Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Sagmeister Ádám

Diofantikus geometria – Faltings tétele

Matematikus MSc szakdolgozat

Témavezető:

Zábrádi Gergely

Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2020

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, hogy bevezetett a témakör rejtelmeibe, és hogy mindig körültekintően válaszolt a felmerülő kérdéseimre. Továbbá szeretnék köszönetet mondani családomnak amiért támogattak célom elérésében.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés, jelölések

Diofantikus geometriának nevezzük a matematika azon ágát, mely algebrai varietások egész, illetve racionális pontjait vizsgálja. A problémakör meglehetősen ősi, *Diophantosz*, alexandriai matematikusról kapta a nevét, aki az i. sz. 3. században tanulmányozta polinomegyenletek egész megoldásait. Az ilyen típusú egyenletek esetén a legtermészetesebb kérdések, hogy egyáltalán létezik-e az egyenletnek (nemtriviális) egész megoldása; ha igen, akkor mennyi; illetve hogyan tudjuk karakterizálni a megoldásokat. A diofantikus geometria is ezeket a fő kérdéseket hivatott megválaszolni, azonban az eszköztár Diophantosz óta rengeteget fejlődött. Bejött a képbe az algebrai geometria, ami persze nem meglepő, hiszen egy polinomegyenletek gyökei köré épített elméletről van szó. Az algebrai geometria a 20. században rohamléptekben indult fejlődésnek, a Langlands-program keretében pedig összefonódott a számelmélettel. Ebben az érában született *Gerd Faltings* a dolgozatom fókuszában álló 1983-as tétele is, amely *Louis J. Mordell* 1922-es sejtését oldja meg, miszerint a legalább 2 génuszú algebrai görbéknek csak véges sok racionális pontjuk lehet. A tétel komoly előrelépést jelentett a Fermat-sejtés bizonyítása felé vezetett úton, ugyanis azonnal következik belőle $n \geq 4$ esetén, hogy ha megoldható egészekre az n fokú Fermat-egyenlet, akkor is csak véges sok egymáshoz relatív prím megoldás lehet. Faltings két másik neves sejtés, valamint a Mordell-sejtés bizonyításáért 1986-ban elnyerte a Fields-medált. Később *Paul Vojta* adott egy, a Faltingsétól eltérő bizonyítást Mordell sejtésére, melyet aztán Faltings ismét tovább egyszerűsített, hogy aztán Vojta megjavított eredményével bizonyítsa *Serge Lang* sejtését. Ez utóbbi egyszerűsítést tette aztán Bombieri némiképp elemibbé, dolgozatom az ő bizonyítását ismerteti. Dolgozatom első részében a tétel bizonyításához szükséges elméletet építem ki, ám az itteni állításokat az elmélet mélysége és terjedelme miatt csak kimondom, azok bizonyítását részint az olvasóra bízom, de a nehéz állítások bizonyítása is fellelhető a hivatkozott szakirodalmakban. A dolgozat második része már Faltings tételének bizonyításáról fog szólni az első részben felépített eszköztár segítségével. Az elméleti bevezetésül szolgáló 2. fejezet kis részben *Joseph H. Silverman*[4] könyvét, legfőképpen pedig *Marc Hidry* és Silverman[3] könyvét veszi alapul, ahol más forrásból dolgoztam, ott erről az érintett szakaszok elején említést teszek.

A dolgozat során mindvégig úgy tekintjük, hogy $0 \in \mathbb{N}$, a pozitív egészek halmazát $\mathbb{N}^+$ jelöli. Jelölje tetszőleges $a; b \in \mathbb{R}$; $a < b$ esetén $[\![a; b]\!]$ jelölje az $[a; b] \cap \mathbb{Z}$ halmazt (értelemszerűen hasonlóan vezetjük be a nyílt, illetve félig nyílt intervallumokkal vett metszetre vonatkozó jelöléseket is). Tetszőleges $\mathcal{H}$ halmaz számosságát $|\mathcal{H}|$ jelöli. Egy V vektortér duális terét V^* jelöli. Amennyiben K test, $K\left[x\right]$ jelöli a K feletti egyváltozós polinomok gyűrűjét, $K\left[x_1; \ldots; x_n\right]$ a K feletti n-változós polinomok gyűrűjét. A K test nullelemét illetve egységelemét rendre 0_K és 1_K jelöli, az indexet elhagyjuk, amennyiben egyértelmű, melyik testről beszélünk. Ha K és L testek, $K \leq L$ jelöli azt a tényt, hogy K részteste L-nek (vagy ekvivalensen L bővítése K-nak). A $K \leq L$ testbővítés fokát $[L : K]$ jelöli. Ha a $K \leq L$ bővítést $\mathcal{H}$ halmaz generálja, akkor az $L = K\left(\mathcal{H}\right)$ jelöléssel jellemezzük. Amennyiben valamely $n \in \mathbb{N}^+$, a $\mathcal{H} = \{\alpha_1; \ldots; \alpha_n\}$, úgy az $L = K\left(\alpha_1; \ldots; \alpha_n\right)$ jelöléssel élünk, végül egy K test algebrai lezártját $\overline{K}$ jelöli (ez izomorfia erejéig egyértelmű). Mivel a dolgozatban szereplő konkretizált gyűrűk rendre test feletti polinomgyűrűk, így gyűrű alatt mindig kommutatív gyűrűt értünk kimondatlanul is, valamint ebből fakadóan az ideálok is kétoldaliak.

2. fejezet

Elméleti alapozás

2.1. Algebrai előismeretek

A fejezet, és a további fejezetek feltételezik, hogy az olvasó ismeri a különféle absztrakt algebrai struktúrák alapvető fogalmait. Ebben a szakaszban röviden összefoglaljuk a klasszikus algebrai geometria felépítéséhez szükséges gyűrűelméleti és testelméleti definícióit, bevezetjük a főbb algebrai számelméleti fogalmakat. A szekció részben *Ágoston István* és *Némethi András* előadásainak anyagára, részint pedig *Kiss Emil*[1] könyvére és *Zábrádi Gergely*[2] egyetemi jegyzetére támaszkodik.

2.1.1. Definíció. *Legyenek $K \leq L$ testek. Azt mondjuk, hogy L test a K testnek* ***normális bővítése****, ha tetszőleges $f \in K[x]$ esetén f-nek vagy az összes gyöke L-ben van, vagy egyetlen gyöke sincs L-ben.*

2.1.2. Definíció. *K test* ***tökéletes****, ha tetszőleges K fölött irreducibilis polinomnak nem lehet többszörös gyöke K semelyik bővítésében sem.*

2.1.3. Definíció. *Legyen $I \lhd R$ ideál. Ekkor I* ***radikáljának*** *nevezzük és $\sqrt{I}$-vel jelöljük a*

$$\sqrt{I} = \left\{a \in R\colon a^m \in I \text{ valamely alkalmas } m \in \mathbb{N}^+ \text{ számra}\right\}$$

halmazt.

2.1.4. Definíció. *Legyen $I \lhd R$ ideál. Ekkor az I **ideál n-edik hatványának** nevezzük és I^n-nel jelöljük azt az ideált, melyet az I elemeiből képezhető n-tényezős szorzatok generálnak.*

2.1.5. Megjegyzés. Legyen $I \lhd R$ ideál. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $I^{n+1} \subseteq I^n$, valamint $I^1 = I$.

2.1.6. Definíció. *Egy $I \lhd R$ ideált **prímideálnak** nevezünk, ha $I \neq R$ és tetszőleges $a; b \in R$ esetén $a \cdot b \in I$-ből következik, hogy $a \in I$ vagy $b \in I$.*

2.1.7. Definíció. *Egy $I \lhd R$ valódi ideált **maximális ideálnak** nevezünk, ha tetszőleges $J \lhd R$ valódi ideál esetén, melyre $I \subseteq J$ fennáll, szükségképpen $I = J$ teljesül.*

2.1.8. Definíció. *Legyenek $A \leq B$ kommutatív, egységelemes gyűrűk. Ekkor a $b \in B$ elemet **A felett egésznek** mondjuk, ha alkalmas $f \in A[x]$ polinomnak gyöke. Azt mondjuk, hogy B **egész gyűrű A felett**, ha minden eleme egész A felett. A **egész lezártja** B-ben az $\overline{A}_B = \{b \in B \colon b \text{ egész } A \text{ felett}\}$ részgyűrű. Azt mondjuk, hogy A **egészre zárt** B-ben, ha megegyezik az egész lezártjával B-ben. $\mathbb{Q} \leq K$ véges bővítés esetén $\mathbb{Z}$ egész lezártját K-ban az **egészek gyűrűjének** nevezzük.*

2.1.9. Definíció. *Legyen $K \leq L$ véges bővítés, $\alpha \in L$, és jelölje s_α az α-val való balszorzást, ami tehát egy K-lineáris leképezés. Ekkor a bővítés α elemhez tartozó normája alatt az*

$$\mathrm{Norm}_{L/K}(\alpha) = \det(s_\alpha)$$

determinánst értjük.

2.1.10. Definíció. *Legyenek $K \leq L$ testek, $\alpha \in L \setminus K$. Ekkor ha nem létezik olyan $K[x]$-beli polinom, melynek α gyöke, azt mondjuk, hogy α **algebrailag független elem** K-tól. K-nak az L bővítését **algebrailag független bővítésnek** nevezzük, ha alkalmas $\mathcal{H}$ halmazra $L = K(\mathcal{H})$ és $\mathcal{H}$ elemei K-tól algebrailag független elemek.*

2.1.11. Definíció. *Legyen d egy számosság és $K = K_0 \leq K_1 \leq \ldots \leq K_d = L$ testbővítések lánca, hogy minden $j \in [\![0; d-1]\!]$ esetén a $K_j \leq K_{j+1}$ algebrailag független bővítés. Tegyük fel, hogy az imént megadott lánc d hossza az ilyen tulajdonságú $K \leq L$ testbővítésekből álló láncok hosszának szuprémuma. Ekkor d-t a bővítés **transzcendenciafokának** nevezzük.*

2.1.12. Definíció. *Legyen $\mathbb{Q} \leq F$ egy véges bővítés. Ekkor azt mondjuk, hogy F egy* ***(algebrai) számtest****.*

2.1.13. Definíció. *Legyen K egy test, $|\cdot| : K \to \mathbb{R}_+$ függvény. Ekkor azt mondjuk, hogy $|\cdot|$* ***abszolútérték****, ha eleget tesz a következő tulajdonságoknak:*

1. $|x| = 0 \iff x = 0_K$
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ *tetszőleges* $x; y \in K$ *esetén*
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$ *tetszőleges* $x; y \in K$ *esetén.*

Azt mondjuk egy $|\cdot| : K \to \mathbb{R}_+$ abszolútértékre, hogy ***nemarkhimédeszi****, ha teljesíti az úgynevezett* ***ultrametrikus egyenlőtlenséget*** *is, azaz tetszőleges $x; y \in K$ esetén*

$$|x + y| \leq \max\{|x|; |y|\}.$$

Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy $|\cdot|$ ***arkhimédeszi****.*

2.1.14. Állítás. *Legyen K számtest. Ekkor a K feletti arkhimédeszi abszolútértékek száma legfeljebb $[K : \mathbb{Q}]$.*

2.1.15. Jelölés. $\mathbb{Q}$ felett a szokásos abszolútértéket $|\cdot|_\infty$ jelöli, azaz $x \in \mathbb{Q}$ esetén

$$|x|_\infty = \max\{x; -x\}.$$

2.1.16. Definíció. *Tetszőleges $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ és p prímszám esetén egyértelműen létezik egy $v_p(x) \in \mathbb{Z}$ szám, hogy alkalmas $a; b \in \mathbb{Z}$; $p \nmid a \cdot b$ számokkal x felírható, mint $x = p^{v_p(x)} \cdot \frac{a}{b}$. Legyen $x \in \mathbb{Q}$-ra*

$$|x|_p = \begin{cases} 0 & ha\ x = 0 \\ p^{-v_p(x)} & ha\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Ekkor az így definiált $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ leképezés abszolútérték lesz, ezt ***p-adikus abszolútértéknek*** *nevezzük.*

2.1.17. Definíció. *Legyen*

$$M_{\mathbb{Q}} = \left\{|\cdot|_p : p\ prím\right\} \cup \{|\cdot|_\infty\}.$$

Ekkor $M_{\mathbb{Q}}$ elemeit $\mathbb{Q}$ ***feletti standard abszolútértékeknek*** *nevezzük. Legyen K számtest. Ekkor M_K jelöli azon K feletti abszolútértékek halmazát, melyeknek $\mathbb{Q}$-ra való megszorítása $M_{\mathbb{Q}}$-beli. Ekkor M_K elemeit* ***K feletti standard abszolútértékeknek*** *mondjuk.*

2.1.18. Definíció. *Legyen V vektortér egy K test felett, és értelmezzük V-n a $T(V) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V^{\otimes n}$* ***tenzoralgebrát****, ahol $V^{\otimes n}$ nem más, mint V vektortér n példányának tenzorszorzata, továbbá $V^{\otimes 0} = K$. Legyen V* ***külső algebrája*** *$\bigwedge(V) = T(V)/_{x \otimes x}$. Értelmezzük továbbá $\wedge$* ***alternáló*** *műveletet, azaz tetszőleges $x \in V$-re $x \wedge x = 0$. Ekkor ezzel a művelettel értelmezhető V* ***k-adik külső hatványa****, amely nem más, mint az $x_1 \wedge \ldots \wedge x_k$ vektorok által feszített altér $\bigwedge(V)$-ben, melyet $\bigwedge^k(V)$ jelöl.*

2.1.19. Megjegyzés. Ha V-ben $\{e_1; \ldots; e_n\}$ bázis, akkor $\bigwedge^k(V)$-ben bázis lesz

$$\left\{e_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge e_{\sigma(k)} : \sigma \in S_n\right\},$$

így ha $\dim_K(V) = n$, akkor $\dim_K\left(\bigwedge^k(V)\right) = \binom{n}{k}$.

2.1.20. Definíció. *Legyen V egy n dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett, valamint legyenek*

$$v_1; \ldots; v_m \in V$$

lineárisan független vektorok. Ekkor V-nek a

$$\Gamma = \mathbb{Z}v_1 + \ldots + \mathbb{Z}v_m$$

additív részcsoportját ***rácsnak*** *nevezzük. Azt mondjuk, hogy egy rács* ***teljes****, ha $m = n$.*

2.2. Algebrai varietások

2.2.1. Definíció. ***K test feletti affin n-térnek*** *nevezzük és A_K^n-nel jelöljük a $\overline{K}$ elemeiből képzett n-eseket, azaz*

$$A_K^n = \left\{(x_1; \ldots; x_n) : x_1; \ldots; x_n \in \overline{K}\right\}.$$

K-racionális pontoknak *hívjuk és $A^n(K)$-val jelöljük a K feletti affin n-tér azon elemeit, melyeknek minden koordinátája K-beli, azaz*

$$A^n(K) = \{(x_1; \ldots; x_n) : x_1; \ldots; x_n \in K\}.$$

2.2.2. Jelölés. Legyen I egy ideál $\overline{K}[x_1; \ldots; x_n]$-ben. Ekkor jelölje $Z(I)$ az ideál közös nullhelyeit, azaz

$$Z(I) = \{x \in A_K^n : p(x) = 0 \ \forall p \in I\}.$$

Hasonlóképp tetszőleges $S \subseteq A^n_K$ halmazhoz definiálhatjuk a rajta eltűnő polinomok halmazát. Ez ideált alkot, és I_S-sel jelöljük. Azaz,

$$I_S = \left\{ p \in \overline{K}\left[x_1;\ldots;x_n\right] : p\left(x\right) = 0 \ \forall x \in S \right\}.$$

2.2.3. Definíció. *Egy $S \subseteq A^n_K$ halmazt **affin algebrai halmaznak** nevezünk, ha létezik $I \lhd \overline{K}\left[x\right]$ ideál, melyre $S = Z\left(I\right)$. Azt mondjuk, hogy az S affin algebrai halmaz **K felett definiált**, ha I_S-t generálják a $K\left[x\right]$-beli polinomok.*

2.2.4. Megjegyzés. Hilbert bázistételének értelmében az algebrai halmazok mindig végesen generáltak.

2.2.5. Állítás. *Affin algebrai halmazok tetszőleges metszete és véges uniója is affin algebrai halmaz.*

2.2.6. Állítás. *Ha $S_1 \subseteq S_2 \subseteq A^n_K$, akkor $I_{S_2} \subseteq I_{S_1}$.*

2.2.7. Állítás. *Ha $I_1 \subseteq I_2$ ideálok $\overline{K}\left[x\right]$-ben, akkor $Z\left(I_2\right) \subseteq Z\left(I_1\right)$.*

2.2.8. Állítás. *Ha V affin algebrai halmaz, akkor $Z\left(I_V\right) = V$.*

2.2.9. Állítás. *Ha $I \lhd \overline{K}\left[x\right]$, akkor $I_{Z(I)} = \sqrt{I}$.*

2.2.10. Tétel. (Hilbert-nullstellensatz) *Legyen $I \lhd \overline{K}\left[x_1;\ldots;x_n\right]$ és legyen p olyan polinom, ami eltűnik $Z\left(I\right)$ minden pontján. Ekkor alkalmas $m \in \mathbb{N}^+$ esetén $p^m \in I$.*

2.2.11. Definíció. ***Zariski-topológiának** nevezzük A^n_K-en azt a topológiát, ahol a zárt halmazokat az affin algebrai halmazok adják. Zariski-topológiának nevezzük egy S affin algebrai halmazon az S által indukált altértopológiát.*

2.2.12. Megjegyzés. Ez 2.2.5 állítás következtében valóban topológiát definiál A^n_K-en.

2.2.13. Definíció. *Azt mondjuk egy X topologikus tér valamely nemüres Z halmazára, hogy **irreducibilis**, ha Z nem áll elő két valódi zárt részhalmaza uniójaként az altértopológiában.*

2.2.14. Definíció. *Az irreducibilis affin algebrai halmazokat **affin varietásnak** hívjuk. Ha $Y \subseteq X$ valamint X és Y mindketten affin varietások, akkor azt mondjuk, hogy Y az X **affin részvarietása**.*

2.2.15. Állítás. *Egy V affin algebrai halmaz pontosan akkor irreducibilis, ha I_V prímideál.*

2.2.16. Állítás. *Tetszőleges affin algebrai halmaz előáll affin varietások véges uniójaként. Ha feltesszük, hogy a generáló affin varietások egyike sem tartalmazza a másikat, akkor ez a felírás egyértelmű.*

Hasonlóképp bevezethető az eddigi fogalmak projektív változata is.

2.2.17. Definíció. ***K feletti projektív n-téren*** *értjük és $\mathbb{P}^n_K$-nel jelöljük A^{n+1}_K egyeneseit, azaz*

$$\mathbb{P}^n_K = \{(x_0 : \ldots : x_n) : x_j \neq 0 \text{ valamely } j \in [\![0; n]\!] \text{ esetén}\}.$$

$\mathbb{P}^n(K)$ jelöli a projektív tér ***K-racionális pontjait****, vagyis a projektív tér azon pontjainak halmazát, melyeknek alkalmas felírásában minden koordináta K-beli.*

2.2.18. Megjegyzés. Itt a definícióban a kettőspont homogén koordinátázást jelöl.

2.2.19. Definíció. *Egy $S \subseteq \mathbb{P}^n_K$ halmazt* ***projektív algebrai halmaznak*** *nevezünk, ha előáll homogén polinomok közös nullhelyeként. A projektív téren is definiálható a* ***Zariski-topológia****, a zárt halmazokat itt a projektív algebrai halmazok adják. Az irreducibilis projektív algebrai halmazokat hívjuk* ***projektív varietásnak****.*

2.2.20. Definíció. *Egy projektív algebrai halmaz valamely nyílt részhalmazát* ***kváziprojektív algebrai halmaznak*** *nevezzük. Az irreducibilis kváziprojektív algebrai halmazokat* ***kváziprojektív varietásnak****, vagy az egyszerűség kedvéért egyszerűen* ***varietásnak*** *hívjuk.*

2.2.21. Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy az affin- illetve projektív varietások egyaránt varietások, azonban érdemes megjegyezni, hogy létezik olyan varietás, amely se nem affin-, sem pedig projektív varietás, például $\mathbb{P}^2_K \setminus \{(0 : 0 : 1)\}$.

2.2.22. Definíció. *Legyen $V \subseteq A^n_K$ affin varietás. Legyen*

$$K[V] = K[x_1; \ldots; x_n] / I_V.$$

Ekkor $K[V]$-t a V varietás ***koordinátagyűrűjének*** *hívjuk.*

2.2.23. Állítás. *Tetszőleges V affin varietásra $K[V]$ integritási tartomány.*

2.2.24. Jelölés. Legyen $V \subseteq A_K^n$ affin varietás. Jelölje ekkor $K[V]$ hányadostestét $K(V)$.

A továbbiakban értelmezzük a varietások közt menő leképezéseket.

2.2.25. Definíció. *Legyen X egy varietás, valamint $x_0 \in X$. Ekkor azt mondjuk, hogy $f\colon X \to \overline{K}$ leképezés **reguláris x_0-ban**, ha létezik x_0-nak olyan $U \subseteq X$ affin környezete (tegyük fel, hogy $U \subseteq A_K^n$) és léteznek olyan $p; q \in \overline{K}[x_1; \ldots; x_n]$ polinomok, hogy $q(x_0) \neq 0$ és $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ minden $x \in U$ esetén. Továbbá f **reguláris**, ha minden $x \in X$-ben reguláris.*

2.2.26. Megjegyzés. A reguláris függvények gyűrűt alkotnak, ezt a gyűrűt $\mathcal{O}(X)$ jelöli.

2.2.27. Definíció. *Legyen X varietás és $Y \subseteq X$ egy részvarietása. Ekkor **X-nek az Y-on lévő lokális gyűrűjének** nevezzük és $\mathcal{O}_{Y;X}$-nek jelöljük azon $(U; f)$ párok ekvivalencia-osztályainak halmazát, ahol $U \subseteq X$ olyan nyílt halmaz, melyre $U \cap Y \neq \emptyset$ és f reguláris U-n, végül $(U_1; f_1)$ és $(U_2; f_2)$ pontosan akkor tartoznak egy osztályba, ha $U_1 \cap U_2$ metszetre megszorítva $f_1 = f_2$, amint $U_1 \cap U_2 \neq 0$.*

2.2.28. Megjegyzés. Speciálisan ha $Y = X$, akkor az imént definiált $\mathcal{O}_{X;X}$ lokális gyűrűt ***X* függvénytestének** hívjuk és a $\overline{K}(X)$ jelölést alkalmazzuk. Ez valóban test, és tetszőleges $Y \subseteq X$ részvarietás esetén tartlamazza $\mathcal{O}_{Y;X}$-et.

2.2.29. Megjegyzés. Speciálisan ha $Y = \{p\}$, akkor az $\mathcal{O}_{p;X}$ jelölést alkalmazzuk az egyszerűség kedvéért.

2.2.30. Jelölés. Az $\mathcal{O}_{Y;X}$ lokális gyűrűhöz tartozó egyértelműen létező maximális ideált $\mathcal{M}_{Y;X}$ jelöli. Azaz,

$$\mathcal{M}_{Y;X} = \{f \in \mathcal{O}_{Y;X} \colon f(x) = 0 \ \forall x \in Y\}.$$

Ha $Y = \{p\}$, akkor az $\mathcal{M}_{p;X}$ jelölést alkalmazzuk.

2.2.31. Definíció. *Egy X varietást **$x \in X$ pontban normálisnak** nevezünk, ha $\mathcal{O}_{x;X}$ egészre zárt. Azt mondjuk, hogy X **normális**, ha minden pontjában normális.*

2.2.32. Definíció. *Legyenek X és Y varietások, $\phi\colon X \to Y$ leképezés. Ekkor azt mondjuk, hogy ϕ **morfizmus**, ha folytonos, valamint tetszőleges $U \subseteq Y$ nyílt halmaz és U-n reguláris f leképezés esetén $f \circ \phi$ reguláris $\phi^{-1}(U)$-n. ϕ **reguláris x-ben**, ha morfizmus x egy környezetében.*

2.2.33. Definíció. *Legyen $\phi\colon V \to W$ affin varietások közt menő morfizmus, ϕ^* a ϕ által indukált $\overline{K}[W] \to \overline{K}[V]$ leképezés. Ekkor azt mondjuk, hogy ϕ* ***véges morfizmus****, ha $\overline{K}[V]$ végesen generált $\overline{K}[W]$-modulus. ϕ* ***foka*** *a*

$$\deg(\phi) = \left[\overline{K}(V) : \phi^*\overline{K}(W)\right]$$

szám. Egy $\phi\colon V \to W$ varietások közt menő morfizmus ***véges****, ha tetszőleges $U \subseteq W$ affin nyílt részhalmazra $\phi^{-1}(U) \subseteq V$ affin, és ϕ erre az ősre megszorítva affin értelemben véges morfizmus.*

2.2.34. Példa.

1. Legyen $m; n \in \mathbb{N}^+$, ekkor tekintsük az $S_{m;n}\colon \mathbb{P}_K^m \times \mathbb{P}_K^n \to \mathbb{P}_K^{(m+1)\cdot(n+1)-1}$ úgynevezett **Segre-leképezést**, ami tetszőleges $x = (x_0; \ldots; x_m) \in \mathbb{P}_K^m$ és $x = (y_0; \ldots; y_n) \in \mathbb{P}_K^n$ pontok esetén az $(x; y) \in \mathbb{P}_K^{(m+1)\cdot(n+1)-1}$ ponthoz az $(x_\alpha \cdot y_\beta)_{\substack{0 \le \alpha \le m \\ 0 \le \beta \le n}} \in \mathbb{P}_K^{(m+1)\cdot(n+1)-1}$ pontot rendeli.

2. Legyen Φ_d az úgynevezett ***d*-monomiális beágyazás**, mely egy $x \in \mathbb{P}_K^n$ ponthoz $\left(M_0(x); \ldots; M_{\binom{n+d}{n}-1}(x)\right)$ pontot rendeli, ahol $M_0; \ldots; M_{\binom{n+d}{n}-1}$ a lehetséges d fokú monomok $n+1$ változóban.

