal{F}$ elemein értelmezett fa. Az $(\mathcal{F}, \mathcal{T})$ párt akkor nevezzük fa-felbontásnak, ha teljesül:

(i) $\cup_{X \in \mathcal{F}} X = V_H$,

(ii) tetszőleges $(v, w) \in E_H$ élre létezik olyan olyan $X \in \mathcal{F}$, amire $v, w \in X$,

(iii) ha, $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{F}$ és X_3 rajta van $\mathcal{T}$ -ben az az X_1 és X_2 közti úton, akkor $X_1 \cap X_2 \subset X_3$.

Minden gráfnak van fa-felbontása, G esetén elég csak az $\mathcal{F}_G = \{V_G\}$ halmazra gondolni. Egy $(\mathcal{F}, \mathcal{T})$ fa-felbontást erős fa-felbontásnak nevezünk, ha teljesíti az $(i), (ii), (iii)$ feltételeket, és még kettőt:

(iv) Legyen $X \in \mathcal{F}$ esetén az X-beli csúcsok és a köztük lévő élek által alkotott részgráf $H(X)$. Ekkor minden $X \in \mathcal{F}$ esetén $H(X)$ nem tartalmaz kört.

A következő tulajdonsághoz be kell vezetni a minimális részfák fogalmát. Legyen egy T fára $U \subset V_T$, ekkor a T gráfnak létezik olyan részgráfja, ami fa, és az összes U-beli csúcsot tartalmazza. Ha U nem üres, akkor létezik olyan részgráf is, ami az összes U tartalmazó összefüggő részgráfnak részgráfja, nevezzük ezt minimális részfának. Nyilván, ha $H(X)$ nem tartalmaz kört, akkor a $H(X)$ gráf összefüggő részgráfjai fák lesznek. Vegyünk egy $Y \in \mathcal{F}$ csúcsot, ekkor $X \cap Y \subset V_{H(X)}$. Minden egyes T_1 fára mint részgráfra $H(X)$-ben és minden T_2 H(Y)-beli fára, ha $V_{T_1} \cap V_{R_2} \neq \emptyset$, nézzük T-nek az V_{T_2} csúcshalmazt tartalmazó minimális részfáját, és az ilyen részfák összességét, mint $H(X)$ részgráfját nevezzük a H(X) gráf $X \cap Y$-t tartalmazó minimális részfáinak. Ennek a segítségével meg tudjuk fogalmazni a következő tulajdonságot.

(v) Ha $X, Y \in \mathcal{F}$, és az X és Y csúcsok szomszédosak $\mathcal{T}$-ben, akkor a $H(X)$ gráf $X \cap Y$-t tartalmazó részfái és a $H(Y)$ gráf $X \cap Y$-t tartalmazó részfái között létezik olyan gráf-izomorfizmus, ami az $X \cap Y$ csúcsokat fixen hagyja.

Az erős fa-felbontású gráfok ezen leírása egy kissé nehézkésnek tűnik, nem látni rögtön, hogy milyen gráfokat tartalmaz ez az osztály a fákon és a körmentes gráfokon kívül, de meg lehet könnyen mutatni, hogy az erős fa-felbontású gráfok osztálya ennél bővebb.

Állítás Tetszőleges C_{2n} páros hosszú ciklikus gráf erős fa-felbontású.

Bizonyítás Legyen $v_1, \ldots v_2 n = v_0 \in V_{C_{2n}}$, ahol $(v_i, v_{i+1}) \in E_{C_{2n}}$, ekkor legyen $\mathcal{F} = \{X, Y\}$, ahol $X = \{v_0, v_1 \ldots v_n\}$, és $Y = \{v_n, v_{n+1} \ldots v_{2n}\}$. Ekkor $H(X)$ és $H(Y)$ is egy $n+1$ hosszú út, és a közös csúcsok a két végpont. $\square$

Állítás Minden erős fa-felbontású gráf páros.

Bizonyítás Ha G egy gráf aminek van erős-fa felbontása, akkor indukcióval haladunk $\mathcal{F}$ elemein úgy, hogy mindig úgy vesszük a csúcsokat sorban, hogy ezek mindig összefüggő részgráfot kapjunk $\mathcal{T}$-ben, az élek hozzávételével. Egy csúcsra definíció szerint körmentes a $H(X)$ gráf. Tegyük fel k csúcsra már beláttuk, hogy G-nek a $H(X_1), \dots, H(X_k)$ összeragasztásával alkotott részgráfja nem tartalmaz páratlan kört. Most veszünk egy új X_{k+1} csúcsot, ekkor létezik egyetlen olyan $Y \in \{X_1, \dots, X_k\}$, amire (Y, X_k) egy él $\mathcal{T}$-ben. $H(X)$ és $H(Y)$ összeragasztásával nem keletkezik páratlan kör, ugyanis tetszőleges kör ugyanannyi élet tartalmaz $H(X)$-ből, mint H(Y)-ból, a minimális részgráfok izomorfiája miatt és $H(X)$ és $H(Y)$ éldiszjunktak, tehát a kör páros sok élet tartalmaz. Most tegyük fel, hogy $H(X_{k+1})$ hozzávételével már van a részgráfban páratlan kör, ekkor az indukciós feltevés miatt ennek a körnek kell olyan élének lennie ami $H(X_{k+1})$ -beli. Viszont a páratlan kör minden $H(X_{k+1})$ beli részútjának két végcsúcsa benne van Y-ben is tehát minden ilyen részútra van olyan $H(Y)$-beli részút, ami ugyanolyan hosszú, és a két végpont megegyezik(az izomorfia miatt). Tehát ekkor kell lennie páratlan részútnak a $\{H(X_1), \dots, H(X_k)\}$ gráfban is, ami ellentmond az indukciós feltevésünknek. $\square$

A következőben megcsináljuk a korábbi, fákból tetszőleges gráfba menő véletlen algoritmus általánosítását homomorfizmusokra, olyan esetekre, amikor a fán már néhány pont képe előre meg van adva. Legyen T egy fa, $X \subset V_T$ egy csúcshalmaz, G egy olyan gráf, amire $|E_G| \geq 1$. Legyen S a legkisebb olyan részfája T-nek, ami tartalmazza az X-beli csúcsokat, ha X nemüres, ha X az üres halmaz, akkor S legyen egy csúcs a T csúcsai közül, és tekintsük azt, mint gráfot. Készítsünk T csúcsainak egy felsorolását, legyen $s_0 \in S$ az első csúcs, és a felsorolásunk teljesesítse az alábbi két feltételt:

(i) $v_i \in T$ esetén az s_0 és a v_i közti út összes csúcs legyen u_i előtt a felsorolásban,

(ii) az S-beli csúcsok előzzék meg az S-en kívülieket.

