Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Szőke Tamás

Ramanujan-gráfok

Matematikus MSc

Szakdolgozat

Témavezető:

Csikvári Péter

Számítástudományi Tanszék

Budapest, 2020

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Csikvári Péternek a téma ajánlását, a rendszeres konzultációkat, a sok segítséget és a dolgozat alapos átnézését.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A szakdolgozat célja, hogy betekintést nyújtson a Ramanujan-gráfok elméletébe, rámutatva az extremális és pseudorandom tulajdonságokra, amiket birtokolnak és ismertetni a jelenleg ismert legfőbb konstrukciókat.
A felépítés a következő lesz: a 2. fejezetben összefoglaljuk az alapvető lineáris algebrai és spektrálgráfelméleti tételeket, ismereteket, motiváljuk a Ramanujan-gráfok definícióját.
A 3. fejezetben két bizonyítást adunk az Alon-Boppana tételre, ami alapvető ebben a témakörben, ez biztosítja a Ramanujan-gráfok optimalitását.
A 4. és 5. fejezetekben konstrukciókat adunk Ramanujan-gráfok végtelen családjaira: a 4. fejezetben számelméleti eszközökre fogunk támaszkodni, ami elsőre meglepő, hiszen első pillantásra a témakörnek semmi köze sincs a számelmélethez. Az 5. fejezetben pedig páros Ramanujan-gráfokat fogunk készíteni induktív módon, és ehhez előjelezett adjacenciamátrixok sajátértékeit fogjuk vizsgálni.

2. fejezet

Spektrálgráfelméleti bevezető

Ebben a fejezetben nagyrészt Csikvári Péter [1] jegyzetének elejét fogjuk követni.
Legyen $G = (V(G), E(G))$ véges egyszerű gráf. Gyakran használni fogjuk az $n = |V(G)|$, $e(G) = |E(G)|$ jelöléseket. $A(G)$-vel jelöljük a G gráf adjacenciamátrixát, mely egy $n \times n$-es mátrix, aminek sorait és oszlopait a gráf csúcsaival indexeljük és a következőképpen definiáljuk:

$$A(G)_{u,v} = \begin{cases} 1 & \text{ha } (u,v) \in E(G), \\ 0 & \text{ha } (u,v) \notin E(G). \end{cases}$$

Ha a szövegkörnyezetből egyértelmű G, akkor az $A = A(G)$ egyszerűsítő jelölést is használjuk.
Mivel $A(G)$ könnyen láthatóan valós szimmetrikus mátrix, ezért ismert, hogy mind az n darab sajátértéke valós, és létezik sajátértékekből álló ortonormált bázis $\mathbb{R}^n$-ben. Ezen sajátértékeket $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ fogja jelölni, $u_1, u_2, ..., u_n$ pedig egy sajátértékekből álló ortonormált bázis, ahol $Au_i = \lambda_i u_i$.

2.1. Alapismeretek, lineáris algebra

2.1.1. Állítás. *Tetszőleges k pozitív egész szám esetén $\sum_{i=1}^n \lambda_i^k$ a G gráf k hosszú zárt sétáinak számát adja meg, speciálisan $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ és $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2e(G)$.*

Bizonyítás. Lineáris algebrából ismert, hogy $\sum_{i=1}^n \lambda_i^k = \mathrm{Tr} A^k$, és ez a nyom éppen a k hosszú zárt séták számát adja meg, mert a főátló i. eleme az i. csúcsban kezdődő k hosszú zárt séták száma. $\square$

Ezt még egy kicsit tovább is tudjuk erősíteni. Ismert ugyanis lineáris algebrából, hogy ha vesszük az $U = (u_1, ..., u_n)$ és $S = diag\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ mátrixokat, akkor

$$A(G) = USU^T$$

vagy ekvivalensen

$$A(G) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i u_i^T.$$

Ugyanígy az adjacenciamátrix hatványaira:

$$A(G)^l = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^l u_i u_i^T.$$

Mivel G-ben az i és j csúcsok közötti l hosszú séták száma az $A(G)^l$ mátrix (i, j) helyen álló eleme, ezért ha $u_k = (u_{1k}, u_{2k}, ..., u_{nk})$, akkor az előbbi alakból leolvasható, hogy ezen séták száma éppen

$$\sum_{k=1}^{n} u_{ik} u_{jk} \lambda_k^l.$$

Most belátunk néhány min-max tételt mátrixok sajátértékéhez kapcsolódóan, ezeknél centrális lesz az alábbi fogalom:

2.1.2. Definíció. *Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix, $v \in \mathbb{R}^n$ nemnulla vektor, akkor az $R_A(v) = \frac{v^T A(G) v}{\|v\|^2}$ mennyiséget a v vektor A-hoz tartozó Rayleigh-hányadosának nevezzük.*

2.1.3. Tétel. *Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix, sajátértékei $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$. Ekkor tetszőleges $1 \leq k \leq n$ pozitív egész szám esetén*

$$\lambda_k = \max_W \left\{ \min_v \left\{ v^T A v \mid v \in W, \|v\|^2 = 1 \right\} \mid W \leq \mathbb{R}^n, \dim(W) = k \right\}.$$

Bizonyítás. Legyen először W tetszőleges altér, amire $dim(W) = k$. Hogyha $u_1, u_2, ..., u_n$ az A-hoz tartozó megfelelő ortonormált sajátbázis, akkor $W \cap \langle u_k, u_{k+1}, ..., u_n\rangle \neq \{0\}$, hiszen egy k-dimenziós és egy $n-k+1$-dimenziós altér metszete egy n-dimenziós térben legalább egydimenziós. Legyen v olyan eleme ennek a metszetnek, amire $\|v\|^2 = 1$. Ekkor $v \in W$, másrészt $v \in \langle u_k, u_{k+1}, ..., u_n\rangle$ miatt léteznek olyan α_i skalárok, hogy

$$v = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i u_i.$$

De így, mivel a λ_i-k csökkenő sorrendbe vannak rendezve és α_i^2 nemnegatív:

$$v^T A v = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2 \leq \lambda_k \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i^2 = \lambda_k \left\| v \right\|^2 = \lambda_k.$$

Ezzel beláttuk, hogy a tételben *baloldal* $\geq$ *jobboldal*. A másik irányú egyenlőtlenséghez legyen $W = \langle u_1, u_2, ..., u_k \rangle$. Ekkor tetszőleges $v \in W$, $\left\| v \right\|^2 = 1$ esetén léteznek α_i számok, hogy

$$v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i.$$

Az előzőhöz hasonlóan:

$$v^T A v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \alpha_i^2 \geq \lambda_k \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 = \lambda_k \left\| v \right\|^2 = \lambda_k.$$

Ezzel a másik irányt is beláttuk. □

2.1.4. Következmény.

$$\lambda_1 = \max_{\|x\|=1} x^T A x = \max_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{\left\| x \right\|^2} = \max_{x \neq 0} R_A(x)$$

Ráadásul, ha valamely x vektorra $\lambda_1 \left\| x \right\|^2 = x^T A x$, akkor $Ax = \lambda_1 x$.

Bizonyítás. Az első rész egyből következik az előző tételből $k = 1$-re, a második állítás pedig azért igaz, mert mikor az előbbi bizonyításnál felírtuk $v^T A v$-t, akkor az egyenlőtlenségláncban egyenlőség csak akkor állhat, ha a λ_1-gyel megegyező sajátértékekhez tartozó koordináták kivételével mindegyik koordinátája 0 a v-nek, de ez pont azt jelenti, hogy v λ_1-hez tartozó sajátvektor. □

2.1.5. Állítás.

(a)

$$\lambda_n = \min_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{\left\| x \right\|^2}$$

(b)

$$\lambda_2 = \max_{x \perp u_1, x \neq 0} \frac{x^T A x}{\left\| x \right\|^2}$$

Bizonyítás.

(a) Legyen $x \neq 0$ tetszőleges, $x = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n$, ahol $u_1, ..., u_n$ a szokásos sajátbázisa A-nak. Ekkor a korábbiakhoz hasonlóan:

$$x^T Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2 \geq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \lambda_n \|x\|^2 .$$

Másrészt egyenlőség nyilván fennállhat akkor, ha x egy λ_n-hez tartozó sajátvektor.

(b) Ismét legyen $x \neq 0$ tetszőleges, $x = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n$. Ekkor $x \perp u_1$ miatt $\alpha_1 = \langle x, u_1 \rangle = 0$. Így

$$x^T Ax = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \alpha_i^2 \leq \lambda_2 \sum_{i=2}^{n} \alpha_i^2 = \lambda_2 \|x\|^2 .$$

Egyenlőség fennállhat akkor, amikor x λ_2-höz tartozó sajátvektor.

□

2.1.6. Állítás. *Legyen A nemnegatív szimmetrikus mátrix. Ekkor létezik egy nemnulla $x = (x_1, ..., x_n)$ vektor, amire $Ax = \lambda_1 x$ és $x_i \geq 0$ minden i esetén.*

Bizonyítás. Legyen $u_1 = (u_{11}, u_{12}, ..., u_{1n})$, és vegyük az $x = (|u_{11}|, |u_{12}|, ..., |u_{1n}|)$ vektort. Ekkor $\|x\| = \|u_1\| = 1$ és

$$x^T Ax \geq u_1^T A u_1 = \lambda_1.$$

Így az előbbiek alapján $x^T Ax = \lambda_1$ és ezért $Ax = \lambda_1 x$, tehát ez az x megfelelő. □

Most elkezdjük gráfokra alkalmazni az imént felépített eszköztárat.

2.1.7. Állítás. *Legyen G összefüggő gráf, $A = A(G)$ adjacenciamátrixszal. Ekkor*

(a) Ha $Ax = \lambda_1 x$ és $x \neq 0$, akkor x egyetlen koordinátája sem 0.

(b) λ_1 multiplicitása 1.

(c) Ha $Ax = \lambda_1 x$ és $x \neq 0$, akkor x minden koordinátája azonos előjelű.

(d) Ha $Ax = \lambda x$ valamely λ-ra, $x \neq 0$ és x minden koordinátája nemnegatív, akkor $\lambda = \lambda_1$.

Bizonyítás.

(a) Legyen $x = (x_1, ..., x_n)$ és vegyük az $y = (|x_1|, ..., |x_n|)$ vektort. Így $\|y\| = \|x\|$ és

$$y^T Ay \geq x^T Ax = \lambda_1 \|x\|^2 = \lambda_1 \|y\|^2 .$$

Így $Ay = \lambda_1 y$. Tekintsük a gráf csúcsainak a következő részhalmazát: $H = \{i \mid y_i = 0\}$ és tegyük fel indirekte, hogy ez a halmaz nem üres. Ekkor $V \setminus H = \{i \mid y_i > 0\}$ és ez szintén nem üres, hiszen y nem azonosan 0. Mivel G összefüggő, a halmazok nemüresek, ezért V és $V \setminus H$ között mennie kell élnek, fusson ez $i \in H$ és $j \in V \setminus H$ között. De ekkor, mivel y λ_1-hez tartozó sajátvektor, az Ay vektor i-hez tartozó koordinátáját vizsgálva:

$$0 = \lambda_1 y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j > 0$$

és ez ellentmondás. Tehát H üres, és így x egyik koordinátája sem 0.

(b) Indirekte tegyük fel, hogy x_1 és x_2 lineárisan független vektorok, amikre $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ és $Ax_2 = \lambda_1 x_2$. Ekkor az előző rész szerint x_2 első koordinátája nem 0, ezért választhatunk úgy egy c konstants, hogy az $x = x_1 - cx_2$ vektor első koordinátája 0 legyen, és $x \neq 0$, hiszen az x_1 és x_2 lineárisan függetlenek. De ekkor $Ax = \lambda_1 x$ és x első koordinátája 0, ami ellentmond az előbb bizonyított állításnak.

(c) Legyen $y = (|x_1|, ..., |x_n|)$, ekkor már láttuk, hogy $Ay = \lambda_1 y$. A (b) rész miatt ekkor x és y lineárisan összefüggőek, de ez csak úgy lehet, ha $x = y$ vagy $x = -y$, és mivel x-nek nincs 0 koordinátája, ez bizonyítja az állítást.

(d) Legyen $Au_1 = \lambda_1 u_1$, ekkor az előbb beláttuk, hogy u_1 minden koordinátája azonos előjelű, feltehetjük, hogy pozitív. Tegyük fel indirekt, hogy $\lambda \neq \lambda_1$. Ekkor u_1 és x ortogonálisak, hiszen különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok, de ez nem lehet, mert a skalárszorzatuk pozitív, hiszen mindkét vektor minden koordinátája nemnegatív, u_1 minden koordinátája szigorúan pozitív és x nem azonosan 0, ellentmondás.