2.2.35. Definíció. *Legyenek X és Y varietások, $\phi\colon X \to Y$ leképezés, mely X egy nemüres részhalmazán morfizmus. Ekkor ϕ-t* ***racionális leképezésnek*** *nevezzük.*

2.2.36. Definíció. *Legyenek X és Y varietások, $\phi\colon X \to Y$ racionális leképezés. Ekkor ϕ-t* ***biracionális leképezésnek*** *nevezzük, ha ϕ^{-1} értelmes és racionális leképezést definiál. Azt mondjuk továbbá, hogy X és Y* ***biracionálisan ekvivalensek****, ha létezik köztük menő biracionális leképezés.*

2.2.37. Definíció. *Egy X varietás* ***dimenzióján*** *az $\overline{K} \le \overline{K}(X)$ bővítés transzcendenciafokát értjük. X varietás dimenzióját $\dim(X)$ jelöli. Tegyük fel, hogy X varietás egy n dimenziós affin vagy projektív térben. Ekkor $\operatorname{codim}(X)$ jelöli X* ***kodimenzióját*** *az adott térben, ahol $\operatorname{codim}(X) = n - \dim(X)$.*

2.2.38. Definíció. ***Görbe*** *alatt egy 1 dimenziós varietást értünk. A 2 dimenziós varietásokat* ***felületnek*** *hívjuk.*

2.2.39. Definíció. ***Hiperfelületnek*** *egyetlen, homogén nemnulla polinommal definiált varietást nevezünk.*

2.2.40. Állítás. *A^n_K-ben vagy $\mathbb{P}^n_K$-ben tetszőleges $(n-1)$ dimenziós varietás biracionálisan ekvivalens egy hiperfelülettel A^n_K-ben vagy $\mathbb{P}^n_K$-ben.*

2.2.41. Definíció. *Legyen X egy varietás valamely n dimenziós térben, és tegyük fel, hogy X-et az $f_1; \ldots ; f_m \in K[x_1; \ldots ; x_n]$ polinomok generálják. Tekintsük ekkor az $F = (f_1; \ldots ; f_m)$ függvény Jacobi-mátrixát (amit a formális deriváltak definiálnak) egy $p \in X$ pontban, ez egy lineáris $K^n \to K^m$ leképezés. Ennek a leképezésnek a magját az X varietás p pontbeli* ***érintőterének*** *nevezzük és $T_p(X)$-szel jelöljük.*

2.2.42. Megjegyzés. Az érintőtér nem függ a generáló polinomok választásától.

2.2.43. Tétel. *Legyen X varietás, $p \in X$ tetszőleges. Ekkor $\dim(T_p(X)) \geq \dim(X)$, valamint létezik egy $\emptyset \neq U \subseteq X$ nyílt halmaz, melyre minden $p \in U$ esetén $\dim(T_p(X)) = \dim(X)$.*

2.2.44. Definíció. *Legyen X varietás és $p \in X$. Ekkor ha $\dim(T_p(X)) > \dim(X)$, p-t* ***szinguláris pontnak*** *nevezzük, míg $\dim(T_p(X)) = \dim(X)$ esetén azt mondjuk, hogy p* ***nemszinguláris pont****. X varietás* ***nemszinguláris*** *vagy* ***sima****, ha minden pontja nemszinguláris pont.*

2.2.45. Jelölés. Legyenek $V; W$ varietások, $f\colon V \to W$ racionális leképezés, és legyen $p \in V$ reguláris pont, melyre $f(p) = q$. Ekkor f egy

$$\tilde{f}\colon \mathcal{O}_{q;W} \to \mathcal{O}_{p;V}$$

lokális gyűrűk közti homomorfizmust indukál, és így egy

$$f^*\colon \mathcal{M}_{q;W} \Big/ \mathcal{M}^2_{q;W} \to \mathcal{M}_{p;V} \Big/ \mathcal{M}^2_{p;V}$$

$\overline{K}$-lineáris leképezést is egyúttal.

2.2.46. Definíció. *Az f által definiált p-beli $\mathrm{d}f(p) : T_p(V) \to T_q(W)$* ***érintőleképezés*** *az f^* lineáris leképezés transzponáltja.*

2.2.47. Állítás. *A fent definiált d operátorral érvényesek a $\mathrm{d}(f+g) = \mathrm{d}f + \mathrm{d}g$ és a $\mathrm{d}(f \cdot g) = g \cdot \mathrm{d}f + f \cdot \mathrm{d}g$ azonosságok.*

2.2.48. Definíció. *Legyen C egy görbe. Egy* $\mathrm{d}\colon \overline{K}(C) \to \overline{K}(C)$ *leképezést* ***(meromorf) differenciálformának*** *nevezünk, ha tetszőleges $f; g \in \overline{K}(C)$ és $\alpha \in \overline{K}$ esetén*

1. $\mathrm{d}(f+g) = \mathrm{d}f + \mathrm{d}g$
2. $\mathrm{d}(f \cdot g) = f \cdot \mathrm{d}g + g \cdot \mathrm{d}f$
3. $\mathrm{d}\alpha = 0$.

2.2.49. Jelölés. A $\overline{K}(C) \to \overline{K}(C)$ differenciálformák terét Ω_C jelöli.

2.2.50. Megjegyzés. Ω_C 1 dimenziós vektortér $\overline{K}(C)$ felett.

2.2.51. Definíció. *Legyen X varietás, $r \in \mathbb{N}^+$. Ekkor egy X-en értelmezett* ***absztrakt r-formán*** *egy ω leképezést értünk, mely tetszőleges $x \in X$ ponthoz egy*

$$\omega(x) : \bigwedge^r (T_x(X)) \to K$$

lineáris leképezést rendel. ***Reguláris r-formán*** *egy absztrakt r-formát értünk, melyre minden $x \in X$ pontra létezik $U \ni x$ környezet, valamint $\alpha = (\alpha_1; \ldots; \alpha_r)$ multiindexszel $g_\alpha; f_{\alpha_1}; \ldots; f_{\alpha_r} \in \mathcal{O}(U)$ reguláris függvények, hogy*

$$\omega = \sum_{\alpha} g_\alpha \cdot \mathrm{d}f_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge f_{\alpha_r}.$$

Az U-n reguláris r-formák terét $\Omega^r[U]$ jelöli.

2.2.52. Definíció. *Legyen C görbe és $p \in C$. Legyen $f \in \mathcal{O}_{p;C}$ esetén*

$$\mathrm{ord}_p(f) = \sup\left\{d \in \mathbb{Z} \colon f \in \mathcal{M}_{p;C}^d\right\}.$$

Ezt a leképezést az $\mathrm{ord}_p\left(\frac{f}{g}\right) = \mathrm{ord}_p(f) - \mathrm{ord}_p(g)$ összefüggés segítségével kiterjeszthetjük $\overline{K}(C) \to \overline{\mathbb{Z}}$ függvénnyé. Az így kapott kiterjesztett leképezést a C görbe ***p pontbeli rendfüggvényének*** *hívjuk.*

2.2.53. Definíció. *Legyen $t \in \overline{K}(C)$ és $p \in C$ olyan, hogy $\mathrm{ord}_p(t) = 1$. Ekkor azt mondjuk, hogy t* ***uniformizere*** *C-nek p-ben.*

2.2.54. Állítás. *Legyen t uniformizere C-nek p-ben és legyen $\omega \in \Omega_C$. Ekkor egyértelműen létezik $g \in \overline{K}(C)$, hogy $\omega = g \cdot \mathrm{d}t$. Ekkor az ilyen tulajdonságú $g \in \overline{K}(C)$ függvényre a $g = \frac{\omega}{\mathrm{d}t}$ jelölést is alkalmazzuk.*

2.3. Divizorok

2.3.1. Definíció. *Legyen X egy varietás. Ekkor az X-en 1-kodimenziós részvarietások által generált szabad Abel-csoportot a* ***Weil-divizorok csoportjának*** *nevezzük X-en, és a* $\mathrm{Div}\,(X)$ *jelölést alkalmazzuk.*

2.3.2. Definíció. *Legyen $D \in \mathrm{Div}\,(X)$ egy Weil-divizor. Ekkor $D = \sum_Y n_Y \cdot Y$ formális véges összegként írható fel, ahol Y az 1-kodimenziós részvarietásokon fut, n_Y pedig valamilyen egész együttható. Ekkor értelmezhetjük a*

$$\deg\,(D) = \sum_Y n_Y$$

összeget, amit a D divizor ***fokának*** *nevezünk.*

2.3.3. Definíció. *Ha az előbbi felírásban minden Y-ra $n_Y \geq 0$, akkor D-t* ***effektív Weil-divizornak*** *mondjuk.*

2.3.4. Definíció. *Szintén az előbbi felírás jelöléseivel élve azon Y-ok halmazát, melyek n_Y multiplicitása nem 0, a D Weil-divizor* ***tartójának*** *nevezzük és* $\mathrm{supp}\,(D)$*-vel jelöljük.*

2.3.5. Definíció. *Legyen C egy görbe és $f \in K\,(C)^*$ egy racionális leképezés. Ekkor* ***f Weil-divizora***

$$\mathrm{div}\,(f) = \sum_{x \in C} \mathrm{ord}_x\,(f)\, x \in \mathrm{Div}\,(X)\,.$$

2.3.6. Megjegyzés. A div definíciójában szereplő szummában csak véges sok nemnulla tag van.

2.3.7. Definíció. *Azt mondjuk, hogy $D \in \mathrm{Div}\,(C)$* ***Weil-fődivizor****, ha $D = \mathrm{div}\,(f)$ valamely $f \in \overline{K}\,(C)^*$-ra.*

2.3.8. Megjegyzés. A Weil-fődivizorok $\mathrm{Div}\,(C)$ egy részcsoportját alkotják.

2.3.9. Definíció. *D_1 és D_2 Weil-divizorokat* ***lineárisan ekvivalensnek*** *tekintjük, ha a különbségük Weil-fődivizor. D_1 és D_2 lineáris ekvivalenciáját $D_1 \sim D_2$ jelöli.*

2.3.10. Definíció. *X varietás effektív Weil-divizorainak egy halmazát* ***lineáris rendszernek*** *nevezzük, ha elemei páronként lineárisan ekvivalensek.*

2.3.11. Definíció. *D Weil-divizor **teljes lineáris rendszerének** nevezzük és $|D|$-nek jelöljük a D-vel lineárisan ekvivalens effektív divizorok halmazát.*

2.3.12. Megjegyzés. A lineáris rendszerek megfeleltethetők projektív tereknek, így egy lineáris rendszer projektív alteret képez a Weil-divizor teljes lineáris rendszerében, mint projektív térben.

2.3.13. Definíció. *Egy D Weil-divizor L lineáris rendszerének a **dimenzióján** az L-nek megfelelő projektív altér dimenzióját értjük a $|D|$-nek megfelelő projektív térben.*

2.3.14. Definíció. *Egy L lineáris rendszer **alappontjainak halmaza** az L-beli Weil-divizorok tartóinak metszete. Egy D Weil-divizor alappontjainak halmaza nem más, mint $|D|$ teljes lineáris rendszer alappontjainak halmaza, ezt $\mathrm{Bl}\,(D)$ jelöli.*

2.3.15. Definíció. *Legyen L egy n dimenziós lineáris rendszer, melyet a korábbiak alapján alkalmas $V \leq L\,(D)$-re $\mathbb{P}_K\,(V)$ paraméterez. Legyen $f_0; \ldots; f_n$ bázis V-ben, ekkor a $\phi_L \colon X \to \mathbb{P}_K^n$ leképezést, melyre $x \in X$ esetén $\phi_L\,(x) = (f_0\,(x)\,; \ldots; f_n\,(x))$, az **$L$-hez társított racionális leképezésnek** nevezzük.*

2.3.16. Definíció. *Azt mondjuk, hogy X projektív varietáson egy L lineáris rendszer **nagyon bőséges**, ha ϕ_L beágyazás. Egy D Weil-divizort **nagyon bőségesnek** mondunk, ha $|D|$ teljes lineáris rendszer nagyon bőséges. D **bőséges**, ha valamely pozitív számszorosa nagyon bőséges.*

2.3.17. Állítás. *Legyen D tetszőleges divizor, H pedig legyen nagyon bőséges. Ekkor*

1. *létezik $m \in \mathbb{N}$, hogy $D + m \cdot H$ alappontmentes;*
2. *ha D alappontmentes, akkor $D + H$ nagyon bőséges.*

2.3.18. Megjegyzés. Speciálisan bármely divizor előáll két nagyon bőséges divizor különbségeként.

2.3.19. Definíció. *X varietás **osztálycsoportjának** nevezzük és $\mathrm{Cl}\,(X)$-szel jelöljük a*

$$\mathrm{Div}\,(C)\,/_{\sim}$$

faktort, ahol $\sim$ a lineáris ekvivalencia.

Most definiálunk egy másik divizorfogalmat, a Cartier-divizorokét. Ezek izomorfak a Weil-divizorokkal, de néha hasznosabb másik megközelítésből tekinteni rájuk. Ekkor persze a Weil-divizorokkal kapcsolatos fogalomkörnek is bevezethető a maga megfelelője a Cartier-divizorok körében.

2.3.20. Definíció. *Legyen X egy varietás. Ekkor X-en **Cartier-divizornak** nevezünk egy $(U_\alpha; f_\alpha)_{\alpha\in I}$ rendszert, melyre*

1. *U_α nyílt halmazok, melyek X egy fedését adják;*
2. *f_α nemnulla racionális leképezés minden α-ra;*
3. *$f_\alpha f_\beta^{-1} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta)^*$*

*Azt mondjuk, hogy $(U_\alpha; f_\alpha)_{\alpha\in I}$ és $(V_\beta; g_\beta)_{\beta\in J}$ Cartier-divizorok **ekvivalensek**, ha minden $\alpha \in I$ és $\beta \in J$ indexekre*

$$f_\alpha g_\beta^{-1} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap V_\beta)^* .$$

2.3.21. Definíció. *X-en értelmezett $(U_\alpha; f_\alpha)_{\alpha\in I}$ és $(V_\beta; g_\beta)_{\beta\in J}$ Cartier-divizorok **összegén***

$$(U_\alpha; f_\alpha)_{\alpha\in I} + (V_\beta; g_\beta)_{\beta\in J} = (U_\alpha \cap V_\beta; f_\alpha g_\beta)_{(\alpha;\beta)\in I\times J}$$

Cartier-divizort értjük. Ezzel az összeadással a Cartier-divizorok csoportot alkotnak, mely csoportot $\mathrm{CaDiv}(X)$ jelöl.

2.3.22. Definíció. *Legyen $f \in K(X)^*$, ekkor az **f-hez tartozó Cartier-divizornak***

$$\mathrm{div}(f) = \{(X; f)\} .$$

*Cartier-divizort hívjuk. Egy $D \in \mathrm{CaDiv}(X)$ Cartier-divizort **Cartier-ődivizornak** nevezünk, ha alkalmas $f \in K(X)^*$ esetén $D = \mathrm{div}(f)$. Két Cartier-divizort **lineárisan ekvivalensnek** tekintünk, ha különbségük Cartier-ődivizor.*

2.3.23. Definíció. *X **Picard-csoportjának** nevezzük a*

$$\mathrm{Pic}(X) = {}^{\mathrm{CaDiv}(X)}/_{\sim}$$

faktorcsoportot, ahol $\sim$ a lineáris ekvivalencia.

2.3.24. Állítás. *Legyen X sima varietás, ekkor* $\mathrm{Div}\,(X)$ *és* $\mathrm{CaDiv}\,(X)$ *izomorfak, csak úgy mint* $\mathrm{Cl}\,(X)$ *és* $\mathrm{Pic}\,(X)$*.*

2.3.25. Definíció. *Legyen $g\colon X \to Y$ egy varietások közt menő morfizmus, $D \in \mathrm{CaDiv}\,(Y)$ Cartier-divizor, melyet $\{(U_\alpha; f_\alpha) : \alpha \in I\}$ párok definiálnak. Ekkor bevezetjük a*

$$g^*\,(D) = \left\{\left(g^{-1}\,(U_\alpha)\,; f_\alpha \circ g\right) : \alpha \in I\right\} \in \mathrm{CaDiv}\,(X)$$

Cartier-divizort X-en. Ez megad egy $g^*\colon$ $\mathrm{CaDiv}\,(Y) \to \mathrm{CaDiv}\,(X)$ csoporthomomorfizmust, melyet g ***visszahúzásának*** *nevezünk.*

2.3.26. Definíció. *Legyen x nemszinguláris pont egy n-dimeziós X varietáson, továbbá legyenek $t_1; \ldots; t_n \in \mathcal{O}_{x;X}$ függvények. Azt mondjuk, hogy $t_1; \ldots; t_n$* ***lokális paraméterek*** *x-ben, ha $\mathcal{M}_{x;X}$-beliek, és $\mathcal{M}_{x;X} \big/ \mathcal{M}_{x;X}^2$ egy bázisát adják. Továbbá azt mondjuk, hogy $t_1; \ldots; t_n$* ***lokális koordináták*** *x-ben, ha $t'_1; \ldots; t'_n$ lokális paraméterek x-ben, ahol minden k-ra $t'_k = t_k - t_k\,(x)$.*

2.3.27. Definíció. *Legyen X egy n dimenziós sima varietás, $\omega \in \Omega^n\,[X]$. Tetszőleges U nyílt halmaz esetén valamely $f_U \in K\,(X)$ racionális függvénnyel*

$$\omega = f_U \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n,$$

ahol $x_1; \ldots; x_n$ lokális koordináták. Ekkor definiálhatunk ω-hoz egy divizort a következőképp:

$$\mathrm{div}\,(\omega) = \{(U; f_U) : U \subseteq X \text{ nyílt}\}\,.$$

Ekkor tetszőleges $\omega' \in \Omega^n\,[X]$ esetén $\omega' = f\omega$ valamely $f \in K\,(X)^*$ racionális függvényre, így $\mathrm{div}\,(\omega') = \mathrm{div}\,(\omega) + \mathrm{div}\,(f)$. Az ilyen alakú divizorok osztályát ***kanonikus divizorosztálynak*** *nevezzük, ennek egy elemét pedig* ***kanonikus divizotnak*** *X-en. X egy kanonikus divizorát K_X jelöli.*

2.3.28. Állítás. *Legyenek $X; Y$ sima varietások. Ekkor*

$$K_{X\times Y} = p_1^*\,(K_X) + p_2^*\,(K_Y)\,,$$

ahol p_1 és p_2 az első- illetve második projekciók.

2.3.29. Jelölés. Legyen D egy divizor X varietáson. Jelölje ekkor $L\,(D)$ a következő K feletti vektorteret:

$$L\,(D) = \{f \in K\,(X)^* : D + \mathrm{div}\,(f) \geq 0\} \cup \{0\}\,.$$

Jelölje továbbá $\ell\,(D)$ az $L\,(D)$-nek mint K feletti vektortérnek a dimenzióját.

2.3.30. Tétel. (Riemann–Roch-tétel) *Legyen C egy sima projektív görbe. Ekkor létezik egy $g \in \mathbb{N}$ szám, hogy minden $D \in \mathrm{Div}\,(C)$ esetén*

$$\ell\,(D) - \ell\,(K_C - D) = \deg\,(D) - g + 1.$$

2.3.31. Definíció. *A 2.3.30 Riemann–Roch-tételben szereplő $g \in \mathbb{N}$ számot a C sima projektív görbe **génuszának** nevezzük.*

2.3.32. Következmény. Először $D = 0$-val helyettesítve $\ell\,(K_C) = g$ adódik, ezt felhasználva pedig a $D = K_C$ helyettesítésből kiderül, hogy $\deg\,(K_C) = 2 \cdot g - 2$.

2.3.33. Definíció. *Legyen X egy n dimenziós varietás, $D_1; \ldots; D_n$ pedig legyenek fődivizorai X-nek, hogy $\dim\left(\bigcap_{k=1}^n D_k\right) = 0$. Legyen továbbá $x \in X$, valamint legyen minden k-ra f_k a D_k fődivizorhoz tartozó lokális egyenlet. Ekkor x-ben a $D_1; \ldots; D_n$ **lokális metszési indexének** nevezzük a*

$$(D_1; \ldots; D_n)_x = \dim_K \left(\mathcal{O}_{x;X} \big/ (f_1; \ldots; f_n) \right)$$

*számot. Továbbá $D_1; \ldots; D_n$ **metszési indexének** nevezzük a*

$$(D_1; \ldots; D_n) = \sum_{x \in X} (D_1; \ldots; D_n)_x$$

*összeget. Azt mondjuk, hogy $D_1; \ldots; D_n$ fődivizorok **tranzverzálisan metszik egymást,** ha a $(D_1; \ldots; D_n)_x$ lokális metszési index minden x-re 0 vagy 1.*

2.3.34. Megjegyzés. Ha a metszés tranzverzális, akkor a metszési index épp a $\bigcap_{k=1}^n D_k$ metszet pontjait számlálja. Ez alapján ilyenkor a definíció lineárisan kiterjeszthető tetszőleges divizorokra is.

2.3.35. Lemma. *Legyen X egy normális projektív varietás és $D_1; \ldots; D_n \in \mathrm{Div}\,(X)$ divizorok. Ekkor léteznek $D'_1; \ldots; D'_n \in \mathrm{Div}\,(X)$ divizorok, hogy minden k-ra $D_k \sim D'_k$ és $\left(\bigcap_{k=1}^n \mathrm{supp}\,(D'_k)\right) = 0$. Ha $D'_1; \ldots; D'_n$ ilyen divizorok és $D_1; \ldots; D_n$ divizorok eleget tesznek a $\dim\left(\bigcap_{k=1}^n \mathrm{supp}\,(D_k)\right) = 0$ feltételnek is, akkor*

$$(D_1; \ldots; D_n) = (D'_1; \ldots; D'_n)\,.$$

2.3.36. Definíció. *Legyen X normális projektív varietás, $D_1; \ldots; D_n$ tetszőlegese divizorok rajta. Legyenek az előző lemma nyomán $D'_1; \ldots; D'_n$ olyan divizorok, melyekre $D_k \sim D'_k$*

minden k esetén és $\left(\bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{supp}\left(D'_k\right)\right) = 0$*. Ekkor* $D_1; \ldots; D_n$ *divizorok* ***metszési indexén*** *a*

$$(D_1; \ldots; D_n) = (D'_1; \ldots; D'_n)$$

számot értjük.

2.3.37. Jelölés. Ha nem egyértelmű, hogy mely varietáson értelmezzük a metszési indexet, akkor $D_1; \ldots; D_n \in \operatorname{Div}(X)$ divizorok metszési indexét $(D_1; \ldots; D_n)_X$ jelöli.

A következő tétel eszközt ad a kezünkbe, hogyan tudunk metszési indexet számolni morfizmus általi képen.

2.3.38. Tétel. *Legyen* $f\colon X \to Y$ *normális projektív varietások közt menő véges morfizmus, valamint* $D_1 \ldots; D_n \in \operatorname{Div}(Y)$ *divizorok. Ekkor*

$$(f^*D_1; \ldots; f^*D_n)_X = \deg(f) \cdot (D_1; \ldots; D_n)_Y .$$

2.3.39. Állítás. *Legyen* C *egy sima projektív görbe,* $p_0 \in C$ *rögzített pont, valamint legyen* $\Delta = \{(p; p) : p \in C\}$ *a diagonális divizor* $C \times C$*-n. Ekkor*

1. $$(\{p_0\} \times C; \{p_0\} \times C) = (C \times \{p_0\}; C \times \{p_0\}) = 0;$$

2. $$(\{p_0\} \times C; C \times \{p_0\}) = (\Delta; \{p_0\} \times C) = (\Delta; C \times \{p_0\}) = 1;$$

3. $$(\Delta; \Delta) = 2 - 2 \cdot g.$$

2.3.40. Tétel. (Riemann–Roch-tétel felületekre) *Legyen* S *egy sima felület. Ekkor létezik egy* $p_a(S)$ *egész szám, hogy bármely* $D \in \operatorname{Div}(S)$ *divizorra*

$$\ell(D) - s(D) + \ell(K_S - D) = \frac{1}{2} \cdot (D; D - K_S) + 1 + p_a(S)$$

valamely $s(D) \in \mathbb{N}$ *számra. Ekkor* $p_a(S)$ *számot* S ***aritmetikai génuszának*** *nevezzük.*

2.3.41. Állítás. *Legyenek* C_1 *és* C_2 *sima görbék rendre* g_1 *és* g_2 *génusszal. Ekkor*

$$p_a(C_1 \times C_2) = g_1 \cdot g_2 - g_1 - g_2.$$

Gyakran nehéz $s(D)$ értékét meghatározni. A következő tétel elégséges feltételt ad arra, hogy ez az érték 0 legyen.

2.3.42. Tétel. (Kodaira-tétel) *0 karakterisztikájú test fölött $s(D) = 0$, ha $D = K_S + D'$ valamilyen D' bőséges divizorra.*

2.4. Magasságfüggvények

A következőkben bevezetjük a magasságfüggvény fogalmát számtestek felett. Emlékezzünk, hogy M_K jelölte a K számtest feletti standard abszolútértékek halmazát.

2.4.1. Jelölés. Legyen K számtest és $v \in M_K$. Jelölje ekkor K_v a K számtest teljessé tételét v szerint.

2.4.2. Definíció. *Legyen $v \in M_K$, ahol K valamilyen számtest. Ekkor az*

$$n_v = [K_v : \mathbb{Q}_v]$$

*számot **v lokális fokszámának** nevezzük.*

2.4.3. Definíció. *$v \in M_K$ esetén jelölje $\|\cdot\|_v$ a v abszolútérték n_v-edik hatványát. Ekkor a $\|\cdot\|_v$ abszolútértéket **v normalizált abszolútértékének** nevezzük.*

2.4.4. Állítás. (Szorzat azonosság) *K számtest és $x \in K \setminus \{0\}$ esetén*

$$\prod_{v \in M_k} \|x\|_v = 1.$$

2.4.5. Definíció. *Legyen $p = (x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n(K)$, ahol a homogén koordináták választott reprezentáns eleme K-racionális. Ekkor p **(multiplikatív) magasságának** nevezzük a*

$$H_K(p) = \prod_{v \in M_K} \max\{\|x_0\|_v ; \ldots ; \|x_n\|_v\}$$

*számot, valamint p **logaritmikus magasságának** nevezzük a*

$$h_K(P) = \log(H_K(P))$$

értéket.

2.4.6. Megjegyzés. A multiplikatív magasság jóldefiniált, a logaritmikus magasság pedig mindig értelmes, hiszen H_K pozitív.

2.4.7. Lemma. *Legyenek $K \leq L$ számtestek, valamint a bővítés véges. Ekkor*

1. $H_K(p) \geq 1$ *minden* $p \in \mathbb{P}^n(K)$ *esetén.*
2. $H_L(p) = H_K(p)^{[L:K]}$.

A lemma állítása szerint bevezethető a következő fogalom.