Tegyük föl, hogy van egy $h : X \to V_G$ függvényünk. Szeretnénk egy valószínűségi eloszlást definiálni azon T-ből G-be tartó gráfhomomorfizmusokon, amik az X csúcsokra megszorítva a h függvényt veszik fel. Legyen

$$\mathcal{G}_{h,S} := \{g \in \mathrm{Hom}(S, G); g\,|_X = h\},$$

most először $\mathcal{G}_{h,S}$ elemein definiálunk egy valószínűségi eloszlást. Ha ez a halmaz üres, akkor nincs az elemein valószínűségi eloszlás. Egyéb esetben legyen $y \in \mathcal{G}_{h,S}$ esetén $p_{S,G}(y)$ annak a valószínűsége, hogy az S fát a G gráfba vivő homomorfizmusokon korábban értelmezett véletlen eloszlás szerint mekkora eséllyel lesz a kapott homomorfizmus y, képlettel kifejezve:

$$p_{S,G}(y) = \frac{1}{|E_G|} \prod_{v \in S} \left(\frac{1}{\deg_G y(v)} \right)^{\deg_S v - 1}.$$

Most T beágyazását kezdjük S csúcsaival, kiválasztunk egy véletlen $y \in \mathcal{G}_{h,S}$ beágyazást

$$\frac{p_{S,G}(y)}{\sum_{g \in \mathcal{G}_{h,S}} p_{S,G}(g)}$$

valószínűséggel. Ez értelmes, mert már korábban beláttuk, hogy minden $p_{S,G}(g) > 0$. Ha a S-beli csúcsok el vannak helyezve, akkor a T-beli csúcsokat hasonló módon helyezzük el, mint ahogy korábban fákra definiáltuk plusz feltételek nélkül, azaz egy $v \in T$ csúcsra megkeressük azt az u csúcsot, ami szomszédos a v csúccsal, és rajta van az s_0 és a v közti útvonalon. Ekkor a felsorolásunk szerint minden egyes csúcsot elhelyezünk.

Ekkor $X = \emptyset$ esetén ez megegyezik azzal a valószínűségi eloszlással, amit már korábban definiáltunk a feltétel nélküli esetre.

Állítás Ha P jelöli a T gráf tetszőleges beágyazására vett valószínűséget, és P_X azt a valószínűséget, ahol az X csúcsokra vett függvények le vannak fixálva

$$P(g = w \mid g_{|X} = h) = P_X(g = w).$$

Bizonyítás Legyen S a legkisebb olyan részfa, ami tartalmazza az X csúcshalmazt T-ben. Mivel a fákra definiált valószínűségi eloszlás ugyanolyan típusú eloszlást határoz meg a részfára megszorítva, mintha csak a részfán néznénk az eloszlást, ezért ha nézzünk tetszőleges T-beágyazásokat, aminek utána nézzük, hogy az S-re vett megszorítása megfelel-e a feltételnek, megegyezik azzal, mintha először elkezdenénk S-e beágyazni, és ha jó az S-re vett beágyazás, akkor néznénk a többi csúcsra. Meg kell mutatni, hogy az S kétféle beágyazásának valószínűsége is megegyezik, azaz

$$\frac{p_{S,G}(y)}{\sum_{g \in \mathcal{G}_{h,S}} p_{S,G}(g)} = P(g = y \mid g_{|X} = h).$$

Itt felhasználjuk $p_{S,G}(y)$ definícióját:

$$p_{S,G}(y) = P(f = y; f \in \mathrm{Hom}(S, G)),$$

ekkor

$$\frac{p_{S,G}(y)}{\sum_{g \in \mathcal{G}_{h,S}} p_{S,G}(g)} = \frac{P(f = y)}{\sum_{g \in \mathcal{G}_{h,S}} P(f = g)} = \frac{P(f = y)}{P(g_{|X} = h, g \in \mathrm{Hom}(S, G))} =$$

$$= P(g = y \mid g_{|X} = h),$$

amivel az állítást beláttuk. □

Most rátérünk az erős-fa felbontású gráfok beágyazására. Legyen H egy erős fa-felbontású gráf, és tegyük fel, hogy a G-gráfnak legalább egy éle van, egyéb esetben a Sidorenko-sejtés triviálisan teljesül. Most legyen $(\mathcal{F}, \mathcal{T})$ egy megfelelő fa-felbontású, legyen $\mathcal{F}$ elemeinek egy $R = X_0, X_1, \ldots, X_k$ felsorolása, ahol minden X_i elemre igaz, hogy az X_0 és X_i közti út minden elem X_i előtt van a felsorolásban. Ekkor a véletlen algoritmusunk a következőképpen fog lefolyni:

Először kiválasztjuk egy beágyazását a $H(R)$ részgráfnak. Itt úgy járunk minden egyes részfájára, mintha tetszőleges fa beágyazása lenne, egyéb feltételek nélkül. Nevezzük a $H(R)$-re kapott beágyazást w_R-nek.

Tegyük fel, hogy X_i előtt már minden más részfát beágyaztunk. Legyen $Z_{i-1} = \cup_{j=0}^{i-1} X_j$, és ekkor már van egy h_i beágyazásunk a $X_i \cap Z_{i-1}$ csúcshalmazon. Keresünk egy beágyazást, ami a $X_i \cap Z_{i-1}$ részhalmazra megszorítva megegyezik a h_i függvénnyel. Legyen a $H(X_i)$-n értelmezett függvény w_{X_i}.

Addig folytatjuk az algoritmust, amíg minden X_i csúcs be nem lesz ágyazva.

Elsőre talán nem nyilvánvaló, hogy az algoritmus közben nem akadunk el, azaz nincs olyan h_i függvény, amit nem tudunk az egész $H(X_i)$. részgráfra kibővíteni. Ezt a következő állításunk fogja biztosítani.

Álltás Ha H erős-fa felbontású gráf, és G olyan gráf, amire $|E_G| \geq 1$, akkor a fenti véletlen algoritmus mindig kiad egy H-ból G-be tartó gráfhomomorfizmust.

Bizonyítás Legyen X_i-re Y_i az a csúcs a $\mathcal{T}$ fában, ami össze van kötve X_i-vel, és meglelőzi X_i-t a felsorolásban. Ekkor tetszőleges $j < i$-re $X_i \cap X_j \subset Y_i$ mivel Y_i rajta van az X_i és az X_j közti úton. Ez alapján

$$Z_{i-1} \bigcap X_i = \left(\bigcup_{j=0}^{i-1} X_i \right) \bigcap X_i = \bigcup_{j=0}^{i-1} \left(X_j \bigcap X_i \right) = Y_i \bigcap X_j.$$

Másrészt $H(X_i)$ és $H(Y_i)$ fákból állnak és ha minden$H(X_i)$-beli fában nézzük a közös csúcsokat a Y_i-beliekkel, akkor H erős-fa felbonthatósága miatt a $H(Y_i)$ és a $H(X_i)$-beli közös részfák között van egy gráf-izomorfizmus, ami fixen hagyja a közös csúcsokat. Vagyis, ha a $H(Y_i)$ részgráfot be tudtuk ágyazni, akkor X_i és Y_i közös csúcsait is be tudtuk. Így a $H(X_i)$ minimális részfákkal izomorf $H(Y_i)$-beli részfákak is be tudtuk ágyazni, így persze a $H(X)$-beli részfák is beágyazhatóak legalább egy fajta módon. Innen indukcióval haladva látható, hogy minden egyes X_i-re a $H(X_i)$ részgráfot be tudjuk ágyazni, tehát az egész H gráfot is. $\square$

Most, hogy láttuk, hogy létezik olyan homomorfizmus, ami megkapható a véletlen algoritmussal, le lehet írni az eloszlás további tulajdonságait is.

Állítás Ha a $\mathcal{T}$ fán az R kezdőpont fix, akkor a valószínűségi eloszlás nem függ attól, hogy ezután milyen (a feltételeknek megfelelő) sorrendjét választjuk a csúcsoknak.