□

2.1.8. Állítás. *(a) Legyen H részgráfja G-nek. Ekkor $\lambda_1(H) \leq \lambda_1(G)$.*

(b) Továbbá, ha G összefüggő és H valódi részgráf, akkor $\lambda_1(H) < \lambda_1(G)$.

Bizonyítás.

(a) Legyen x egységhosszú sajátvektora H adjacenciamátrixának, melynek a koordinátái nemnegatívak. Ekkor

$$\lambda_1(H) = x^T A(H) x \leq x^T A(G) x \leq \max_{\|z\|=1} z^T A(G) z = \lambda_1(G),$$

ahol úgy értjük az $x^T A(G)x$ kifejezést, hogy ha H-nak kevesebb csúcsa van mint G-nek, akkor a maradék csúcsokon kiegészítjük 0-val az x vektort.

(b) Tegyük fel indirekte, hogy $\lambda_1(G) = \lambda_1(H)$, ekkor a fenti számolásban mindenütt egyenlőségnek kell állnia, vagyis $x^T A(G)x = \lambda_1(G)$, így (a kiegészített) x sajátvektora $A(G)$-nek. Viszont G összefüggősége miatt ez esetben x minden elemének pozitívnak kell lennie, de ekkor $x^T A(H)x < x^T A(G)x$, ellentmondás.

□

2.1.9. Állítás. *(a)* $|\lambda_n| \leq \lambda_1$.

(b) Ha a G gráf összefüggő és $-\lambda_n = \lambda_1$, akkor G páros gráf.

(c) G pontosan akkor páros gráf ha a spektruma szimmetrikus az origóra.

Bizonyítás.

(a) Legyen $x = (x_1, ..., x_n)$ egységhosszú, λ_n-hez tartozó sajátvektor és legyen $y = (|x_1|, ..., |x_n|)$. Ekkor

$$|\lambda_n| = |x^T Ax| = \left|\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j\right| \leq \sum_{i,j} a_{ij}|x_i||x_j| = y^T Ay \leq \max_{\|z\|=1} z^T Az = \lambda_1$$

(b) Legyenek x, y ugyanazok mint előbb. Felírva az előbbi egyenlőtlenségláncot:

$$\lambda_1 = |\lambda_n| = |x^T Ax| = \left|\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j\right| \leq \sum_{i,j} a_{ij}|x_i||x_j| = y^T Ay \leq \max_{\|z\|=1} z^T Az = \lambda_1$$

Így egyenlőségnek kell állnia mindenhol. Azaz y λ_1-hez tartozó pozitív sajátvektor (nem lehet 0 koordinátája a 2.1.7 állítás miatt), és minden $a_{ij}x_ix_j$ tag előjele azonos, de így csak negatív lehet, mert $\lambda_n \leq 0$. Így ha tekintjük a $V^+ = \{i \mid x_i > 0\}$ és $V^- = \{i \mid x_i < 0\}$ csúcshalmazokat, akkor ezek diszjunktak, lefedik G csúcshalmazát és minden élnek a kettő között kell mennie, hiszen ha valamelyik halmazon belül futna él, az pozitív előjelű $a_{ij}x_ix_j$ tagot eredményezne. Ez a partíció mutatja, hogy G páros.

(c) Ha G páros gráf A és B színosztályokkal, akkor egyszerűen megadható egy lineáris bijekció a λ-hoz és $-\lambda$-hoz tartozó sajátalterek között: ha $Ax = \lambda x$, akkor legyen y olyan vektor, ami megegyezik x-szel az A-ban levő csúcsokhoz tartozó koordinátákon, a B-hez tartozókon pedig $-x$. Könnyen látható, hogy ekkor ez $-\lambda$-hoz tartozó sajátérték.

A másik irányt az összefüggőségi komponensek c számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Legyen tehát G spektruma szimmetrikus az origóra. Ha G összefüggő, akkor mivel $-\lambda_n = \lambda_1$ a szimmetria miatt, akkor készen vagyunk, ez a $c = 1$ eset. Ha G nem összefüggő, akkor mivel a G sajátértékeinek multihalmaza a kompenensei sajátértékhalmazainak az uniója, így létezik egy H összefüggőségi komponens, aminek λ_n sajátértéke, vagyis $\lambda_{min}(H) = \lambda_{min}(G)$. De ekkor korábbi állításainkat felhasználva $\lambda_1(G) = |\lambda_{min}(G)| = |\lambda_{min}(H)| \leq \lambda_1(H) \leq \lambda_1(G)$, vagyis mindenhol egyenlőség áll és ezért $-\lambda_{min}(H) = \lambda_1(H)$. Mivel H összefüggő is, így a (b) rész miatt H páros, de így a spektruma szimmetrikus a 0-ra, így $G \setminus H$ spektruma is szimmetrikus lesz a 0-ra. Az indukciót alkalmazva ekkor $G \setminus H$ is páros gráf lesz, és ezért G is páros.

□

2.1.10. Állítás. *Legyen G gráf, jelölje Δ a legnagyobb fokszámot, $\overline{d}$ pedig az átlagfokszámot. Ekkor*

$$\max(\sqrt{\Delta}, \overline{d}) \leq \lambda_1 \leq \Delta$$

Bizonyítás. Legyen $x = (1, 1, ..., 1)$. Ekkor

$$\lambda_1 \geq \frac{x^T A x}{\|x\|^2} = \frac{2e(G)}{n} = \overline{d}.$$

G tartalmaz egy $K_{1,\Delta}$ gráfot (csillagot) részgráfként, ezért

$$\lambda_1(G) \geq \lambda_1(K_{1,\Delta}) = \sqrt{\Delta}.$$

Legyen v egy λ_1-hez tartozó sajátvektor, és v_i a legnagyobb abszolútértékű koordinátája. Ekkor

$$\lambda_1 |v_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |v_j| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |v_i| \leq \Delta |v_i|,$$

tehát $\lambda_1 \leq \Delta$. □

2.1.11. Állítás. *Legyen G egy d-reguláris gráf. Ekkor $\lambda_1(G) = d$ és multiplicitása megegyezik az összefüggőségi komponensek számával, továbbá minden d-hez tartozó sajátvektor konstans az összefüggőségi komponenseken.*

Bizonyítás. $\lambda_1 = d$ következik az előző állításból, és így elég belátnunk, hogy a d-hez tartozó sajátvektorok konstansak a komponenseken, mert ebből a multiplicitás is könnyen következik. Legyen tehát x egy d-hez tartozó sajátvektor, H egy összefüggőségi komponens, és jelölje

$$c = \max_{i \in V(H)} x_i.$$

Legyen továbbá $V_c = \{i \in V(H) \mid x_i = c\}$, ekkor $V(H) \setminus V_c = \{i \in V(H) \mid x_i < c\}$, tegyük fel indirekt, hogy ez nem üres. Ekkor létezik egy olyan $(i,j) \in E(H)$ él, amire $i \in V_c$ és $j \in V(H) \setminus V_c$ és így

$$dc = dx_i = \sum_{k \in N(i)} x_k \leq x_j + \sum_{k \in N(i), k \neq j} x_k < c + (d-1)c = dc,$$

ellentmondás. Tehát x konstans az összefüggőségi komponenseken. $\square$

2.2. Expanderek és pseudorandom gráfok

Mostantól főleg d-reguláris gráfokat fogunk tanulmányozni. Ekkor $\lambda_1 = d$, és ebben a fejezetben azt fogjuk látni, hogy λ_2 és λ_n valamilyen értelemben a gráf véletlenségét méri. Először bevezetünk egy jelölést: ha $S, T \subseteq V(G)$, akkor legyen

$$e(S,T) = |\, \{(u,v) \in E(G) \mid u \in S, v \in T\} \,|.$$

Itt S-nek és T-nek lehet nemüres a metszete, és az olyan éleket, melyeknek mindkét vége benne van a metszetben, kétszer számoljuk.
Véletlen d-reguláris G gráf esetén arra számítanánk, hogy $e(S,T) \approx d\frac{|S||T|}{n}$, mert minden S-beli csúcsból megy d él, az egyes élek egymástól függetlenül $\approx \frac{|T|}{n}$ valószínűséggel mennek T-beli csúcsba. A következőekben azt vizsgáljuk meg, hogy általában egy G gráfban mekkora eltérésre számíthatunk ettől.

2.2.1. Tétel. *Legyen G egy n csúcsú d-reguláris gráf, és $S, T \subseteq V(G)$ amikre $S \cup T = V(G)$ és $S \cap T = \emptyset$. Ekkor*

$$(d - \lambda_2)\frac{|S||T|}{n} \leq e(S,T) \leq (d - \lambda_n)\frac{|S||T|}{n}.$$

Bizonyítás. Legyen $|S| = s$ és $|T| = t$. Mivel G d-reguláris, így $u_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\underline{1}$. Vegyük azt az x vektort, mely az S elemein a t értéket, a T elemein pedig a $-s$ értéket veszi fel, ekkor $|S|t - |T|s = 0$ miatt x merőleges az $\underline{1}$, és így az u_1 vektorra. Nézzük a következő összeget:

$$\sum_{(i,j)\in E(G)} (x_i - x_j)^2 = d\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{(i,j)\in E(G)} x_i x_j = d\,\|x\|^2 - x^T A(G)x.$$

A 2.1.5 állítás miatt

$$(d-\lambda_2)\,\|x\|^2 \le d\,\|x\|^2 - x^T A(G)x \le (d-\lambda_n)\,\|x\|^2.$$

Másrészt az összeget másképpen felírva:

$$\sum_{(i,j)\in E(G)} (x_i - x_j)^2 = e\,(S,T)\,(t-(-s))^2 = e\,(S,T)\,(t+s)^2 = e\,(S,T)\,n^2.$$

Az x vektor hossznégyzetét kiszámolva:

$$\|x\|^2 = ts^2 + st^2 = ts\,(s+t) = tsn.$$

Mindezeket összerakva:

$$(d-\lambda_2)\,tsn \le e\,(S,T)\,n^2 \le (d-\lambda_n)\,tsn.$$

Ezt n^2-tel leosztva adódik

$$(d-\lambda_2)\,\frac{st}{n} \le e(S,T) \le (d-\lambda_n)\,\frac{st}{n}$$

ami éppen a bizonyítandó állítás. □

Ha $S \subseteq V(G)$, akkor jelölje $N(S)$ az S szomszédainak halmazát:

$$N(S) = \{u \in V(G)\setminus S \mid \exists v \in S : (u,v) \in E(G)\}.$$

2.2.2. Definíció. *Egy G gráfot (n,d,c)-expandernek nevezünk, ha d-reguláris, n csúcsú és*

$$|N(S)| \ge c|S|$$

minden olyan S halmazra, amire $|S| \le \frac{n}{2}$.

Minél nagyobb c-re expander egy gráf, annál inkább összekapcsoltnak mondható: robusztusabb a hálózat, jobban tud terjedni az információ. Például a véletlen reguláris gráfok jó expanderek.

2.2.3. Tétel. *Egy n csúcsú, d-reguláris G gráf (n, d, c)-expander a $c = \frac{d-\lambda_2}{2d}$ értékkel.*

Bizonyítás. Legyen $S \subseteq V(G)$, ahol $|S| \leq \frac{n}{2}$. Legyen $T = V(G) \setminus S$, ekkor $T \geq \frac{n}{2}$. Így egyrészt

$$e(S,T) = e(S, N(S)) \leq d|N(S)|,$$

másrészt a 2.2.1 tétel miatt:

$$e(S,T) \geq (d-\lambda_2)\frac{|S||T|}{n} \geq \frac{d-\lambda_2}{2}|S|.$$

Összevetve a két egyenlőtlenséget:

$$d|N(S)| \geq \frac{d-\lambda_2}{2}|S|.$$

Ezt d-vel leosztva kapjuk a kívánt állítást $N(S)$-re. $\square$

A $d - \lambda_2$ mennyiséget spektrális hézagnak nevezzük.

A továbbiak során G d-reguláris gráf esetén jelölje $\lambda = \max(|\lambda_2|, ..., |\lambda_n|) = \max(|\lambda_2|, \lambda_n|)$.