2.4.8. Definíció. *Legyen K számtest, $p \in \mathbb{P}^n(K)$. Legyen ekkor*

$$H(p) = H_K(p)^{\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}}.$$

*Az így definiált H leképezést **abszolút multiplikatív magasságnak** hívjuk. Értelmezhetjük a $h = \log \circ H$ leképezést, ezt a függvényt **abszolút logaritmikus magasságnak** nevezzük.*

2.4.9. Állítás. *Legyen $S_{m;n}$ a Segre-leképezés, Φ_d pedig a d-monomiális beágyazás $\mathbb{P}_K^m$-ből. Jelöljön tetszőleges N-re H_N hipersíkot $\mathbb{P}_K^N$-ben. Ekkor*

1. $$S_{m;n}^*\left(H_{(m+1)\cdot(n+1)-1}\right) \sim H_m \times \mathbb{P}_K^n + \mathbb{P}_K^m \times H_n;$$
2. *tetszőleges $x \in \mathbb{P}^m\left(\overline{Q}\right)$ és $y \in \mathbb{P}^n\left(\overline{Q}\right)$ pontokra*
$$h\left(S_{m;n}(x;y)\right) = h(x) + h(y);$$
3. $$h\left(\Phi_d(x)\right) = d \cdot h(x)$$

A következő lemmát majd fogjuk használni a 3.0.1 Faltings-tétel bizonyítása során.

2.4.10. Lemma. (Siegel-lemma) *Legyen K számtest, $d = [K : \mathbb{Q}]$, $a_{\alpha;\beta} \in K$ nem mind 0 elemek, ahol $\alpha \in I; \beta \in J$ véges indexhalmazok, hogy $d \cdot |J| < |I|$. Ha p jelöli az egyik* *olyan vektort, melynek $a_{\alpha;\beta}$-k a koordinátái, akkor alkalmas $x \in \mathbb{Z}^{|I|}$ esetén minden $\beta \in J$ esetén*

$$\sum_{\alpha \in I} a_{\alpha;\beta} \cdot x_\alpha = 0$$

és

$$\max_{\alpha \in I} |x_\alpha| \leq \left(|I| \cdot H\left(p\right)\right)^{\frac{d \cdot |J|}{|I| - d \cdot |J|}}.$$

2.4.11. Definíció. *Legyen $P \in K\left[X_1;\ldots;X_m\right]$ polinom és legyenek $\alpha_1;\ldots;\alpha_m \in K$, továbbá legyenek $r_1;\ldots;r_m \in \mathbb{N}^+$ számok. Ekkor P* ***indexén*** *$(\alpha_1;\ldots;\alpha_m;r_1;\ldots;r_m)$-re vonatkozólag azt a legkisebb*

$$\frac{i_1}{r_1} + \ldots + \frac{i_m}{r_m}$$

számot értjük, amire

$$\partial_{i_1;\ldots;i_m} P\left(\alpha_1;\ldots;\alpha_m\right) \neq 0.$$

P indexét $\mathrm{Ind}\left(P\right)$ jelöli.

2.4.12. Lemma. (Roth-lemma) *Legyen $m \in \mathbb{N}^+$ és $P \in \overline{Q}\left[X_1;\ldots;X_m\right]$ polinom, melynek foka a k-adik változóban legfeljebb r_k. Legyenek továbbá $\beta_1;\ldots;\beta_m$ algebrai számok. Teljesítse $\eta > 0$ minden k-ra az*

$$r_{k+1} \cdot r_k \cdot \eta^{2^{m-1}},$$

illetve az

$$\eta^{2^{m-1}} \cdot \min_{1 \leq k \leq m} \left\{r_k \cdot h\left(\beta_k\right)\right\} \geq h\left(P\right) + 2 \cdot m \cdot r_1$$

egyenlőtlenségeket. Ekkor

$$\mathrm{Ind}\left(P\right) \leq 2 \cdot m \cdot \eta.$$

2.4.13. Definíció. *Legyen V varietás $\overline{\mathbb{Q}}$ felett, $\phi\colon V \to \mathbb{P}^n_{\overline{\mathbb{Q}}}$ morfizmus. Legyen*

$$h_\phi = h \circ \phi\colon V \to \mathbb{R}_+,$$

ekkor a h_ϕ leképezést V varietás ***ϕ-re vonatkozó (abszolút logaritmikus) magasságfüggvényének*** *nevezzük.*

2.4.14. Tétel. *Legyen V projektív varietás $\overline{\mathbb{Q}}$ felett, $\phi\colon V \to \mathbb{P}^n_{\overline{\mathbb{Q}}}$ és $\psi\colon V \to \mathbb{P}^m_{\overline{\mathbb{Q}}}$ morfizmusok, valamint H és H' hipersíkok $\mathbb{P}^n_{\overline{\mathbb{Q}}}$-ban és $\mathbb{P}^m_{\overline{\mathbb{Q}}}$-ben rendre úgy, hogy $\phi^* H$ és $\psi^* H'$ lineárisan ekvivalensek. Ekkor tetszőleges $p \in V$ esetén*

$$h_\phi\left(p\right) = h_\psi\left(p\right) + O\left(1\right),$$

ahol a majoráló konstans V-től és a morfizmusoktól függ.

2.4.15. Tétel. (Weil's Height Machine) *Legyen K számtest. Ekkor tetszőleges, $V \subseteq \mathbb{P}_K^n$ sima projektív varietáshoz létezik egy*

$$h_V\colon \operatorname{Div}(V) \to \left\{f\colon V\left(\overline{K}\right) \to \mathbb{R}\right\}$$

függvény a következő tulajdonságokkal:

1. *Tetszőleges $X \subseteq \mathbb{P}_K^n$ hipersíkra és $p \in \mathbb{P}^n\left(\overline{K}\right)$ pontra*

$$\left(h_{\mathbb{P}_K^n}(X)\right)(p) = h(p) + O(1).$$

2. *Tetszőleges $\phi\colon V \to W$ morfizmusra, $D \in \operatorname{Div}(W)$ divizorra és $p \in V\left(\overline{K}\right)$ pontra*

$$(h_V(\phi^*(D)))(p) = (h_W(D))(\phi(p)) + O(1).$$

3. *$D_1; D_2 \in \operatorname{Div}(W)$ divizorokra és $p \in V\left(\overline{K}\right)$ pontra*

$$(h_V(D_1 + D_2))(p) = (h_V(D_1))(p) + (h_V(D_2))(p) + O(1).$$

4. *$D_1; D_2 \in \operatorname{Div}(W)$ lineárisan ekvivalens divizorokra és $p \in V\left(\overline{K}\right)$ pontra*

$$(h_V(D_1))(p) = (h_V(D_2))(p) + O(1).$$

5. *Legyen $D \in \operatorname{Div}(V)$ effektív divizor, $p \in (V \setminus \operatorname{Bl}(D))\left(\overline{K}\right)$ tetszőleges pont. Ekkor*

$$(h_V(D))(p) \geq O(1).$$

6. *Legyen $D_1 \in \operatorname{Div}(V)$ bőséges divizor, $D_2 \in \operatorname{Div}(V)$ pedig a 0-val lineárisan ekvivalens. Ekkor*

$$\lim_{\substack{p \in V(K) \\ h_V(D_1) \to \infty}} \frac{h_V(D_2)(p)}{h_V(D_1)(p)} = 0.$$

7. *Legyen $D \in \operatorname{Div}(V)$ bőséges divizor. Ekkor minden $K \leq L$ véges bővítés és $B \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\{p \in V(L) : h_V(D)(p) \leq B\}$$

   véges halmaz.

8. *h_V-t az 1.-3. tulajdonságok $O(1)$ nagyságrendű eltérés erejéig egyértelműen meghatározzák.*

2.4.16. Jelölés. A továbbiakban a könnyebb olvashatóság végett $h_V(D)$ helyett a $h_{V;D}$ jelöléssel élünk.

2.4.17. Tétel. (Néron, Tate) *Legyen K számtest, V egy K felett definiált sima varietás, $D \in \mathrm{Div}(V)$, valamint $\phi\colon V \to V$ morfizmus. Ekkor amennyiben valamely $\alpha > 1$ esetén $\phi^*(D) \sim \alpha \cdot D$, úgy egyértelműen létezik V-n egy*

$$\widehat{h}_{V;\phi;D}\colon V\left(\overline{K}\right) \to \mathbb{R}$$

*úgynevezett **ϕ-hez és D-hez relatív kanonikus magasságfüggvény**, tetszőleges $p \in V\left(\overline{K}\right)$ esetén a következő tulajdonságokkal:*

1. $$\widehat{h}_{V;\phi;D}(p) = h_{V;D}(p) + O(1).$$

2. $$\widehat{h}_{V;\phi;D}(\phi(p)) = \alpha \cdot \widehat{h}_{V;\phi;D}(p).$$

3. $$\widehat{h}_{V;\phi;D}(p) = \lim_{n\to\infty} \frac{h_{V;D}(\phi^n(p))}{\alpha^n}.$$

2.4.18. Definíció. *Legyen A egy Abel-varietás, $D \in \mathrm{Div}(A)$ divizor. Azt mondjuk, hogy D **szimmetrikus**, ha*

$$D \sim [-1]^* D.$$

*Azt mondjuk, hogy D **antiszimmetrikus**, ha*

$$-D \sim [-1]^* D.$$

2.4.19. Tétel. (Néron, Tate) *Legyen K számtest, A egy K felett definiált Abel-varietás, $D \in \mathrm{Div}(A)$ szimmetrikus. Ekkor létezik A-n egy*

$$\widehat{h}_{A;D}\colon A\left(\overline{K}\right) \to \mathbb{R}$$

*úgynevezett **(D-hez relatív) kanonikus magasságfüggvény**, tetszőleges $p; q \in A\left(\overline{K}\right)$ esetén a következő tulajdonságokkal:*

1. $$\widehat{h}_{A;D}(p) = h_{A;D}(p) + O(1).$$

2. *Tetszőleges $m \in \mathbb{Z}$ esetén*

$$\widehat{h}_{A;D}(m \cdot p) = m^2 \cdot \widehat{h}_{A;D}(p).$$

3.

$$\widehat{h}_{A;D}(p+q) + \widehat{h}_{A;D}(p-q) = 2 \cdot \widehat{h}_{A;D}(p) + 2 \cdot \widehat{h}_{A;D}(q).$$

4. *$\widehat{h}_{A;D}\colon A\left(\overline{K}\right) \to \mathbb{R}$ kvadratikus alak, továbbá a hozzá tartozó szimmetrikus bilineáris forma $\langle \cdot ; \cdot \rangle : A\left(\overline{K}\right) \times A\left(\overline{K}\right) \to \mathbb{R}$ tetszőleges $p; q \in A\left(\overline{K}\right)$ esetén a következő:*

$$\langle p; q \rangle = \frac{\widehat{h}_{A;D}(p+q) - \widehat{h}_{A;D}(p) - \widehat{h}_{A;D}(q)}{2}$$

5. *$\widehat{h}_{A;D}(p)$ csak D divizorosztályától függ.*

2.4.20. Megjegyzés. Az előző tétel 3. pontjában leírt azonosságot **parallelogramma-szabálynak** nevezzük. A 4. állítás annak a következménye, hogy ha A Abel-csoport és $h\colon A \to \mathbb{R}$ olyan függvény, ami kielégíti a parallelogramma-szabályt, akkor h kvadratikus alak.

2.4.21. Megjegyzés. Tetszőleges $p \in A\left(\overline{K}\right)$ esetén $\langle p; p \rangle = \widehat{h}_{A;D}(p)$.

2.4.22. Állítás. *Legyen A egy K számtest fölött definiált Abel-varietás, továbbá legyen $D \in \operatorname{Div}(A)$ egy bőséges, szimmetrikus divizor. Ekkor*

1. *tetszőleges $p \in A\left(\overline{K}\right)$ esetén $\widehat{h}_{A;D}(p) \geq 0$, egyenlőség pedig pontosan akkor áll fenn, ha p rendje véges, továbbá*

2. *a kanonikus magasságfüggvény $\mathbb{R}$-lineárisan kiterjed egy $\widehat{h}_{A;D}\colon A\left(\overline{K}\right) \otimes \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pozitív definit kvadratikus alakra.*

2.4.23. Tétel. *Legyen K számtest, A egy K felett definiált Abel-varietás, $D \in \operatorname{Div}(A)$ antiszimmetrikus. Ekkor egyértelműen létezik A-n egy*

$$\widehat{h}_{A;D}\colon A\left(\overline{K}\right) \to \mathbb{R}$$

kanonikus magasságfüggvény, amire tetszőleges $p; q \in A\left(\overline{K}\right)$ esetén

1.

$$\widehat{h}_{A;D}(p) = h_{A;D}(p) + O(1),$$

2.

$$\widehat{h}_{A;D}(p+q) = \widehat{h}_{A;D}(p) + \widehat{h}_{A;D}(q).$$

Magasságfüggvényeket a következőképp polinomokon is bevezethetünk.

2.4.24. Definíció. *Legyen $f \in K[x_1;\ldots;x_n]$, ahol alkalmas I multiindexhalmazra*

$$f(z_1;\ldots;z_n) = \sum_{\alpha=(\alpha_1;\ldots;\alpha_n)\in I} a_\alpha \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}.$$

Ekkor f ***Gauss-normája $\|\cdot\|_v$ abszolútértékre nézve***

$$|f|_v = \max\left\{\|a_\alpha\|_v : \alpha \in I\right\}.$$

Ekkor f ***polinom magasságának*** *nevezzük a*

$$h(f) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \cdot \sum_{v\in M_K} n_v \cdot \log\left(\max\left\{1; |f|_v\right\}\right).$$

számot. Végül legyen $\mathcal{F} = \{f_1;\ldots;f_r\}$ polinomok egy véges halmaza. Ekkor $\mathcal{F}$ ***rendszer magassága***

$$h(\mathcal{F}) = \max\left\{h(f_1);\ldots;h(f_r)\right\}.$$

2.4.25. Állítás. *Legyen K számtest és $F \in K[x_0;\ldots;x_n]$ egy d fokú homogén polinom*

$$F(x_0;\ldots;x_n) = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0;\ldots;\alpha_n)\\ \alpha_0+\ldots+\alpha_n=d}} a_\alpha \cdot x_0^{\alpha_0} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$$

alakban. Legyen továbbá $v \in M_K$ esetén $\nu_v(F) = \binom{n+d}{n}$ ha v arkhimédeszi, 1 egyébként. Ekkor

1.

$$\|F(x_0;\ldots;x_n)\|_v \leq \nu_v(F) \cdot \max_\alpha \|a_\alpha\|_v \cdot \left(\max_k \|x_k\|_v\right)^d;$$

2.

$$h(F(x_0;\ldots;x_n)) \leq d \cdot h((x_0;\ldots;x_n)) + h(F) + \min\left\{n \cdot \log(n+d); (n+d)\cdot\log(2)\right\}.$$

2.4.26. Állítás. *Legyen $\mathcal{F} = \{f_1;\ldots;f_r\}$ polinomok rendszere $K[x_1;\ldots;x_t]$-ben. Ekkor*

1.

$$h(f_1 \cdot \ldots \cdot f_r) \leq \sum_{k=1}^{r} h(f_k) + (\deg(f_k) + t) \cdot \log(2) \leq$$
$$\leq r \cdot \max\{h(f_k) + (\deg(f_k) + t) \cdot \log(2)\};$$

2.

$$h(f_1 + \ldots + f_r) \leq \sum_{k=1}^{r} h(f_k) + \log(r);$$

3. *Legyen R az egészek gyűrűje K-ban, és tegyük fel, hogy $\mathcal{F}$ elemei $R[x_1; \ldots; x_t]$-beliek. Ekkor*

$$h(f_1 + \ldots + f_r)[K : \mathbb{Q}] \cdot h(\mathcal{F}) + \log(r).$$

2.4.27. Jelölés. Legyen $N \in K$ tetszőleges. Ekkor jelölje arkhimédeszi $v \in M_K$ esetén $\|N\|_v$ értéket, ha pedig v nemarkhimédeszi, akkor legyen $N_v = 1$. Jelölje továbbá $b = (b_1; \ldots; b_n) \in K^n$ esetén $|b|_v$ a $\max_{1 \leq k \leq n}\{\|b_k\|_v\}$ maximumot.

2.4.28. Állítás. *Legyen $v \in M_K$ és legyenek $f; f_1; \ldots; f_r \in K[x_1; \ldots; x_n]$ polinomok. Legyen $b \in K^n$ és legyen $f_b(x) = f(x+b)$. Ekkor*

1.

$$\left|\prod_{k=1}^{r} f_k\right|_v \leq \min\left\{\prod_{k=2}^{r}(2 \cdot \deg(f_k))_v^n; \prod_{k=2}^{r} 2_v^{\deg(f_k)}\right\} \cdot \prod_{k=1}^{r} |f_k|_v;$$

2.

$$\left|\sum_{k=1}^{r} f_k\right|_v \leq r_v \cdot \max_{1 \leq k \leq r} |f_k|_v;$$

3.

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_v \leq (\deg(f))_v \cdot |f|_v;$$

4.

$$|f(b)|_v \leq \min\left\{2 \cdot \deg(f)_v^n; 2_v^{\deg(f)}\right\} \cdot |f|_v \cdot (\max\{1; |b|_v\})^{\deg(f)};$$

5.

$$|f_b|_v \leq 2_v^{2 \cdot \deg(f)} \cdot |f|_v \cdot (\max\{1; |b|_v\})^{\deg(f)}.$$

2.5. Jacobi-varietás

2.5.1. Definíció. *Legyen G egy K test felett definiált varietás. Ekkor azt mondjuk, hogy G **algebrai csoport** K felett, ha létezik $e \in G$ valamint $m: G \times G \to G$ és $i: G \to G$ morfizmusok, hogy minden $x; y; z \in G$ esetén*

1. $m(x; e) = m(e; x) = x$
2. $m(x; i(x)) = m(i(x); x) = e$
3. $m(m(x; y); z) = m(x; m(y; z))$

2.5.2. Definíció. *Egy projektív varietást **Abel-varietásnak** mondunk, ha az egyúttal algebrai csoport is.*

2.5.3. Megjegyzés. A definícióból nem látszik egyértelműen, de az Abel-varietáson lévő csoportstruktúrán teljesül a kommutativitás is.

2.5.4. Megjegyzés. Ha A egy K számtest fölött definiált Abel-varietás, akkor $A(K) \leq A$ részcsoport.

Abel-verietások racionális pontjainak részcsoportjára vonatkozik a következő tétel, melynek állítását majd ki fogjuk használni a 3.0.1 Faltings-tétel bizonyítása során.

2.5.5. Tétel. (Mordell–Weil) *Legyen A egy K számtest felett definiált Abel-varietás. Ekkor $A(K)$ végesen generált.*

2.5.6. Jelölés. Abel-varietáson értelmezhető a ponttal való **eltolás**, illetve az egész számmal való **szorzás**. Legyen A Abel-varietás. Jelölje az $a \in A$ ponttal való eltolást t_a, ami tehát a

$$t_a(x) = x + a$$

leképezés. Jelölje továbbá $n \in \mathbb{Z}$ esetén $[n]$ az n-nel való szorzást.

2.5.7. Jelölés. Jelölje C görbe esetén $\mathrm{Div}^0(C)$ a 0 fokú divizorok csoportját, $\mathrm{Pic}^0(C)$ pedig ennek a faktorát a fődivizorokkal.

2.5.8. Tétel. *Legyen C sima görbe $g \geq 1$ génusszal. Ekkor létezik egy $\mathrm{Jac}(C)$-vel jelölt Abel-varietás és egy $j: C \to \mathrm{Jac}(C)$ injektív leképezés, melyre*

1. *j lineárisan kiterjed C divizoraira. Ekkor j csoport-izomorfizmust indukál* $\mathrm{Pic}^0(C)$ *és* $\mathrm{Jac}(C)$ *között.*

2. *Minden $r \in \mathbb{N}$ esetén $W_r = r \cdot j(C)$ részvarietást ad* $\mathrm{Jac}(C)$*-n és* $\dim(W_r) = \min\{r; g\}$*, valamint* $W_g = \mathrm{Jac}(C)$.

3. *Legyen $\Theta = W_{g-1}$. Ekkor Θ irreducibilis bőséges divizora* $\mathrm{Jac}(C)$*-nek.*

2.5.9. Definíció. *A 2.5.8 tételben definiált* $\mathrm{Jac}(C)$ *varietást C **Jacobi-varietásának** nevezzük, a fenti j injektív leképezést pedig **Jacobi-beágyazásnak**.*

2.5.10. Tétel. *Legyen C egy g génuszú algebrai görbe, $p_0 \in C(K)$, továbbá legyen $J =$* $\mathrm{Jac}(C)$*, valamint Θ jelölje a Theta-divizort J-n. Legyen $j\colon C \to J$ az a Jacobi-beágyazás, melyre egy p pont képe $(p) - (p_0)$, továbbá $x \in J$ esetén legyen $j_x(p) = j(p) + x$. Ekkor*

1. *Létezik egy $y \in J$, melyre $[-1]^* \Theta \sim t_y^* \Theta$. Ha K_C egy kanonikus divizora C-nek, akkor $y = j(K_C)$.*

2. *Tetszőleges $z \in J$ esetén $j_z^*([-1]^* \Theta) \sim g \cdot (p_0) - z$ és $j_z^* \Theta \sim g \cdot (p_0) - z + y$.*

3. *Legyenek $s_{1;2}; p_1; p_2\colon J \times J \to J$ rendre az összegzés illetve az első- és második projekció. Legyen továbbá $\Delta \in$* $\mathrm{Div}(C \times C)$ *a **diagonális divizor**, azaz $\Delta = \{(p;p) : p \in C\}$. Ekkor*

$$(j \times j)^* \left(s_{1;2}^* \Theta - p_1^* \Theta - p_2^* \Theta\right) \sim -\Delta + (C \times \{p_0\}) + (\{p_0\} \times C).$$

2.5.11. Megjegyzés. C tehát izomorfizmus erejéig egyértelműen megadja a $(\mathrm{Jac}(C); \Theta)$ párt. Ennek a megfordítottja is igaz algebrailag zárt testen, azaz a $(\mathrm{Jac}(C); \Theta)$ pár meghatározza C izomorfia-osztályát, ez Torelli tétele.

2.6. Kéveelméleti bevezető

Ebben a szekcióban bevezetjük kategóriák kévéit, ehhez persze minimális kategóriaelmélet is szükséges. A kategóriaelméleti összefoglaló Ágoston István órai jegyzetére támaszkodik, míg a kéveelméleti rész Némethi András előadását, illetve *Glen E. Bredon*[5] kéveelmélet könyvét követi.

2.6.1. Definíció. ***Kategóriának*** *nevezünk egy* $\mathcal{C} = (\mathrm{Ob}\,(\mathcal{C})\,; \mathrm{Mor}\,(\mathcal{C})\,; \circ_{\mathcal{C}}; \mathrm{id}_{\mathcal{C}})$ *rendezett négyest, ahol*

- $\mathrm{Ob}\,(\mathcal{C})$ *osztály, elemeit a* $\mathcal{C}$ *kategória* ***objektumainak*** *hívjuk.*
- $\mathrm{Mor}\,(\mathcal{C})$ *azon* $\mathrm{Ob}\,(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}\,(\mathrm{SET})$ *leképezés képtere, ahol* $\mathrm{Ob}\,(SET)$ *a halmazok osztályát jelöli és* $A; B \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C})$ *esetén a leképezés* $(A; B)$ *párhoz* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A; B)$ *halmazt rendeli, elemeit pedig* $\mathcal{C}$ *kategória* ***morfizmusainak*** *nevezzük. Itt* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A; B)$ *az* $A \to B$ *leképezések halmaza, valamely* $\mathcal{C}$ *kategóriától függő struktúrával ellátva.*
- $\circ_{\mathcal{C}}$ *a* ***kompozíció-művelet*** $\mathcal{C}$ *morfizmusai között, azaz* $A; B; C \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C})$ *objektumok és* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A; B)$ *valamint* $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(B; C)$ *morfizmusok esetén* $\circ_{\mathcal{C}}\,(f; g) = g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A; C)$.
- $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ *az* ***identitás-morfizmusok*** *osztálya, azaz minden* $A \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C})$ *esetén* $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A; A)$ *és tetszőleges* $B \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C})$ *valamint* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A; B)$ *esetén* $f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f = f$.

2.6.2. Példa. Valójában már számos kategóriával találkozhattunk matematikai tanulmányaink során, még ha nem is tudtunk arról, hogy ezek kategóriát alkotnak. Ilyenek például

- SET a halmazok kategóriája, ahol az objektumok a halmazok, a morfizmusok pedig a halmazműveletek;
- TOP a topologikus terek kategóriája, ahol a morfizmusok a folytonos leképezések;
- $R-\mathrm{Mod}$ az R-balmodulusok kategóriája R gyűrűvel, ahol a morfizmusok a modulus-homomorfizmusok;
- GRP a csoportok kategóriája, ahol a morfizmusok a csoport-homomorfizmusok;
- RING a gyűrűk kategóriája, ahol a morfizmusok a gyűrű-homomorfizmusok;
- tetszőleges $\mathcal{C}$ kategória esetén $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ a $\mathcal{C}$ kategória **opposite** kategóriája, ahol $\mathrm{Ob}\,(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C})$ és bármely $A; B \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C})$ objektumokra $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}\,(A; B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(B; A)$, a kompozíció pedig szintén megfordul;
- kategóriát képeznek a varietások is a köztük értelmezett morfizmusokkal;

- tetszőleges X topologikus tér nyílt halmazai is kategóriát alkotnak, ahol $U \subseteq V \subseteq X$ esetén az egyedüli $U \to V$ morfizmus a természetes beágyazás, egyébként pedig $\mathrm{Hom}\,(U; V) = \emptyset$. Ezt a kategóriát jelölje Open_X.

2.6.3. Definíció. *Legyenek $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ kategóriák. Ekkor egy $F\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ leképezést **funktornak** nevezünk, ha*

- *tetszőleges $A \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C}_1)$ esetén $F\,(A) \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C}_2)$;*
- *tetszőleges $A; B \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C}_1)$ és $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A; B)$ esetén $F\,(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F\,(A)\,; F\,(B))$;*
- *tetszőleges $A; B; C \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C}_1)$ valamint $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A; B)$ és $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1}(B; C)$ esetén $F\,(g \circ f) = F\,(g) \circ F\,(f)$;*
- *tetszőleges $A \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C}_1)$ esetén $F\,(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$.*

2.6.4. Példa. Funktorok például

- tetszőleges $\mathcal{C}$ kategória esetén az $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ identitás, mely a kategória minden objektumához és minden morfizmusához is önmagát rendeli;
- a **felejtő funktorok**, melyek valamilyen $\mathcal{C}$ kategóriáról a SET kategóriába képeznek, ahol $\mathcal{C}$ objektumai struktúrával ellátott halmazok, ezekhez a felejtő funktor önmagukat rendeli a struktúra nélkül (például csoportokhoz a csoport elemeinek halmazát vagy topologikus térhez a tér pontjainak halmazát topológia nélkül);
- $\mathrm{SET} \to \mathbb{Z} - \mathrm{Mod}$ funktor az úgynevezett **szabadfunktor**, mely tetszőleges halmazhoz az általa generált szabad Abel-csoportot rendeli (hasonlóan lehet definiálni $\mathbb{Z} - \mathrm{Mod}$ helyett más kategóriákkal másféle szabadfunktorokat is);
- illetve a $\pi_n\colon \mathrm{TOP} \to \mathrm{GRP}$ homotópiacsoportok is funktorok ($n \geq 2$ esetén π_n valójában az Abel-csoportok kategóriájába képez).