Bizonyítás Az előző állítás bizonyításánál haszált fogalmakat fogjuk használni. Jelöljük továbbra is P-vel azt a valószínűséget, amit az első fákra használt feltétel nélküli beágyazásnál használtunk. A korábban bizonyított állítás szerint akkor is ezt az eloszlást kapjuk, ha utólag tesszük fel a feltételt, hogy bizonyos pontokra fix értéket vesz fel az algoritmus, mintha rögtön így konstruáltuk volna, tehát fel lehet írni a következő egyenlőséget:

$$P(h = w) = P(h_{|X_0} = w_{|X_0}) \prod_{i=1}^{k} P(w_{|X_i} = h_{|X_i} \mid h_{|X_i \cap Z_i} = w_{|X_i \cap Z_i}).$$

Ezután az előző állítás bizonyítását felhasználva

$$P(w_{|X_i} = h_{|X_i} \mid h_{|X_i \cap Z_i} = w_{|X_i \cap Z_i} = P(w_{|X_i} = h_{|X_i} \mid h_{|X_i \cap Y_i} = w_{|X_i \cap Y_i}).$$

definiáljuk a következő kifejezést: egy $Y \in \mathcal{F}$ csúcsra legyen $C_Y \subset \mathcal{F}$ azon csúcsok halmaza, amik Y-al szomszédosak $\mathcal{T}$-ben, és nincsenek rajta az X_0 és az Y_0 közötti úton, ekkor

$$P(h = w) = P(h_{|X_0} = w_{|X_0}) \prod_{i=1}^{k} P(w_{|X_i} = h_{|X_i} \mid h_{|X_i \cap Y_i} = w_{|X_i \cap Y_i}) =$$

$$= \prod_{Y \in \mathcal{F}} \prod_{X \in C_Y} P(h_{|X} = w_{|X} \mid h_{|X \cap Y} = w_{|X \cap Y})$$

Ha veszünk egy más sorrendjét az $\mathcal{F}$ elemeinek, legyen ez $X'_0, X'_1, \ldots, X'_k$, ahol $X_0 = X'_0$, akkor

$$P(h' = w) = \prod_{Y \in \mathcal{F}} \prod_{X \in C_Y} P(h'_{|X} = w_{|X} \mid h'_{|X \cap Y} = w_{|X \cap Y}),$$

mivel a C_Y kifejezés csak az X_0 és az Y közti úttól függ. Továbbá, ha X in $\mathcal{T}$-beli csúcs és Y az X és az R közti út X melletti csúcsa:

$$P(h_{|X} = w_{|X} \mid h_{|X \cap Y} = w_{|X \cap Y}) = P(h'_{|X} = w_{|X} \mid h_{|X \cap Y} = w_{|X \cap Y}),$$

mivel az eredeti csak fákra vonatkozó algoritmus nem függött a sorrendtől. Ezzel beláttuk, hogy tetszőleges a feltételeknek megfelelő sorrendre aminek a kezdőpontja megegyezik:

$$P(h = w) = P(h' = w).$$

□

Megjegyzés Mivel már korábban beláttuk, hogy

$$P(h'_{|X} = w_{|X} \mid h_{|X\cap Y} = w_{|X\cap Y}) > 0$$

tetszőleges $w : H(X) \to G$ gráfhomomorfizmusra, ezért ebből azt is megkapjuk,

$$\prod_{Y\in\mathcal{F}} \prod_{X\in C_Y} P(h_{|X} = w_{|X} \mid h_{|X\cap Y} = w_{|X\cap Y}) > 0,$$

tehát, ha H erős fa-felbontású gráf, akkor tetszőleges $w : H \to G$ gráfhomomorfizmusra

$$P(h = w) > 0.$$

A következőkben visszatérünk annak a kérdésre, hogyan függ az eloszlás a csúcsok választott sorrendjétől.

Állítás A véletlen bejárási algoritmussal készített valószínűségi eloszlás nem függ a csúcsok választott sorrendjétől. Speciálisan $X \in \mathcal{F}$ és $w \in \mathrm{Hom}(H, G)$ esetén:

$$P(h_{|X} = w_{|X}) = p_{H(X),G}(w_{|X}).$$

Bizonyítás Az első állításból rögtön következik a második, ugyanis, ha felállítunk egy olyan sorrendjét $\mathcal{T}$ csúcsainak, aminek X az első eleme, akkor az algoritmus, definíciójából következik az állítás. Az első állítást először arra az esetre bizonyítjuk, amikor két olyan valószínűségi változót vetünk össze, amit a csúcsok olyan sorrendjével adtunk amiknek a kezdőcsúcsai R_1 és R_2 két szomszédos csúcs $\mathcal{T}$-ben. Legyen a két valószínűségi változó h_1 és h_2. Azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges $w \in \mathrm{Hom}(H, G)$ esetén:

$$P(h_1 = w) = P(h_2 = w).$$

Mivel azt már korábban beláttuk, hogy az eloszlás nem függ a sorrend többi elemétől ezért föltehetjük, hogy két olyan sorrendünk van ahol az első két elem

R_1, R_2 illetve R_2, R_1 és a sorrend többi eleme megegyezik. Ekkor behelyettesítve a korábban meghatározott képletünkbe:

$$P(h_1 = w) = P(h_{1|R_1} = w_{|R_1}) \prod_{i=1}^{k} P(h_{|X_i} = w_{|X_i} \mid h_{|X_i \cap Y_i} = w_{|X_i \cap Y_i}) =$$

$$= P(h_{|R_1} = w_{|R_1}) P(h_{|R_2} = w_{|R_2} \mid h_{|R_1 \cap R_2} = w_{|R_1 \cap R_2}) \prod_{i=2}^{k} P(h_{|X_i} = w_{|X_i} \mid h_{|X_i \cap Y_i} = w_{|X_i \cap Y_i}).$$

A $P(h_2 = w)$ kifejezést ugyanígy átalakíthatjuk:

$$P(h_{|R_2} = w_{|R_2}) P(h_{|R_1} = w_{|R_1} \mid h_{|R_1 \cap R_2} = w_{|R_1 \cap R_2}) \prod_{i=2}^{k} P(h_{|X_i} = w_{|X_i} \mid h_{|X_i \cap Y_i} = w_{|X_i \cap Y_i})$$

Mivel tetszőleges $w \in \mathrm{Hom}(H, G)$, és tetszőleges $i \in \{2, \ldots, k\}$ esetén

$$P(h_{|X_i} = w_{|X_i} \mid h_{|X_i \cap Y_i} = w_{|X_i \cap Y_i}) > 0,$$

ezért

$$\prod_{i=2}^{k} P(h_{|X_i} = w_{|X_i} \mid h_{|X_i \cap Y_i} = w_{|X_i \cap Y_i}) > 0,$$

tehát ezzel a kifejezéssel le lehet osztani, és így látható, hogy $(R_1, R_2) \in E_H$ esetén az $P(h_1 = w) = P(h_2 = w)$ kifejezés ekvivalens azzal, hogy

$$P(h_{|R_1} = w_{|R_1}) P(h_{|R_2} = w_{|R_2} \mid h_{|R_1 \cap R_2} = w_{|R_1 \cap R_2}) =$$
$$= P(h_{|R_2} = w_{|R_2}) P(h_{|R_1} = w_{|R_1} \mid h_{|R_1 \cap R_2} = w_{|R_1 \cap R_2}).$$