2.2.4. Tétel. *(Expander mixing lemma). Legyen G n csúcsú d-reguláris gráf, továbbá $S, T \subseteq V(G)$, ekkor*

$$\left| e(S,T) - d\frac{|S||T|}{n} \right| \leq \lambda\sqrt{|S||T|}.$$

Bizonyítás. Legyenek χ_S és χ_T az S és T halmazok karakterisztikus vektorai. Ekkor könnyen láthatóan

$$e(S,T) = \chi_S^T A(G)\chi_T.$$

Vegyük az $u_1, ..., u_n$ ortonormált sajátbázist úgy, hogy $u_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\underline{1}$. Írjuk fel a karakterisztikus vektorokat ezen bázisban: $\chi_S = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$ és $\chi_T = \sum_{i=1}^n \beta_i u_i$. Ekkor

$$\chi_S^T A(G)\chi_T = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \beta_i.$$

Az együtthatók skaláris szorzás segítségével meghatározhatóak, így $\alpha_1 = \langle \chi_S, u_1 \rangle = \frac{S}{\sqrt{n}}$ és $\beta_1 = \langle \chi_T, u_1 \rangle = \frac{T}{\sqrt{n}}$. Ezeket behelyettesítve:

$$\lambda_1 \alpha_1 \beta_1 = d\frac{S}{\sqrt{n}}\frac{T}{\sqrt{n}} = d\frac{|S||T|}{n}.$$

A fentieket felhasználva:

$$\left| e(S,T) - d\frac{|S||T|}{n} \right| = \left| \sum_{i=2}^n \lambda_i \alpha_i \beta_i \right| \leq \lambda \sum_{i=2}^n |\alpha_i| \, |\beta_i| \, .$$

A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$\sum_{i=2}^{n} |\alpha_i| |\beta_i| \leq \left(\sum_{i=2}^{n} |\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=2}^{n} |\beta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \|\chi_S\| \|\chi_T\| = |S|^{\frac{1}{2}} |T|^{\frac{1}{2}}$$

Ezt visszaírva megkapjuk a kívánt állítást:

$$\left| e(S,T) - d\frac{|S||T|}{n} \right| \leq \lambda \sqrt{|S||T|}.$$

□

Azt látjuk tehát, hogy minél kisebb λ, a gráf annál jobban "hasonlít" egy véletlen d-reguláris gráfhoz (legalábbis a vágások között futó élek számában). Ez motiválja a következő definíciót:

2.2.5. Definíció. *Egy gráfot (n, d, λ)-pseudorandomnak nevezünk, ha n csúcsú, d-reguláris és* $\max(|\lambda_2|, |\lambda_n|) \leq \lambda$.

Kiderül, hogy ez az elnevezés valóban jogos olyan értelemben, hogy sok olyan tétel van, hogy ha egy véletlen d-reguláris gráfnak megvan egy adott tualjdonsága, akkor kis λ esetén egy (n, d, λ)-pseudorandom gráfnak is megvan ugyanaz. Például az átmérővel kapcsolatban ilyen F. Chung alábbi tétele:

2.2.6. Tétel. *Legyen G egy (n, d, λ)-pseudorandom gráf. Ekkor G átmérője legfeljebb*

$$\left\lceil \frac{\log(n-1)}{\log\left(\frac{d}{\lambda}\right)} \right\rceil + 1.$$

Bizonyítás. Be kell látnunk, hogy létezik egy $r \leq \left\lceil \frac{\log(n-1)}{\log\left(\frac{d}{\lambda}\right)} \right\rceil + 1$, hogy tetszőleges i és j csúcsok távolsága legfeljebb r, azaz létezik egy legfeljebb r hosszú séta i és j végpontokkal. Így elegendő azt bizonyítani, hogy $(A^r)_{ij} > 0$, vagyis hogy A^r minden eleme pozitív. Ha $u_1, ..., u_n$ ortormált sajátbázis, és $u_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\underline{1}$, valamint $u_k = (u_{1k}, ..., u_{nk})$, akkor korábban kiszámoltuk, hogy

$$(A^r)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} u_{jk} \lambda_k^r.$$

Itt az első tag

$$u_{i1} u_{j1} \lambda_1^r = \frac{d^r}{n},$$

ezért a háromszögegyenlőtlenség miatt elegendő azt belátnunk, hogy

$$\left|\sum_{k=2}^{n} u_{ik}u_{jk}\lambda_k^r\right| < \frac{d^r}{n}$$

valamely $r \leq \left\lceil \frac{\log(n-1)}{\log\left(\frac{d}{\lambda}\right)} \right\rceil + 1$ esetén. A háromszög-egyenlőtlenséget, majd a Cauchy-Schwartz-egyenlőtlenséget, végül pedig azt használva, hogy az $U = (u_1, ..., u_n)$ mátrix sorvektorainak hossza 1 (hiszen a mátrix ortogonális):

$$\left|\sum_{k=2}^{n} u_{ik}u_{jk}\lambda_k^r\right| \leq \lambda^r \sum_{k=2}^{n} |u_{ik}|\,|u_{jk}| \leq \lambda^r \left(\sum_{k=2}^{n} |u_{ik}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=2}^{n} |u_{jk}|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \lambda^r \left(\sum_{k=1}^{n} |u_{ik}|^2 - u_{i1}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} |u_{jk}|^2 - u_{j1}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \lambda^r \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \lambda^r \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Viszont $r = \left\lceil \frac{\log(n-1)}{\log\left(\frac{d}{\lambda}\right)} \right\rceil + 1$ esetén könnyen láthatóan teljesül

$$\lambda^r \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{d^r}{n},$$

így készen vagyunk. □

Tehát minél kisebb λ, annál jobb expander a G gráf, annál jobban hasonlít egy véletlen d-reguláris gráfhoz, sőt a fenti tétel értelmében az átmérője is kicsi. Természetesen felvetődik a kérdés, hogy ha egyre nagyobb csúcsszámú gráfokat szeretnénk venni, van-e valamilyen határa annak, hogy milyen alacsonyon tudjuk tartani ezt a λ értéket (fix d mellett)? Az Alon-Boppana tétel, aminek két bizonyítását is ismertetni fogjuk a következő fejezetben, ezt válaszolja meg.

2.2.7. Tétel. *(Alon-Boppana). Legyen $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ d-reguláris gráfok sorozata, ahol $|V(G_i)| \to \infty$. Ekkor*

$$\liminf_{i\to\infty} \lambda_2(G_i) \geq 2\sqrt{d-1}.$$

Vagyis tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén csak véges sok olyan d-reguláris gráf létezik, amire teljesül $\lambda_2 < 2\sqrt{d-1} - \epsilon$.

Azok a gráfokat fogjuk Ramanujan-gráfoknak nevezni, amiknek a fenti tétel értelmében a lehető legkisebb a λ-juk.

2.2.8. Definíció. *Egy d-reguláris G gráfot Ramanujan-gráfnak hívunk, ha $\lambda \leq 2\sqrt{d-1}$.*

A kérdés az, hogy tetszőleges rögzített d esetén létezik-e végtelen sok d-reguláris Ramanujan-gráf? A sejtés az, hogy igen, de ezt eddig még csak $d = p^\alpha + 1$ esetén sikerült igazolni, ahol p prímszám. Ezen gráfok konstrukcióját a későbbiekben részletesen meg fogjuk vizsgálni. Mi a helyzet a páros gráfokkal? Mivel ott $\lambda_n = -\lambda_1 = -d$, ezért ők nem Ramanujan-gráfok a fenti definíció értelmében, és nem is "jó" pseudorandom-gráfok. Kiderül viszont, hogy itt a λ_n annyira nem is lényeges, hanem csak λ_2, ugyanis egy természetes meggondolás az, hogy ha A és B a két színosztály, akkor mondjuk $e(S,T)$ vizsgálatánál csak olyan S és T halmazokra szorítkozunk, ahol $S \subseteq A$ és $T \subseteq B$, hiszen két azonos színű csúcs között úgysem megy él. Ekkor igaz lesz az expander-mixing lemma megfelelő változata, amit most kicsit általánosabban, bireguláris páros gráfokra látunk be:

2.2.9. Tétel. *(Expander mixing lemma páros gráfokra). Legyen G páros bireguláris gráf, A és B színosztályokkal, $|A| = n$, $|B| = m$, minden A-beli csúcs d_1 és minden B-beli csúcs d_2 fokú. Legyen $S \subseteq A$ és $T \subseteq B$. Ekkor*

$$\left| e(S,T) - \frac{d_1 |S| |T|}{m} \right| \leq \lambda_2 |S|^{\frac{1}{2}} |T|^{\frac{1}{2}}.$$

Bizonyítás. Az expander mixing lemma bizonyításához teljesen hasonlóan fogunk haladni. A gráf csúcsainak száma legyen $k = m+n$. A G gráf legnagyobb sajátértéke $\sqrt{d_1 d_2}$, mert ehhez tartozó sajátvektor az, hogy A elemeire $\sqrt{d_1}$-et, B elemeire $\sqrt{d_2}$-t írunk és ez nemnegatív elemekből áll; legyen u_1 ezen vektor lenormálva (azaz leosztva $\sqrt{nd_1 + md_2}$-vel). G legkisebb sajátértéke $-\sqrt{d_1 d_2}$, a sajátvektornál A elemein $\sqrt{d_1}$, B elemein $-\sqrt{d_2}$; legyen u_k ezen vektor lenormálva (azaz leosztva $\sqrt{nd_1 + md_2}$-vel). Egészítsük ki ezt a két vektort ortonormált sajátbázissá. Legyen χ_S az a vektor, mely S elemein 1, máshol 0, χ_T pedig az, amely T elemein 1, máshol 0. Ekkor $\chi_S A(G) \chi_V$ éppen $e(S,T)$-vel fog megegyezni.

Írjuk fel χ_S-t és χ_T-t az u_i vektorok bázisában: $\chi_S = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i$ és $\chi_T = \sum_{i=1}^k \beta_i u_i$. Ekkor

$$\chi_S A(G) \chi_T = \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i \beta_i.$$

Viszont tudjuk azt, hogy $\alpha_1 = \langle \chi_S, u_1 \rangle = \frac{\sqrt{d_1}|S|}{\sqrt{nd_1+md_2}}$ és $\beta_1 = \langle \chi_T, u_1 \rangle = \frac{\sqrt{d_2}|T|}{\sqrt{nd_1+md_2}}$, hasonlóan $\alpha_k = \langle \chi_S, u_k \rangle = \frac{\sqrt{d_1}|S|}{\sqrt{nd_1+md_2}}$ és $\beta_k = \langle \chi_T, u_k \rangle = \frac{-\sqrt{d_2}|T|}{\sqrt{nd_1+md_2}}$. Ezek alapján

$$\lambda_1 \alpha_1 \beta_1 = \frac{d_1 d_2 |U||V|}{nd_1 + md_2} = \frac{d_1 d_2 |U||V|}{2md_2} = \frac{d_1 |U||V|}{2m},$$

felhasználva, hogy $nd_1 = md_2$, hiszen mindkettő az élek számával egyezik meg. Ugyanígy kapjuk, hogy $\lambda_k\alpha_k\beta_k = \frac{d_1|U||V|}{2m}$. Tehát

$$\left|e(S,T) - \frac{d_1|S||T|}{m}\right| = \left|\sum_{i=2}^{k-1} \lambda_i\alpha_i\beta_i\right| \le \sum_{i=2}^{k-1} |\lambda_i||\alpha_i||\beta_i| \le \lambda_2 \left(\sum_{i=2}^{k-1} \alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=2}^{k-1} \beta_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \lambda_2|S|^{\frac{1}{2}}|T|^{\frac{1}{2}},$$

ugyanúgy használva a Cauchy-Schwarz egyenőtlenséget, mint az eredeti bizonyításban, és kész vagyunk. □

Így a definíciók páros gráf esetén a következőre módosulnak:

2.2.10. Definíció. *Egy páros gráfot (n, d, λ)-pseudorandom páros gráfnak nevezünk, ha n csúcsú, d-reguláris és $\lambda_2 \le \lambda$.*

2.2.11. Definíció. *Egy d-reguláris páros gráfot páros Ramanujan-gráfnak nevezünk, ha $\lambda_2 \le 2\sqrt{d-1}$.*

Itt már tudjuk, hogy tetszőleges d esetén végtelen sok páros d-reguláris páros Ramanujan-gráf létezik; a dolgozatban ennek bizonyítását látni fogjuk majd.

3. fejezet

Alon-Boppana tétel

Ebben a fejezetben az Alon-Boppana-tételre ismertetünk két bizonyítást. Emlékeztetőül, a tétel azt mondja ki, hogy ha $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ d-reguláris gráfok sorozata, és $|V(G_i)| \to \infty$, akkor $\liminf \lambda_2(G_i) \geq 2\sqrt{d-1}$. Mindkét bizonyításból egy ennél erősebb változat is ki fog jönni, nevezetesen ha $s \geq 2$ pozitív egész, akkor $\liminf \lambda_s(G_i) \geq 2\sqrt{d-1}$.

3.1. Első bizonyítás

Ez a bizonyítás A. Nilli-től származik [2].