2.6.5. Definíció. *Legyenek $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ kategóriák, $F\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ leképezés úgy, hogy F funktor az $\mathcal{C}_1^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}_2$ értelemben. Ekkor F-et **kontravariáns funktornak** nevezzük.*

2.6.6. Definíció. *Legyen X topologikus tér, $\mathcal{C}$ tetszőleges kategória. Ekkor egy $\mathcal{F}\colon \mathrm{Open}_X \to \mathcal{C}$ kontravariáns funktort **előkévének** nevezünk.*

2.6.7. Megjegyzés. Említettük, hogy Open_X kategória morfizmusai a természetes beágyazások, az opposite kategória morfizmusai tehát a megszorítások lesznek, ezért a morfizmusok $\mathcal{F}$ általi képét $\mathcal{C}$-ben **megszorító leképezéseknek** nevezzük, és $U \subseteq V \subseteq X$ nyílt halmazokra $r_{U;V}$ jelöli a megfelelő ilyen $\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ leképezést.

2.6.8. Definíció. *Legyen $\mathcal{F}\colon \mathrm{Open}_X \to \mathcal{C}$ előkéve. Ekkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{F}$ **kéve**, ha tetszőleges $U \subseteq X$ nyílt halmaz és $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ nyílt fedés esetén*

1. *ha $x; y \in \mathcal{F}(U)$ olyanok, hogy minden $\alpha \in I$ indexre $r_{U_\alpha;U}(x) = r_{U_\alpha;U}(x)$, akkor szükségképpen $x = y$;*
2. *valamint ha minden $\alpha \in I$ indexre $x_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ olyan objektumok, hogy bármely $\alpha; \beta \in I$ indexpárra $r_{U_\alpha \cap U_\beta; U_\alpha}(x_\alpha) = r_{U_\alpha \cap U_\beta; U_\beta}(x_\beta)$ egyenlőség teljesül, akkor egyértelműen létezik olyan $x \in \mathcal{F}(U)$ objektum, hogy tetszőleges $\alpha \in I$ indexre $r_{U_\alpha;U}(x) = x_\alpha$.*

2.6.9. Definíció. *Kéve az Abel-csoportokra X-en az a funktor, mely X minden nyílt halmazához a triviális Abel-csoportot rendeli. Ezt a kévét **zéró kévének** nevezzük és 0-val jelöljük.*

2.6.10. Példa. Legyen X tetszőleges varietás ellátva a Zariski-topológiával, ekkor $\mathcal{O}_X$ kéve a RING kategóriára, ahol $U \subseteq X$ nyílt halmaz esetén $\mathcal{O}_X(U)$ az U-n reguláris függvények halmaza. Ha $\mathcal{O}_X^*(U)$ jelöli az U-n invertálható reguláris függvényeket, akkor $\mathcal{O}_X^*$ kéve GRP kategóriára.

2.6.11. Példa. Tekintsük $\mathbb{R}$-et a szokásos topológiával. Ekkor $U \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazra az $\mathcal{F}(U) = \{f\colon U \to \mathbb{R} \text{ korlátos}\}$ leképezés a szokásos megszorító leképezésekkel olyan előkévét definiál, ami nem kéve, a 2. tulajdonságot ugyanis nem elégíti ki.

2.6.12. Definíció. *Legyen $\mathcal{F}\colon \mathrm{Open}_X \to \mathcal{C}$ előkéve, $U \subseteq X$ nyílt. Ekkor $\mathcal{F}(U)$ elemeit **U szeléseinek** nevezzük, továbbá $\mathcal{F}(X)$ a **globális szelések** halmaza. $\mathcal{F}(X)$ helyett gyakran $\Gamma(X; \mathcal{F})$ jelöli a globális szelések halmazát.*

2.6.13. Példa. Ha X varietás $K[X]$ koordinátagyűrűvel, akkor $\Gamma(X; \mathcal{O}_X) = K[X]$ és $\Gamma(X; \mathcal{O}_X^*) = K[X]^*$.

2.6.14. Definíció. *Legyen $\mathcal{F}\colon \mathrm{Open}_X \to \mathcal{C}$ előkéve, továbbá $x \in X$. Ekkor $\mathcal{F}_x$ jelöli* ***$\mathcal{F}$ kocsányát x-ben****, ahol*

$$\mathcal{F}_x = \left\{(f;U) : p \in U; f \in \mathcal{F}(U)\right\} /_{\sim},$$

ahol $(f;U) \sim (g;V)$ ha létezik $\emptyset \neq W \subseteq U \cap V$ nyílt halmaz, hogy $r_{W;U}(f) = r_{W;V}(g)$. $\mathcal{F}_x$ ekvivalencia-osztályait ***csíráknak*** *nevezzük. Egy $(f;U)$ párhoz tartozó ekvivalencia-osztályt $[(f;U)]$ jelöl.*

2.6.15. Megjegyzés. Egy $\mathcal{F}\colon \mathrm{Open}_X \to \mathbb{Z} - \mathrm{Mod}$ kéve x-beli kocsányán csoport struktúrát ad az összeadás, ahol

$$[(f;U)] + [(g;V)] = [(f|_{U\cap V} + g|_{U\cap V}; U \cap V)]\,.$$

2.6.16. Példa. Ha X varietás, $\mathcal{O}_X$ kocsánya egy x pontban nem más mint $\mathcal{O}_{x;X}$ lokális gyűrű.

2.6.17. Definíció. *Legyen $\mathcal{C}$ egy kategória. Tekintsünk egy irányított gráfot, melynek csúcsai $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ elemei közül kerülnek ki, $A;B$ csúcsok esetén az A-ból B-be menő irányított él $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A;B)$ eleme. Ekkor minden irányított útnak meg tudjuk feleltetni az éleivel azonosított morfizmusok kompozícióját. Azt mondjuk egy ilyen irányított gráfra, hogy* ***kommutatív diagram****, ha bármely két csúcsa közt az összes irányított útnak ugyanaz a morfizmus felel meg.*

2.6.18. Definíció. *Legyen X varietás. Ekkor X feletti* ***r rangú vektornyalábnak*** *nevezünk egy $(E;p)$ párt, ahol E varietás és $p\colon E \to X$ morfizmus úgy, hogy*

1. *minden $x \in X$ esetén $p^{-1}(x)$ egy r dimenziós vektorteret alkot;*

2. *minden $x \in X$ ponthoz létezik $U \ni x$ nyílt halmaz és egy ϕ_U izomorfizmus, melyre*

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, dashed, "\Phi_U"] \arrow[d, "p"'] & U \times A_K^r \arrow[dl, "p_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

kommutatív diagram, ahol p_1 az első projekció.

Ha $r = 1$, akkor a vektornyalábot ***vonalnyalábnak*** *mondjuk.*

2.6.19. Példa.

- Tetszőleges r pozitív egészre r rangú vektornyalábot ad a természetes $X \times A_K^r \to X$ projekció, ezt a vektornyalábot **triviális nyalábnak** hívjuk.

- Legyen X sima varietás $I_X = \langle f_1; \ldots; f_m \rangle$ ideállal az A_K^n affin n-térben, legyen továbbá

$$T(X) = \left\{ (x;t) \in X \times A_K^n \colon \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)\, t_i = 0 \text{ minden } 1 \leq j \leq m \text{ esetén} \right\}.$$

  Ekkor a $p_1 \colon T(X) \to X$ első projekció $\dim(X)$-rangú vektornyaláb. Ezt a vektornyalábot $\boldsymbol{X}$ **érintőnyalábjának** hívjuk.

2.6.20. Definíció. *Legyen $D \in \mathrm{CaDiv}(X)$ az $\{(U_\alpha; f_\alpha) : \alpha \in I\}$ által megadott Cartier-divizor. Ekkor ha tekintjük az $U_\alpha \times A_K^1 \to U_\alpha$ triviális vonalnyalábokat, és az*

$$\begin{gathered} (U_\alpha \cap U_\beta) \times A_K^1 \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times A_K^1 \\ (x; \lambda) \mapsto \left(x; \lambda \left(f_\alpha f_\beta^{-1}\right)(x)\right) \end{gathered}$$

izomorfizmusokat, akkor az úgynevezett ***D-hez asszociált vonalnyalábot*** *kapjuk, melyet $\mathcal{O}(D)$ jelöl.*

2.6.21. Definíció. *Legyenek $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ kategóriák, $F; G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktorok. Ekkor morfizmusok egy $\phi = (\phi_X)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$ családját $\phi \colon F \to G$* ***funktorok közt menő természetes transzformációnak*** *mondunk, ha*

1. *minden $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ objektumra $\phi_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X); G(X))$;*

2. *illetve minden $X; Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ objektumra és $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X; Y)$ morfizmusra $\phi_Y \circ F(f) = G(f) \circ \phi_X$.*

2.6.22. Megjegyzés. Kontravariáns funktorok között is lehet értelmezni a természetes transzformációt, ekkor a morfizmusok iránya megfordul, és ezáltal a kompozíciók sorrendje is.

2.6.23. Definíció. *Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ előkévék X topologikus téren. Ekkor egy $h \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ természetes transzformációt* ***előkéve-homomorfizmusnak*** *nevezünk.*

2.6.24. Definíció. *Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ Abel-csoportok kévéi X topologikus téren. Ekkor egy $h\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ leképezést* ***kéve-homomorfizmusnak*** *nevezünk, ha minden $x \in X$ esetén $h(\mathcal{A}_x) \subseteq h(\mathcal{B}_x)$, továbbá h-nak a $h_x\colon \mathcal{A}_x \to \mathcal{B}_x$ megszorítások csoport-homomorfizmusok.*

2.6.25. Definíció. *$(\mathcal{F}^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ kévék egy $\mathcal{F}^*$ sorozatát* ***gradált kévének*** *nevezzük. Legyen $\mathcal{F}^*$ Abel-csoportok gradált kévéje, valamint $d^* = (d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ kéve-homomorfizmusok sorozata, melyre $d^n\colon \mathcal{F}^n \to \mathcal{F}^{n+1}$ és minden n-re $d^{n+1} \circ d^n = 0$; ekkor az $(\mathcal{F}^*; d^*)$ párt* ***differenciálkévének*** *nevezzük. Egy differenciálkévét* ***kévék egzakt sorozatának*** *mondunk, ha minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén $\operatorname{im}(d^n) = \ker(d^{n+1})$. Legyen $\mathcal{A}$ Abel-csoportok egy kévéje, valamint $\varepsilon\colon \mathcal{A} \to \mathcal{F}^0$ kéve-homomorfizmus. Ekkor azt mondjuk, hogy az $\mathcal{F}^*$ differenciálkéve az $\mathcal{A}$ kéve* ***feloldása*** *ε-nal, ha $\mathcal{F}^n = 0$ minden $n < 0$ esetén és*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\ \varepsilon\ } \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\ d^0\ } \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\ d^1\ } \dots$$

egzakt.

2.6.26. Definíció. *Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ Abel-csoportok kévéi X topologikus téren, és tegyük fel, hogy minden $U \subseteq X$ nyílt halmaz esetén $\mathcal{B}(U) \leq \mathcal{A}(U)$ részcsoport. Ekkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{B}$* ***részkévéje*** *$\mathcal{A}$-nak. Ekkor minden $x \in X$ esetén $\mathcal{B}_x \leq \mathcal{A}_x$ részcsoport, és értelmezhető az $\mathcal{A}_x \big/ \mathcal{B}_x$ faktorcsoport. Ekkor ha tekintjük azt a kévét a faktortopológiával, melynek kocsányai az imént látott faktorok, akkor az így kapott, $\mathcal{A} / \mathcal{B}$-vel jelölt kévét $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$* ***faktorkévéjének*** *nevezzük.*

2.6.27. Példa. Legyenek $\mathcal{A}; \mathcal{B}$ Abel-csoportok kévéi X topologikus téren, $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ kéve-homomorfizmus. Ekkor $\ker(\phi)$ részkéve $\mathcal{A}$-ban, $\operatorname{im}(\phi)$ pedig $\mathcal{B}$-ben.

2.6.28. Definíció. *Legyen $(\mathcal{F}^*; d^*)$ Abel-csoportok differenciálkévéje X topologikus téren, hogy $\mathcal{F}^n = 0$ negatív n-ekre. Ekkor $\mathcal{F}^*$* ***n-edik kéve kohomológiája*** *a $H^n(X; \mathcal{F}^*) = \ker(d^n) \big/ \operatorname{im}(d^{n-1})$ faktor.*

2.6.29. Megjegyzés. X varietás és $D \in \operatorname{CaDiv}(X)$ esetén $H^0(X; \mathcal{O}(D)) = \Gamma(X; \mathcal{O}(D))$.

3. fejezet

Faltings tétele

A továbbiakban Faltings tételét fogjuk bizonyítani.

3.0.1. Tétel. (Faltings) *Legyen C egy legalább 2 génuszú görbe K algebrai számtest felett. Ekkor $C(K)$ véges.*

A tétel valójában Vojta 3.0.6 egyenlőtlenségén múlik, így a fejezet hátralevő részének nagy részét az egyenlőtlenség bizonyítása fogja kitenni, Faltings 3.0.1 tétele ennek következménye. Mielőtt azonban kimondanánk az egyenlőtlenséget, még be kell vezetnünk néhány jelölést, melyek a fejezet hátralevő részében mindvégig ugyanazt fogják jelölni.

3.0.2. Jelölés.

- K legyen egy tetszőleges rögzített algebrai számtest.
- Legyen C egy K felett definiált sima projektív görbe.
- Jelölje C génuszát g, erről feltesszük, hogy $g \geq 2$.
- Legyen C Jacobi-varietása J, ennek Theta-divizora Θ.
- Jelölje $|\cdot|$ a Θ-val realatív kanonikus magasságfüggvényhez tartozó normát $J\left(\overline{K}\right)$-n.
- Végül jelölje az ehhez a kanonikus magasságfüggvényhez tartozó bilineáris formát $\langle \cdot ; \cdot \rangle$.

3.0.3. Megjegyzés. Természetesen a probléma érdektelen, ha $C(K)$ üres, így feltesszük, hogy nem az.

3.0.4. Megjegyzés. $\langle\,\cdot\,;\,\cdot\,\rangle$ kiterjed egy $J(K)\otimes\mathbb{R}$-beli belső szorzatra. A 3.0.6 Vojta-egyenlőtlenségben a belső szorzatot $C(K)$ pontjain mondjuk ki, ez alatt a $J(K)\otimes\mathbb{R}$-beli beágyazás képein vett szorzatot fogjuk valójában érteni.

3.0.5. Megjegyzés. Probléma még a bevezetett jelölések értelmezése során, hogy a 2.4.19 Néron–Tate-tételben a divizorhoz relatív kanonikus magasságfüggvényhez tartozó norma létezését a tétel szimmetrikus divizorra mondja ki, Θ-ról ezt még nem tudjuk. Azt majd nemsokára 3.0.7 lemma fogja garantálni, hogy a Jacobi-beágyazás megadható úgy, hogy Θ szimmetrikus legyen.

3.0.6. Tétel. (Vojta-egyenlőtlenség) *Létezik egy C-től függő κ_1 és egy g-től függő κ_2 konstans, hogy ha $z;w\in C\left(\overline{K}\right)$ olyan pontok, melyekre $|z|\geq\kappa_1$ és $|w|\geq\kappa_2\cdot|z|$, akkor*

$$\langle z;w\rangle\leq\frac{3}{4}\cdot|z|\cdot|w|\,.$$

3.0.7. Lemma. *Legyen A olyan 1 fokú divizor, melyre $(2\cdot g-2)\cdot A\sim\mathcal{K}_C$, ahol $\mathcal{K}_C$ jelöli a kanonikus divizorosztályt C-n. A segítségével definiálhatunk egy Jacobi-beágyazást:*

$$\begin{aligned}j_A\colon C&\to J\\ x&\mapsto\mathrm{Cl}\left((x)-A\right).\end{aligned}$$

Jelölje Θ_A az ezen Jacobi-beágyazásból kapott Theta-divizort. Ekkor

1. *Θ_A szimmetrikus divizor,*
2. *$j_A^*\Theta_A\sim g\cdot A$,*
3. *legyenek $s_{1;2};p_1;p_2\colon J\times J\to J$ rendre az összegzés és az első- illetve második projekció. Legyen továbbá $\Delta\in\mathrm{Div}\,(C\times C)$ a diagonális divizor. Ekkor*

$$(j_A\times j_A)^*\left(s_{1;2}^*\Theta_A-p_1^*\Theta_A-p_2^*\Theta_A\right)\sim-\Delta+p_1^*A+p_2^*A.$$

Bizonyítás. Hasonlóan a 2.5.10 tételhez, rögzítsünk le egy $p_0\in C$ pontot. Legyen továbbá $j\colon C\to J$ a $p\mapsto\mathrm{Cl}\left((p)-(p_0)\right)$ által definiált Jacobi-beágyazás. Ekkor $j_A(x)=j(x)-j(A)$. Ekkor j linearitása miatt

$$\Theta_A=(g-1)\cdot j_A(C)=(g-1)\cdot(j(C)-j(A))=\Theta-(g-1)\cdot j(A)=\Theta-j\left((g-1)\cdot A\right).$$

2.5.10 tételből és A választásából

$$[-1]^* \Theta_A = [-1]^* \Theta + j\left((g-1)\cdot A\right) \sim \Theta - j\left(\mathcal{K}_C\right) + j\left((g-1)\cdot A\right).$$

Ekkor tehát $\Theta_A \sim [-1]^* \Theta_A$ valóban.

Ismét a j és j_A közti összefüggést, valamint az előbb belátott lineáris ekvivalenciát használva

$$j_A^* \Theta_A = j_A^* \left(\Theta - j\left((g-1)\cdot A\right)\right) = j^* \left(\Theta - j\left((g-2)\cdot A\right)\right).$$

Alkalmazva ekkor a 2.5.10 tételt

$$j_A^* \Theta_A \sim g\cdot (p_0) - j\left((g-2)\cdot A\right) + j\left(\mathcal{K}_C\right).$$

Beírva j definícióját ekkor

$$j_A^* \Theta_A \sim g\cdot (p_0) - (g-2)\cdot (A-(p_0)) + (\mathcal{K}_C - (2\cdot g - 2)\cdot (p_0)) = -(g-2)\cdot A + \mathcal{K}_C \sim g\cdot A,$$

A választása miatt.

A 3. állítás bizonyításához legyen $A \neq P \in \operatorname{Div}(C)$-hez az a beágyazás $\operatorname{Div}(C\times C)$-be, melyre $i_P(Q) = (P;Q)$. Ekkor egyrészt

$$i_P^* \left(-\Delta + (C\times A) + (A\times C)\right) = -(P) + (A),$$

másrészt

$$\left(i_P^* \circ (j_A \times j_A)^* \circ p_1^*\right)(\Theta_A) \sim 0$$

és

$$\left(i_P^* \circ (j_A \times j_A)^* \circ p_2^*\right)(\Theta_A) = j_A^* \Theta_A \sim g\cdot A$$

a lemma második állítása szerint. Végül

$$s_{1;2} \circ (j_A \times j_A) \circ i_P(Q) = j_A(P) + j_A(Q),$$

így

$$\left(i_P^* \circ (j_A \times j_A)^* \circ s_{1;2}^*\right)(\Theta_A) = j_A^* P + j_A^* \Theta_A \sim -(P) + A + g\cdot A$$

ismét a második pont alapján. Ekkor persze

$$\left(i_P^* \circ (j_A \times j_A)^* \left(\circ s_{1;2} - p_1^* - p_2^*\right)\right)(\Theta_A) \sim -(P) + A + g\cdot A - 0 - g\cdot A = -(P) + (A),$$

ebből pedig már következik a bizonyítandó állítás. $\square$

3.0.8. Megjegyzés. A mindig választható így, hiszen $J\left(\overline{K}\right)$ osztható Abel-csoport. A továbbiakban elhagyjuk A-t az indexekből, Θ alatt Θ_A-t fogjuk érteni, J pedig a j_A Jacobi-beágyazással kapott Jacobi-varietás. Hallgatólgosan tehát J és Θ rögzítésével A-t is rögzítettük, ez a fejezet hátralévő részében mindvégig ugyanaz az 1 fokú divizora C-nek.

A következőkben lerögzítünk néhány további jelölést is, melyek szintén ugyanazt fogják jelölni, végig a fejezet további részeiben. Δ továbbra is a diagonális divizort jelöli $\mathrm{Div}\,(C \times C)$-ben.

3.0.9. Állítás. *Létezik $M \in \mathbb{N}$ szám, hogy*

$$B = (M+1) \cdot (A \times C) + (M+1) \cdot (C \times A) - \Delta \in \mathrm{Div}\,(C \times C)$$

nagyon bőséges.

Bizonyítás. Azt kell látni, hogy $p_1^*\Theta + p_2^*\Theta + s_{1;2}^*\Theta$ alappontmentes, illetve hogy alkalmas M-re $M \cdot p_1^*\Theta + M \cdot p_2^*\Theta$ nagyon bőséges. Ekkor a 2.3.17 állítás következtében $(M+1) \cdot p_1^*\Theta + (M+1) \cdot p_2^*\Theta + s_{1;2}^*\Theta$ nagyon bőséges, és így ennek visszahúzása is nagyon bőséges $C \times C$-n, na de ez éppen B. $\square$

M és B a továbbiakban is a fenti állítás tulajdonságai szerinti egész számot illetve divizort jelölik.

3.0.10. Jelölés.

- Legyenek $\gamma; \varepsilon; \nu$ "kis" pozitív konstansok.
- N legyen olyan kellően "nagy" pozitív egész, melyre $N \cdot A$ nagyon bőséges divizor.
- Legyenek $d; d_1; d_2$ olyan N-nel osztható "nagy" pozitív egész számok, melyekre

$$g \cdot d^2 + \gamma \cdot d_1 \cdot d_2 \leq d_1 \cdot d_2 < g^2 \cdot d^2.$$

- Legyen

$$\delta_1 = \frac{d_1 + M \cdot d}{N}$$

  és

$$\delta_2 = \frac{d_2 + M \cdot d}{N}.$$

- Jelölje Ω a

$$(d_1 - d) \cdot (A \times C) + (d_2 - d) \cdot (C \times A) + d \cdot \Delta \in \mathrm{Div}\,(C \times C)$$

összefüggéssel definiált divizort.

3.0.11. Definíció. *Egy d-től, d_1-től és d_2-től függő $\Omega \in \mathrm{Div}\,(C \times C)$-beli divizort **Vojta-divizornak** nevezünk, ha paraméterei kielégítik a*

$$g \cdot d^2 < d_1 \cdot d_2 < g^2 \cdot d^2$$

egyenlőtlenség-rendszert.

3.0.12. Megjegyzés. Az imént rögzített Ω tehát Vojta-divizor, az alsó korlátra vonatkozó feltétel az ehhez szükségesnél valamivel többet is állít.

3.0.13. Megjegyzés. Létezik a feltételnek megfelelő N, hiszen A a 2.3.30 Riemann–Roch-tétel következtében bőséges.

3.1. Becslések $h_{C\times C;\Omega}$-ra

Adjunk először felső becslést $h_{C\times C;\Omega}$-ra.

3.1.1. Állítás. *Létezik egy d-től, d_1-től és d_2-től független c_1 konstans, hogy $z; w \in C\left(\overline{K}\right)$ esetén*

$$h_{C\times C;\Omega}\,(z; w) \le \frac{d_1}{g} \cdot |z|^2 + \frac{d_2}{g} \cdot |w|^2 - 2 \cdot d \cdot \langle z; w\rangle + c_1 \cdot (d + d_1 + d_2)\,.$$

Bizonyítás. Némi átrendezés után adódik, hogy

$$\Omega = \delta_1 \cdot ((N \cdot A) \times C) + \delta_2 \cdot (C \times (N \cdot A)) - d \cdot B,$$

így Weil 2.4.15 tétele miatt

$$h_{C\times C;\Omega}\,(z; w) = \delta_1 \cdot h_{C;N\cdot A}\,(z) + \delta_2 \cdot h_{C;N\cdot A}\,(w) - d \cdot h_{C\times C;B}\,(z; w) + O\,(1)\,.$$

Szintén a 2.4.15 Weil's Height Machine-t alkalmazva

$$h_{C;N\times A} = N \cdot h_{C;A} + O\,(1)$$

adódik, valamint B definícióját

$$B = M \cdot p_1^* A + M \cdot p_2^* A + \left(-\Delta + p_1^* A + p_2^* A\right)$$

alakra átírva

$$h_{C\times C;B} = M \cdot h_{C;A} \circ p_1 + M \cdot h_{C;A} \circ p_2 + h_{C\times C;-\Delta+p_1^*A+p_2^*A} + O\left(1\right).$$

Világos, hogy itt az $O\left(1\right)$ hibatag független $d; d_1; d_2$ konstansok választásától. Ezeket az összefüggéseket visszaírva a $h_{C\times C;\Omega}$-ra felírt egyenletbe és kihasználva a δ_1 és d_1 valamint δ_2 és d_2 közti összefüggéseket

$$h_{C\times C;\Omega}\left(z;w\right) = d_1 \cdot h_{C;A}\left(z\right) + d_2 \cdot h_{C;A}\left(w\right) - d \cdot h_{C\times C;-\Delta+p_1^*A+p_2^*A}\left(z;w\right) + O\left(d + d_1 + d_2\right).$$

A 3.0.7 lemma értelmében $j^*\Theta \sim g \cdot A$, ezért ismét a 2.4.15 tétel következményeképp, majd pedig a 2.4.19 Néron–Tate-tételt alkalmazva tetszőleges $u \in C\left(\overline{K}\right)$ pontra

$$h_{C;A}\left(u\right) = \frac{1}{g} \cdot \left(h_{J;\Theta} \circ j\right)\left(u\right) + O\left(1\right) = \frac{1}{g} \cdot \left(\widehat{h}_{J;\Theta} \circ j\right)\left(u\right) + O\left(1\right) = \frac{1}{g} \cdot \left|u\right|^2 + O\left(1\right).$$

Szintén a 3.0.7 lemma mondja ki, hogy

$$\left(j \times j\right)^* \left(s_{1;2}^*\Theta - p_1^*\Theta - p_2^*\Theta\right) \sim -\Delta + p_1^*A + p_2^*A,$$

ezért újfent a 2.4.15 Height Machine és a 2.4.19 Néron–Tate-tétel értelmében

$$\begin{gathered} h_{C\times C;-\Delta+p_1^*A+p_2^*A}\left(z;w\right) = h_{C\times C;-(j\times j)^*\left(s_{1;2}^*\Theta-p_1^*\Theta-p_2^*\Theta\right)}\left(z;w\right) + O\left(1\right) = \\ = h_{J;\Theta}\left(s_{1;2}\left(j\left(z\right);j\left(w\right)\right)\right) - h_{J;\Theta}\left(p_1\left(j\left(z\right);j\left(w\right)\right)\right) - h_{J;\Theta}\left(p_2\left(j\left(z\right);j\left(w\right)\right)\right) + O\left(1\right) = \\ = \widehat{h}_{J;\Theta}\left(j\left(z\right) + j\left(w\right)\right) - \widehat{h}_{J;\Theta}\left(j\left(z\right)\right) - \widehat{h}_{J;\Theta}\left(j\left(w\right)\right) + O\left(1\right) = \\ \left|z+w\right|^2 - \left|z\right|^2 - \left|w\right|^2 + O\left(1\right) = 2 \cdot \left\langle z;w\right\rangle + O\left(1\right). \end{gathered}$$

Egyrészt a $h_{C;A}$-ra kapott becslést $u = z$-re és $u = w$-re felírva, valamint a $h_{C\times C;-\Delta+p_1^*A+p_2^*A}$-ra felírt azonosságot visszahelyettesítve

$$h_{C\times C;\Omega}\left(z;w\right) = \frac{d_1}{g} \cdot \left|z\right|^2 + \frac{d_2}{g} \cdot \left|w\right|^2 - 2 \cdot d \cdot \left\langle z;w\right\rangle + O\left(d + d_1 + d_2\right)$$

adódik, ezzel tehát igazoltuk az állítást. □

Figyeljük meg, hogy minden $s_1 \in \Gamma\left(C \times C; \mathcal{O}\left(d \cdot B\right)\right)$ globális szelésnek megfeleltethető m változós d fokú homogén polinomoknak, az ilyen monomok ugyanis szelések, és egyúttal generálják a globális szelések terét. Mivel

$$\Omega = \delta_1 \cdot \left(N \cdot A \times C\right) + \delta_2 \cdot \left(C \times N \cdot A\right) - d \cdot B,$$

így ha $s \in \Gamma(C \times C; \mathcal{O}(\Omega))$, akkor ss_1 egy $(n;n)$ változós bihomogén polinom $(\delta_1;\delta_2)$ bifokkal, és így ha s_1 valamelyik monom, akkor megkapjuk minden j-re

$$s = \left.\left(\frac{F_j(\underline{x};\underline{x}')}{y_j^d}\right)\right|_{C\times C}$$

összefüggést, ahol F_j az ss_1 feltételével megadott bihomogén polinomok.