Most legyen S_1 az a gráf, amelyik a minimális $R_1 \cap R_2$-t tartalmazó részfákat veszi $H(R_1)$-ben. Ekkor

$$P(h_{|R_1} = w_{|R_1} \mid h_{|R_1 \cap R_2} = w_{|R_1 \cap R_2}) =$$
$$= P(h_{|S_1} = w_{|S_1} \mid h_{|R_1 \cap R_2} = w_{|R_1 \cap R_2}) P(h_{|R_1} = w_{|R_1} \mid h_{|S_1} = w_{|S_1}) =$$
$$= \frac{p_{S_1}, G(w_{|S_1})}{\sum_{g \in \mathcal{G}_{S_1,G}} p_{S_1,G}(g)} P(h_{|R_1} = w_{|R_1} \mid h_{|S_1} = w_{|S_1}),$$

ahol a korábbi jelölésekhez hasonló módon

$$\mathcal{G}_{S_1,G} := \{g \in \mathrm{Hom}(S_1 G); g_{|R_1 \cap R_2} = w_{|R_1 \cap R_2}\}.$$

Analóg módon

$$P(h_{|R_2} = w_{|R_2} \mid h_{|R_1 \cap R_2} = w_{|R_1 \cap R_2}) =$$

$$= P(h_{|S_2} = w_{|S_2} \mid h_{|R_1\cap R_2} = w_{|R_1\cap R_2})P(h_{|R_2} = w_{|R_2} \mid h_{|S_2} = w_{|S_2}) =$$

$$= \frac{p_{S_2}, G(w_{|S_2})}{\sum_{g\in\mathcal{G}_{S_2,G}} p_{S_2,G}(g)} P(h_{|R_2} = w_{|R_2} \mid h_{|S_2} = w_{|S_2}),$$

ahol S_2 az $R_1 \cap R_2$-t tartalmazó minimális részfák gráfját jelöli, és

$$\mathcal{G}_{S_2,G} := \{g \in \mathrm{Hom}(S_2 G); g_{|R_1\cap R_2} = w_{|R_1\cap R_2}\}.$$

Most, mivel H erős fa-felbontású gráf, ezért az S_1 és S_2 gráfok izomorfak. Ezt felhasználva

$$\frac{p_{S_1}, G(w_{|S_1})}{\sum_{g\in\mathcal{G}_{S_1,G}} p_{S_1,G}(g)} = \frac{p_{S_2}, G(w_{|S_2})}{\sum_{g\in\mathcal{G}_{S_2,G}} p_{S_2,G}(g)},$$

aminek segítségével $P(h_1 = w) = P(h_2 = w)$ ekvivalens azzal, hogy

$$P(h_{|R_1} = w_{|R_1})P(h_{|R_2} = w_{|R_2} \mid h_{|S_2} = w_{|S_2}) =$$

$$= P(h_{|R_2} = w_{|R_2})P(h_{|R_1} = w_{|R_1} \mid h_{|S_1} = w_{|S_1}).$$

Most még egy hasonló trükköt fogunk használni, mint az előbb:

$$P(h_{|R_1} = w_{|R_1} \mid h_{|S_1} = w_{|S_1}) = \frac{P(h_{|R_1} = w_{|R_1})}{P(h_{|S_1} = w_{|S_1})}$$

és

$$P(h_{|R_2} = w_{|R_2} \mid h_{|S_2} = w_{|S_2}) = \frac{P(h_{|R_2} = w_{|R_2})}{P(h_{|S_2} = w_{|S_2})},$$

amit azért tudunk felírni, mert minden valószínűség pozitív. És mivel az erős fa-felbonthatóság miatt

$$P(h_{|S_2} = w_{|S_2}) = P(h_{|S_1} = w_{|S_1}),$$

mindig igaz, így a $P(h_1 = w) = P(h_2 = w)$ egyenlőségnek is igaznak kell lennie.

Most rátérünk arra az esetre, amikor a két $\mathcal{T}$-beli kezdőpont nem egymás melletti, legyen ez ismét R_1 és R_2. Ekkor viszont létezik egy $R_1 = X_1, \ldots, X_t = R_2$ út a $\mathcal{T}$ gráfban, és mivel az X_i-vel kezdődő algoritmus ugyanolyan eloszlást határoz meg, mint az X_{i+1} csúccsal kezdődő, ezért indukcióval belátható, hogy az R_1 és az R_2-vel kezdődő véletlen algoritmusok eloszlása is megegegyezik.

Ezzel kellően leírtuk a véletlen algoritmusokat, hogy rá tudjunk térni a legfontosabb állításra.

Tétel Ha H egy erős fa-felbontású gráf és G egy tetszőleges gráf, akkor

$$|\mathrm{Hom}(H,G)| \geq |V_G|^{|V_H|}\left(\frac{2|E_G|}{|V_G|^2}\right)^{|E_H|},$$

azaz H-ra teljesül a Sidorenko-sejtés.

Bizonyítás Legyen az eddigiekhez hasonló módon $(\mathcal{F},\mathcal{T})$, az erős fa-felbontása H-nak $R = X_0, X_1, \ldots, X_k$ egy megfelelő sorrend $\mathcal{F}$ elemein, ami szerint tudunk véletlen algoritmust készíteni. Legyen $Z_{i-1} = \cup_{j=0}^{i-1} X_j$. Ismét az entrópiát fogjuk becsülni, és felhasználva a feltételes entrópia definícióját, az entrópiát ismét átalakítnjuk egy teleszkopikus összeggé:

$$H(h = w) = H(h_{|R} = w_{|R}) + \sum_{i=1}^{k} H(h_{|X_i} = w_{|X_i} \mid h_{|Z_{i-1}} = w_{|Z_{i-1}}).$$

Legyen Y_i most is az R és X_i közti út X_i-vel szomszédos eleme, és ekkor felhasználva a korábbi állításainkat:

$$H(h_{|X_i} = w_{|X_i} \mid h_{|X_{i-1}} = w_{|X_{i-1}}) = H(h_{|X_i} = w_{|X_i} \mid h_{|X_i \cap Z_{i-1}} = w_{|X_i \cap Z_{i-1}}) =$$

$$= H(h_{|X_i} = w_{|X_i} \mid h_{|X_i \cap Y_i} = w_{|X_i \cap Y_i}),$$

ezt behelyetthesítjük a az entrópiába, illetve legyen $C_Y := \{X_i \in \mathcal{F}; Y_i = Y\}$, erre átrendezhetjük a szummát:

$$H(h = w) = H(h_{|R} = w_{|R}) + \sum_{i=1}^{k} H(h_{|X_i} = w_{|X_i} \mid h_{|Y_i} = w_{|Y_i}) =$$

$$= H(h_{|R} = w_{|R}) + \sum_{Y \in \mathcal{F}} \sum_{X \in C_Y} H(h_{|X} = w_{|X} \mid h_{|X \cap Y} = w_{|X \cap Y}).$$

Felhasználjuk, hogy

$$H(a, a \cap b) = H(a, a \cap b) - H(a \cap b) = H(a) - H(a \cap b)$$

mivel az a esemény mellett az $a \cap b$ esemény 1 valószínűséggel teljesül, ennek a segítségével, átírhatjuk az eredeti kifejezést:

$$H(h = w) = H(h_{|R} = w_{|R}) + \sum_{Y \in \mathcal{F}} \sum_{X \in C_Y} H(h_{|X} = w_{|X}) - H(h_{|X \cap Y} = w_{|X \cap Y}).$$