3.1.1. Tétel. *Legyen k pozitív egész és G egy d-reguláris gráf, ami tartalmaz s csúcsot úgy, hogy azok között bármely kettő távolsága legalább $4k$. Ekkor $\lambda_s(G) \geq 2\sqrt{d-1}\cos(\frac{\pi}{2k})$.*

Ebből következik az Alon-Boppana tétel fent említett erősebb alakja, hiszen ha s és k tetszőleges pozitív egész számok, akkor egy d-reguláris gráf egy adott csúcsától legfeljebb $d + d(d-1) + d + d(d-1)^2 + ... + d(d-1)^{4k-2}$ darab másik csúcs lehet $4k$-nél kisebb távolságra (d darab 1 távolságra, azoknak legfeljebb $d(d-1)$ darab további szomszédja van, azoknak legfeljebb $d(d-1)(d-1)$ további szomszédja stb.), és az az összeg egy, a gráf csúcsszámától független konstans. Így ha G-nek elég sok csúcsa van, akkor választva egy csúcsot, még mindig elég sok olyan csúcs lesz, amely tőle legalább $4k$ távolságra van, onnantól csak ezeket nézzük, innen is választunk egy csúcsot és így tovább, amíg találunk s csúcsot melyek közt minden páronkénti távolság legalább $4k$. Így ha G_i a d-reguláris gráfok sorozata, akkor tetszőleges k esetén minden elég nagy i-re $\lambda_s(G_i) \geq 2\sqrt{d-1}\cos(\frac{\pi}{2k})$, tehát $\liminf \lambda_s(G_i) \geq 2\sqrt{d-1}\cos(\frac{\pi}{2k})$, és így k-val végtelenhez tartva kapjuk az Alon-

Boppana tétel erős alakját.

Bizonyítás. Legyen G csúcsainak száma n, és legyen $\alpha = \frac{\pi}{2k}$. Az ötlet a következő: mutatunk $\mathbb{R}^n$-ben egy olyan s dimenziós W alteret, melynek minden nemnulla z vektorára $z^T A(G) z \geq \left(2\sqrt{d-1}\cos\alpha\right)\|z\|^2$ teljesül. Ekkor a 2.1.3 tételből azt kapjuk, hogy $\lambda_s(G) \geq 2\sqrt{d-1}\cos\alpha$, ami éppen a bizonyítandó állítás, tehát elegendő egy ilyen W-t találnunk. Ezen altér megkonstruálásához megadjuk a bázisvektorait. Legyen $v \in V(G)$ csúcsa a gráfnak, $V_0 = \{v\}$ és V_i a v-től pontosan i távolságra levő csúcsok halmaza, valamint jelölje $n_i = |V_i|$. Legyen

$$y_i = \frac{\cos\left((i-k)\alpha\right)}{(d-1)^{\frac{i}{2}}}.$$

Világos, hogy $y_0 = y_{2k} = 0$ és $y_i \geq 0$ minden $0 \leq i \leq 2k$ esetén. A koszinuszok összegére vonatkozó szorzattá alakítást alkalmazva a következő azonosságot kapjuk:

$$y_{i-1} + (d-1)y_{i+1} = \frac{\cos\left((i-1-k)\alpha\right)}{(d-1)^{\frac{i-1}{2}}} + (d-1)\frac{\cos\left((i+1-k)\alpha\right)}{(d-1)^{\frac{i+1}{2}}} =$$

$$= \frac{\cos\left((i-1-k)\alpha\right) + \cos\left((i+1-k)\alpha\right)}{(d-1)^{\frac{i-1}{2}}} = \frac{2\cos\alpha\cos\left((i-k)\alpha\right)}{(d-1)^{\frac{i-1}{2}}} =$$

$$= \frac{\cos\left((i-k)\alpha\right)}{(d-1)^{\frac{i}{2}}} 2\sqrt{d-1}\cos\alpha = y_i 2\sqrt{d-1}\cos\alpha.$$

Az y_i-k sorozatának meg van még továbbá az a tulajdonsága, hogy létezik egy egyértelmű i_0 index, amire

$$y_0 < y_1 < \ldots < y_{i_0} < y_{i_0+1} \geq \ldots \geq y_{2k}.$$

Ez onnan látható, hogy a szomszédos tagok hányadosa a szögek összegének koszinuszára vonatkozó képlet alapján:

$$\frac{y_{i+1}}{y_i} = \frac{\cos\left((i+1-k)\alpha\right)}{\cos\left((i-k)\alpha\right)\sqrt{d-1}} = \frac{\cos\left((i-k)\alpha\right)\cos\alpha - \sin\left((i-k)\alpha\right)\sin\alpha}{\cos\left((i-k)\alpha\right)\sqrt{d-1}} =$$

$$= \frac{\cos\alpha - \tan\left((i-k)\alpha\right)\sin\alpha}{\sqrt{d-1}}.$$

Ez könnyen láthatóan csökkenő függvénye i-nek az általunk vizsgált indextartományban, hiszen a tangens ott monoton növő, ezért az az i_0 index megfelelő lesz, amelyre $i_0 + 1$ a legkisebb index, hogy ez a hányados legfeljebb 1. Ilyen index létezik, mert $i_0 + 1 = k$ esetén a hányados értéke $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{d-1}} \leq 1$.

Legyen $x_i = y_{i+i_0}$, ahol $0 \leq i \leq 2k - i_0$. Ekkor x_i monoton nemnövekvő $i \geq 1$ esetén, valamint $x_{2k-i_0} = 0$. (Tulajdonképpen annyi történt hogy egy tag kivételével levágtuk az y_i sorozat elejéről a monoton növő részt). Ha $1 \leq i \leq 2k - i_0 - 1$, akkor teljesül az x_j-k sorozatára is az y_j-k sorozatára már belátott

$$x_{i-1} + (d-1)x_{i+1} = x_i 2\sqrt{d-1}\cos\alpha \tag{3.1}$$

azonosság, hiszen csak az indexeket csúsztattuk arrébb i_0-val.

Tekintsük a következő vektort $\mathbb{R}^n$-ben: $x(u)_{u\in V(G)}$, ahol $x(u) = x_i$ ha $u \in V_i$ és $x(u) = 0$ egyébként. Világos, hogy ez egy nemnulla vektor, hiszen az y_i-k között szerepel x_k, ami nemnulla. Be fogjuk látni, hogy erre a vektorra teljesül az $x^T A(G)x \geq \left(2\sqrt{d-1}\cos\alpha\right)\|x\|^2$ egyenlőtlenség.

Ennek ismeretében már meg tudjuk konstruálni a kívánt W alteret: legyenek $u_1, u_2, ..., u_s$ csúcsai a gráfnak úgy, hogy bármely kettő között a távolság legalább $4k$, és készítsünk el a fenti módon mindegyikhez egy x_{u_j} vektort, ekkor ezekre teljesül $x_{u_j}^T A(G)x_{u_j} \geq \left(2\sqrt{d-1}\cos\alpha\right)\|x_{u_j}\|^2$. Továbbá, ezek a vektorok ortogonálisak, hiszen egy adott x_{u_j} esetén csak az u_j-től legfeljebb $2k-1$ távolságra levő csúcsokhoz tartozó koordináta lehet nemnulla ($y_{2k} = 0$ volt), így semelyik két vektornak sincs közös nemnulla koordinátája. De így az x_{u_j}-k lineárisan függetlenek is, tehát egy s dimenziós alteret feszítenek ki, legyen ez W.

Legyen most $z = \lambda_1 x_{u_1} + ... + \lambda_s x_{u_s}$ az W altér egy tetszőleges eleme, ekkor az ortogonalitás miatt $\|z\|^2 = \lambda_1^2\|x_{u_1}\|^2 + ... + \lambda_s^2\|x_{u_s}\|^2$. Az x_{u_j}-kre még az is igaz, hogy ha $i \neq j$, akkor $x_{u_i}^T A(G)x_{u_j} = 0$, hiszen a szorzatot kifejtve, olyan kéttagú szorzatoknak vesszük az összegét, melyeknél a koordináták szomszédos csúcsokhoz tartoznak. Mivel x_{u_i}-nál az u_i-tól, x_{u_j}-nél az u_j-től legalább $2k$ távolságra levő csúcsokhoz tartozó koordináta 0, és u_i és u_j távolsága legalább $4k$, így minden kéttényezős szorzatnál legalább az egyik tényező 0, ezért 0 lesz ezek összege. Így $z^T A(G)z = (\lambda_1 x_{u_1} + ... + \lambda_s x_{u_s})^T A(G)(\lambda_1 x_{u_1} + ... + \lambda_s x_{u_s}) = \lambda_1 x_{u_1}^T A(G)\lambda_1 x_{u_1} + ... + \lambda_s x_{u_s}^T A(G)\lambda_s x_{u_s} = \lambda_1^2 x_{u_1}^T A(G)x_{u_1} + ... + \lambda_s^2 x_{u_s}^T A(G)x_{u_s}$. Ezek után tagonként alkalmazva az x_{u_j}-kre már meglevő egyenlőtlenséget kapjuk, hogy $z^T A(G)z \geq \left(2\sqrt{d-1}\cos\alpha\right)\|z\|^2$, ezért az W altér valóban megfelelő lesz a céljainknak.

Tehát most már elég csak annyit megmutatnunk, hogy $x^T A(G)x \geq \left(2\sqrt{d-1}\cos\alpha\right)\|x\|^2$.

Először is, nyilvánvalóan

$$\|x\|^2 = \sum_{i=0}^{2k-i_o} n_i x_i^2.$$

Emlékeztetőül, ha X, Y részhalmazai a $V(G)$ csúcshalmaznak, akkor $e(X, Y)$ jelöli azon élek számát, melyek egyik végpontja X-ben, másik végpontja Y-ban van. Ezt a jelölést használva

$$x^T A(G)x = dx_0x_1 + \sum_{i=1}^{2k-i_o-1} \left[e\left(V_{i-1}, V_i\right) x_{i-1} + e\left(V_i, V_i\right) x_i + e\left(V_i, V_{i+1}\right) x_{i+1}\right] x_i$$

hiszen egy x_ix_j tag éppen annyiszor szerepel a kifejtett szorzatban, ahányféleképpen V_i-ből és V_j-ből ki tudunk választani egy-egy szomszédos csúcsot, ez pedig éppen $e(V_i, V_j)$, és ez az érték 0 ha i és j különbsége legalább 2, hiszen akkor V_i és V_j közt nem futhat él. Továbbá, nyilvánvalóan $e(V_0, V_1) = d$, hiszen $V_0 = v$ és v fokszáma d, valamint minden szomszédja V_1-ben található.
Az első tag becsléséhez vegyük észre, hogy $d \geq 2\sqrt{d-1}$, valamint $0 \leq x_0 < x_1$, és így

$$dx_0x_1 \geq dx_0^2 \geq x_0^2 2\sqrt{d-1} \cos\alpha.$$

Most tekintsük a zárójeles tényezőt a szummán belül. Egyrészt $e(V_{i-1}, V_i) \geq |V_i| = n_i$, hiszen minden V_i-beli csúcsnak van legalább egy V_{i-1}-beli szomszédja. Másrészt $e(V_{i-1}, V_i) + e(V_i, V_i) + e(V_i, V_{i+1}) = d|V_i| = dn_i$, mert ennél az összegnél egy adott V_i-beli csúcs minden szomszédját megszámoljuk pontosan egyszer az összekötő él mentén (két szomszédos V_i-ben levő csúcs esetén az él kétszer van számolva $e(V_i, V_i)$-ben, de az ilyen éleket használjuk is mindkét csúcs szomszéd-számolásánál), így az eredmény éppen a V_i-beli csúcsok fokszámainak összege lesz. Ha $i > 1$, akkor még $x_{i-1} \geq x_i \geq x_{i-1}$ is teljesül az x_j-k definíciója szerint, így az

$$e\left(V_{i-1}, V_i\right) x_{i-1} + e\left(V_i, V_i\right) x_i + e\left(V_i, V_{i+1}\right) x_{i+1}$$