3.1.2. Állítás. *Legyen $s \in \Gamma(C\times C;\mathcal{O}(\Omega))$ és legyen $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha \in I\}$ a fenti jellemzéssel megadott polinomok. Ekkor $(z;w) \in C \times C$ esetén, melyre $s(z;w) \neq 0$, teljesül*

$$h_{C\times C;\Omega}(z;w) \geq -h(\mathcal{F}) - [K:\mathbb{Q}] \cdot n \cdot \log((\delta_1+n)\cdot(\delta_2+n)).$$

Bizonyítás. Visszanyúlva a lineáris rendszerhez társított racionális leképezésre bevezetett jelölésünkhöz, valamint alkalmazva Weil 2.4.15 tételét,

$$h_{C\times C;\Omega}(z;w) = \delta_1 \cdot h(\phi_{N\cdot A}(z)) + \delta_2 \cdot h(\phi_{N\cdot A}(w)) - d \cdot h(\phi_B(z;w)).$$

Alkalmazzuk most az $x^{(z)} = \phi_{N\cdot A}(z); x^{(w)} = \phi_{N\cdot A}(w); x = \phi_B(z;w)$ jelöléseket. Ekkor az abszolút logaritmikus magasság definíciója szerint

$$h_{C\times C;\Omega}(z;w) =$$
$$= \delta_1 \cdot \sum_{v\in M_K} \max_\alpha \log \left\|x_\alpha^{(z)}\right\|_v + \delta_2 \cdot \sum_{v\in M_K} \max_\beta \log \left\|x_\beta^{(w)}\right\|_v - d \cdot \sum_{v\in M_K} \max_\kappa \log \|x_\kappa\|_v =$$
$$= -\left(\delta_1 \cdot \sum_{v\in M_K} \min_\alpha \log \frac{1}{\left\|x_\alpha^{(z)}\right\|_v} + \delta_2 \cdot \sum_{v\in M_K} \min_\beta \log \frac{1}{\left\|x_\beta^{(w)}\right\|_v} + d \cdot \sum_{v\in M_K} \max_\kappa \log \|x_\kappa\|_v\right) =$$
$$= -\sum_{v\in M_K} \max_\kappa \min_{\alpha;\beta} \log \left\|\frac{x_\kappa^d}{\left(x_\alpha^{(z)}\right)^{\delta_1} \cdot \left(x_\beta^{(w)}\right)^{\delta_2}}\right\|_v$$

Feltettük, hogy $s(z;w) \neq 0$, így alkalmazva rá a 2.4.4 szorzat azonosságot,

$$\prod_{v\in M_k} \|s(z;w)\|_v = 1,$$

vagyis

$$\sum_{v\in M_K} \log \|s(z;w)\|_v = 0.$$

Így hát ilyen módon nullát kivonva a $h_{C\times C;\Omega}\left(z;w\right)$-re vonatkozó korábbi összefüggésből,

$$h_{C\times C;\Omega}\left(z;w\right)=-\sum_{v\in M_K}\max_{\kappa}\min_{\alpha;\beta}\log\left\|\frac{s\left(z;w\right)\cdot x_{\kappa}^{d}}{\left(x_{\alpha}^{(z)}\right)^{\delta_1}\cdot\left(x_{\beta}^{(w)}\right)^{\delta_2}}\right\|_v$$

adódik. Most behelyettesítve s helyére a korábbi megállapítások szerint ekkor

$$\begin{aligned}h_{C\times C;\Omega}\left(z;w\right)&=-\sum_{v\in M_K}\max_{\kappa}\min_{\alpha;\beta}\log\left\|\frac{F_{\kappa}\left(x^{(z)};x^{(w)}\right)}{\left(x_{\alpha}^{(z)}\right)^{\delta_1}\cdot\left(x_{\beta}^{(w)}\right)^{\delta_2}}\right\|_v=\\&=-\sum_{v\in M_K}\max_{\kappa}\min_{\alpha;\beta}\log\left\|F_{\kappa}\left(\frac{x^{(z)}}{x_{\alpha}^{(z)}};\frac{x^{(w)}}{x_{\beta}^{(w)}}\right)\right\|_v\end{aligned}$$

Legyen $\alpha\left(v\right)$ az egyik olyan indexet, melyre $\left\|x^{(z)_\alpha}\right\|_v$ maximális, hasonlóképpen legyen $\beta\left(v\right)$ olyan, hogy $\left\|x_{\beta(v)}^{(w)}\right\|_v=\max_{\beta}\left\|x_{\beta}^{(w)}\right\|_v$. Jelölje továbbá $\eta_v\left(F_{\kappa}\right)$ nemarkhimédeszi v esetén F_{κ} nemnulla együtthatóinak lehetséges legnagyobb számát, valamint legyen $\eta_v\left(F_{\kappa}\right)=1$ ha v arkhimédeszi. Ekkor

$$\eta_v\left(F_{\kappa}\right)\leq\begin{cases}\left(\delta_1+n\right)^n\cdot\left(\delta_2+n\right)^n & \text{ha } v \text{ arkhimédeszi,}\\ 1 & \text{egyébként,}\end{cases}$$

hiszen egy $\left(\delta_1;\delta_2\right)$ bifokú bihomogén polinom monomjai $n+1$ változóban épp δ_1-nek és δ_2-nek az n-osztályú ismétléses kombinációiból képzett pároknak feleltethetők meg, így ezek darabszáma

$$\binom{\delta_1+n}{n}\cdot\binom{\delta_2+n}{n}\leq\left(\delta_1+n\right)^n\cdot\left(\delta_2+n\right)^n$$

a binomiális tétel szerint. Vezessük be továbbá az $a_v\left(F_{\kappa}\right)$ jelölést F_{κ} együtthatói v abszolútértékeinek maximumára. Ekkor mivel minden α-ra és β-ra $\left\|\frac{x_{\alpha}^{(z)}}{x_{\alpha(v)}^{(z)}}\right\|_v\leq 1$ illetve $\left\|\frac{x_{\beta}^{(w)}}{x_{\beta(v)}^{(w)}}\right\|_v\leq 1$, a háromszög-egyenlőtlenséget használva

$$\min_{\alpha;\beta}\log\left\|F_{\kappa}\left(\frac{x^{(z)}}{x_{\alpha}^{(z)}};\frac{x^{(w)}}{x_{\beta}^{(w)}}\right)\right\|_v\leq\log\left\|F_{\kappa}\left(\frac{x^{(z)}}{x_{\alpha(v)}^{(z)}};\frac{x^{(w)}}{x_{\beta(v)}^{(w)}}\right)\right\|_v\leq\log\left(\eta_v\left(F_{\kappa}\right)\cdot a_v\left(F_{\kappa}\right)\right).$$

Így tehát

$$h_{C\times C;\Omega}\left(z;w\right)\geq-\sum_{v\in M_K}\max_{\kappa}\log\left(\eta_v\left(F_{\kappa}\right)\cdot a_v\left(F_{\kappa}\right)\right)=$$

$$= - \sum_{\substack{v \in M_K \\ \text{nemarkhimédeszi}}} \max_{\kappa} \log\left(a_v\left(F_\kappa\right)\right) - \sum_{\substack{v \in M_K \\ \text{arkhimédeszi}}} \max_{\kappa} \log\left(\eta_v\left(F_\kappa\right) \cdot a_v\left(F_\kappa\right)\right) =$$

$$= - \sum_{v \in M_K} \max_{\kappa} \log\left(a_v\left(F_\kappa\right)\right) - \sum_{\substack{v \in M_K \\ \text{arkhimédeszi}}} \max_{\kappa} \log\left(\eta_v\left(F_\kappa\right)\right) \geq$$

$$\geq -h\left(\mathcal{F}\right) - \sum_{\substack{v \in M_K \\ \text{arkhimédeszi}}} n \cdot \log\left(\left(\delta_1 + n\right) \cdot \left(\delta_2 + n\right)\right) \geq$$

$$\geq -h\left(\mathcal{F}\right) - \left[K : \mathbb{Q}\right] \cdot n \cdot \log\left(\left(\delta_1 + n\right) \cdot \left(\delta_2 + n\right)\right),$$

és ezt akartuk igazolni. □

3.2. Megfelelő s szelés választása

Ahhoz, hogy ezt a becslést finomítani tudjuk, s-ről kellene tudnunk mondani valamit. Ehhez először a 2.3.30 Riemann–Roch-tételt fogjuk alkalmazni, ezért számoljuk ki, illetve becsüljük néhány lerögzített divizorhoz rendelt K-vektortér dimenzióját.

3.2.1. Lemma. *Ha d_1 és d_2 elég nagy, akkor fennállnak*

1.

$$\ell\left(\Omega\right) \geq d_1 \cdot d_2 - g \cdot d^2 - \left(g - 1\right) \cdot \left(d_1 + d_2\right);$$

2.

$$\ell\left(\delta_1 \cdot \left(\left(N \cdot A\right) \times C\right) + \delta_2 \cdot \left(C \times \left(N \cdot A\right)\right)\right) = \left(N \cdot \delta_1 - g + 1\right) \cdot \left(N \cdot \delta_2 - g + 1\right).$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a felületekre vonatkozó 2.3.40 Riemann–Roch-tételt $C \times C$-re, $D = \Omega$ helyettesítéssel. A lemma bizonyítása során az s jelölés a Riemann–Roch-tétel beli, divizorokon értelmezett s-re vonatkozik. Ez alapján

$$\ell\left(\Omega\right) - s\left(\Omega\right) + \ell\left(K_{C \times C} - \Omega\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\Omega; \Omega - K_{C \times C}\right) + 1 + g^2 - 2 \cdot g,$$

ugyanis $p_a\left(C \times C\right) = g^2 - 2 \cdot g$. A 2.3.28 állítás értelmében

$$K_{C \times C} = \left(K_C \times C\right) + \left(C \times K_C\right),$$

így
$$\frac{1}{2}\cdot(\Omega;\Omega-K_{C\times C})=\frac{1}{2}\cdot(\Omega;\Omega)-\frac{1}{2}\cdot(\Omega;(K_C\times C)+(C\times K_C)).$$
Tudjuk, hogy
$$\Omega=(d_1-d)\cdot(A\times C)+(d_2-d)\cdot(C\times A)+d\cdot\Delta,$$
ezért ekkor
$$(\Omega;\Omega)=(d_1-d)^2\cdot(A\times C;A\times C)+(d_2-d)^2\cdot(C\times A;C\times A)+d^2\cdot(\Delta;\Delta)+$$
$$2\cdot(d_1-d)\cdot(d_2-d)\cdot(A\times C;C\times A)+2\cdot(d_1-d)\cdot d\cdot(A\times C;\Delta)+$$
$$2\cdot(d_2-d)\cdot d\cdot(C\times A;\Delta)=2\cdot d_1\cdot d-2\cdot g\cdot d^2,$$
ugyanis 2.3.38 és 2.3.39 tételek következtében $(A\times C;A\times C)=(C\times A;C\times A)=0$, $(A\times C;C\times A)=(A\times C;\Delta)=(C\times A;\Delta)=1$ és $(\Delta;\Delta)=2-2\cdot g$. Hasonlóan
$$(\Omega;(K_C\times C)+(C\times K_C))=(\Omega;K_C\times C)+(\Omega;C\times K_C)=(2\cdot g-2)\cdot(\Omega;C\times A)+$$
$$(2\cdot g-2)\cdot(\Omega;A\times C)=(2\cdot g-2)\cdot(d_1+d_2),$$
ahol az előző számításnál felhasznált eredményeken kívül még azt a tényt is kihasználjuk, hogy $K_C\sim(2\cdot g-2)\cdot A$. Ekkor tehát visszahelyettesítve a Riemann–Roch-tétel adta egyenletbe
$$\ell(\Omega)-s(\Omega)+\ell(K_{C\times C}-\Omega)=d_1\cdot d-g\cdot d^2-(g-1)\cdot(d_1+d_2)+(g-1)^2.$$
Az előzőek alapján kiszámolható
$$(K_{C\times C}-\Omega;A\times C+C\times A)=(K_{C\times C};A\times C+C\times A)-(d_1+d_2)=$$
$$=(K_C\times C;A\times C)+(K_C\times C;C\times A)+(C\times K_C;A\times C)+(C\times K_C;C\times A)-$$
$$(d_1+d_2)=(2\cdot g-2)\cdot((A\times C;A\times C)+(C\times A;C\times A)+2\cdot(A\times C;C\times A))-$$
$$(d_1+d_2)=(4\cdot g-4)-(d_1+d_2)<0,$$
ha d_1 és d_2 elég nagy. Figyeljük meg, hogy $\ell(K_{C\times C}-\Omega;A)\geq 1$ pontosan akkor, ha $K_{C\times C}-\Omega$ lineárisan ekvivalens egy effektív divizorral. Csakhogy $A\times C+C\times A$ effektív, így ez ellentmondana a metszési index negativitásának, vagyis $\ell(K_{C\times C}-\Omega;A)=0$. Na de ekkor $s(\Omega)$ nemnegativitása miatt
$$\ell(\Omega)=s(\Omega)+d_1\cdot d-g\cdot d^2-(g-1)\cdot(d_1+d_2)+(g-1)^2\geq d_1\cdot d-g\cdot d^2-(g-1)\cdot(d_1+d_2),$$

ahogy azt az első állításban látni szerettük volna. Sőt, $g \geq 2$ miatt az egyenlőség nem is teljesülhet.

A második állítás igazolásához szintén a felületekre vonatkozó Riemann–Roch-tételt fogjuk használni, ezúttal $D = \delta_1 \cdot N \cdot (A \times C) + \delta_2 \cdot N \cdot (C \times A)$ helyettesítéssel. Számoljuk ki először a kapott egyenletben megjelenő

$$\frac{1}{2} \cdot (\delta_1 \cdot N \cdot (A \times C) + \delta_2 \cdot N \cdot (C \times A)\,; \delta_1 \cdot N \cdot (A \times C) + \delta_2 \cdot N \cdot (C \times A) - K_{C \times C})$$

értéket. Az első állítás bizonyításnál felhasználtakat használva ismét

$$\begin{gathered}(\delta_1 \cdot N \cdot (A \times C) + \delta_2 \cdot N \cdot (C \times A)\,; \delta_1 \cdot N \cdot (A \times C) + \delta_2 \cdot N \cdot (C \times A)) = \\ = \delta_1^2 \cdot N^2 \cdot (A \times C; A \times C) + \delta_2^2 \cdot N^2 \cdot (C \times A; C \times A) + \\ 2 \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot N^2 \cdot (A \times C; C \times A) = 2 \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot N^2,\end{gathered}$$

illetve

$$\begin{gathered}(\delta_1 \cdot N \cdot (A \times C) + \delta_2 \cdot N \cdot (C \times A)\,; K_{C \times C}) = \delta_1 \cdot N \cdot (A \times C; K_C \times C + C \times K_C) + \\ \delta_2 \cdot N \cdot (C \times A; K_C \times C + C \times K_C) = \delta_1 \cdot N \cdot (2 \cdot g - 2) \cdot (A \times C; A \times C) + \\ \delta_1 \cdot N \cdot (2 \cdot g - 2) \cdot (A \times C; C \times A) + \delta_2 \cdot N \cdot (2 \cdot g - 2) \cdot (C \times A; A \times C) + \\ \delta_2 \cdot N \cdot (2 \cdot g - 2) \cdot (C \times A; C \times A) = N \cdot (2 \cdot g - 2) \cdot (\delta_1 + \delta_2)\,,\end{gathered}$$

így

$$\begin{gathered}\frac{1}{2} \cdot (\delta_1 \cdot N \cdot (A \times C) + \delta_2 \cdot N \cdot (C \times A)\,; \delta_1 \cdot N \cdot (A \times C) + \delta_2 \cdot N \cdot (C \times A) - K_{C \times C}) = \\ = N^2 \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 - N \cdot (g - 1) \cdot (\delta_1 + \delta_2)\,.\end{gathered}$$

Az első állításhoz hasonlóan itt is megmutatható, hogy

$$\ell\,(K_{C \times C} - \delta_1 \cdot N \cdot (A \times C) - \delta_2 \cdot N \cdot (C \times A)) = 0.$$

Ehhez számoljuk ki a

$$(K_{C \times C} - \delta_1 \cdot N \cdot (A \times C) - \delta_2 \cdot N \cdot (C \times A)\,; A \times C + C \times A)$$

metszési indexet.

$$(K_{C \times C} - \delta_1 \cdot N \cdot (A \times C) - \delta_2 \cdot N \cdot (C \times A)\,; A \times C + C \times A) =$$

$$(K_{C\times C}; A\times C + C\times A) - \delta_1\cdot N\cdot (A\times C; A\times C + C\times A) -$$
$$\delta_2\cdot N\cdot (C\times A; A\times C + C\times A) = (4\cdot g - 4) - (\delta_1+\delta_2)\cdot N < 0,$$

ha $\delta_1+\delta_2$ elég nagy. Ezért a korábbi ismétlés megismételhető itt is, tehát

$$\ell\left(K_{C\times C} - \delta_1\cdot N\cdot (A\times C) - \delta_2\cdot N\cdot (C\times A)\right) = 0.$$

Jelenleg ott tartunk, hogy a Riemann–Roch-tétel a következő összefüggést adja:

$$\ell\left(\delta_1\cdot N\cdot (A\times C) + \delta_2\cdot N\cdot (C\times A)\right) = s\left(\delta_1\cdot N\cdot (A\times C) + \delta_2\cdot N\cdot (C\times A)\right) +$$
$$N^2\cdot\delta_1\cdot\delta_2 - N\cdot (g-1)\cdot(\delta_1+\delta_2) + (g-1)^2.$$

Az állítás igazolásához elegendő látni, hogy

$$s\left(\delta_1\cdot N\cdot (A\times C) + \delta_2\cdot N\cdot (C\times A)\right) = 0,$$

hiszen

$$N^2\cdot\delta_1\cdot\delta_2 - N\cdot (g-1)\cdot(\delta_1+\delta_2) + (g-1)^2 = (N\cdot\delta_1 - g + 1)\cdot(N\cdot\delta_2 - g + 1).$$

Azonban mivel

$$K_{C\times C} \sim (2\cdot g - 2)\times (A\times C + C\times A),$$

így

$$\delta_1\cdot N\cdot (A\times C) + \delta_2\cdot N\cdot (C\times A) \sim K_{C\times C} + (\delta_1\cdot N + 2 - 2\cdot g)\cdot (A\times C) +$$
$$(\delta_2\cdot N + 2 - 2\cdot g)\cdot (C\times A).$$

Elég nagy $\delta_1;\delta_2$ esetén

$$(\delta_1\cdot N + 2 - 2\cdot g)\cdot (A\times C) + (\delta_2\cdot N + 2 - 2\cdot g)\cdot (C\times A)$$

bőséges, így teljesülnek a 2.3.42 Kodaira-tétel feltételei, tehát

$$s\left(\delta_1\cdot N\cdot (A\times C) + \delta_2\cdot N\cdot (C\times A)\right) = 0,$$

ezzel pedig igazoltuk a második állítást is. □

3.2.2. Állítás. *Alkalmas $s\in\Gamma(C\times C;\mathcal{O})$ globális szeléssel*

$$h(\mathcal{F}) \le c_2\cdot\frac{d_1+d_2}{\gamma} + o(d_1+d_2),$$

ahol c_2 csak a görbétől és $\phi_{N\cdot A}$ valamint ϕ_B beágyazásoktól függ, a $d;d_1;d_2$ konstansoktól nem.

Bizonyítás. Először is rögzítsünk le egy π_1 leképezést a következő módon. Ehhez legyen $\varphi_1 \colon \mathbb{P}^n_K \to \mathbb{P}^1_K$ az a leképezés, mely egy $(x_0 : \ldots : x_n)$ ponthoz $(x_0 : x_n)$ pontot rendeli, legyen ekkor $\pi_1 = \varphi_1 \circ \phi_{N \cdot A}$. Hasonlóképpen $2 \leq k \leq n$ esetén konstruáljuk meg a π_k leképezéseket $\varphi_k \colon \mathbb{P}^n_K \to \mathbb{P}^2_K$ leképezések segítségével, melyek ekkor rendre egy $(x_0 : \ldots : x_n)$ ponthoz egy $(x_0 : x_1 : x_k)$ pontot rendelnek. Legyen $\pi_k = \varphi_k \circ \phi_{N \cdot A}$. C sima, így π_j leképezések morfizmusok, melyeknek ki tudjuk számítani a fokát. Egyrészt

$$\deg(\pi_1) = \deg(\pi_1^*(p)) = \deg(\phi^*_{N \cdot A}(H))$$

valamilyen $p \in \mathbb{P}^1_K$ pontra és $H \subseteq \mathbb{P}^n_K$ hipersíkra, továbbá

$$\deg(\phi^*_{N \cdot A}(H)) = \deg(N \cdot A) = N,$$

ugyanis A-t úgy választottuk, hogy $\deg(A) = 1$ teljesüljön. Másrészt ha $k \geq 2$, akkor hasonlóan

$$\deg(\pi_k(C)) = \deg(\pi_k^*(\mathcal{L})) = \deg(\phi^*_{N \cdot A}(H)) = \deg(N \cdot A) = N,$$

ahol $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{P}^2_K$ egyenes. Tehát $\pi_k(C) \subseteq \mathbb{P}^2_K$ egy N fokú görbe, és így N fokú a $\pi \colon \pi_k(C) \to \mathbb{P}^1_K$ vetítés is. Így mivel

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\pi_k"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \pi_k(C) \arrow[dl, "\pi"] \\ \mathbb{P}^1_K & \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív, így π_k mint $C \to \pi_k(C)$ leképezés 1 fokú, vagyis C és $\pi_k(C)$ biracionálisan ekvivalensek. Ebből az is következik, hogy $K(C) = K\left(\left.\frac{x_1}{x_0}\right|_C ; \left.\frac{x_k}{x_0}\right|_C\right)$. A továbbiakban $1 \leq k \leq n$ esetén legyen $\xi_k = \left.\frac{x_k}{x_0}\right|_C$.

Ahogy azt tehát láttuk, $2 \leq k \leq n$ esetén $\pi_k(C)$ egy N fokú görbe $\mathbb{P}^2_K$-ben, azaz $\pi_k(C)$ egy N fokú homogén polinom nullhelyeinek halmaza. Feltehető, hogy ennek a polinomnak van egy x_k^N tagja 1 együtthatóval, hiszen ellenkező esetben egy másik bázisát vesszük $L(N \cdot A)$-nak $\phi_{N \cdot A}$ definiálásához, amely így már eleget tesz ennek a kikötésnek. Áttérve affin koordinátákra, $\pi_k(C)$-t az

$$\xi_k^N = \sum_{r=0}^{N-1} a_{r;k}(\xi_1) \cdot \xi_k^r$$

egyenlet definiálja valamely $a_{r;k} \in R[\xi_1]$ legfeljebb $N-k$ fokú polinomokkal, ahol R az egészek gyűrűje K-ban. Az együtthatókra vonatkozó feltételt ismét $\phi_{N\cdot A}$ választásának szabadsága miatt tehetjük fel.