Vegyük észre, hogy minden egyes $X \in \mathcal{F}$-re a fenti szummában a $H(h_{|X} = w_{|X})$ pontosan egyszer szerepel, ha $X = R$ akkor az elején, ha $X \neq R$ akkor létezik pontosan egy olyan Y amire $X \in C_Y$. Másrészt minden $(X, Y) \in E_{\mathcal{T}}$ élre $-H(h_{|X \cap Y} =$

$w_{|X\cap Y}$) pontosan egyszer szerepel, és visszafele is, ha $-H(h_{|X\cap Y} = w_{|X\cap Y})$ szerepel a fenti szummában, akkor $(X,Y) \in E_{\mathcal{T}}$. Ez alapján az entrópia felírható a

$$\sum_{X\in\mathcal{F}} H(h_{|X} = w_{|X}) - \sum_{(X,Y)\in E_{\mathcal{T}}} H(h_{|X\cap Y} = w_{|X\cap Y})$$

alakban. Az entrópiára használt felső becslést szeretnénk használni, miszerint ha az X valószínűségi változó az $\mathcal{S}$ véges halmazon van értelmezve

$$H(X) \leq \log|\mathcal{S}|$$

amit felhasználva az élekre:

$$H(h_{|X\cap Y} = w_{|X\cap Y}) \leq \log|V_G|^{|X\cap Y|} = |X\cap Y|\log(|V_G|).$$

Ennek a segítségével az entrópiát becsülhetjük a következő módon

$$H(h = w) \geq \sum_{X\in\mathcal{F}} H(h_{|X} = w_{|X}) - \sum_{(X,Y)\in E_{\mathcal{T}}} |X\cap Y|\log(|V_G|).$$

Most rátérünk az összeg másik részének becslésére. Mivel a Sidorenko-sejtést fákra már bizonyítottuk, ezért diszjunkt fákból álló gráfra is igaz, tehát

$$H(h_{|X} = w_{|X}) \geq \log\left(|V_G|^{|X|}\left(\frac{2|E_G|}{|V_G|^2}\right)^{|E_{H(X)|}}\right) =$$

$$= |X|\log|V_G| + |E_{H(X)}|\log\frac{2|E_G|}{|V_G|^2}.$$

Az erős fa-felbonthatóság miatt

$$\sum_{X\in\mathcal{F}} |E_{H(X)}| = |E_H|,$$

ugyanis minden él benne van valamelyik $H(X)$ gráfban, de a $H(X)$ gráfok éldiszjunktak. Most a csúcsokra határozunk meg hasonló állítást. Legyen X egy olyan csúcsa a $\mathcal{T}$ gráfnak, aminek a foka 1, ilyen mindig létezik. Legyen az élszomszédja Y. Ekkor igaz az, hogy tetszőleges $Z \in \mathcal{F}$ csúcsra, amire $Z \neq X$, hogy $Z\cap X \subset Y\cap X$. Ezért felírható, hogy

$$|V_H| = \left|\bigcup_{Z\in\mathcal{F};Z\neq T} Z\right| + |X| - |X\cap Y|.$$

Vegyünk észre, hogy ha $\mathcal{F}$-ből nézzük az X-en kívüli elemeket ugyanazzal a relációval, mint ami $\mathcal{T}$-ben volt, akkor ismét kapunk egy erős fa-felbontású gráfot, és ezen ismét kereshetünk egy egy fokú csúcsot. Így indukcióval látszik, hogy

$$|V_H|=\sum_{X\in\mathcal{F}}|X|-\sum_{(X,Y)\in E_{\mathcal{T}}}|X\cap Y|.$$

Ezen, az élek és a csúcsok számára vonatkozó azonosság segítségével, az entrópia tovább becsülhető:

$$H(h\in\mathrm{Hom}(H,G))\geq\sum_{X\in\mathcal{F}}|E_{H(X)}|\log\frac{2|E_H|}{|V_H|^2}+\left(\sum_{X\in\mathcal{F}}|X|-\sum_{(X,Y)\in E_{\mathcal{T}}}|X\cap Y|\right)\log|V_G|=$$

$$=|E_H|\log\frac{2|E_H|}{|V_H|^2}+|V_H|\log|V_G|=\log\left(|V_G|^{|V_H|}\left(\frac{2|E_G|}{|V_G|^2}\right)^{|E_H|}\right).$$

Most ismét használjuk az entrópia és a valószínűségi mező alaphalmazának elemszámának logaritmusa közötti egyenlőtlenséget, ekkor látható, hogy

$$\log|\mathrm{Hom}(H,G)|\geq\log\left(|V_G|^{|V_H|}\left(\frac{2|E_G|}{|V_G|^2}\right)^{|E_H|}\right),$$

ami ekvivalens azzal, hogy

$$|\mathrm{Hom}(H,G)|\geq|V_G|^{|V_H|}\left(\frac{2|E_G|}{|V_G|^2}\right)^{|E_H|},$$

ezzel a tétel állítását beláttuk. □

Következmény A páros hosszú ciklikus gráfokra teljesül a Sidorenko-sejtés.

0.5. A Sidorenko-sejtés és az információelmélet

A következő fejezetben ismét az információelméletbeli entrópiával fogjuk különböző gráfokra belátni, hogy teljesül rájuk a Sidorenko-sejtés. Legyen X egy véges halmaz, és legyen μ és ν két valószínűségi mérték az X halmazon értelmezve, ahol μ abszolút folytonos a ν mértékre nézve. Ekkor a mértékekre értelmezzük a feltételes entrópiát, legyen $S\subset X$, ekkor a korábbiakhoz hasonló módon:

$$H((\mu\mid\nu)(S))=-\sum_{x\in S}(\log((\nu(x))-\log(\mu(x)))\mu(x).$$

Mivel X véges halmaz, ezért az abszolút folytonosság ebben az esetben azt jelenti, hogy $x \in X$ elemre ha $\nu(x) = 0$, akkor $\mu(x) = 0$ is teljesül. Ebből látszik, hogy az $S \subset X$ részhalmazon való értelmezés nem mindig szükséges, elég, ha olyan μ, ν mértékeket használunk, amik csak az S részhalmazon vesznek fel nemnulla értékeket, így elégséges bevezetni az

$$H(\mu \mid \nu) = -\sum_{x \in X} (\log(\nu(x)) - \log(\mu(x)))(\mu(x))$$

kifejezést. Vegyük észre, hogy

$$H(\mu \mid \nu) = \mathbb{E}_\mu \bigg(-\log(X) \frac{d\mu}{d\nu} \bigg),$$

és mivel a $-\log$ függvény konvex, ezért alkalmazhatjuk a Jensen-egyenlőtlenséget:

$$H(\mu \mid \nu) \geq -\log(\nu(X)).$$

Mivel $\nu(X) \leq 1$, ezért a fenti állításból az is következik, hogy

$$H(\mu \mid \nu) \geq 0,$$

tetszőleges μ, ν valószínűségi mértékekre, ahol μ abszolút folytonos ν-re nézve.