összeg legkisebb értéke a fenti feltételek mellett akkor vétetik fel, amikor $e(V_{i-1}, V_i) = n_i$, $e(V_i, V_i) = 0$ és $e(V_i, V_{i+1}) = (d-1)n_i$, hiszen ezen szóbanforgó tagok és együtthatóik nemnegatívak. Ez $i = 1$-re is igaz, mert $e(V_0, V_1) = n_1 = d$, mert V_0 csak a v csúcsból áll, és $x_1 \geq x_2$ már teljesül. Tehát minden szóbanforgó i-re megkapjuk a következő becslést, felhasználva a (3.1) azonosságot:

$$e\left(V_{i-1}, V_i\right) x_{i-1} + e\left(V_i, V_i\right) x_i + e\left(V_i, V_{i+1}\right) x_{i+1} \geq n_i x_{i-1} + (d-1)n_i x_{i+1} =$$

$$= n_i(x_{i-1} + (d-1)x_{i+1}) = n_i x_i 2\sqrt{d-1}\cos\alpha.$$

Ezeket és az első tagra vonatkozó becslést összerakva és felhasználva, hogy $x_{2k-i_0} = 0$:

$$x^T A(G)x \geq 2\sqrt{d-1}\cos\alpha \left(\sum_{i=0}^{2k-i_o-1} n_i x_i^2\right) = 2\sqrt{d-1}\cos\alpha \left(\sum_{i=0}^{2k-i_o} n_i x_i^2\right) = 2\sqrt{d-1}\cos\alpha \left\|x\right\|^2.$$

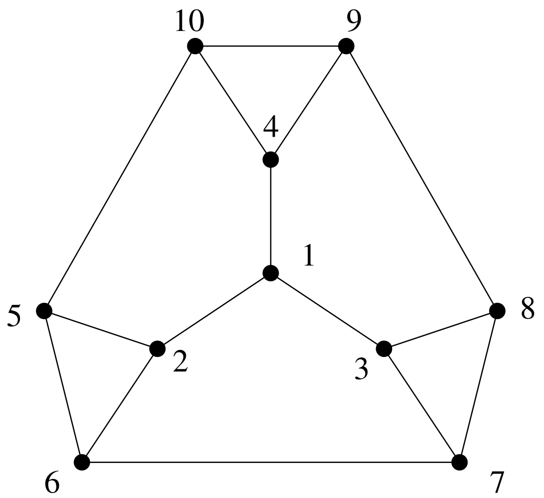
És éppen ezt kellett belátnunk. □

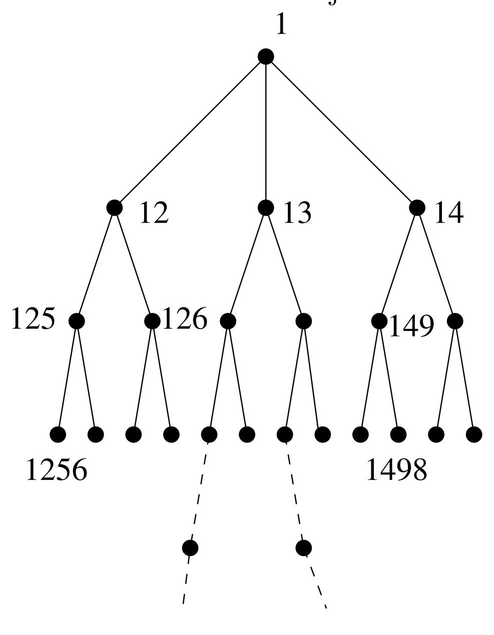
3.2. Második bizonyítás

A következő, Serre-től származó tételnek azonnali következménye az Alon-Boppana tétel. Az alábbi bizonyítás S. Cioaba-tól származik [3].

3.2.1. Tétel. *Minden d pozitív egészhez és $\epsilon > 0$ számhoz létezik olyan pozitív $c = c(\epsilon, d)$ konstans, hogy tetszőleges d-reguláris G gráf esetén, G-nek legalább $c|V(G)|$ darab μ sajátértéke van, amelyre $\mu \geq (2-\epsilon)\sqrt{d-1}$ teljesül.*

Bizonyítás. Az állítás azon múlik, hogy egyrészt a gráfban tetszőleges k pozitív egész szám esetén a $2k$ hosszú zárt séták száma $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{2k}$, ahol $n = |V(G)|$, másrészt ezen séták számára adunk egy megfelelő alsó becslést.
Tekintsük ugyanis a végtelen d-reguláris fát, és annak egy u_0 csúcsát. Megmutatjuk, hogy ha v_0 egy tetszőleges csúcsa G-nek, akkor G-ben a v_0-ból induló $2k$ hosszú zárt séták száma legalább annyi, mint a fában u_0-ból induló $2k$ hosszú zárt séták száma. Ez onnan látszik, hogy ha a végtelen fa csúcsait G v_0-ból induló olyan sétáival indexeljük, amik nem lépnek sosem azonnal vissza abba a csúcsba, ahonnan jöttek (úgynevezett non-backtracking séták) úgy, hogy u_0 legyen a csak v_0-ból álló séta, és két non-backtracking séta akkor van összekötve, ha az egyik pontosan egy lépéses kiterjesztése a másiknak, akkor a d-regularitás miatt ez a fa is d-reguláris lesz, és minden u_0-ból induló $2k$ hosszú zárt sétához tartozik egy v_0-ból induló $2k$ hosszú zárt séta G-ben, hiszen az indexelésen vissza tudjuk követni.





Most adjunk becslést a fában az u_0-ból induló $2k$ hosszú zárt séták számára. Minden ilyen sétához tartozik egy $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_{2k}$ sorozat ami a séta minden lépésénel azt mutatja meg, hogy mekkora távolságra vagyunk u_0-tól. Ezen számok nemnegatívak, $\delta_1 = \delta_{2k} = 0$ és bármely két szomszédos között $+1$ vagy -1 a különbség. Ismert, hogy az ilyen sorozatok száma éppen a $2k$-adik Catalan-szám, vagyis $\frac{\binom{2k}{k}}{k+1}$. Minden ilyen sorozathoz legalább $d(d-1)^{k-1}$ darab különböző séta tartozik a fában, ugyanis minden lefelé lépésnél van $d-1$ darab lehetőségünk, az elsőnél d darab, és mivel $2k$ hosszú zárt séta, így k-szor lépünk lefelé.

Tehát ezzel azt láttuk, hogy a fában u_0-ból, így a G-ben v_0-ból induló $2k$ hosszú zárt séták száma legalább $\frac{\binom{2k}{k}}{k+1} d(d-1)^{k-1} > \frac{1}{(k+1)^2}\left(2\sqrt{d-1}\right)^{2k}$, ahol az utolsó becslés a Stirling-formulából következik.

Így tehát ezt minden csúcsra összeadva és első észrevételünket használva azt kaptuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{2k} \geq \frac{n}{(k+1)^2}\left(2\sqrt{d-1}\right)^{2k}$$

minden pozitív egész k esetén.

Legyen m a G gráf azon μ sajátértékeinek száma, amikre $\mu \geq (2-\epsilon)\sqrt{d-1}$ teljesül. Legyen t egy pozitív egész szám, amelyet később választunk majd meg, és vizsgáljuk a

$$\sum_{i=1}^{n} (d+\lambda_i)^{2t}$$

összeget, erre fogunk adni egy alsó és egy felső becslést. Mivel $0 \leq d+\lambda_i \leq 2d$, ezért

$$\sum_{i=1}^{n} (d+\lambda_i)^{2t} \leq m(2d)^{2t} + (n-m)\left(d + (2-\epsilon)\sqrt{d-1}\right)^{2t}.$$

Az alsó becsléshez először használjuk a binomiális tételt:

$$\sum_{i=1}^{n} (d+\lambda_i)^{2t} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{2t}\binom{2t}{j} d^j \lambda_i^{2t-j} = \sum_{j=0}^{2t}\binom{2t}{j} d^j \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{2t-j}\right).$$

Mivel páratlan k esetén is $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^k \geq 0$, hiszen ez éppen G k hosszú zárt sétáinak számát adja meg, ezért alsó becsléshez elhagyhatjuk a páratlan kitevős tagokat, a páros tagokra pedig alkalmazzuk a fent kapott egyenlőtlenséget:

$$\sum_{j=0}^{2t}\binom{2t}{j} d^j \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{2t-j}\right) \geq \sum_{j=0}^{t}\binom{2t}{2j} d^{2j} \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{2t-2j}\right) \geq$$

$$\geq \sum_{j=0}^{t}\binom{2t}{2j} d^{2j}\frac{n}{(t-j+1)^2}\left(2\sqrt{d-1}\right)^{2t-2j} \geq \frac{n}{(t+1)^2}\sum_{j=0}^{t}\binom{2t}{2j} d^{2j}\left(2\sqrt{d-1}\right)^{2t-2j} =$$

$$= \frac{n}{2\left(t+1\right)^2}\left(\left(d+2\sqrt{d-1}\right)^{2t}+\left(d-2\sqrt{d-1}\right)^{2t}\right) \geq \frac{n}{2\left(t+1\right)^2}\left(d+2\sqrt{d-1}\right)^{2t}.$$

A két becslést összerakva:

$$m(2d)^{2t}+(n-m)\left(d+(2-\epsilon)\sqrt{d-1}\right)^{2t} \geq \frac{n}{2\left(t+1\right)^2}\left(d+2\sqrt{d-1}\right)^{2t}.$$

Ezt átrendezve kapjuk, hogy

$$\frac{m}{n} \geq \frac{\frac{1}{2(t+1)^2}\left(d+2\sqrt{d-1}\right)^{2t}-\left(d+(2-\epsilon)\sqrt{d-1}\right)^{2t}}{(2d)^{2t}-\left(d+(2-\epsilon)\sqrt{d-1}\right)^{2t}}.$$

A jobb oldali törtnél egyrészt a nevező pozitív, másrészt

$$\left(\frac{d+2\sqrt{d-1}}{d+(2-\epsilon)\sqrt{d-1}}\right)^{2t}$$

gyorsabban nő t-ben, mint $2(t+1)^2$, hiszen előbbi 1-nél nagyobb alapú exponenciális t-ben, míg utóbbi polinom, így létezik olyan t_0 pozitív egész, amire

$$\left(\frac{d+2\sqrt{d-1}}{d+(2-\epsilon)\sqrt{d-1}}\right)^{2t_0} > 2(t_0+1)^2$$

vagyis

$$\frac{1}{2\left(t_0+1\right)^2}\left(d+2\sqrt{d-1}\right)^{2t_0}-\left(d+(2-\epsilon)\sqrt{d-1}\right)^{2t_0} > 0.$$

Ezt az $\frac{m}{n}$ hányadosra kapott becsléssel összevetve láthatjuk, hogy

$$c(\epsilon,d) = \frac{\frac{1}{2(t_0+1)^2}\left(d+2\sqrt{d-1}\right)^{2t_0}-\left(d+(2-\epsilon)\sqrt{d-1}\right)^{2t_0}}{(2d)^{2t_0}-\left(d+(2-\epsilon)\sqrt{d-1}\right)^{2t_0}}$$

megfelelő választás, így a bizonyítást befejeztük. $\square$

4. fejezet

Konstrukciók Ramanujan-gráfokra

Most ismertetjük Lubotzky, Phillips és Sarnak konstrukcióját Ramanujan-gráfokra [4], aminek segítségével számelméleti eszközökkel és megfontolásokkal fogunk konstruálni végtelen sok Ramanujan-gráfot és páros Ramanujan-gráfot minden olyan d-re, ami $d = p + 1$ alakú, ahol p prímszám. Az összes ismert konstrukció Ramanujan-gráfok végtelen családjára $d = p^\alpha + 1$-reguláris gráfokra van megadva, tehát mindegyik számelméleti eszközöket használ (páros Ramanujan gráfokra már minden d-re tudunk konstruálni végtelen sok gráfot, ezt a következő fejezetben fogjuk ismertetni.)

4.1. Cayley-gráfok lineáris csoportokon

Ramanujan-gráfok konstrukciójánál két dologra kell figyelnünk: arra, hogy a készített gráfok regulárisak legyenek, valamint hogy a spektrumuk megfelelően korlátozva legyen. A regularitás kezeléséhez Cayley-gráfokat fogunk tekinteni.

4.1.1. Definíció. *Legyen adott egy G csoport, és az elemeinek egy S részhalmaza, ami szimmetrikus (azaz $s \in S$ esetén $s^{-1} \in S$) és nem tartalmazza az egységelemet. Ekkor a G-hez és S-hez tartozó Cayley-gráf a következő: a csúcsai G elemeinek felelnek meg, és egy (g, h) élt pontosan akkor húzunk be, ha $gh^{-1} \in S$.*

Világos, hogy az így kapott gráfok mind $|S|$-regulárisak lesznek.
Legyenek p és q prímszámok, amik kongruensek 1-gyel modulo 4 és nem egyenlőek. Minden ilyen párhoz hozzá fogunk rendelni egy $G^{p,q}$ gráfot, ami egy Cayley-gráf lesz. Ha $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$, azaz p kvadratikus maradék modulo q, akkor a $PSL(2, \mathbb{F}_q)$ csoportot fogjuk tekinteni és ekkkor Ramanujan-gráfot kapunk, ha pedig $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$, akkor a $PGL(2, \mathbb{F}_q)$ csoporton

dolgozunk és páros Ramanujan-gráfot konstruálunk. (Itt $\mathbb{F}_q$ a q elemű testet jelöli.) Az S halmaz megadásához először hívjuk elő számelméletből Jacobi négy-négyzetszám tételét! Ehhez jelölje n pozitív egész szám esetén $r_4(n)$ azt, hogy hányféleképpen tudjuk előállítani n-et négy négyzetszám összegeként (a sorrend és előjel is számít).