Láttuk tehát, hogy $K(C) = K(\xi_1;\xi_k)$, illetve $[K(\xi_1;\xi_2) : K(\xi_1)] = N$. Jelesül

$$\left\{1;\xi_2;\ldots;\xi_2^{N-1}\right\}$$

bázis $K(C)$-n, mint $K(\xi_1)$ feletti vekortéren. Ugyanígy kapjuk, hogy

$$K(C\times C) = K(\xi_1;\xi_2;\xi_1';\xi_2'),$$

illetve hogy

$$\mathcal{B} = \left\{\xi_2^{\alpha}\cdot(\xi_2')^{\beta} : 0 \le \alpha;\beta \le N-1\right\}$$

bázist ad $K(C\times C)$-n $K(\xi_1;\xi_1')$ fölött. Ezért ha tekintjük ϕ_B visszahúzását az egyes koordinátákon, akkor azt kapjuk, hogy

$$\phi_B^*\left(\frac{y_k}{y_0}\right) = \frac{P_k(\xi_1;\xi_2;\xi_1';\xi_2')}{Q_k(\xi_1;\xi_2;\xi_1';\xi_2')}$$

valamilyen $P_k;Q_k \in K[\xi_1;\xi_2;\xi_1';\xi_2']$ polinomokra (sőt, feltehetjük, hogy $R[\xi_1;\xi_2;\xi_1';\xi_2']$-beliek). Affin koordinátákat használva $\Gamma(C\times C;\mathcal{O}(\Omega))$ globális szelései F_k polinomok, melyek $(\xi_1;\ldots;\xi_n)$-ben legfeljebb δ_1 fokúak, míg $(\xi_1';\ldots;\xi_n')$-ben legfeljebb δ_2 fokúak, valamint $0\le\alpha;\beta\le m$ esetén teljesítik

$$(P_\alpha\cdot Q_\beta)^d\cdot F_\beta = (P_\beta\cdot Q_\alpha)^d\cdot F_\alpha$$

egyenlőséget. Tekintsük most a következő függvénytereket. Legyen

$$V_1 = \{F\in K(C\times C) : F\in K[\xi;\xi'] \text{ legfeljebb } (\delta_1;\delta_2) \text{ bifokú}\}.$$

Legyen továbbá

$$V_2 = V_1 \cap K[\xi_1;\xi_2;\xi_1';\xi_2'],$$

végül pedig legyen

$$V_3 = \left\{(F_0;\ldots;F_m)\in V_1^{m+1}:\ (P_\alpha\cdot Q_\beta)^d\cdot F_\beta = (P_\beta\cdot Q_\alpha)^d\cdot F_\alpha\ \ \forall\, 0\le\alpha;\beta\le m\right\}.$$

Ekkor V_1 épp $\mathcal{O}(\delta_1\cdot(N\cdot A\times C)+\delta_2\cdot(C\times(N\cdot A)))$ globális szeléseinek a tere, így ahogyan a 3.2.1 lemmában kiszámoltuk,

$$\dim(V_1) = (N\cdot\delta_1-g+1)\cdot(N\cdot\delta_2-g+1).$$

Szintén a 3.2.1 lemma következménye, hogy

$$\dim\left(V_3\right) \geq d_1 \cdot d_2 - g \cdot d^2 - (g-1) \cdot \left(d_1 + d_2\right),$$

ugyanis V_3 épp $\mathcal{O}\left(\Omega\right)$ szeléseinek a tere. $V_2 \leq V_1$ dimenziójának megállapításához tekintsük a következő bázist:

$$\mathcal{B}_2 = \left\{\xi_1^{i_1} \cdot \xi_2^{i_2} \cdot (\xi')_1^{j_1} \cdot (\xi')_2^{j_2} : \xi_2^{i_2} \cdot (\xi')_2^{j_2} \in \mathcal{B} \text{ és } i_1 + i_2 \leq \delta_1; j_1 + j_2 \leq \delta_2\right\}.$$

Ez alapján

$$\dim\left(V_2\right) = \left(N \cdot \delta_1 - \frac{N \cdot (N-3)}{2}\right) \cdot \left(N \cdot \delta_2 - \frac{N \cdot (N-3)}{2}\right),$$

hiszen i_1-et $\delta_1 + 1$-féleképp, i_2-t N féleképp választhatjuk ki, ami $(\delta_1 + 1) \cdot N$ monomot ad, ezek közül pedig azok lesznek rosszak, amikre $1 \leq i_1 + i_2 - \delta_1 \leq N - 1$, amiből $\binom{N}{2}$ van, így i_1 és i_2 kitevőket

$$(\delta_1 + 1) \cdot N - \binom{N}{2} = N \cdot \delta_1 - \frac{N \cdot (N-3)}{2}$$

féleképp választhatjuk meg, ezzel analóg módon pedig adódik, hogy j_1 és j_2 választása

$$N \cdot \delta_2 - \frac{N \cdot (N-3)}{2}$$

féle lehet. Nekünk egy olyan szelésre lesz szükségünk, ami eleme $V_1^{m+1} \cap V_3$ térnek. Ennek tehát altere $V_2^{m+1} \cap V_3$, ez utóbbival pedig egyszerűbb dolgozni $\mathcal{B}_2$ bázis ismeretében. Az előzőek alapján tehát becsülhetjük $V_2^{m+1} \cap V_3$ dimenziószámát:

$$\begin{aligned}\dim\left(V_2^{m+1} \cap V_3\right) &\geq \dim\left(V_3\right) - \left(\dim\left(V_1^{m+1}\right) - \dim\left(V_2^{m+1}\right)\right) \geq \\ &\geq d_1 \cdot d_2 - g \cdot d^2 + O\left(d_1 + d_2\right) \geq \gamma \cdot d_1 \cdot d_2 + O\left(d_1 + d_2\right).\end{aligned}$$

Mivel a korábban látottak szerint

$$\xi_2^N = \sum_{r=0}^{N-1} a_{r;k}\left(\xi_1\right) \cdot \xi_2^r$$

és

$$\left(\xi_2'\right)^N = \sum_{r=0}^{N-1} a_{r;k}\left(\xi_1'\right) \cdot \left(\xi_2'\right)^r,$$

így $\mu; \rho \in \mathcal{B}$ esetén

$$\mu \cdot \rho = \sum_{\lambda \in \mathcal{B}} b_{\mu;\rho;\lambda}\left(\xi_1; \xi_1'\right) \cdot \lambda,$$

ahol $b_{\mu;\rho;\lambda} \in R[\xi_1; \xi_1']$ polinomok. Legyen most $P \in R[\xi_1; \xi_2; \xi_1'; \xi_2']$ polinom, ekkor persze P egyértelműen felírható mint

$$P(\xi_1; \xi_2; \xi_1'; \xi_2') = \sum_{\mu \in \mathcal{B}} p_\mu(\xi_1; \xi_1') \cdot \mu$$

alkalmas $p_\mu \in R[\xi_1; \xi_1']$ polinomokra, és ugyanígy a

$$(P(\xi_1; \xi_2; \xi_1'; \xi_2'))^k = \sum_{\mu \in \mathcal{B}} p_{\mu;k}(\xi_1; \xi_1') \cdot \mu$$

felírás is egyértelmű $p_{\mu;k} \in R[\xi_1; \xi_1']$ polinomokkal, tetszőleges k pozitív hatványra. Ekkor

$$(P(\xi_1; \xi_2; \xi_1'; \xi_2'))^{k+1} = (P(\xi_1; \xi_2; \xi_1'; \xi_2'))^k \cdot P(\xi_1; \xi_2; \xi_1'; \xi_2') =$$
$$= \left(\sum_{\mu \in \mathcal{B}} p_{\mu;k}(\xi_1; \xi_1') \cdot \mu\right) \cdot \left(\sum_{\rho \in \mathcal{B}} p_\rho(\xi_1; \xi_1') \cdot \rho\right) = \sum_{\lambda \in \mathcal{B}} \left(\sum_{\mu;\rho \in \mathcal{B}} (p_{\mu;k} \cdot p_\rho \cdot b_{\mu;\rho;\lambda})(\xi_1; \xi_1') \cdot \lambda\right),$$

így ekkor

$$p_{\mu;k+1} = \sum_{\lambda;\rho \in \mathcal{B}} p_{\lambda;k} \cdot p_\rho \cdot b_{\lambda;\rho;\mu}.$$

Ezt felhasználva rögtön adódik, hogy

$$\max_{\mu \in \mathcal{B}} \deg(p_{\mu;k+1}) \le (k+1) \cdot \max_{\mu \in \mathcal{B}} \deg\left(p_\mu + k \cdot \max_{\lambda;\mu;\rho \in \mathcal{B}} \deg(b_{\lambda;\mu;\rho}) \le c_3 \cdot (k+1)\right)$$

alkalmas c_3 konstanssal. A 2.4.26 állítás szerint, $|\mathcal{B}| = N^2$ ismeretében tudjuk becsülni $p_{\mu;k}$ polinomok magasságait is:

$$\max_{\mu \in \mathcal{B}} h(p_{\mu;k+1}) \le [K:\mathbb{Q}] \cdot \sup h\left(\prod_{k+1 \text{ faktor}} p_\mu \cdot \prod_{k \text{ faktor}} b_{\mu;\lambda;\rho}\right) + 2 \cdot k \cdot \log(N) \le$$
$$\le [K:\mathbb{Q}] \cdot \left((k+1) \cdot \sup_{\mu \in \mathcal{B}} \{h(p_\mu) + \deg(p_\mu) + 1\} + k \cdot \sum_{\mu;\rho\lambda \in \mathcal{B}} (h(b_{\mu;\rho;\lambda}) + h(b_{\mu;\rho;\lambda}) + 1)\right) +$$
$$2 \cdot k \cdot \log(N) \le c_4 \cdot (k+1)$$

alkalmas c_4 konstanssal. Ezeket a megállapításokat felhasználhatjuk a $P = P_\alpha \cdot Q_\beta \in R[\xi_1; \xi_2; \xi_1'; \xi_2']$ polinom esetében:

$$(P_\alpha \cdot Q_\beta)^d = \sum_{\mu \in \mathcal{B}} p_{\alpha;\beta;\mu;d} \cdot \mu$$

alkalmas $p_{\alpha;\beta;\mu;d} \cdot \mu \in R\left[\xi_1; \xi_1'\right]$ polinomokkal, melyekre alkalmas c_5 konstanssal $h\left(p_{\alpha;\beta;\mu;d} \cdot \mu\right) \leq c_5 \cdot d$, és c_5 független d-től. Továbbá minden $F_k \in V_2$ egyértelműen felírható

$$F_k = \sum_{\substack{\rho \in \mathcal{B} \\ i_1; j_1}} u_{k;i_1;j_1;\rho} \cdot \xi_1^{i_1} \cdot \left(\xi_1'\right)^{j_1} \cdot \rho$$

alakban. Ebben a felírásban világos, hogy egy $(F_0; \ldots; F_m) \in V_2^{m+1}$ polinom $(m+1)$-es pontosan akkor lesz eleme V_3-nak, ha minden $0 \leq \alpha; \beta \leq m$ esetén

$$0 = \left(\sum_{\mu \in \mathcal{B}} p_{\beta;\alpha;\mu;d} \cdot \mu\right) \cdot \left(\sum_{\substack{\rho \in \mathcal{B} \\ i_1; j_1}} u_{\alpha;i_1;j_1;\rho} \cdot \xi_1^{i_1} \cdot \left(\xi_1'\right)^{j_1} \cdot \rho\right) -$$

$$\left(\sum_{\mu \in \mathcal{B}} p_{\alpha;\beta;\mu;d} \cdot \mu\right) \cdot \left(\sum_{\substack{\rho \in \mathcal{B} \\ i_1; j_1}} u_{\beta;i_1;j_1;\rho} \cdot \xi_1^{i_1} \cdot \left(\xi_1'\right)^{j_1} \cdot \rho\right) =$$

$$= \sum_{\substack{\mu;\rho \in \mathcal{B} \\ i_1; j_1}} \left(\left(p_{\beta;\alpha;\mu;d} \cdot u_{\alpha;i_1;j_1;\rho} - p_{\alpha;\beta;\mu;d} \cdot u_{\beta;i_1;j_1;\rho}\right) \cdot \xi_1^{i_1} \cdot \left(\xi_1'\right)^{j_1} \cdot \sum_{\lambda \in \mathcal{B}} b_{\mu;\rho;\lambda} \cdot \lambda\right) =$$

$$= \sum_{\lambda \in \mathcal{B}} \left(\sum_{\substack{\mu;\rho \in \mathcal{B} \\ i_1; j_1}} \left(p_{\beta;\alpha;\mu;d} \cdot u_{\alpha;i_1;j_1;\rho} - p_{\alpha;\beta;\mu;d} \cdot u_{\beta;i_1;j_1;\rho}\right) \cdot \xi_1^{i_1} \cdot \left(\xi_1'\right)^{j_1} \cdot b_{\mu;\rho;\lambda}\right) \cdot \lambda.$$

Csakhogy mivel ez minden $\alpha; \beta \in \mathcal{B}$-re teljesül, ez ekvivalens

$$\sum_{\substack{\mu;\rho \in \mathcal{B} \\ i_1; j_1}} \xi_1^{i_1} \cdot \left(\xi_1'\right)^{j_1} \cdot \left(p_{\beta;\alpha;\mu;d} \cdot u_{\alpha;i_1;j_1;\rho} - p_{\alpha;\beta;\mu;d} \cdot u_{\beta;i_1;j_1;\rho}\right) \cdot b_{\mu;\rho;\lambda} = 0$$

feltétellel minden $\alpha; \beta \in \mathcal{B}$ esetén, mivel $\mathcal{B}$ elemei lineárisan függetlenek $K\left(\xi_1; \xi_1'\right)$ fölött. Így hát azt kaptuk, hogy

$$\dim\left(V\right) \geq \gamma \cdot d_1 \cdot d_2 + O\left(d_1 + d_2\right),$$

ahol V az

$$\sum_{\substack{\mu;\rho \in \mathcal{B} \\ i_1; j_1}} \xi_1^{i_1} \cdot \left(\xi_1'\right)^{j_1} \cdot \left(p_{\beta;\alpha;\mu;d} \cdot u_{\alpha;i_1;j_1;\rho} - p_{\alpha;\beta;\mu;d} \cdot u_{\beta;i_1;j_1;\rho}\right) \cdot b_{\mu;\rho;\lambda} = 0$$

rendszer megoldásainak tere. Egyrészt azért, mert $b_{\mu;\rho;\lambda}$ független d-től, másrészt a korábban látottak alapján, alkalmas d-től független c_5 konstanssal $\deg\left(b_{\mu;\rho;\lambda}\right); h\left(b_{\mu;\rho;\lambda}\right) \leq c_5$ valamint $\deg\left(p_{\alpha;\beta;\mu;d}\right); h\left(p_{\alpha;\beta;\mu;d}\right) \leq c_5 \cdot d$. Így hát alkalmas c_6 konstansra $h\left(f_{i_1;j_1;\mu;\rho;\lambda;\alpha;\beta;d}\right) \leq$

$c_6 \cdot d$, ahol

$$f_{i_1;j_1;\mu;\rho;\lambda;\alpha;\beta;d}\left(\xi_1;\xi_1'\right) = \xi_1^{i_1} \cdot \left(\xi_1'\right)^{j_1} \cdot b_{\mu;\rho;\lambda}\left(\xi_1;\xi_1'\right) \cdot p_{\alpha;\beta;\mu;d}\left(\xi_1;\xi_1'\right).$$

Ezzel a jelöléssel tehát a megoldandó rendszerünk az

$$\sum_{\substack{\mu;\rho\in\mathcal{B}\\ i_1;j_1}} \left(f_{i_1;j_1;\mu;\rho;\lambda;\beta;\alpha;d}\left(\xi_1;\xi_1'\right) \cdot u_{\alpha;i_1;j_1;\rho} - f_{i_1;j_1;\mu;\rho;\lambda;\alpha;\beta;d}\left(\xi_1;\xi_1'\right) \cdot u_{\beta;i_1;j_1;\rho}\right) = 0$$

alakot ölti. Összegezve tehát a lineáris rendszer együtthatói egy c_7 konstansra $c_7 \cdot d$-ben maximalizálhatók. Végül a 2.4.10 Siegel-lemmát alkalmazva behelyettesítés és némi számolás után következik, hogy

$$h\left(\mathcal{F}\right) \leq c_8 \cdot \frac{\dim\left(V_2^{m+1}\right)}{\dim\left(V_2^{m+1} \cap V_3\right)} \cdot c_7 \cdot d \leq c_2 \cdot \frac{d_1 + d_2}{\gamma} + o\left(d_1 + d_2\right),$$

ahogyan azt látni szerettük volna. □

3.3. Megengedett párok

Legyenek ζ_z és ζ_w uniformizerek rendre z és w pontokban. Ekkor tetszőleges racionális függvényre $C \times C$-n, amely reguláris a $(z;w)$ pontban, gondolhatunk úgy, mint ζ_z és ζ_w függvényére, melynek ki tudjuk számolni a formális parciális deriváltjait. Vezessük be a következő differenciáloperátorokat.

3.3.1. Jelölés. Legyen tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\partial_k^z = \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_z}\right)^k$$

és hasonlóképp

$$\partial_k^w = \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_w}\right)^k.$$

Ha egyértelmű, hogy mely pontra gondolunk, a felső indexből elhagyjuk a z illetve w betűket.

Bevezetünk továbbra egy konkrét $K\left(C \times C\right)$-beli racionális f függvényt:

$$f = \frac{y_0^d \cdot s}{x_0^{\delta_1} \cdot \left(x_0'\right)^{\delta_2}},$$

azaz ekkor az s-re tett korábbi megállapításaink alapján

$$f = \left(\frac{y_0}{y_k}\right)^d \cdot F_k\left(\frac{x}{x_0}; \frac{x'}{x'_0}\right).$$

3.3.2. Definíció. *Az s **szelés indexén** a $(z;w)$ pontban az*

$$\mathrm{Ind}\,(s) = \min\left\{\frac{i_1}{\delta_1} + \frac{i_2}{\delta_2} : i_1; i_2 \in \mathbb{N} \text{ és } \left(\partial^z_{i_1}\partial^w_{i_2} f\right)(z;w) \neq 0\right\}$$

*számot értjük. Egy $(i_1^*; i_2^*)$ természetes számpárt **megengedettnek** hívunk s-hez, ha eleget tesznek az $\mathrm{Ind}\,(s) = \frac{i_1^*}{\delta_1} + \frac{i_2^*}{\delta_2}$ illetve $\left(\partial^z_{i_1^*}\partial^w_{i_2^*} f\right)(z;w) \neq 0$ feltételeknek.*

3.3.3. Lemma. *Legyen g racionális $C \times C$-n, melyre $g(z;w) \neq 0$, valamint legyen $(i_1^*; i_2^*)$ megengedett s-hez. Ekkor*

$$\left(\partial^z_{i_1^*}\partial^w_{i_2^*} f\right)(z;w) = \left(\frac{\left(\partial^z_{i_1^*}\partial^w_{i_2^*}\right)(f \cdot g)}{g}\right)(z;w).$$

Bizonyítás. A Leibniz-szabály értelmében

$$\left(\partial^z_{i_1^*}\partial^w_{i_2^*}\right)(f \cdot g) = \sum_{u_z+v_z=i_1^*} \sum_{u_w+v_w=i_2^*} \left(\left(\partial^z_{u_z}\partial^w_{u_w}\right)(f)\right) \cdot \left(\left(\partial^z_{v_z}\partial^w_{v_w}\right)(g)\right).$$

$(i_1^*; i_2^*)$ megengedettsége miatt a szummában csak egyetlen nemnulla tag fordul elő, ez pedig épp a kívánt egyenlőséget adja. □

3.3.4. Lemma. *Legyenek $\zeta_0; \ldots; \zeta_n \in K(C)$ racionális függvények, melyek z-ben reguláris. Hasonlóan, legyenek $\zeta'_0; \ldots; \zeta'_n \in K(C)$ olyan reguláris függvények, melyek w-ben regulárisak. Legyen továbbá F bihomogén polinom $(\delta_1; \delta_2)$ bifokkal. Tegyük fel, hogy ζ uniformizer z-ben és ζ' uniformizer w-ben, ahol $\zeta = (\zeta_0; \ldots; \zeta_n)$ és $\zeta' = (\zeta'_0; \ldots; \zeta'_n)$. Ekkor tetszőleges $v \in M_K$ esetén*

$$\left\|\left(\partial^z_{i_1^*}\partial^w_{i_2^*} F(\zeta;\zeta')\right)(z;w)\right\|_v \leq |F|_v \cdot 2_v^{i_1^*+i_2^*+2\cdot\delta_1+2\cdot\delta_2+2\cdot n}\cdot$$

$$\max_{i_1+\ldots+i_{\delta_1}=i_1^*} \prod_{k=1}^{\delta_1} \max_{0\leq\alpha\leq n} \left\|\left(\partial_{i_\alpha}\zeta_\alpha\right)(z)\right\|_v \cdot \max_{i'_1+\ldots+i'_{\delta_2}=i_2^*} \prod_{k=1}^{\delta_2} \max_{0\leq\alpha\leq n} \left\|\left(\partial_{i'_\alpha}\zeta'_\alpha\right)(w)\right\|_v.$$

Bizonyítás. Korábban meggondoltuk, hogy F-nek legfeljebb

$$\binom{\delta_1 + n}{n} \cdot \binom{\delta_2 + n}{n} \leq 2^{\delta_1+\delta_2+2\cdot n}$$

monomja lehet, amiből a háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva a

$$\left\| \left(\partial^z_{i_1^*} \partial^w_{i_2^*} F\left(\zeta; \zeta'\right) \right) (z; w) \right\|_v \leq |F|_v \cdot 2^{\delta_1+\delta_2+2\cdot n} \cdot$$
$$\max_{j_0+\ldots+j_n=\delta_1} \left\| \left(\partial_{i_1^*} \left(\zeta_0^{j_0} \cdot \ldots \cdot \zeta_n^{j_n} \right) \right) (z) \right\|_v \cdot \max_{j'_0+\ldots+j'_n=\delta_2} \left\| \left(\partial_{i_2^*} \left(\left(\zeta'_0\right)^{j'_0} \cdot \ldots \cdot \left(\zeta'_n\right)^{j'_n} \right) \right) (w) \right\|_v$$

becslés adható. Ha v nemarkhimédeszi, akkor ehelyett az ultrametrikus egyenlőtlenséget felírva nagyon hasonló becslést kapunk, azzal a különbséggel, hogy ebben itt nem szerepel a $2^{\delta_1+\delta_2+2\cdot n}$ szorzó, így mindent összevetve

$$\left\| \left(\partial^z_{i_1^*} \partial^w_{i_2^*} F\left(\zeta; \zeta'\right) \right) (z; w) \right\|_v \leq |F|_v \cdot 2_v^{\delta_1+\delta_2+2\cdot n} \cdot$$
$$\max_{j_0+\ldots+j_n=\delta_1} \left\| \left(\partial_{i_1^*} \left(\zeta_0^{j_0} \cdot \ldots \cdot \zeta_n^{j_n} \right) \right) (z) \right\|_v \cdot \max_{j'_0+\ldots+j'_n=\delta_2} \left\| \left(\partial_{i_2^*} \left(\left(\zeta'_0\right)^{j'_0} \cdot \ldots \cdot \left(\zeta'_n\right)^{j'_n} \right) \right) (w) \right\|_v.$$

Ezt tovább tudjuk becsülni a következő megfigyeléssel:

$$\partial_I \left(\theta_0; \ldots; \theta_\delta\right) \sum_{i_0+\ldots+i_\delta=I} \left(\partial_{i_0}\theta_0\right) \cdot \ldots \cdot \left(\partial_{i_\delta}\theta_\delta\right)$$

a Leibniz-szabály alapján, ahol $\theta_0; \ldots; \theta_\delta \in K(C)$ regulárisak z-ben és $I; \delta \in \mathbb{N}$ tetszőlegesek. Ennek a szummának pedig legfeljebb

$$\binom{I+\delta}{\delta} \leq 2^{I+\delta}$$

tagja van, ezért a háromszög-egyenlőtlenséget, illetve nemarkhimédeszi v esetén az ultrametrikus egyenlőtlenséget alkalmazva

$$\max_{j_0+\ldots+j_n=\delta_1} \left\| \left(\partial_{i_1^*} \left(\zeta_0^{j_0} \cdot \ldots \cdot \zeta_n^{j_n} \right) \right) (z) \right\|_v \leq 2_v^{i_1^*+\delta_1} \cdot \max_{i_1+\ldots+i_{\delta_1}=i_1^*} \prod_{k=1}^{\delta_1} \max_{0\leq\alpha\leq n} \left\| \left(\partial_{i_k}\zeta_\alpha \right) (z) \right\|_v$$

és

$$\max_{j'_0+\ldots+j'_n=\delta_2} \left\| \left(\partial_{i_2^*} \left(\left(\zeta'_0\right)^{j'_0} \cdot \ldots \cdot \left(\zeta'_n\right)^{j'_n} \right) \right) (w) \right\|_v \leq 2_v^{i_2^*+\delta_2} \cdot \max_{i'_1+\ldots+i'_{\delta_2}=i_2^*} \prod_{k=1}^{\delta_2} \max_{0\leq\alpha\leq n} \left\| \left(\partial_{i'_k}\zeta'_\alpha \right) (w) \right\|_v.$$

Ezeket a becsléseket behelyettesítve az először kapott egyenlőtlenségbe adódik a lemma állítása. $\square$

3.3.5. Állítás. *Legyen* $(i_1^*; i_2^*)$ *megengedett pár s-hez. Ekkor*

$$h_{C\times C;\Omega}(z;w) \geq -h(\mathcal{F}) - [K:\mathbb{Q}]\cdot\log(2)\cdot(i_1^* + i_2^* + 2\cdot\delta_1 + 2\cdot\delta_2 + 2\cdot n) -$$
$$\sum_{v\in M_k} \max_{i_1+\ldots+i_{\delta_1}=i_1^*} \sum_{k=1}^{\delta_1} \max_{0\leq\alpha\leq n} \min_{\beta} \log\left\|\left(\partial_{i_k}\frac{x_\alpha}{x_\beta}\right)(z)\right\|_v -$$
$$\sum_{v\in M_k} \max_{i'_1+\ldots+i'_{\delta_2}=i_2^*} \sum_{k=1}^{\delta_2} \max_{0\leq\alpha\leq n} \min_{\beta} \log\left\|\left(\partial_{i'_k}\frac{x'_\alpha}{x'_\beta}\right)(w)\right\|_v.$$

Bizonyítás. Ahogy azt már korábban is említettük,

$$h_{C\times C}(z;w) = \delta_1\cdot h(\phi_{N\cdot A}(z)) + \delta_2\cdot h(\phi_{N\cdot A}(w)) - d\cdot h(\pi_B(z;w)) =$$
$$= \delta_1\cdot\sum_{v\in M_K}\max_\alpha \log\|x_\alpha(z)\|_v + \delta_2\cdot\sum_{v\in M_K}\max_\beta \log\left\|x'_\beta(w)\right\|_v -$$
$$d\cdot\sum_{v\in M_K}\max_\kappa \log\|y_\kappa(z;w)\|_v = -\sum_{v\in M_K}\min_{\alpha;\beta}\max_\kappa\log\left\|\left(\frac{y_\kappa^d}{x_\alpha^{\delta_1}\cdot\left(x'_\beta\right)^{\delta_2}}\right)(z;w)\right\|_v.$$

Mivel a feltevés szerint $(i_1^*; i_2^*)$ megengedett, így $\left(\partial_{i_1^*}^z\partial_{i_2^*}^w f\right)(z;w) \neq 0$, azaz a 2.4.4 szorzat azonosságot alkalmazva

$$\sum_{v\in M_K}\log\left\|\left(\partial_{i_1^*}^z\partial_{i_2^*}^w f\right)(z;w)\right\|_v = 0$$

adódik. Ebből, hasonlóan ahhoz, ahogyan azt már a $h_{C\times C;\Omega}$-ra először adott alsó becslés bizonyítása során is láttuk,

$$h_{C\times C}(z;w) = -\sum_{v\in M_K}\min_{\alpha;\beta}\max_\kappa\log\left\|\left(\frac{y_\kappa^d\cdot\left(\partial_{i_1^*}^z\partial_{i_2^*}^w f\right)}{x_\alpha^{\delta_1}\cdot\left(x'_\beta\right)^{\delta_2}}\right)(z;w)\right\|_v.$$