A következőkben legyen $(X_1, \mu_1), (X_2, \mu_2)$ és (X_3, μ_3) három valószínűségi mező. Tegyük fel, hogy léteznek a $\psi_1 : X_1 \to X_3$ és a $\psi_2 : X_2 \to X_3$ szürjektív mértéktartó leképezések. Ekkor azt mondjuk, hogy az X_3 halmaz a közös faktora az (X_1, μ_1) és az (X_2, μ_2) valószínűségi mezőknek. Vegyük észre, hogy ekkor a μ_3 mérték meghatározható a másik kettővel is, mivel tetszőleges $A \subset X_3$ halmazra:

$$\mu_3(A) = \mu_1(\psi_1^{-1}\langle A \rangle),$$

ahol $\psi_1^{-1}\langle A \rangle$ az A halmaz ψ_1 általi ősképét jelöli. Definiáljuk az X_4 halmazt a következő módon:

$$X_4 := \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 ; \psi_1(x_1) = \psi_2(x_2), \mu_1(\psi_1^{-1}\langle \{x_1\} \rangle) \neq 0\}.$$

Az X_4 halmazon értelmezett μ mértéket nevezzük párosításnak, ha fennáll minden $(x_1, x_2) \in X_4$ elemre, hogy

$$\mu(x_1, x_2) = \mu_1(x_1) = \mu_2(x_2).$$

Ezen kívül definiáljuk egy μ_4 mértéket is az X_4 halmazon, a következő képlettel megadva:

$$\mu_4(x_1, x_2) := \frac{\mu_1(x_1)\mu_2(x_2)}{\mu_3(\psi(x_1))}.$$

Látható, hogy a $\pi_1 : X_4 \to X_1$ és a $\pi_2 : X_4 \to X_2$ vetítések mértéktartóak a μ_4 mértékre nézve. Azt mondjuk, hogy az (X_4, μ_4) halmaz a π_1, π_2 leképezésekkel az (X_1, μ_1), (X_2, μ_2) halmazok feltételesen független párosítását adja az (X_3, μ_3) közös faktorra nézve.

Legyen minden egyes X_i halmazra ν_i mérték, ahol $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, a ν_i mértékek olyanok, hogy $(X_4\nu_4)$ legyen feltételesen független párosítása az (X_1, ν_1) és (X_2, ν_2) halmazoknak az $(X_3\nu_3)$ közös faktorral, és ugyanazokkal ψ_1 és ψ_2 leképezések, mint amik az előbb voltak a μ_i mértékekre.

Állítás Legyen X_i, μ_i, és ν_i a fent definiált módon, és legyenek az X_i halmazok végesek. Ekkor

$$H(\mu_4 \mid \nu_4) = H(\mu_1 \mid \nu_1) + H(\mu_2 \mid \nu_2) - H(\mu_3 \mid \nu_3).$$

Bizonyítás Alkalmazzuk a μ_4 és a ν_4 mértékeket definiáló képleteket:

$$H(\mu_4 \mid \nu_4) = \sum_{(x_1,x_2)\in X_4} (\log(\mu_4(x_1, x_2)) - \log(\nu_4(x_1, x_2)))\mu_4(x_1, x_2),$$

ahol

$$\log(\mu_4(x_1, x_2)) = \log(\mu_1(x_1)) + \log(\mu_2(x_2)) - \log(\mu_3(\psi_1(x_1))).$$

Másrészt mivel μ_4 mértéktartó a vetítésekre

$$\sum_{(x_1,x_2)\in X_4} \log(\mu_1(x_1))\mu_4(x_1x_2) = \sum_{(x_1,x_2)\in X_4} \log(\mu_1(x_1))\mu_1(x_1).$$

A $\mu_1(x_i) \neq 0$ állítás pontosan akkor áll fenn, ha $\mu_3(\psi_1(x_i)) \neq 0$ másrészt ψ_1 mértéktartósága és végessége miatt minden $x' \in X_3$ elemre amire $\mu_3(x') \neq 0$ kell léteznie pontosan egy $x \in X_1$-nek amire $\psi_1(x) = x'$. Ugyanez igaz az X_2 halmazra is, ezt a két állítást együttesen használva minden $x_1 \in X_1$ elemre, amire $\mu_1(x_1) \neq 0$ létezik pontosan egy $x_2 \in X_2$ amire $\psi_1(x_1) = \psi_2(x_2)$, ekkor $(x_1, x_2) \in X_4$. Ezt felhasználva

$$\sum_{(x_1,x_2)\in X_4} \log(\mu_1(x_1))\mu_1(x_1) = \sum_{(x_1\in X_1;x_1\neq 0} \log(\mu_1(x_1))\mu_1(x_1) = \sum_{(x_1\in X_1;x_1} \log(\mu_1(x_1))\mu_1(x_1).$$

Mindezt együttesen összeírva a $H(\mu_4 \mid \nu_4)$ kifejezésre megkapjuk az állítást. □

Lemma A korábbi jelzésekkel és feltételekkel, legyen μ egy párosítása az az (X_1, μ_1) és (X_2, μ_2) valószínűségi mezőknek, ekkor

$$H(\mu \mid \nu_4) \geq H(\mu_4 \mid \nu_4).$$

Bizonyítás Először azt nézzük meg, hogy

$$H(\mu \mid \nu_4) - H(\mu_4 \mid \nu_4) = H(\mu_4) - H(\mu).$$

Hogy ezt belássuk, meg kell mutatni, hogy

$$\sum_{x \in X_4} \log(\nu_4(x))(\mu_4(x) - \mu(x)) = 0.$$

Ezt úgy tesszük meg, hogy a korábbi módon szétbontjuk a $\log(\nu_4(x))$ kifejezést:

$$\log(\nu_4(x_1, x_2)) = \log(\nu_1(x_1)) + \log(\nu_2(x_2)) - \log(\nu_3(\psi_1(x_1))).$$

Mivel μ egy párosítása (X_1, μ_1) és (X_2, μ_2) az (X_3, μ_3) halmazon keresztül, ezért a vetítésekre mértéktartó, így

$$\sum_{(x_1,x_2) \in X_4} \log(\nu_1((x_1, x_2)))(\mu_4((x_1, x_2)) - \mu((x_1, x_2))) = \sum_{x_1 \in X_1} \log(\nu_1(x_1))(\mu_1(x_1) - \mu_1(x_1)) = 0,$$

a másik két kifejezésre ugyanez érvényes, tehát visszavezetve megkapjuk a keresett egyenlőséget. A $H(\mu_4)$ kifejezés kifejthető az alábbi módon

$$H(\mu_4) = H(\mu_1) + H(\mu_2) - H(\mu_3(\psi_1)),$$

ahol ψ_1 a szürjektivitásból és a mértéktartóságból következik, hogy véges halmazon a nem nullmértékű elemeken ψ_1 bijektív, tehát

$$H(\mu_4) = H(\mu_1) + H(\mu_2) - H(\mu_3).$$

Ezt behelyettesítjük az első egyenlőségbe

$$H(\mu \mid \nu_4) - H(\mu_4 \mid \nu_4) = H(\mu_1) + H(\mu_2) - H(\mu_3) - H(\mu).$$

Az

$$H(\mu_1) + H(\mu_2) - H(\mu_3) - H(\mu) \geq 0$$

egyenlőtlenség egy Shannon típusú egyenlőtlenség, ezzel az állítást beláttuk. □

A fenti állítások segítségével meg lehet fogalmazni a Sidorenko-sejtés egy új változatát entrópiára. Emlékeztetőül a $t(H, G)$ kifejezést fel lehet úgy is fogni, mint annak a valószínűségét, hogy egyenletes eloszlással a $V(H) \to V(G)$ halmazon egy függvény mekkora valószínűséggel lesz homomorfizmus. Legyen $\tau(H, G)$ a $\mathrm{Hom}(H, G)$ halmazon egyenletes eloszlás, ami a többi $V_G^{V_H}$-beli elemen nullát vesz fel, és legyen $\nu(H, G)$ az összes $V(H) \to V(G)$ függvényen egyenletes eloszlás.