4.1.2. Tétel.

$$r_4(n) = 8\sum_{\substack{d|n \\ 4\nmid d}} d$$

Speciálisan, p prímszám esetén

$$r_4(p) = 8(p+1).$$

Minket p-nek csak azon $p = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ előállításai érdekelnek, ahol $a_0 > 0$ páratlan, és a többi a_i páros. A fentiek fényében világos, hogy ilyenből esetünkben $p+1$ darab van: ugyanis minden előállításban 1 db páratlan és 3 db páros számnak kell lennie, mert most $p \equiv 1 \pmod 4$, és páratlan szám négyzete 1-et, párosé 0-t ad maradékul 4-gyel osztva. Ezért ha előrevesszük a páratlant, akkor az negyedére csökkenti a megoldások számát, és ha az előjelet is rögzítjük annak, az még felére csökkenti, és így jön ki a $p+1$. Térjünk rá a Cayley-gráf konstrukciójára ezek alapján! Legyen i olyan pozitív egész, amire $i^2 \equiv -1 \pmod q$. Ilyen létezik, mert $q \equiv 1 \pmod 4$ és ezért $\left(\frac{-1}{q}\right) = 1$. Tekintsük a $p+1$ darab fent említett $\alpha = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ megoldását az $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = p$ egyenletnek, és vegyük mindegyikhez a következő mátrixot $PGL(2, \mathbb{F}_q)$-ban:

$$\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} a_0 + ia_1 & a_2 + ia_3 \\ -a_2 + ia_3 & a_0 - ia_1 \end{pmatrix}.$$

Különböző α-khoz különböző $\tilde{\alpha}$-ok tartoznak $PGL(2, \mathbb{Z})$-ben tekintve, ugyanis ha kettő mátrix csak egy skalármátrix-szorzóban térne el egymástól, egy gyors számolás mutatja, hogy ez mind a 4 együttható egyenlőségét vonná maga után. $PGL(2, \mathbb{F}_q)$ ugye modulo q nézzük a mátrix elemeit, és itt előfordulhat, hogy összeesik néhány elem, de mi adott p-re szeretnénk majd úgyis végtelen sok Ramanujan-gráfot konstruálni, így a nagy q-k lesznek érdekesek, ahol viszont már nincs ilyen probléma, úgyhogy ettől most eltekintünk.
Egy mátrixszorzás elvégzése után láthatjuk, hogy ha $\alpha' = (a_0, -a_1, -a_2, -a_3)$, akkor $\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}' = pI$, ami az egységelem $PGL(2, \mathbb{F}_q)$-ban. Továbbá ha valamelyik $\tilde{\alpha}$ az egységelem lenne, akkor könnyen látható, hogy a_0 kivételével mindegyik együtthatónak 0-nak kell lennie, de ekkor $a_0^2 = p$, ami nem lehet. Így tehát az $\tilde{\alpha}$-ok szimmetrikus halmazt alkotnak,

nincs köztük egységelem, ezért tekinthetjük a hozzájuk tartozó Cayley-gráfot $PGL(2, \mathbb{F}_q)$-ben, ha $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$ és $PSL(2, \mathbb{F}_q)$-ben, ha $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$, hiszen ekkor mindegyik elem benne van még ebben a csoportban is, mert a determinánsuk p és az négyzetszám mod q; ezeket a gráfokat a továbbiakban jelölje $G^{p,q}$.

4.2. Számelmélet, kvaterniók

Ebben az alfejezetben megpróbáljuk az előbb adott konstrukciót még inkább számelméleti szempontból értelmezni. Ehhez jelölje

$$\mathbb{H}(\mathbb{Z}) = \{\alpha = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}\},$$

ahol $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$ a szokásos kvaterniók. Jelölje továbbá a konjugálást $\overline{\alpha} = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$ és a normát $N(\alpha) = \alpha\overline{\alpha} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. Ismert, hogy a $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ gyűrű egységei $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$. Továbbra is legyen $p \equiv 1 \pmod 4$ prímszám, és nézzük azon $\alpha \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})$ kvaterniókat, amikre $N(\alpha) = p$. Ebből $8(p+1)$ darab van, és mindegyiknek pontosan egy olyan $\epsilon\alpha$ asszociáltja van, amire $\epsilon\alpha \equiv 1 \pmod 2$ és valós része pozitív. (Ez ugyanaz, mint ahogy az előző alfejezetben kaptuk a $p+1$ előállítást: a 4 együttható közül pontosan egy páratlan van, a többi páros, így $1, i, j, k$ közül a megfelelővel kell szorozni hogy a páratlan előre kerüljön (hiszen ezek alapján pontosan azon kvaterniók kongruensek 1-gyel mod 2, amiknek valós része páratlan), majd előjelet úgy választani hogy az pozitív legyen.) Legyen tehát S ugyanúgy, mint korábban azon α elemek halmaza, amikre $N(\alpha) = p$, $\alpha \equiv 1 \pmod 2$ és $a_0 > 0$. Világos, hogy ebben a halmazban az elemek konjugált-párokban fordulnak elő, jelölje őket $\{\alpha_1, \overline{\alpha}_1, ..., \alpha_s, \overline{\alpha}_s\}$, ahol $s = \frac{p+1}{2}$. Végül tekintsük az S-beli m hosszú redukált szavakat: ezek olyan m hosszú, α_i és $\overline{\alpha}_i$-kből képzett m hosszú szavak, amiknek egy elem és konjugáltja nem fordul elő egymás mellett. Mindezek segítségével le tudjuk írni a p^k normájú kvaterniókat is:

4.2.1. Lemma. *Minden $\alpha \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})$, $N(\alpha) = p^k$ egyértelműen felírható*

$$\alpha = \epsilon p^r R_m(\alpha_1, \overline{\alpha}_1, ..., \alpha_s, \overline{\alpha}_s)$$

alakban, ahol ϵ egység, $2r + m = k$ és R_m m hosszú redukált szó az α_i-kből és konjugáltjaikból.

Bizonyítás. A létezéshez csupán arra a számelméleti tényre van szükségünk, hogy a páratlan normájú kvaterniók között az irreducibilisek éppen a prím normájúak. Ezért,

ha $N(\alpha) = p^k$, akkor felírhatjuk p normájú elemek szorzataként, még hozzá k darabot felhasználva a norma multiplikativitása miatt, és esetlegesen egységeket kiemelve feltehetjük, hogy ez a felírás $\alpha = \epsilon s_1 ... s_k$ alakú, ahol $s_i \in S$ és ϵ egység. Majd, az egymás mellett szereplő konjugáltpárokat összevonva ez a felírás valóban $\alpha = \epsilon p^r R_m$ alakú lesz, és $2r + m = k$ teljesülni fog a normák egyenlősége miatt.
Az egyértelműséget egy egyszerű leszámlálással igazolhatjuk: az összes m hosszú redukált $R_m(\alpha_1, \overline{\alpha}_1, ..., \alpha_s, \overline{\alpha}_s)$ szavak száma ugyanis $(p+1)p^{m-1}$, ha $m \geq 1$ (ugyanis az első helyre $p+1$ lehetőség van, utána mindenhol p lehetőség mert az előző konjugáltját nem választhatjuk), és 1 hogyha $m = 0$. Így ha $\delta(k)$ 1-et vesz fel páros k-ra és 0-t páratlanra, akkor a lehetséges $\epsilon p^r R_m(\alpha_1, \overline{\alpha}_1, ..., \alpha_s, \overline{\alpha}_s)$ kifejezések száma, ahol $2r + m = k$:

$$8\left(\sum_{0 \leq r < \frac{k}{2}} (p+1)\, p^{k-2r-1} + \delta(k)\right) = 8\left((p+1)\, \frac{p^{k+1} - 1 - \delta(k)\,(p-1)}{p^2 - 1} + \delta(k)\right) =$$

$$= 8\left(\frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}\right) = 8 \sum_{d | p^k} d$$

a mértani sorozat összegképlete alapján, és ez pontosan azon α-k száma, amikre $N(\alpha) = p^k$ a négy-négyzetszámtétel alapján, ezért mindegyik ilyen α-hoz egy egyértelmű felbontásnak kell tartoznia. □

4.2.2. Következmény. *Ha* $\alpha \equiv 1 \pmod 2$ *és* $N(\alpha) = p^k$*, akkor*

$$\alpha = \pm p^r R_m(\alpha_1, \overline{\alpha}_1, ..., \alpha_s, \overline{\alpha}_s),$$

ahol $2r + m = k$ *és ez a felírás egyértelmű.*

Legyen $\Delta'(2)$ azon $\alpha \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})$ elemek halmaza, amikre $\alpha \equiv 1 \pmod 2$ és $N(\alpha) = p^v$ valamely $v \in \mathbb{Z}$-re, a norma multiplikativitása miatt ez zárt lesz a szorzásra. Tekintsük $\Delta'(2)$ két elemét, α és β-t ekvivalensnek, ha $\pm p^{v_1}\alpha = p^{v_2}\beta$ valamilyen $v_1, v_2 \in \mathbb{Z}$-re (vagyis ha csak előjelben vagy p-s szorzókban térnek el egymástól). Erről azonnal látszik, hogy ekvivalenciareláció, és az is nagyon könnyen ellenőrizhető, hogy az ekvivalenciaosztályokra fennáll $[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$ és $[\alpha\overline{\alpha}] = [1]$, vagyis az ekvivalenciaosztályok csoportot alkotnak. Mi több, az előző következmény azt mutatja, hogy ez nem más, mint az $[\alpha_1], ..., [\alpha_s]$ által generált szabad csoport, jelölje ezt $\Delta(2)$. Ennek a csoportnak a generátorokra (amik nem mások, mint az S halmaz ekvivalenciaosztályai) tekintett Cayley-gráfja $(p+1)$-reguláris, és ismert, hogy ez nem más, mint a $(p+1)$-reguláris végtelen fa, ezt szintén $\Delta(2)$-vel fogjuk jelölni. Úgy fogunk kapcsolatot teremteni ezen gráf és a korábban a lineáris csoportokból készített gráfok között, hogy $\Delta(2)$-nek keresünk egy alkalmas véges indexű normálosztóját, és tekintjük a faktorban a generátorok mellékosztályai által meghatározott Cayley-gráfot. Legyen $q \equiv 1 \pmod 4$ egy p-től különböző prímszám, mint eddig, és így relatív prímek is. Legyen $\mathbb{H}(\mathbb{Z}/2q\mathbb{Z})$ azon kvaterniók gyűrűje, ahol az együtthatók $\mathbb{Z}/2q\mathbb{Z}$-ből valók, és $\mathbb{H}(\mathbb{Z}/2q\mathbb{Z})^{\times}$ az invertálható elemek csoportja, és jelölje Z ennek a centrumát, ami éppen a nemnulla valós elemekből áll. Tekintsük a

$$\pi : \Delta(2) \to \mathbb{H}(\mathbb{Z}/2q\mathbb{Z})^{\times}/Z,\ [\alpha] \mapsto (\alpha \mod 2q)\, Z$$

leképezést. Ez egyrészt jóldefiniált, hiszen $(p,q)=1$, így ha vesszük egy $\Delta(2)$-beli elem két reprezentánsát, azok csak egy $2q$-hoz relatív prím szorzóban térnek el, így mod $2q$ a centralizátorral lefaktorizálva ugyanoda mennek. Az világos ezek után, hogy ez a leképezés csoporthomomorfizmus, és a magja azon $[\alpha] \in \Delta(2)$ elemek részcsoportja, amikor $\alpha = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ és $2m \mid a_1$, $2m \mid a_2$ valamint $2m \mid a_3$, jelölje ezt a részcsoportot $\Delta(2q)$, ami így normálosztó $\Delta(2)$-ben, hiszen egy alkalmas homomorfizmus magja.
Most már meg tudjuk teremteni a kapcsolatot a $G^{p,q}$ gráfokkal: belátjuk, hogy $G^{p,q}$ igazából a $\Delta(2)/\Delta(2q)$ faktorcsoport $[\alpha_1]\Delta(2q), [\overline{\alpha_1}]\Delta(2q)...., [\alpha_s]\Delta(2q), [\overline{\alpha_s}]\Delta(2q)$ elemeire vett Cayley-gráfja. (Itt ugyanaz a probléma felmerül, mint $G^{p,q}$-nál, hogy néhány elem összeeshet modulo q kis q-ra, de minket úgyis a nagy q-k érdekelnek majd, ezért úgy tekintjük, hogy ezek különbözőek.)
Tekintsük a következő $\phi : \Delta(2) \to PGL\,(2, \mathbb{F}_q)$ homomorfizmust:

$$[\alpha] \mapsto \alpha \mod q \mapsto \begin{pmatrix} a_0 + ia_1 & a_2 + ia_3 \\ -a_2 + ia_3 & a_0 - ia_1 \end{pmatrix}.$$

Itt $i^2 \equiv -1 \pmod q$ ugyanúgy, mint korábban. Az eddigiekből azonnal látszik, hogy ϕ jóldefiniált és homomorfizmus.