Feltehetjük, hogy z és w teljesítik az

$$\begin{aligned} x_\alpha(z) &\neq 0 \quad \text{ha } 0\leq\alpha\leq n \\ x'_\beta(w) &\neq 0 \quad \text{ha } 0\leq\beta\leq n \\ y_0(z;w) &\neq 0 \end{aligned}$$

egyenlőtlenségeket.Ekkor ismét alkalmazható a 2.4.4 szorzat azonosság, ezúttal a

$$\sum_{v\in M_K}\log\left\|\left(\frac{y_0^d}{x_0^{\delta_1}\cdot\left(x'_0\right)^{\delta_2}}\right)(z;w)\right\|_v = 0$$

alakban. Ezt ismét levonva a $h_{C\times C;\Omega}$-ra felírt legutóbbi egyenletünkből

$$h_{C\times C}\left(z;w\right)=-\sum_{v\in M_K}\min_{\alpha;\beta}\max_{\kappa}\log\left\|\left(\frac{\left(\frac{y_\kappa}{y_0}\right)^d\cdot\left(\partial^z_{i_1^*}\partial^w_{i_2^*}f\right)}{\left(\frac{x_\alpha}{x_0}\right)^{\delta_1}\cdot\left(\frac{x'_\beta}{x'_0}\right)^{\delta_2}}\right)(z;w)\right\|_v.$$

Legyen most

$$G=\frac{\left(\frac{y_\kappa}{y_0}\right)^d}{\left(\frac{x_\alpha}{x_0}\right)^{\delta_1}\cdot\left(\frac{x'_\beta}{x'_0}\right)^{\delta_2}}.$$

Alkalmazva a 3.3.3 lemmát G-re, majd behelyettesítve f definícióját

$$\left(\frac{\left(\frac{y_\kappa}{y_0}\right)^d\cdot\left(\partial^z_{i_1^*}\partial^w_{i_2^*}f\right)}{\left(\frac{x_\alpha}{x_0}\right)^{\delta_1}\cdot\left(\frac{x'_\beta}{x'_0}\right)^{\delta_2}}\right)(z;w)=\partial^z_{i_1^*}\partial^w_{i_2^*}\left(\frac{\left(\frac{y_\kappa}{y_0}\right)^d\cdot f}{\left(\frac{x_\alpha}{x_0}\right)^{\delta_1}\cdot\left(\frac{x'_\beta}{x'_0}\right)^{\delta_2}}\right)(z;w)=$$

$$=\left(\partial^z_{i_1^*}\partial^w_{i_2^*}F_\kappa\left(\frac{x}{x_\alpha};\frac{x'}{x'_\beta}\right)\right)(z;w).$$

Ezzel a helyettesítéssel élve tehát némiképp a

$$h_{C\times C}\left(z;w\right)=-\sum_{v\in M_K}\min_{\alpha;\beta}\max_{\kappa}\log\left\|\left(\partial^z_{i_1^*}\partial^w_{i_2^*}F_\kappa\left(\frac{x}{x_\alpha};\frac{x'}{x'_\beta}\right)\right)(z;w)\right\|_v$$

alakra egyszerűsödik az egyenletünk. Erre pedig tudjuk alkalmazni a szummában tagonként a 3.3.4 lemmából adódó becsléseket:

$$h_{C\times C}\left(z;w\right)\geq-\sum_{v\in M_K}\log\left(2_v^{i_1^*+i_2^*+2\cdot\delta_1+2\cdot\delta_2+2\cdot n}\right)-\sum_{v\in M_K}\max_{\kappa}\log\left|F_\kappa\right|_v-$$

$$\sum_{v\in M_K}\min_{\beta}\max_{i_1+\ldots+i_{\delta_1}=i_1^*}\sum_{k=1}^{\delta_1}\max_{0\leq\alpha\leq n}\log\left\|\left(\partial_{i_k}\frac{x_\alpha}{x_\beta}\right)(z;w)\right\|_v-$$

$$\sum_{v\in M_K}\min_{\beta}\max_{i'_1+\ldots+i'_{\delta_2}=i_2^*}\sum_{k=1}^{\delta_2}\max_{0\leq\alpha\leq n}\log\left\|\left(\partial_{i'_k}\frac{x'_\alpha}{x'_\beta}\right)(z;w)\right\|_v\geq$$

$$\geq-\left(i_1^*+i_2^*+2\cdot\delta_1+2\cdot\delta_2+2\cdot n\right)\cdot[K:\mathbb{Q}]\cdot\log\left(2\right)-h\left(\mathcal{F}\right)-$$

$$\sum_{v\in M_K}\min_{\beta}\max_{i_1+\ldots+i_{\delta_1}=i_1^*}\sum_{k=1}^{\delta_1}\max_{0\leq\alpha\leq n}\log\left\|\left(\partial_{i_k}\frac{x_\alpha}{x_\beta}\right)(z;w)\right\|_v-$$

$$\sum_{v\in M_K}\min_{\beta}\max_{i'_1+\ldots+i'_{\delta_2}=i_2^*}\sum_{k=1}^{\delta_2}\max_{0\leq\alpha\leq n}\log\left\|\left(\partial_{i'_k}\frac{x'_\alpha}{x'_\beta}\right)(z;w)\right\|_v,$$

ahogyan azt látni szerettük volna. $\square$

Most az előző állítás becslésében felbukkanó parciális deriváltak abszolútértékeit fogjuk becsülni.

Tekintsünk most egy ζ uniformizerét z-nek. Ekkor tetszőleges C-n racionális ξ függvény egy $P(\xi;\zeta) = 0$ polinomegyenletet elégít ki, ahol P foka legfeljebb $[K(C) : K(\zeta)]$. Továbbá ha a $P_\xi = \frac{\partial P}{\partial \xi}$ parciális derivál nem tűnik el z-ben, akkor az implicitfüggvény-tétel szerint z egy környezetében

$$\xi(\zeta) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (\partial_k \xi(z)) \cdot \zeta^k.$$

3.3.6. Állítás. *Legyen $P \in K[\xi;\zeta]$ egy Δ fokú polinom és $a \in K$ olyan, hogy $P(a;0) = 0$ és $P_\xi(a;0) \neq 0$. Legyen ξ az az algebrai függvény, melyre $P(\xi(\zeta);\zeta) = 0$ és $\xi(0) = a$. Ekkor bármyle $v \in M_K$ abszolútértékre*

$$\|\partial_k \xi(0)\|_v \leq (2\cdot\Delta)_v^{11\cdot k} \cdot \left(\frac{|P|_v}{\|P_\xi(a;0)\|_v}\right)^{2\cdot k-1} \cdot \left(\max\{1;\|a\|_v\}\right)^{2\cdot\Delta\cdot k},$$

minden $k \geq 1$ esetén.

Bizonyítás. Először is azt állítjuk, hogy minden $k \geq 1$ esetén létezik olyan Q_k polinom, hogy

$$Q_k + (P_\xi)^{2\cdot k-1} \cdot \frac{\partial^k \xi}{\partial \zeta^k} = 0.$$

Ezt teljes indukcióval fogjuk belátni. $k = 1$ esetén $Q_k = P_\zeta$ adódik a $P(\xi(\zeta);\zeta) = 0$ feltétel deriválása után. Tegyük hát fel, hogy valamely k-ra a feltétlenek megfelelő Q_k már adott. Ekkor deriválva a Q_k-ra feltételül szolgáló egyenletet,

$$(Q_k)_\xi \cdot \xi_\zeta + (Q_k)_\zeta + (2\cdot k-1)\cdot(P_\xi)^{2\cdot k-2} \cdot \left((P_\xi)_\xi \cdot \xi_\zeta + (P_\xi)_\zeta\right) \cdot \frac{\partial^k \xi}{\partial \zeta^k} + (P_\xi)^{2\cdot k-1} \cdot \frac{\partial^{k+1}}{\partial \zeta^{k+1}} = 0$$

adódik, amit $0 \neq (P_\xi)^2$-tel beszorozva

$$(P_\xi)^{2\cdot(k+1)-1} \cdot \frac{\partial^{k+1}}{\partial \zeta^{k+1}} = -(P_\xi)^2 \cdot (Q_k)_\xi \cdot \xi_\zeta - (P_\xi)^2 \cdot (Q_k)_\zeta -$$
$$(2\cdot k-1)\cdot(P_\xi)^{2\cdot k} \cdot \left((P_\xi)_\xi \cdot \xi_\zeta - (P_\xi)_\zeta\right) \cdot \frac{\partial^k \xi}{\partial \zeta^k}$$

egyenletet kapjuk. Kihasználva az indukciós feltevést, valamint hogy $\xi_\zeta \cdot P_\xi = -P_\zeta$, ezt

$$-(Q_k)_\xi \cdot P_\zeta \cdot P_\xi + (Q_k)_\zeta \cdot (P_\xi)^2 - (2\cdot k-1)\cdot Q_k \cdot (P_\xi)_\xi \cdot P_\zeta +$$

$$(2\cdot k-1)\cdot Q_k\cdot P_\xi\cdot (P_\xi)_\zeta+(P_\xi)^{2\cdot(k+1)-1}\cdot\frac{\partial^{k+1}}{\partial\zeta^{k+1}}=0$$

alakra tudjuk hozni, így

$$Q_{k+1}=-(Q_k)_\xi\cdot P_\zeta\cdot P_\xi+(Q_k)_\zeta\cdot(P_\xi)^2-(2\cdot k-1)\cdot Q_k\cdot(P_\xi)_\xi\cdot P_\zeta+(2\cdot k-1)\cdot Q_k\cdot P_\xi\cdot(P_\xi)_\zeta$$

megfelelő választás. A rekurzív formula egyúttal Q_k polinomok fokára is ad becslést:

$$\deg(Q_1)=\deg(P_\xi)\le\deg(P)-1=\Delta-1$$

és

$$\deg(Q_{k+1})\le\begin{cases}\deg\Big((Q_k)_\xi\cdot P_\zeta\cdot P_\xi\Big)\\ \deg\Big((Q_k)_\zeta\cdot(P_\xi)^2\Big)\\ \deg\Big(Q_k\cdot(P_\xi)_\xi\cdot P_\zeta\Big)\\ \deg\Big(Q_k\cdot P_\xi\cdot(P_\xi)_\zeta\Big),\end{cases}$$

így

$$\deg(Q_{k+1})\le\deg(Q_k)+2\cdot\Delta-3.$$

Ebből indukcióval rögtön adódik

$$\deg(Q_k)\le(2\cdot k-1)\cdot\Delta-(3\cdot k-2)\le(2\cdot k-1)\cdot(\Delta-1).$$

Alkalmazva a 2.4.28 állítás 2. pontját,

$$|Q_{k+1}|_v\le 4_v\cdot\begin{cases}\Big|(Q_k)_\xi\cdot P_\zeta\cdot P_\xi\Big|_v\\ \Big|(Q_k)_\zeta\cdot(P_\xi)^2\Big|_v\\ \Big|(2\cdot k-1)\cdot Q_k\cdot(P_\xi)_\xi\cdot P_\zeta\Big|_v\\ \Big|(2\cdot k-1)\cdot Q_k\cdot P_\xi\cdot(P_\xi)_\zeta\Big|_v\end{cases}.$$

Becsüljük most ezeket külön-külön. Kihasználva a 2.4.28 állítás 1. és 3. pontjait valamint a (Q_k)-ra kapott becslésünket,

$$\begin{aligned}\Big|(Q_k)_\xi\cdot P_\zeta\cdot P_\xi\Big|_v&\le(2\cdot\deg(P_\zeta))_v^2\cdot(2\cdot\deg(P_\xi))_v^2\cdot\Big|(Q_k)_\xi\Big|_v\cdot|P_\zeta|_v\cdot|P_\xi|_v\le\\&\le(2\cdot\Delta-2)_v^4\cdot(\deg(Q_k))_v\cdot|Q_k|_v\cdot\Delta_v^2\cdot|P|_v^2\le\\&\le 2_v^4\cdot(\Delta-1)_v^5\cdot\Delta_v^2\cdot(2\cdot k-1)_v\cdot|Q_k|_v\cdot|P|_v^2\le 2_v^5\cdot k_v\cdot\Delta_v^7\cdot|Q_k|_v\cdot|P|_v^2.\end{aligned}$$

Ugyanígy

$$\Big|(Q_k)_\zeta\cdot(P_\xi)^2\Big|_v\le(2\cdot\deg(P_\xi))_v^4\cdot\Big|(Q_k)_\xi\Big|_v\cdot|P_\xi|_v^2\le$$

$$\leq (2\cdot\Delta-2)_v^4\cdot(\deg(Q_k))_v\cdot|Q_k|_v\cdot\Delta_v^2\cdot|P|_v^2\leq 2_v^5\cdot k_v\cdot\Delta_v^7\cdot|Q_k|_v\cdot|P|_v^2.$$

Hasonlóképp

$$\left|(2\cdot k-1)\cdot Q_k\cdot(P_\xi)_\xi\cdot P_\zeta\right|_v\leq$$
$$\leq(2\cdot k-1)_v\cdot\left(2\cdot\deg\left((P_\xi)_\xi\right)\right)_v^2\cdot(2\cdot\deg(P_\zeta))_v^2\cdot|Q_k|_v\cdot\left|(P_\xi)_\xi\right|_v\cdot|P_\zeta|_v\leq$$
$$\leq 2_v^5\cdot k_v\cdot(\Delta-2)_v^2\cdot(\Delta-1)_v^3\cdot\Delta_v^2\cdot|Q_k|_v\cdot|P|_v^2\leq 2_v^5\cdot k_v\cdot\Delta_v^7\cdot|Q_k|_v\cdot|P|_v^2,$$

és végül

$$\left|(2\cdot k-1)\cdot Q_k\cdot P_\xi\cdot(P_\xi)_\zeta\right|_v\leq$$
$$\leq(2\cdot k-1)_v\cdot(2\cdot\deg(P_\xi))_v^2\cdot\left(2\cdot\deg\left((P_\xi)_\zeta\right)\right)_v^2\cdot|Q_k|_v\cdot|P_\xi|_v\cdot\left|(P_\xi)_\zeta\right|_v\leq$$
$$\leq 2_v^5\cdot k_v\cdot\Delta_v^7\cdot|Q_k|_v\cdot|P|_v^2.$$

Ekkor tehát

$$|Q_{k+1}|_v\leq(2\cdot\Delta)_v^7\cdot k_v\cdot|Q_k|_v\cdot|P|_v^2,$$

és így indukcióval, továbbá $|Q_1|_v=|P_\zeta|_v\leq\Delta\cdot|P|_v$ egyenlőtlenséget kihasználva (ami szintén a 2.4.28 következménye) kapjuk, hogy

$$|Q_k|_v\leq(2\cdot\Delta)_v^{7\cdot(k-1)}\cdot((k-1)!)_v\cdot|P|_v^{2\cdot(k-1)}\cdot|Q_1|_v\leq(2\cdot\Delta)_v^{7\cdot k}\cdot((k-1)!)_v\cdot|P|_v^{2\cdot k-1}.$$

Ez alapján, továbbá a 2.4.28 állítás 4. pontja szerint

$$\|Q_k(a;0)\|_v\leq(2\cdot\deg(Q_k))_v^2\cdot|Q_k|_v\cdot(\max\{1;\|a\|_v\})^{\deg(Q_k)}\leq$$
$$\leq(2\cdot(2\cdot k-1)(\Delta-1))_v^2\cdot(2\cdot\Delta)_v^{7\cdot k}\cdot((k-1)!)_v\cdot|P|_v^{2\cdot k-1}(\max\{1;\|a\|_v\})^{(2\cdot k-1)\cdot(\Delta-1)}\leq$$
$$2_v^{7\cdot k+4}\cdot\Delta_v^{7\cdot k+2}\cdot k_v\cdot(k!)_v\cdot|P|_v^{2\cdot k-1}(\max\{1;\|a\|_v\})^{2\cdot k\cdot\Delta}\leq$$
$$\leq(2\cdot\Delta)_v^{11\cdot k}\cdot(k!)_v\cdot|P|_v^{2\cdot k-1}(\max\{1;\|a\|_v\})^{2\cdot k\cdot\Delta},$$

ahol az utolsó lépésben k_v-re a $k\leq 2^{k-1}$ egyenlőtlenséget alkalmaztuk. Így mivel

$$\|\partial_k\xi(0)\|_v=\left(\frac{1}{k!}\right)_v\cdot\left\|\left(\frac{\partial^k\xi}{\partial\zeta^k}\right)(0)\right\|_v=\left(\frac{1}{k!}\right)_v\cdot\left\|\frac{Q_k(a;0)}{P(a;0)^{2\cdot k-1}}\right\|_v,$$

az utóbbi becsléssel helyettesítve épp a bizonyítandó állítást kapjuk. □

Most már be tudjuk látni a következő, javított alsó becslését $h_{C\times C;\Omega}$-nak.

3.3.7. Állítás. *Legyen $s \in \Gamma(C \times C; \mathcal{O}(\Omega))$ és $(i_1^*; i_2^*)$ megengedett s-hez. Ekkor létezik egy $\mathcal{Z} \subseteq C\left(\overline{K}\right)$ véges halmaz, hogy $z; w \in C\left(\overline{K}\right) \setminus \mathcal{Z}$ pontok esetén*

$$h_{C\times C;\Omega}(z; w) \geq -h(\mathcal{F}) - c_3 \cdot \left(i_1^* \cdot |z|^2 + i_2^* \cdot |w|^2\right) - c_4 \cdot (i_1^* + i_2^* + \delta_1 + \delta_2 + 1)$$

megfelelő c_3 és c_4 konstansokkal.

Bizonyítás. A 3.2.2 állítás bizonyítása során láttuk, hogy π_1 egy N fokú véges morfizmus. Tekintsük a $0 \leq \alpha; \beta \leq n$ esetén $\pi_{\alpha;\beta}\colon \mathbb{P}_K^n \to \mathbb{P}_K^1$ leképezést, mely $(x_0; \ldots; x_n)$ ponthoz $(x_\alpha; x_\beta)$-t rendeli, továbbá legyen $\psi_{\alpha;\beta} = (\pi_{\alpha;\beta}; \pi_1) : \mathbb{P}_K^n \to \mathbb{P}_K^1 \times \mathbb{P}_K^1$, és $\pi_{0;1;2}\colon \mathbb{P}_K^3 \to \mathbb{P}_K^2$ az $(x_0; x_1; x_2; x_3) \mapsto (x_0; x_1; x_2)$ leképezés, végül jelölje $S_{1;1}$ a $\mathbb{P}_K^1 \times \mathbb{P}_K^1 \to \mathbb{P}_K^3$ Segre-leképezést. Ekkor ha Φ jelöli a $\pi_{0;1;2} \circ S_{1;1} \circ \psi_{\alpha;\beta} \circ \phi_{N\cdot A}$ leképezést, $\deg(\Phi) = 2 \cdot N$ adódik a lépésenkénti fokszámításból, ugyanis a projekciók 1 fokú leképezések, a Segre-beágyazás foka 2, míg $\psi_{\alpha;\beta}$ foka N a korábbiak miatt.

Ezért alkalmas $2 \cdot N$ fokú $G_{\alpha;\beta}$ homogén polinomra C-t a

$$G_{\alpha;\beta} = (x_0 \cdot x_\alpha; x_1 \cdot x_\beta; x_0 \cdot x_\beta) = 0$$

egyenlet definiálja. $(x_0 \cdot x_\beta)^{2\cdot N}$-nel osztva áttérhetünk affin koordinátákra, ekkor C pontjai a

$$g_{\alpha;\beta} = \left(\frac{x_\alpha}{x_\beta}; \frac{x_1}{x_0}\right) = 0,$$

feltételnek tesznek eleget, ahol immár $g_{\alpha;\beta} \in K X_1; X_2$ egy legfeljebb $2 \cdot N$ fokú polinom. Vezessük most be a $g_{\alpha;\beta}$ polinomok $p_{\alpha;\beta}$ eltoltjait adott $z \in C\left(\overline{K}\right)$ pontra, legyen

$$p_{\alpha;\beta}(X_1; X_2) = g_{\alpha;\beta}\left(X_1; X_2 + \left(\frac{x_1}{x_0}\right)(z)\right).$$

Ekkor a 2.4.28 állítás 5. pontja $v \in M_K$ esetén a

$$|p_{\alpha;\beta}|_v \leq 2_v^{2\cdot\deg\left(g_{\alpha;\beta}\right)} \cdot |g_{\alpha;\beta}|_v \cdot \left(\max\left\{1; \left|\left(\frac{x_1}{x_0}\right)(z)\right|_v\right\}\right)^{\deg\left(g_{\alpha;\beta}\right)}$$

becslést adja, de mivel $\deg(g_{\alpha;\beta}) \leq 2 \cdot N$, így alkalmas v-től függő $c_5 \geq 1$ konstanssal

$$|p_{\alpha;\beta}|_v \leq c_5(v) \cdot \left(\max\left\{1; \left|\left(\frac{x_1}{x_0}\right)(z)\right|_v\right\}\right)^{2\cdot N}.$$

Az arkhimédeszi helyeket kivéve $c_5(v)$ megfelelő választás. Alkalmazzuk most a 3.3.6 állítást az ottani jelölések szerint $P = p_{\alpha;\beta}$, $\Delta = \deg(p_{\alpha;\beta})$, $\xi = \frac{x_\alpha}{x_\beta}$, $\zeta = \frac{x_1}{x_0} - \left(\frac{x_1}{x_0}\right)(z)$ választással, továbbá legyen

$$\mathcal{Z} = \left\{u \in C\left(\overline{K}\right) : \frac{x_1}{x_0} - \left(\frac{x_1}{x_0}\right)(u) \text{ nem uniformizer } u\text{-ban}\right\} \cup$$

$$\left\{u \in C\left(\overline{K}\right) : \left(g_{\alpha;\beta}\right)_\xi \left(\left(\frac{x_\alpha}{x_\beta}\right)(u);\left(\frac{x_1}{x_0}\right)(u)\right) = 0 \text{ valamely } \alpha;\beta \text{ esetén}\right\},$$

vagyis $\mathcal{Z}$ éppen az a véges halmaz, aminek a kivételével minden z pontban teljesülnek a 3.3.6 állítás feltételei. Tegyük fel, hogy $z; w \notin \mathcal{Z}$. Ekkor a 3.3.6 állítás értelmében

$$\left\|\left(\partial_{i_k}\frac{x_\alpha}{x_\beta}\right)(z)\right\|_v \leq (4\cdot N)_v^{11\cdot i_k}\cdot\left(\frac{\left|p_{\alpha;\beta}\right|_v}{\left\|\left(p_{\alpha;\beta}\right)_\xi\left((\xi(0);0)\right)\right\|_v}\right)^{2\cdot i_k-1}\cdot\left(\max\left\{1;\left\|\frac{x_\alpha}{x_\beta}(z)\right\|_v\right\}\right)^{4\cdot i_k\cdot N}.$$

Ebből felírható

$$\min_{0\leq\beta\leq n}\left\|\left(\partial_{i_k}\frac{x_\alpha}{x_\beta}\right)(z)\right\|_v \leq (4\cdot N)_v^{11\cdot i_k}\cdot\max_{0\leq\beta\leq n}\left(\frac{\left|p_{\alpha;\beta}\right|_v}{\left\|\left(p_{\alpha;\beta}\right)_\xi\left((\xi(0);0)\right)\right\|_v}\right)^{2\cdot i_k-1}$$

becslés, ugyanis valamely β-ra $\left\|\frac{x_\alpha}{x_\beta}(z)\right\|_v \leq 1$. Az is világos, hogy $\left|p_{\alpha;\beta}\right|_v \leq c_6(v)$, hiszen csak véges sok polinomunk van. Most beírva $p_{\alpha;\beta}$-ba annak definícióját,

$$\left(p_{\alpha;\beta}\right)_\xi\left((\xi(0);0)\right) = \left(g_{\alpha;\beta}\right)_\xi\left(\frac{x_\alpha}{x_\beta}(z);\frac{x_1}{x_0}(z)\right),$$

így ezeket beírva az utóbbi becslésbe

$$\min_{0\leq\beta\leq n}\left\|\left(\partial_{i_k}\frac{x_\alpha}{x_\beta}\right)(z)\right\|_v \leq (4\cdot N)_v^{11\cdot i_k}\cdot\max_{0\leq\beta\leq n}\left(\frac{c_6(v)}{\left\|\left(g_{\alpha;\beta}\right)_\xi\left(\frac{x_\alpha}{x_\beta}(z);\frac{x_1}{x_0}(z)\right)\right\|_v}\right)^{2\cdot i_k-1}$$

adódik. Ezt a becslést fogjuk most alkalmazni $M_1(z;i_1^*)$-re és $M_2(w;i_2^*)$-re, ahol

$$M_1(z;i_1^*) = \sum_{v\in M_k}\max_{i_1+\ldots+i_{\delta_1}=i_1^*}\sum_{k=1}^{\delta_1}\max_{0\leq\alpha\leq n}\min_\beta\log\left\|\left(\partial_{i_k}\frac{x_\alpha}{x_\beta}\right)(z)\right\|_v$$

és

$$M_2(w;i_2^*) = \sum_{v\in M_k}\max_{i'_1+\ldots+i'_{\delta_2}=i_2^*}\sum_{k=1}^{\delta_2}\max_{0\leq\alpha\leq n}\min_\beta\log\left\|\left(\partial_{i'_k}\frac{x'_\alpha}{x'_\beta}\right)(w)\right\|_v$$

a 3.3.5 állításban szereplő tagok. Ekkor tehát

$$M_1(z;i_1^*) \leq$$

$$\leq \sum_{v\in M_k}\max_{i_1+\ldots+i_{\delta_1}=i_1^*}\sum_{k=1}^{\delta_1}\max_{0\leq\alpha;\beta\leq n}\log\left((4\cdot N)_v^{11\cdot i_k}\cdot\max_{0\leq\beta\leq n}\left(\frac{c_6(v)}{\left\|\left(g_{\alpha;\beta}\right)_\xi\left(\frac{x_\alpha}{x_\beta}(z);\frac{x_1}{x_0}(z)\right)\right\|_v}\right)^{2\cdot i_k-1}\right).$$