Az egyszerűség kedvéért vezessük be a következő jelölést a $V(G)^{V(H)}$ halmazon értelmezett eloszlásokra:

$$D(\mu) := H(\mu \mid \nu(H,G)).$$

Mivel mind a két eloszlás egyenletes, ezért

$$D(\tau(H,G)) = -\log(t(H,G)).$$

Ennek segítségével közvetlen kapcsolatot lehet teremteni az entrópia és a homomorfizmus-sűrűség között. Ezt Szegedy Balázs írta le, és a később megfogalmazott tételeket is ő bizonyította [8].

Állítás Legyen K_2 a teljes kétcsúcsú gráf, ekkor a Sidorenko-sejtés ekvivalens azzal, hogy tetszőleges H páros gráfra és tetszőleges G gráfra

$$D(\tau(H,G)) \leq |E_H| D(\tau(K_2,G))$$

Bizonyítás Behelyettesítünk a $D(\tau(H,G))$ és a $D(\tau(K_2,G))$ kifejezésekbe, és megszorozzuk az egyenlőtlenséget mínusz eggyel. Ekkor rendezve azt kapjuk, hogy

$$\log(t(H,G)) \geq \log((t(K_2,G))^{|E_H|}),$$

ami ekvivalens a Sidorenko-sejtéssel. $\square$

Mivel τ egyenletes eloszlás a $\mathrm{Hom}(H,G)$ részhalmazon, ezért tetszőleges $V_G^{V_H}$ függvényen értelmezett μ eloszlásra, aminek a tartója $\mathrm{Hom}(H,G)$, igaz az, hogy

$$D(\tau(H,G)) \leq D(\mu),$$

tehát, ha egy H páros gráfra, ha találunk olyan μ a fenti feltételeknek megfelelő eloszlást, amire

$$D(\mu) \leq |E_H| D(\tau(K_2,G)),$$

akkor a H gráfra bizonyítottuk a Sidorenko-sejtést. Például az előző fejezetben a véletlen bejárással definiált eloszlás az erős fa-felbontású gráfokon ilyen volt. Nevezzük az ilyen μ eloszlást tanúnak.

Legyen μ egy valószínűségi eloszlás a $\mathrm{Hom}(H,G)$ halmaz elemein, és legyen S egy véges halmaz, amire $|S| \leq |V(H)|$. Legyen $\beta : S \to V(H)$ egy injektív leképezés. Ekkor $\psi \in \mathrm{Hom}(H,G)$ esetén a $\psi \to \psi \circ \beta$ leképezés definiál egy faktort a $(\mathrm{Hom}(H,G),\mu)$ valószínűségi mezőn. Jelöljük ezt a faktort $(V(G)^S, \mu_{|\beta})$-val, és nevezzük csúcsfaktornak. Ha S részhalmaza a $V(H)$ csúcshalmaznak akkor legyen

$\mu_{|S}$ azon $\mu_{|\beta}$ valószínűségi eloszlás, ahol β az identitás S elemein. Ha S az üres halmaz, a $V(G)^S$ legyen egy egyelemű halmaz, ekkor $D(\mu_{|S}) = 0$.

Tegyük fel, hogy van két valószínűségi mező $(\mathrm{Hom}(H_1, G), \mu_1)$ és $(\mathrm{Hom}(H_2, G), \mu_2)$, és $i \in \{1, 2\}$-re $n \in \mathbb{N}$-re

$$\beta_i : \{1, \dots, n\} \to V(H_i),$$

olyanok, hogy $\mu_{1|\beta_1} = \mu_{2|\beta_2}$, és ezt jelöljük a $\mu_3 := \mu_{1|\beta_1}$ kfejezéssel. Ekkor a μ_1 és μ_2 feltételesen független párosítását jelöljük $C(\mu_1, \mu_2, \beta_1, \beta_2)$

Egy H páros gráf esetén legyen f egy olyan függvény, ami a véges gráfok halmazán van értelmezve(a gráfokat izomorfia erejéig különbözőnek tekintve), és f minden G gráfra egy valószínűségi eloszlást vesz fel $\mathrm{Hom}(H, G)$ elemein. Ekkor nevezzük az f függvényt a H gráf egy valószínűségi sémájának. Nevezzük a H gráfot az f séma vázának. Legyenek $i \in \{1, 2\}$ esetén az f_i függvények a H_i gráfok sémái. Tegyük fel, hogy $\beta_i : \{1, \dots, n\} \to V(H_i)$ olyan függvények, amire tetszőleges G esetén $f_1(G)_{|\beta_1} = f_1(G)_{|\beta_1}$. Ekkor azt mondjuk, hogy a β_1 és β_2 függvények meghatároznak egy közös csúcs faktort az f_1 és f_2 sémákra. Legyen $g = C(f_1, f_2, \beta_1, \beta_2)$ az f_1 és f_2 függvények feltételesen független párosítása, ahol minden G gráfra $g(G) = C(f_1(G), f_2(G), \beta_1, \beta_2)$. Ekkor g is egy sémát határoz meg, aminek a vázát a következő módon konstráljuk meg: vesszük az összes csúcsot ami V_{H_1}-ben és V_{H_2}-ben van, és azokat feleltetjük meg egymásnak, amik ugyannak a $k \in \{1, \dots, n\}$-nek a képei β_1 és β_2 szerint. A duplázott éleket kitöröljük.

Definíció Legyen $\mathcal{A}$ az a halmaza a sémáknak, ami tartalmazza a $\tau(K_2, G)$ egyenletes eloszlást a két csúcsú teljes gráfon, és zárt a feltételesen független párosításokra a közös csúcs faktorokon. Az $\mathcal{A}$ halmaz elemeit nevezzük párosító struktúráknak és a H vázak halmazát jelöljük $\mathcal{G}$-vel, és nevezzük párosító vázaknak.

Vegyük észre, hogy az f sémának csak páros gráfokra lehet értelme, ugyanis más esetben bizonyos $\mathrm{Hom}(H, G)$ halmazok az üres halmazok lennének, azon pedig nincs valószínűségi eloszlás. Az $\mathcal{A}$ halmaz definíciójából látszik, hogy minden H gráfból ami a vázak között van H egy élpárjára nézve a sémát az egyenletes eloszlást kapjuk, ha pedig egy csúcsot, akkor arra megszorítva azt az eloszlást kapjuk, amiben egy csúcs képe a $g \in G$ csúcs $\deg(g)(2|E_G|)^{-1}$ valószínűséggel lesz.

Legyen $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ ez a halmaz, ahol csak a független csúcsok mentén vesszük a párosításokat, tehát az összekötéssel kapott gráfban két olyan csúcs között, ami mindkettő egy-egy V_{H_1} és V_{H_2} beli csúcs egymásnak megfeleltetéséből származik, nem fut él. Hasonlóan legyen $\mathcal{G}_1$ az $\mathcal{A}_1$-beli sémákhoz tartozó vázakból álló halmaz. A következő tétel megmutatja, hogyan lehet az információelméletet alkalmazni a Sidorenko-sejtés bizonyításához bizonyos gráfokra.