4.2.3. Állítás.

$$\operatorname{Im}\phi = \begin{cases} PGL\,(2,\mathbb{F}_q) & ha \left(\frac{p}{q}\right) = 1. \\ PSL\,(2,\mathbb{F}_q) & ha \left(\frac{p}{q}\right) = -1. \end{cases}$$

Bizonyítás. Világos, hogy ha $\alpha \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})$ egy p normájú elem (azaz generátor), akkor az ekvivalenciaosztályának képe pontosan akkor van $PSL\,(2,\mathbb{F}_q)$-ban, ha $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$. Ezért és mert $[PGL\,(2,\mathbb{F}_q) : PSL\,(2,\mathbb{F}_q)] = 2$ a részcsoport indexe, elegendő azt belátnunk, hogy $PSL\,(2,\mathbb{F}_q) \subseteq \phi\,(\Delta\,(2))$, hiszen ez a második részt maga után vonja mert ha p

kvadratikus nemmaradék, akkor minden generátor $PSL\left(2,\mathbb{F}_q\right)$-be megy így minden elem is, és ha kvadratikus maradék, akkor a generátorok nem oda mennek, így beszorozva valamelyikkel megkapjuk a másik mellékosztályt is.
Vezessük át a ϕ leképezést a $\mathbb{H}(\mathbb{Z}/2q\mathbb{Z})$-n, amit az előbb vizsgáltunk, mikor beláttuk, hogy $\Delta(2q)$ normálosztó $\Delta(2)$-ben. Nézzük a következő leképezésláncot:

$$\Delta(2) \to \mathbb{H}(\mathbb{Z}/2q\mathbb{Z})^{\times}/Z \to \mathbb{H}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{\times}/Z \to PGL\left(2,\mathbb{F}_q\right).$$

Az utolsó leképzés egy izomorfizmus, így azt kéne látnunk, hogy az első két leképezés kompozíciójának képterében minden 1 normájú $\mathbb{H}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{\times}/Z$-beli elem benne van (ott már csak 1 és -1 lehet a norma attól függően, hogy mod q négyzetszám volt-e az őskép normája). Ehhez elegendő azt belátnunk, hogy ha $\beta = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_2 k \in \mathbb{H}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$, és a normája 1 (mod q), akkor létezik olyan $\alpha \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})$ kvaternió, amire $N(\alpha) = p^k$ valamilyen k-ra, valós része páratlan és $\alpha \equiv \beta \pmod q$, vagyis minden együtthatójuk azonos q (azaz α benne van $\Delta'(2)$-ben és $\mathbb{H}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$-ben megegyezik β-val). Ilyen β létezését Mališev egyik tétele biztosítja a [12] cikkből. $\square$

Tehát azt láthatjuk innen, hogy $G^{p,q}$ megegyezik a $\Delta(2)/\Delta(2q)$-n képzett Cayley-gráffal (hiszen a ϕ leképezés magja $\Delta(2q)$, így ezzel a kifaktorizálva, a homomorfizmus-tétel alapján $\Delta(2)/\Delta(2q)$ és $PGL\left(2,\mathbb{F}_q\right)$ vagy $PSL\left(2,\mathbb{F}_q\right)$ izomorfak), innen már több tulajdonság is leolvasható: minden $G^{p,q}$ gráf összefüggő, hiszen egy élet tekinthetünk egy generátorral való szorzásnak, és minden csúcsból, azaz elemből el lehet jutni bármely másik elembe generátorokkal és inverzekkel való szorzásokkal. $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$ esetén a gráf páros, hiszen a két színosztály a $+1$, illetve -1 determinánssal rendelkezők, és mivel a generátorok -1 determinánsú mátrixokba mennek, ezért nem lehet két azonos determinánsú mátrixhoz tartozó csúcs összekötve. Másrészt ha $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$, akkor nem lehet páros $G^{p,q}$, hiszen ha fel lehet osztani két színosztályra, A-ra és B-re, akkor világos, hogy minden α generátorra $\alpha A = B$ és $\alpha B = A$. Tegyük fel, hogy az egységelem A-ban van, ekkor nyilvánvaló, hogy az A-hoz tartozó elemek részcsoportot alkotnak, konkrétan azt a részcsoportot, amiben páros számú generátorelem szorzatai vannak. De ekkor A 2 indexű részcsoport, azaz normálosztó $PSL\left(2,\mathbb{F}_q\right)$-ban, ami egy egyszerű csoport, ellentmondás.

4.3. A spektrum vizsgálata

Most belátjuk, hogy a $G^{p,q}$ gráfok valóban Ramanujan-gráfok, ehhez a spektrumukat kell tanulmányoznunk. Mint hamarosan kiderül, a konstrukció révén a spektrum szoros kapcsolatot ápol a következő kvadratikus alakkal:

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + (2q)^2 x_2^2 + (2q)^2 x_3^2 + (2q)^2 x_4^2.$$

Jelölje ugyanis $r_Q(p^k)$ azon egész (x_1, x_2, x_3, x_4) számnégyesek számát, amikre teljesül $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = p^k$. A négy-négyzetszám tétel révén $k = 1$-re láttunk erre egy egzakt formulát, de általánosságban elmondható, hogy nem várhatunk ilyet, de a bizonyításhoz használni fogjuk egy közelítését, ami Ramanujan egyik sejtéséből következik, innen kapták a szóban forgó gráfok a nevüket.
Szükségünk lesz a másodfajú Csebisev-polinomokra, amiket a következőféleképpen definiálunk: $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$ és $t \geq 2$-re

$$U_t(x) = 2xU_{t-1}(x) - U_{t-2}(x).$$

Tegyük fel, hogy $G^{p,q}$-nak n csúcsa van. A spektrum és a kvadratikus alak kapcsolatát a következő állítás biztosítja:

4.3.1. Állítás.

$$r_Q\left(p^k\right) = \frac{2p^{\frac{k}{2}}}{n} \sum_{i=1}^{n} U_k\left(\frac{\lambda_i}{2\sqrt{p}}\right)$$

Bizonyítás. Először értsük meg, hogy mi köze van egymáshoz $r_Q(p^k)$-nak és a $G^{p,q}$ gráfnak! Az előző részben azt láttuk, hogy $G^{p,q}$ előáll, mint a $\Delta(2)/\Delta(2q)$ faktorcsoport generátorokra vett Cayley-gráfja. Nyilvánvaló, hogy egy-az-egyhez megfeleltetés van azon (x_1, x_2, x_3, x_4) számnégyesek között, amikre $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = p^k$ és azon $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$-beli kvaterniók között, amiknek a valós együttható kivételével minden együtthatója osztható $2q$-val és aminek normája p^k. Vegyük észre, hogy ezen elemek mindegyikének az ekvivalenciaosztálya $\Delta(2q)$-ban van, azaz a $G^{p,q}$ gráfban ezek mind az egységelemhez tartozó csúcshoz tartoznak. Értelmezzük ennek kontextusában, hogy mit is jelent az, hogy a gráf a generátorok által meghatározott Cayley-gráf! A 4.2.2 következmény szerint minden p^k normájú, páratlan valós részű kvaternió egyértelműen írható fel $\pm p^r R_m$ alakban,ahol $2r + m = k$ és R_m a generátorokból és konjugáltjaikból képzett redukált szó. Ha ezt a felírást a gráfon szeretnénk realizálni, akkor induljunk ki az egységelemhez tartozó csúcsból (ez ugye a kvaternióknál is az egység ekvivalenciaosztálya), majd azt használva, hogy a gráf élei tulajdonképpen egy-egy generátorelemmel vagy annak konjugáltjával való szorzást fejeznek ki a Cayley-gráf definíciója szerint (valójában inverzet kell venni mindig, mert $gh^{-1} = s$-ből $h = gs^{-1}$ következik, tehát van egy csere a generátorok és inverzeik között ahogy végigkövetjük a felírást mikor áttérünk a gráfra, de ez nem számít), a redukált m hosszú szó betűihez tartozó éleken végiglépkedve, az eredmény ekvivalenciaosztályához jutunk (hiszen az előjelet és a p^r tényezőt már korábban lefaktorizáltuk). Vegyük még eszre, hogy ez a séta visszalépés nélküli (non-backtracking), azaz nem léphetünk egy élen egyből vissza, mert az éppen egy generátor-inverz egymás melletti párost jelentene. Így a fentiek alapján pontosan akkor lesz egy így felírt p^k normájú elem $Q = p^k$-hoz tartozó megoldás (azaz konstans együtthatója kivételével mindegyik osztható $2q$-val), ha a hozzá tartozó redukált szó a gráfon egy, az egységelemből kiinduló zárt sétát határoz meg, ami visszalépés nélküli.

A 4.2.2 következményben a felírás egyértelműsége és az előbbiek alapján tehát megfeleltetés van a $Q = p^k$ megoldásai és a $G^{p,q}$ gráfban az egységelemből induló visszalépés nélküli, $k - 2r$ hosszú séták között, ahol r fut 0-tól $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$-ig, és mindegyik sétához pontosan két megoldás tartozik, mert az előjelet még megválaszthatjuk (a p-hatványos szorzót meghatározza a séta hossza). Hogyan tudnánk leszámolni a gráfban az adott hosszúságú visszalépés nélküli séták számát? Legyen $A_0 = I$, $A_1 = A = A(G^{p,q})$ az adjacenciamátrix és $t \geq 2$-re

$$A_t = A_{t-1}A - pA_{t-2}.$$

Ekkor teljes indukcióval könnyen látható, hogy $(A_t)_{u,v}$ az u-ból v-be menő t hosszú visszalépés nélküli séták száma, ugyanis $t = 0, 1$-re igaz, és a rekurziónál az első tagban tekintünk minden (w, v) v-be menő élre az összes u-ból w-be menő $t - 1$ hosszú visszalépés nélküli sétát, és ezeket összefűzzük, de ekkor ebből le kell vonni azokat, amiknél a végén pont csináltunk egy visszalépést, de ez éppen akkor van ha az u-ból w-be menő sétában w előtt v-re léptünk, de akkor ez egy $t - 2$ hosszú u-ból v-be menő visszalépés nélküli séta, és ezt éppen összesen p-szer kell levonnunk mindig, mert a $t - 2$ végénél levő szomszédja kivételével v minden szomszédjánál megtörténhet ez, és a gráf $(p + 1)$-reguláris, tehát így a rekurzió képlete pont jó az indukcióra.