Triviálisan

$$\max_{0\le\alpha;\beta\le n}\log\left((4\cdot N)_v^{11\cdot i_k}\cdot\max_{0\le\beta\le n}\left(\frac{c_6(v)}{\left\|(g_{\alpha;\beta})_\xi\left(\frac{x_\alpha}{x_\beta}(z);\frac{x_1}{x_0}(z)\right)\right\|_v}\right)^{2\cdot i_k-1}\right)\le$$
$$11\cdot i_k\cdot\log(4\cdot N)_v+(2\cdot i_k-1)\cdot\log(c_6(v))+$$
$$(2\cdot i_k-1)\cdot\sum_{0\le\alpha;\beta\le n}\max\left\{0;\log\left\|(g_{\alpha;\beta})_\xi\left(\frac{x_\alpha}{x_\beta}(z);\frac{x_1}{x_0}(z)\right)\right\|_v^{-1}\right\}.$$

Most becsüljük tovább $M_1(z;i_1^*)$-ot eszerint tagonként. Egyrészt

$$\sum_{v\in M_k}\max_{i_1+\ldots+i_{\delta_1}=i_1^*}\sum_{k=1}^{\delta_1}11\cdot i_k\cdot\log(4\cdot N)_v=[K:\mathbb{Q}]\cdot\log(4\cdot N)\cdot i_1^*\le c_7\cdot i_1^*$$

és

$$\sum_{v\in M_k}\max_{i_1+\ldots+i_{\delta_1}=i_1^*}\sum_{k=1}^{\delta_1}(2\cdot i_k-1)\cdot\log(c_6(v))=(2\cdot i_1^*-1)\cdot\sum_{v\in M_k}\sum_{k=1}^{\delta_1}\log(c_6(v))\le c_8\cdot i_1^*,$$

másrészt

$$\sum_{v\in M_k}\max_{i_1+\ldots+i_{\delta_1}=i_1^*}\sum_{k=1}^{\delta_1}(2\cdot i_k-1)\cdot\sum_{0\le\alpha;\beta\le n}\max\left\{0;\log\left\|(g_{\alpha;\beta})_\xi\left(\frac{x_\alpha}{x_\beta}(z);\frac{x_1}{x_0}(z)\right)\right\|_v^{-1}\right\}=$$
$$=(2\cdot i_1^*-1)\cdot\sum_{0\le\alpha;\beta\le n}\sum_{v\in M_k}\max\left\{0;\log\left\|(g_{\alpha;\beta})_\xi\left(\frac{x_\alpha}{x_\beta}(z);\frac{x_1}{x_0}(z)\right)\right\|_v^{-1}\right\}=$$
$$=(2\cdot i_1^*-1)\cdot\sum_{0\le\alpha;\beta\le n}h\left((g_{\alpha;\beta})_\xi\left(\frac{x_\alpha}{x_\beta}(z);\frac{x_1}{x_0}(z)\right)^{-1}\right)=$$
$$=(2\cdot i_1^*-1)\cdot\sum_{0\le\alpha;\beta\le n}h\left((g_{\alpha;\beta})_\xi\left(\frac{x_\alpha}{x_\beta}(z);\frac{x_1}{x_0}(z)\right)\right)\le$$
$$\le\sum_{0\le\alpha;\beta\le n}\left(\deg\left((g_{\alpha;\beta})_\xi\right)\cdot h\left(\left[\frac{x_\alpha}{x_\beta}(z);\frac{x_1}{x_0}(z);1\right]\right)+h\left((g_{\alpha;\beta})_\xi\right)\right)+$$
$$3\cdot\sum_{0\le\alpha;\beta\le n}\log\left(3+\deg\left((g_{\alpha;\beta})_\xi\right)\right),$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség a 2.4.25 állítás 2. pontjából következik. Világos, hogy $\deg\left((g_{\alpha;\beta})_\xi\right)\le 2\cdot N-1\le c_9$, illetve a 2.4.28 állítás 3. pontjának következtében $h\left((g_{\alpha;\beta})_\xi\right)\le h(g_{\alpha;\beta})+\log(\deg(g_{\alpha;\beta}))\le c_{10}$, mivel csak véges sok $g_{\alpha;\beta}$ polinomunk van. A 2.4.9 állítás 3. pontját alkalmazva

$$h\left(\left[\frac{x_\alpha}{x_\beta}(z);\frac{x_1}{x_0}(z);1\right]\right)\le 2\cdot h([x_0(z);\ldots;x_n(z)])=2\cdot h(\phi_{N\cdot A}).$$

A 3.1.1 állítás során láttuk, hogy

$$|z|^2 = \frac{g}{N} \cdot h\left(\phi_{N \cdot A}(z)\right) + O(1),$$

amiből $h\left(\left[\frac{x_\alpha}{x_\beta}(z); \frac{x_1}{x_0}(z); 1\right]\right) \leq \frac{2 \cdot N}{g} \cdot |z|^2 + c_{11}$, és így

$$\sum_{v \in M_k} \max_{i_1 + \ldots + i_{\delta_1} = i_1^*} \sum_{k=1}^{\delta_1} (2 \cdot i_k - 1) \cdot \sum_{0 \leq \alpha; \beta \leq n} \max \left\{0; \log \left\| \left(g_{\alpha;\beta}\right)_\xi \left(\frac{x_\alpha}{x_\beta}(z); \frac{x_1}{x_0}(z)\right) \right\|_v^{-1} \right\} \leq$$
$$\leq c_{12} \cdot i_1^* \cdot |z|^2 + c_{13} \cdot i_1^*.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$M_1(z; i_1^*) \leq c_{14} \cdot i_1^* \cdot |z|^2 + c_{15} \cdot i_1^*,$$

illetve pontosan ugyanígy kihozható, hogy

$$M_2(w; i_2^*) \leq c_{16} \cdot i_1^* \cdot |w|^2 + c_{17} \cdot i_1^*,$$

amikkel visszahelyettesítve a 3.3.5 állításba igazoltuk a kívánt egyenlőtlenséget. □

3.3.8. Lemma. (Kétváltozós Roth-lemma) *Legyen $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1; X_2]$ egy nemnulla polinom, melynek foka az első változóba legfeljebb r_1, a másodikban legfeljebb r_2, legyenek továbbá β_1 és β_2 algebrai számok. Tegyük fel, hogy $\omega \in]0; 1]$ konstansra $r_2 \leq \omega \cdot r_1$ és $h(P) + 4 \cdot r_1 \leq \omega \cdot \min\{r_1 \cdot h(\beta_1); r_2 \cdot h(\beta_2)\}$. Ekkor léteznek $i_1; i_2 \geq 0$ indexek, hogy*

$$\frac{i_1}{r_1} + \frac{i_2}{r_2} \leq 4 \cdot \sqrt{\omega}$$

és

$$\frac{\partial^{i_1 + i_2} P}{\partial^{i_1} X_1 \partial^{i_2} X_2} \neq 0.$$

Bizonyítás. Az állítás speciális esete a 2.4.12 Roth-lemmának $m = 2$ és $\eta = \sqrt{\omega}$ választással. □

3.3.9. Állítás. *Alkalmas C-től, $\phi_{N \cdot A}$-tól és ϕ_B-től függő c_5 konstanssal ha $\varepsilon; \gamma \in]0; 1[$ olyan, hogy $\varepsilon^2 \cdot d_1 \geq d_2$ és $\min\left\{d_2 \cdot |w|^2; d_1 \cdot |z|^2\right\} \geq \frac{c_5}{\gamma} \cdot d_1$, s pedig olyan "kicsi" szelés, amilyennek azt a 3.2.2 állítás során kikötöttük. Ekkor létezik $(i_1^*; i_2^*)$ megengedett pár, melyre*

$$\frac{i_1^*}{d_1} + \frac{i_2^*}{d_2} \leq 4 \cdot N \cdot \varepsilon.$$

Bizonyítás. Használjuk a 3.2.2 állítás bizonyítása során az affin koordinátázással bevezetett ξ_k és ξ'_k jelöléseket. Ekkor ezekkel a jelölésekkel, ha $u \in C$ olyan, hogy $x_0(u) \neq 0$, akkor

$$h_{C;N\cdot A}(u) = h(\phi_{N\cdot A}(u)) \leq \sum_{k=1}^{n} h(\xi_k(u)),$$

ezért adott $z \in C$ pontra lesz k index, hogy

$$h(\xi_k(u)) \geq \frac{1}{n} \cdot h_{C;N\cdot A}(z) = \frac{N}{n} \cdot h_{C;A}(z) + O(1).$$

Azt nyilván feltehetjük, hogy $k = 1$. Ugyanígy feltehető, hogy

$$h(\xi'_1(w)) \geq \frac{N}{n} \cdot h_{C;A}(w) + O(1).$$

A 3.1.1 állítás bizonyítása során említettük, hogy tetszőleges $u \in C\left(\overline{K}\right)$ pontra

$$h_{C;A}(u) = \frac{1}{g} \cdot |u|^2 + O(1),$$

ezért

$$h(\xi_1(z)) \geq \frac{N}{g \cdot n} \cdot |z|^2 + O(1)$$

és

$$h(\xi'_1(w)) \geq \frac{N}{g \cdot n} \cdot |w|^2 + O(1).$$

Legyen Q a

$$Q(\xi_1; \xi'_1) = \mathrm{Norm}_{K(C\times C)/K\left(\xi_1;\xi'_1\right)} \left(\frac{F_k(\xi;\xi')}{\left(\frac{y_k}{y_0}\right)^d} \right)$$

normaként definiált polinom. Korábban láttuk, hogy Q nem függ k-tól, továbbá Q és F_k definíciója szerint $Q \in K[\xi_1; \xi'_1]$, melyre $\deg(\xi_1(Q)) \leq N \cdot d_1$ és $\deg(\xi_2(Q)) \leq N \cdot d_2$. Mivel Q-t normaként definiáltuk, így a 2.4.26 és a 3.2.2 állítások segítségével a

$$h(Q) \leq N^2 \cdot h(\mathcal{F}) \leq N^2 \cdot \left(c_2 \cdot \frac{d_1 + d_2}{\gamma} + o(d_1 + d_2) \right) \leq c_6 \cdot \frac{d_1}{\gamma}$$

becslés adható, ahol az utolsó becslés során $d_1 \geq d_2$ feltevést használtuk. Most, hogy Q magasságát becsültük, alkalmazhatjuk rá a 3.3.8 kétváltozós Roth-lemmát, az ottani jelölésekkel élve $P = Q$, $r_1 = N \cdot d_1$, $r_2 = N \cdot d_2$, $\beta_1 = \xi_1(z)$, $\beta_2 = \xi'_1(w)$ és $\omega = \varepsilon^2$ paraméterekkel. Ekkor $\varepsilon^2 \cdot d_1 \geq d_2$ feltevés miatt $r_2 \leq \omega \cdot r_1$, valamint a Q magasságára adott becslés szerint

$$h(P) + 4 \cdot r_1 = h(Q) + 4 \cdot N \cdot d_1 \leq c_6 \cdot \frac{d_1}{\gamma} + 4 \cdot N \cdot d_1 \leq c_7 \cdot \frac{d_1}{\gamma}$$

alkalmas c_7 konstanssal. Másrészt viszont

$$\omega \cdot r_1 \cdot h(\beta_1) = \varepsilon^2 \cdot N \cdot d_1 \cdot h(\xi_1(z)) \geq \varepsilon^2 \cdot N \cdot d_1 \cdot \left(\frac{N}{n \cdot g} \cdot |z|^2 + O(1) \right) \geq c_8 \cdot \frac{d_1}{\gamma}$$

valamely c_8 konstansra, kihasználva az állítás $|z|$-re vonatkozó feltételét. Teljesen analóg módon kapjuk, hogy

$$\omega \cdot r_2 \cdot h(\beta_2) \geq c_9 \cdot \frac{d_1}{\gamma}.$$

Ekkor tehát ha $c_7 \geq c_8; c_9$, amit nyilván feltehetünk, teljesülnek a Roth-tétel feltételei, ezért találtunk i_1 és i_2 indexeket, melyekre

$$\frac{i_1}{r_1} + \frac{i_2}{r_2} \leq 4 \cdot \sqrt{\omega}$$

és

$$(\partial_{i_1;i_2})(\beta_1; \beta_2) \neq 0.$$

A paraméterek definíciójával visszahelyettesítve

$$\frac{i_1}{d_1} + \frac{i_2}{d_2} \leq 4 \cdot N \cdot \varepsilon$$

adódik, a parciális deriváltakra kapott állítás pedig implikálja $(i_1; i_2)$ megengedettségét, ezzel pedig igazoltuk az állítást. □

3.4. A Vojta-egyenlőtlenség bizonyítása

A fejezet eddigi állításai elegendő eszközt adnak a kezünkbe, hogy segítségükkel bebizonyítsuk a 3.0.6 Vojta-egyenlőtlenséget. Tegyük fel, hogy κ_1 olyan, hogy a 3.3.7 állításban szereplő $\mathcal{Z} \subseteq C$ véges halmaz nem tartalmaz olyan z pontot, melyre $|z| \geq \kappa_1$. A továbbiakban legyenek $z; w \in C\left(\overline{K}\right)$ olyan pontok, melyek kielégítik a Vojta-egyenlőtlenség $|z| \geq \kappa_1$ illetve $|w| \geq \kappa_2 \cdot |z|$ feltételeit. Legyen $0 < \varepsilon < 1$ a 3.3.9 állításban szereplő konstans, valamint legyen $\nu > 0$. Legyen Δ egy "kellően nagy" konstans, amivel később majd a végtelenbe fogunk konvergálni, de egyelőre definiáljuk segítségével az eddig nem meghatározott $d_1; d_2; d$ konstansokat. Legyen tehát

$$d_1 = N \cdot \left\lfloor \frac{D}{|z|^2} \cdot \sqrt{g + \nu} \right\rfloor,$$

hasonlóan

$$d_2 = N \cdot \left\lfloor \frac{D}{|w|^2} \cdot \sqrt{g+\nu} \right\rfloor,$$

végül

$$d = N \cdot \left\lfloor \frac{D}{|z| \cdot |w|} \right\rfloor.$$

A 3.3.7 állítás alapján

$$h_{C\times C;\Omega}(z;w) \geq -h(\mathcal{F}) - c_3 \cdot \left(i_1^* \cdot |z|^2 + i_2^* \cdot |w|^2\right) - c_4 \cdot (i_1^* + i_2^* + \delta_1 + \delta_2 + 1),$$

amibe behelyettesítve δ_1 és δ_2 definíciójával, illetve feltéve, hogy $\kappa_1 \geq 1$,

$$h_{C\times C;\Omega}(z;w) \geq -h(\mathcal{F}) - c_6 \cdot \left(i_1^* \cdot |z|^2 + i_2^* \cdot |w|^2\right) - c_7 \cdot (d_1 + d_2 + d).$$

Azt is nyugodtan feltehetjük κ_1-ről, hogy az nagyobb $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$-nél, így ezt, valamint $d_1; d_2; d$ konstansok definícióját felírva

$$d_1 + d_2 + d \leq N \cdot \Delta \cdot \left(\frac{\sqrt{g+\nu}}{|z|^2} + \frac{\sqrt{g+\nu}}{|w|^2} + \frac{1}{|z| \cdot |w|} \right) \leq \frac{c_8 \cdot \Delta}{\kappa_1^2} \leq c_9 \cdot \varepsilon \cdot \Delta$$

adódik, amit visszaírva az előző becslésbe,

$$h_{C\times C;\Omega}(z;w) \geq -h(\mathcal{F}) - c_6 \cdot \left(i_1^* \cdot |z|^2 + i_2^* \cdot |w|^2\right) - c_{10} \cdot \varepsilon \cdot \Delta$$

egyenlőtlenséget kapjuk.

A 3.2.2 állításnál feltettük, hogy $d_1 \cdot d_2 - g \cdot d^2 \geq \gamma \cdot d_1 \cdot d_2$, így ha szeretnénk használni, le kell ellenőriznünk, hogy a megválasztott $d_1; d_2; d$ konstansok eleget tesznek ennek a feltevésnek. Az alsó egészrészre felírt triviális becslésekkel és némi algebrai manipulációval

$$\begin{aligned} \frac{d_1 \cdot d_2 - g \cdot d^2}{d_1 \cdot d_2} &= 1 - \frac{g \cdot d^2}{d_1 \cdot d_2} \geq 1 - \frac{g \cdot \left(\frac{\Delta}{|z|\cdot|w|}\right)^2}{\left(\frac{\Delta}{|z|^2} \cdot \sqrt{g+\nu} - 1\right) \cdot \left(\frac{\Delta}{|w|^2} \cdot \sqrt{g+\nu} - 1\right)} = \\ &= 1 - \frac{g}{g+\nu} \cdot \frac{1}{1 - \frac{|z|^2}{\Delta \cdot \sqrt{g+\nu}}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{|w|^2}{\Delta \cdot \sqrt{g+\nu}}}. \end{aligned}$$

Ekkor $\gamma = \frac{\nu}{3 \cdot g}$ választás mellett

$$1 - \frac{g}{g+\nu} \cdot \frac{1}{1 - \frac{|z|^2}{\Delta \cdot \sqrt{g+\nu}}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{|w|^2}{\Delta \cdot \sqrt{g+\nu}}} \geq \gamma,$$

és így $d_1 \cdot d_2 - g \cdot d^2 \geq \gamma \cdot d_1 \cdot d_2$, ezért alkalmazható a 3.2.2 állítás. Ez alapján

$$h(\mathcal{F}) \leq c_2 \cdot \frac{d_1 + d_2}{\gamma} + o(d_1 + d_2) \leq c_{11} \cdot \varepsilon \cdot \Delta,$$

kihasználva a $d_1 + d_2 + d$-re felírt felső becslést, és így

$$h_{C\times C;\Omega}(z;w) \geq -c_6 \cdot \left(i_1^* \cdot |z|^2 + i_2^* \cdot |w|^2\right) - c_{12} \cdot \varepsilon \cdot \Delta.$$

Most a 3.3.9 állítás segítségével válasszunk $(i_1^*; i_2^*)$ megengedett párt! Ehhez ismét ellenőriznünk kell, hogy választott d_1 és d_2 konstansaink eleget tesznek ezen állítás feltételeinek, nevezetesen $\varepsilon^2 \cdot d_1 \geq d_2$ és $\min\left\{d_1 \cdot |z|^2; d_2 \cdot |w|^2\right\} \geq \frac{c_{13}}{\gamma\cdot\varepsilon^2} \cdot d_1$ egyenlőtlenségeknek kell teljesülni. Előbbihez feltesszük, hogy $\kappa_2 \geq \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$, és így

$$\frac{d_2}{d_1} \leq \frac{\frac{N\cdot\Delta}{|w|^2} \cdot \sqrt{g+\nu}}{\frac{N\cdot\Delta}{|z|^2} \cdot \sqrt{g+\nu} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot |z|^2}{|w|^2} \leq \frac{2}{\kappa_2^2} \leq \varepsilon^2.$$

Figyeljük meg, hogy alkalmas $0 \leq \eta_1; \eta_2 < 1$ értékekre

$$\frac{d_2 \cdot |w|^2}{d_1 \cdot |z|^2} = \frac{1 - \frac{\eta_2\cdot|w|^2}{\Delta\cdot\sqrt{g+\nu}}}{1 - \frac{\eta_1\cdot|z|^2}{\Delta\cdot\sqrt{g+\nu}}},$$

így ha Δ elegendően nagy, akkor

$$\frac{1}{2} \leq \frac{d_2 \cdot |w|^2}{d_1 \cdot |z|^2} \leq 2$$

teljesül. Ha most feltesszük, hogy hogy $\kappa_1^2 \geq \frac{c_{13}}{\gamma\cdot\varepsilon^2}$, akkor a 3.3.9 második feltétele is automatikusan teljesül, ennek következtében pedig van olyan $(i_1^*; i_2^*)$ megengedett párunk, mely kielégíti az

$$\frac{i_1^*}{d_1} + \frac{i_2^*}{d_2} \leq 4 \cdot N \cdot \varepsilon$$

egyenlőtlenséget, speciálisan $i_1^* \leq 4 \cdot N \cdot \varepsilon \cdot d_1$ és $i_2^* \leq 4 \cdot N \cdot \varepsilon \cdot d_2$ is igaz. Most ezt visszaírva a $h_{C\times C;\Omega}(z;w)$-re felírt legutóbbi alsó becslésébe

$$h_{C\times C;\Omega}(z;w) \geq -c_{14} \cdot \varepsilon \cdot \left(d_1 \cdot |z|^2 + d_2 \cdot |w|^2\right) - c_1 2 \cdot \varepsilon \cdot \Delta.$$

Ismételten beírva d_1 és d_2 definícióját, könnyen adódik

$$h_{C\times C;\Omega}(z;w) \geq -c_{15} \cdot \varepsilon \cdot \Delta.$$

Most vessük össze ezt az eredményt a 3.1.1 felső becsléssel. Eszerint

$$h_{C\times C;\Omega}(z;w) \leq \frac{d_1}{g} \cdot |z|^2 + \frac{d_2}{g} \cdot |w|^2 - 2 \cdot d \cdot \langle z; w\rangle + c_1 \cdot (d + d_1 + d_2),$$

így ezt összevetve az imént kapott alsó becsléssel, valamint beírva a $d_1 + d_2 + d$-re felírt egyenlőtlenséget,

$$-c_{16} \cdot \varepsilon \cdot \Delta \leq \frac{d_1}{g} \cdot |z|^2 + \frac{d_2}{g} \cdot |w|^2 - 2 \cdot d \cdot \langle z; w \rangle$$

adódik. Most beírva ide is $d_1; d_2; d$ konstansok definícióját, majd a Δ-val való osztást követően Δ-val végtelenhez tartva a

$$-c_{16} \cdot \varepsilon \leq 2 \cdot \frac{\sqrt{g+\nu}}{g} - 2 \cdot \frac{\langle z; w \rangle}{|z| \cdot |w|}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ezt átrendezve

$$\langle z; w \rangle \leq \left(\frac{\sqrt{g+\nu}}{g} + \frac{c_{16}}{2} \cdot \varepsilon \right) \cdot |z| \cdot |w| \, ,$$

amiből $g \geq 2$ feltétellel, és feltételezve, hogy ε és ν elegendően kicsik, a Vojta-egyenlőtlenség állítása adódik. $\square$

3.5. Faltings tételének bizonyítása a Vojta-egyenlőtlenség felhasználásával

A Vojta-egyenlőtlenség bizonyítása után már nincs más hátra, mint megmutatni, hogy a 3.0.1 Faltings-tétel ennek a következménye. Először figyeljük meg, hogy a $J(K) \to J(K) \otimes \mathbb{R}$ leképezés magja $J(K)$ éppen torzió részcsoportja, mely a 2.5.5 Mordell–Weil-tétel értelmében véges, hiszen $J(K)$ végesen generált csoport, így torzió részcsoportja is végesen generált, továbbá véges rendű elemeket tartalmaz. Ezért $C(K)$ végességének igazolásához elegendő látni, hogy $C(K)$ képe véges $J(K) \otimes \mathbb{R}$-ben. Nem túl precízen, de az egszerűség kedvéért $C(K)$-val fogjuk jelölni $C(K)$ képét $J(K) \otimes \mathbb{R}$-ben.

$J(K) \otimes \mathbb{R}$ véges dimenziós, euklideszi vektortér a $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ bilineáris szorzattal ellátva, így a standard módhoz hasonlóan $x; y \in J(K) \otimes \mathbb{R}$ esetén értelmezhetjük x és y **szögét**, melyet jelöljön $\angle(x; y)$, ahol tehát $\angle(x; y) \in [0; \pi]$ és

$$\cos(\angle(x; y)) = \frac{\langle x; y \rangle}{|x| \cdot |y|}.$$

Jelölje tetszőleges $x_0 \in J(K) \otimes \mathbb{R}$ pont és θ_0 szög esetén $\Gamma_{x_0;\theta_0}$ az x_0-lal θ_0-nál kisebb szöget bezáró pontok halmazát, azaz legyen

$$\Gamma_{x_0;\theta_0} = \{x \in J(K) \otimes \mathbb{R} \colon \angle(x; x_0) < \theta_0\}$$

origo csúcsú nyílt kúp. Azt fogjuk megmutatni, hogy kis θ_0 szög esetén bármely ilyen kúp csak véges sok pontban metszi $C(K)$-t. Ezt indirekt látjuk be, tegyük fel tehát, hogy adott x_0-ra illetve θ_0-ra $\Gamma_{x_0;\theta_0} \cap C(K)$ végtelen.

Ha z és w olyan pontjai a $\Gamma_{x_0;\theta_0}$ kúpnak, melyek eleget tesznek a 3.0.6 Vojta-egyenlőtlenség feltételeinek, azaz ha $|z| \geq \kappa_1$ és $|w| \geq \kappa_1 \cdot |z|$, akkor

$$\cos(\angle(z;w)) \leq \frac{3}{4},$$

amiből

$$2 \cdot \theta_0 \geq \angle(z;w) \geq \arccos\left(\frac{3}{4}\right) > \frac{\pi}{6},$$

azaz ekkor $\theta_0 > \frac{\pi}{12}$. Ez azt jelenti, hogy minden $x_0 \in J(K) \otimes \mathbb{R}$ pontra $\Gamma_{x_0;\frac{\pi}{12}} \cap C(K)$ véges. Ugyanakkor világos, hogy $J(K) \otimes \mathbb{R}$ lefedhető véges sok ilyen szögű kúppal. Azt kell még meggondolnunk, hogy választhattunk a Vojta-egyenlőtlenség feltételeinek megfelelő z és $w$pontokat. Ez pedig azért van így, mert minden κ korlátra $|u| \leq \kappa$ feltételnek csak véges sok $C(K)$-beli pont felel meg, ugyanis $C(K)$ teljes rács $J(K) \otimes \mathbb{R}$-ben. Így, mivel indirekt feltettük, hogy $C(k)$ véges, választhattuk z-t és w-t olyannak, hogy azok megfeleljenek a feltevésünknek.

Végeredményképp tehát ellentmondásra jutottunk, ezzel pedig beláttuk Faltings tételét. $\square$

Irodalomjegyzék

[1] EMIL KISS, *Bevezetés az algebrába*, Typotex, 2007

[2] GERGELY ZÁBRÁDI, *Algebrai számelmélet jegyzet*, Egyetemi jegyzet, 2019 (`https://zabradi.web.elte.hu/Jegyzetek/algszamjegyzet.pdf`)

[3] MARC HINDRY, JOSEPH H. SILVERMAN, *Diophantine Geometry – An Introduction*, Springer, 2000

[4] JOSEPH H. SILVERMAN, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer, 1986

[5] GLEN E. BREDON, *Sheaf Theory 2nd edition*, Springer, 1997

NYILATKOZAT

Név: Sagmeister Ádám
ELTE Természettudományi Kar, szak: matematikus MSc
NEPTUN azonosító: MKAQ9W
Szakdolgozat címe: Diofantikus geometria – Faltings tétele

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2020.05.29.

Sagmeister Ádám

a hallgató aláírása