Tétel Minden $\mathcal{G}_1$-beli gráfra teljesül a Sidorenko-sejtés.

Bizonyítás A K_2 gráfra teljesül a Sidorenko-sejtés. Legyen f_1 és f_2 két valószínűségi séma a H_1 és a H_2 keretekkel. Tegyük fel, hogy $i \in \{1, 2\}$-re $\beta_i\{1, \ldots, n\} :\to V(H_i)$ közös csúcs faktorok, ahol β_1 és β_2 képei. Ha H_1 és H_2 olyan gráfok amikre teljesül a Sidorenko-sejtés, ekkor

$$D(f_1) + D(f_2) \geq (|E_{H_1}|+|E_{H_2}|)D(K_2),$$

és ha közös faktorok független csúcsokat határoznak meg, akkor

$$|E_{H_1}|+|E_{H_2}|= |E_H|,$$

aminek a segítségével látható hogy H-ra is teljesül a Sidorenko-sejtés. □

A következőkben legyen $\mathcal{A}_2$ egy olyan halmaza a sémáknak, amiknél $K_2 \in \mathcal{A}_2$, és a $\mathcal{A}_2$ halmaz zárt az olyan párosításokra, ahol a közös csúcsfaktor egy körmentes gráf (fák összesége). A korábbiakhoz hasonlóan legyen $\mathcal{G}_2$ az olyan gráfok halmaza, amik a keretei az $\mathcal{A}_2$ -beli sémáknak. Látható, hogy $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$, és $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}$.

Lemma Legyen H egy körmentes gráf és G egy tetszőleges véges gráf, és legyen μ egy olyan mérték $\mathrm{Hom}(H, G)$ elemein, ami H tetszőleges élére megszorítva az egyenletes eloszlást veszi fel G élein, és tetszőleges H-beli csúcsra megszorítva azt az eloszlást veszi fel, ahol v képe $\frac{\deg w}{2|E(G)|}$ valószínűséggel lesz w, tetszőleges $w \in G$-re - ennek jelöljük a feltételes entrópiáját $D(v)$-vel. Ekkor

$$D(\mu) \geq D(\tau(K_2, G))|E_H|-D(v)(2|E_H|-|V_H|),$$

ahol $D(v)$ jelölje annak az eloszlásnak a feltételes entrópiáját, ami az egy csúcsból állót grávból G-be tartó homomorfizmusokon van értelmezve, és annak a valószínűsége, hogy a v csúcs képe a $g \in G$ csúcs, $\frac{\deg g}{2|E_G|}$.

Bizonyítás Indukcióval bizonyítunk a csúcshalmazok méretére. Ha $|V_H|\leq 2$, akkor az állítás triviális. Ha $|V_H|\geq 3$, akkor létezik a $V(H)$ csúcshalmaznak olyan V_1 és V_2 csúcshalmazokra való felbontása, hogy $V_1 \cap V_2 = \{v\}$ egyetlen V csúcs, $\max|V_1|, |V_2| < |V|$, és a V_1-beli csúcsok, és a V_2-beli csúcsok között nem fut él. Ekkor a μ eloszlás egy kapcsolása a V_1 és V_2 halmazokon értelmezett eloszlással. Ekkor tudjuk alkalmazni a korábban bizonyított

$$H(\mu \mid \nu_4) \geq H(\mu_4 \mid \nu_4)$$

egyenlőtlenséget, ahol μ_4 a V_1 és V_2 csúcshalmazokon vett μ_1 és μ_2 élekre megszorítva egyenletes eloszlásokkal definiált eloszlás a korábbi eloszlás szerint ν_4 pedig a homomorfizmusokon vett egyenletes eloszlásokkal definiált eloszlás. Mivel

$$H(\mu_4 \mid \nu_4) = H(\mu_1 \mid \nu_1) + H(\mu_2 \mid \nu_2) - H(\mu_3 \mid \nu_3),$$

ezért az indikciós feltételből következik a lemma a H gráfra is. $\square$

Tétel A $\mathcal{G}_2$-beli gráfokra teljesül a Sidorenko-sejtés.

Bizonyítás Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{A}_2$ egy valószínűségi séma, és H annak a kerete. Először azt szeretnénk bizonyítani, hogy

$$D(f) \leq D(\tau(K_2, G))|E_H| - D(v)(2|E_H| - |V_H|).$$

Ezt indukcióval lehet megmutatni. A $\tau(K_2, G)$ eloszlásra az állítás triviálisan teljesül. Tegyük fel f_1 és f_2 két séma H_1 és H_2 keretekkel. Tegyük fel, hogy $i \in \{1, 2\}$-re $\beta_i : \{1, \ldots, n\} \to H_i$, amik olyan közös csúcs faktort határoznak meg, ami egy körmentes gráf, legyen ez H_3. Legyen H a kerete a $g = C(f_1, f_2, \beta_1, \beta_2)$ sémának, ekkor az előző lemma segítségével

$$D(g) \leq D(f_1) + D(f_2) - (D(\tau(K_2, g))|E_{H_3}| - D(v)(2|E_{H_3}| - |V_{H_3}|)).$$

Ezt átakítva a korábban is használt

$$H(\mu_4 \mid \nu_4) = H(\mu_1 \mid \nu_1) + H(\mu_2 \mid \nu_2) - H(\mu_3 \mid \nu_3)$$

állítással, és indukcióval megkapjuk a kereresett egyenlőtlenséget

$$D(f) \leq D(\tau(K_2, G))|E_H| - D(v)(2|E_H| - |V_H|).$$

Itt, mivel a $\mathcal{G}_2$-beli gráfokban nem lehetnek olyan csúcsok amikre $\deg(v) = 0$, ezért $2|E_H| - |V_H|$ mindig nemnegatív. Ezzel beláttuk a Sidorenko-sejtést az $\mathcal{G}_2$-beli gráfokra. $\square$

Irodalomjegyzék

[1] F.V. Atkinson, G.A. Watterson, P.A.P. Moran *A matrix inequality* The Quarterly Journal of Mathematics, Volume 11, Issue 1, 1960, Pages 137–140

[2] David Conlon, Jeong Han Kim, Choongbum Lee, Joonkyung Lee *Some advances on the Sidorenko's conjecture*

[3] R. Halin *S-functions for graphs* J. Geom. 8 (1976), 171–186

[4] J.L Xiang Li, Szegedy Balázs *On the logarithmic calculus and Sidorenko's conjecture*

[5] Lovász László, Szegedy Balázs *Limits on dense graph sequnces* Microsoft Research One Microsoft Way Redmond, WA 98052 Technical Report TR-2004-79 August 2004

[6] Mulholland, H.P.; Smith, Cedric *An inequality arising in genetical theory* American Mathematical Monthly (66): 673–683

[7] A. Sidorenko *A correlation inequality for bipartite graphs* Graphs Combin. 9 (1993), 201–204

[8] Szegedy Balázs *An information theoretic approach to Sidorenko's conjecture*

NYILATKOZAT

Név: Markó Ádám

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematikus

NEPTUN azonosító: H6VS54

Szakdolgozat címe: A Sidorenko-sejtés

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 20

a hallgató aláírása