Tehát most az A_t mátrixok főátlóiban az egységelemhez tartozó elemeket kellene meghatároznunk. De figyeljük meg, hogy a Cayley-gráfunknak van egy olyan szimmetriája, hogy bármely két csúcsára ugyanannyi belőlük kiinduló t hosszú zárt visszalépés nélküli séta van, hiszen az élek csoportelméleti értelmezésében végig tudjuk követni őket bármely csúcsból kiindulva, és így egy-egyértelmű megfeleltetést kapunk a visszalépés nélküli t hosszú zárt séták között (ugyanis ezen tulajdonságok is megőrzödnek a végigkövetés során: t hosszú, ha t darab csoportelemet szorzunk össze, visszalépés nélküli ha nincs elem és inverze egymás mellett, és zárt ha az egész szorzat az egység). Ezért az egységelemből kiinduló ilyen séták száma éppen a nyom n-ed része, azaz azt láttuk, hogy

$$r_Q(p^k) = 2\sum_{r=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{\mathrm{Tr}\,(A_{k-2r})}{n} = \frac{2}{n}\sum_{r=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \mathrm{Tr}\,(A_{k-2r})\,.$$

A nyomok kiszámításához azt vetjük be, hogy az A_t-re adott rekurzió szoros kapcsolatban áll a másodfajú Csebisev-polinomokkal: egyszerű számolás mutatja, hogy $t \geq 2$ esetén

$$A_t = p^{\frac{t}{2}} U_t\left(\frac{A}{2\sqrt{p}}\right) - p^{\frac{t}{2}-1} U_{t-2}\left(\frac{A}{2\sqrt{p}}\right).$$

Ugyanis kis t-re ellenőrizhető, utána pedig a rekurzió mutatja:

$$p^{\frac{t}{2}} U_t\left(\frac{A}{2\sqrt{p}}\right) - p^{\frac{t}{2}-1} U_{t-2}\left(\frac{A}{2\sqrt{p}}\right) =$$
$$= p^{\frac{t-1}{2}} U_{t-1}\left(\frac{A}{2\sqrt{p}}\right) A - p^{\frac{t}{2}} U_{t-2}\left(\frac{A}{2\sqrt{p}}\right) - p^{\frac{t-1}{2}-1} U_{t-3}\left(\frac{A}{2\sqrt{p}}\right) A + p^{\frac{t}{2}-1} U_{t-4}\left(\frac{A}{2\sqrt{p}}\right) =$$
$$= p^{\frac{t-1}{2}} U_{t-1}\left(\frac{A}{2\sqrt{p}}\right) A - p^{\frac{t-1}{2}-1} U_{t-3}\left(\frac{A}{2\sqrt{p}}\right) A - p^{\frac{t}{2}} U_{t-2}\left(\frac{A}{2\sqrt{p}}\right) + p^{\frac{t}{2}-1} U_{t-4}\left(\frac{A}{2\sqrt{p}}\right) =$$
$$= A_{t-1}A - pA_{t-2} = A_t.$$

Ezt a formulát a nyomokra is alkalmazhatjuk, azt használva hogy a nyom a sajátértékek összege, valamint egy gráf polinomjának a sajátértékei a sajátértékek polinomjai:

$$\mathrm{Tr}\,(A_t) = p^{\frac{t}{2}} \sum_{i=1}^{n} U_t\left(\frac{\lambda_i}{2\sqrt{p}}\right) - p^{\frac{t}{2}-1} \sum_{i=1}^{n} U_{t-2}\left(\frac{\lambda_i}{2\sqrt{p}}\right).$$

Írjuk be ezt az előbb az $r_Q(p^k)$-ra kapott képletbe és használjuk ki, hogy egy teleszkopikus összeg keletkezik, aminek az utolsó tagja is ki fog esni mindig az összegzésben, mert attól függően hogy 0-ra vagy 1-re végződik az összegzés, még az az identitás vagy A nyomát is hozzá kell adni, de az utoljára kivont tag is mindig ezekkel lesz egyenlő: $p^{\frac{2}{2}-1} \sum U_0\left(\frac{\lambda_i}{2\sqrt{p}}\right) = \sum 1 = n$ és $p^{\frac{3}{2}-1} \sum U_1\left(\frac{\lambda_i}{2\sqrt{p}}\right) = \sum \lambda_i = 0$. Tehát teleszkopikus összegzés után csak a legelső Csebiseves tagok maradnak meg:

$$r_Q(p^k) = \frac{2}{n}\sum_{r=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \mathrm{Tr}\,(A_{k-2r}) = \frac{2p^{\frac{k}{2}}}{n} \sum_{i=1}^{n} U_k\left(\frac{\lambda_i}{2\sqrt{p}}\right),$$

és éppen ezt akartuk belátni. □

A Ramanujan-sejtés segítségével (Ramanujan, [9]) közelítést nyerhetünk $r_Q(p^k)$-ra, és azokat az eseteket, amiket mi használunk, Eichler [10] és Igusa [11] látták be. A következő állítást bizonyítás nélkül közöljük.

4.3.2. Állítás. *Minden $\epsilon > 0$ valós számra*

$$r_Q\left(p^k\right) = C\left(p^k\right) + \mathcal{O}_\epsilon\left(p^{k\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)}\right)$$

ahogy $k \to \infty$. Továbbá, $C(n)$ a következő alakú:

$$C(n) = \sum_{d|n} dF(d),$$

ahol $F : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ periodikus függvény $4q^2$ periódussal.

4.3.3. Lemma. *Legyen $G : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ periodikus függvény, amire $k \to \infty$ esetén*

$$\sum_{d|p^k} dG(d) = o\left(p^k\right).$$

Ekkor minden k-ra

$$\sum_{d|p^k} dG(d) = 0.$$

Bizonyítás. Legyen

$$\alpha_k = \sum_{d|p^k} dG(d).$$

Ekkor

$$G\left(p^k\right) = \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{p^k}.$$

A feltétel miatt $\alpha_k - \alpha_{k-1} = o\left(p^k\right)$, ezért a jobboldal tart 0-hoz, ahogy k tart végtelenhez, de így a baloldal is. De mivel G periodikus, ez csak úgy lehetséges, ha $G\left(p^k\right) = 0$ minden k-ra. □

Ezt a lemmát a következő kontextusban fogjuk alkalmazni: ha találunk olyan G periodikus függvényt, aminek a $4q^2$ periódusa és

$$C\left(p^k\right) = \sum_{d|p^k} dF(d) = \sum_{d|p^k} dG(d) + o\left(p^k\right),$$

akkor innen $C\left(p^k\right) = \sum_{d|p^k} dG(d)$ következik, hiszen a lemmát alkalmazhatjuk az $F - G$ periodikus függvényre.
Rátérünk a fő eredmény bizonyítására.

4.3.4. Tétel. *Ha* $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$*, akkor* $G^{p,q}$ *Ramanujan-gráf, ha pedig* $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$*, akkor* $G^{p,q}$ *páros Ramanujan-gráf.*

Bizonyítás. Nézzük először azt az esetet, amikor $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$. Ekkor már láttuk, hogy $G^{p,q}$ nem páros gráf és összefüggő, azaz $i \neq 1$ esetén $|\lambda_i| < p+1$. Az $r_Q(p^k)$-ra kapott eredményeinket kombinálva tudjuk, hogy

$$\frac{2p^{\frac{k}{2}}}{n} \sum_{i=1}^{n} U_k \left(\frac{\lambda_i}{2\sqrt{p}}\right) = C\left(p^k\right) + \mathcal{O}_\epsilon \left(p^{k\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)}\right).$$

Mi a nagyságrendje itt a baloldali tagoknak? Először nézzük a legnagyobbat, a főtagot, a $\lambda_1 = p+1$-hez tartozót. Teljes indukcióval k-ra belátjuk, hogy

$$p^{\frac{k}{2}} U_k \left(\frac{p+1}{2\sqrt{p}}\right) = \frac{p^{k+1}-1}{p-1}.$$

Ez $k = 1, 2$-re igaz, utána pedig a Csebisev-polinomok rekurzióját használva:

$$\begin{aligned} p^{\frac{k}{2}} U_k \left(\frac{p+1}{2\sqrt{p}}\right) &= 2p^{\frac{k}{2}} \frac{p+1}{2\sqrt{p}} U_{k-1} \left(\frac{p+1}{2\sqrt{p}}\right) - p^{\frac{k}{2}} U_{k-2} \left(\frac{p+1}{2\sqrt{p}}\right) = \\ &= 2\sqrt{p} \frac{p+1}{2\sqrt{p}} p^{\frac{k-1}{2}} U_{k-1} \left(\frac{p+1}{2\sqrt{p}}\right) - pp^{\frac{k-2}{2}} U_{k-2} \left(\frac{p+1}{2\sqrt{p}}\right) = \\ &= (p+1) \frac{p^k-1}{p-1} - p\frac{p^{k-1}-1}{p-1} = \frac{p^{k+1}-1}{p-1}, \end{aligned}$$

és így be is láttuk a formulát. Mi történik a többi λ_i-nél, ahol $|\lambda_i| < p+1$? Mivel nagyságrendeket vizsgálunk, és $|U_k(x)| = |U_k(-x)|$ minden k-a és x-re, hiszen a Csebisev-polinomok felváltva párosak és páratlanok, ezért elegendő pozitív λ_i-kre szorítkoznunk. Vegyük észre, hogy az előbbi azonosság levezetésénél p-ről csak azt használtuk, hogy egy pozitív valós konstans, így igazából tetszőleges valós $c > 0$-ra igaz az (a levezetés ugyanaz), hogy

$$(cp)^{\frac{k}{2}} U_k \left(\frac{cp+1}{2\sqrt{cp}}\right) = \frac{(cp)^{k+1}-1}{cp-1}.$$

Márészt ha $2\sqrt{p} < \lambda_i < p+1$, akkor létezik olyan $c < 1$ pozitív szorzó, amire $\frac{cp+1}{2\sqrt{cp}} = \frac{\lambda_i}{2\sqrt{p}}$, mert $c = \frac{1}{p}$ esetén lesz a a $c \mapsto \frac{cp+1}{2\sqrt{cp}}$ függvény értéke 1, és utána szigorúan monoton növő és folytonos. Így tehát

$$p^{\frac{k}{2}} U_k \left(\frac{\lambda_i}{2\sqrt{p}}\right) = \frac{(cp)^{k+1}-1}{cp-1} \frac{1}{c^{\frac{k}{2}}} = o\left(p^k\right),$$

hiszen a p^k tényező mellett konstansoktól eltekintve egy $c^{\frac{k}{2}}$ tényező marad, ahol $c < 1$, és ez tartani fog a 0-hoz. Ha pedig $\lambda_i < 2\sqrt{p}$, akkor úgyis a Csebisev-polinom argumentumában 1-nél kisebb abszolútértékű szám lesz, és így a függvényértéket 1 felülről becsüli, ami szintén $o\left(p^k\right)$. Azt kaptuk tehát a baloldal nagyságrendjére, hogy

$$\frac{2p^{\frac{k}{2}}}{n}\sum_{i=1}^{n} U_k\left(\frac{\lambda_i}{2\sqrt{p}}\right) = \frac{2\left(p^{k+1}-1\right)}{n\left(p-1\right)} + o\left(p^k\right).$$

Mivel a jobboldalon is nyilván $\mathcal{O}_\epsilon\left(p^{k\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)}\right) = o\left(p^k\right)$, ezért azt látjuk, hogy

$$C\left(p^k\right) = \frac{2\left(p^{k+1}-1\right)}{n\left(p-1\right)} + o\left(p^k\right) = \frac{2}{n}\sum_{d|p^k} d + o\left(p^k\right).$$

A 4.3.3 lemmát, valamint az utána levő megjegyzésünket használva az azonosan 1 periodikus függvényre, innen az adódik, hogy

$$C\left(p^k\right) = \frac{2}{n}\sum_{d|p^k} d = \frac{2\left(p^{k+1}-1\right)}{n\left(p-1\right)}.$$

Ezt visszaírva a fő egyenletünkbe és a főtagokat kivonva:

$$\frac{2p^{\frac{k}{2}}}{n}\sum_{i=2}^{n} U_k\left(\frac{\lambda_i}{2\sqrt{p}}\right) = \mathcal{O}_\epsilon\left(p^{k\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)}\right),$$

azaz mindegyik λ_i-re és minden $\epsilon > 0$-ra

$$U_k\left(\frac{\lambda_i}{2\sqrt{p}}\right) = \mathcal{O}_\epsilon\left(p^{k\epsilon}\right).$$

Ebből viszont következik, hogy $\lambda_i \leq 2\sqrt{p}$, ugyanis ha nagyobb lenne, akkor az előbb láttuk, hogy lenne $\frac{\lambda_i}{2\sqrt{p}} = \frac{cp+1}{2\sqrt{cp}}$ felírás, ahol $\frac{1}{p} < c$ és ezzel

$$U_k\left(\frac{\lambda_i}{2\sqrt{p}}\right) = U_k\left(\frac{cp+1}{2\sqrt{cp}}\right) = \frac{(cp)^{k+1}-1}{cp-1}\frac{1}{(pc)^{\frac{k}{2}}} = \Omega\left((pc)^{\frac{k}{2}}\right),$$

ahol pc egy egynél nagyobb szám, és így elég kicsi ϵ esetén ellentmondásra jutottunk. Ezzel beláttuk, hogy $i \neq 0$ esetén $\lambda_i \leq 2\sqrt{p}$, vagyis $G^{p,q}$ valóban Ramanujan.
Térjünk rá a $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$ esetre, ez nagyon hasonló lesz az előzőhöz. Láttuk, hogy ebben az esetben $G^{p,q}$ páros és összefüggő, ezért $\lambda_1 = p+1$, $\lambda_n = -p-1$ és minden más i-re $|\lambda_i| \leq p+1$. Mivel a spektrum szimmetrikus, így páratlan k-ra a Csebisev-polinomos

összeg 0, hiszen a Csebisev-polinomok páratlanok ekkor, páros k esetén pedig ugyanazt csinálva mint az előbb, csak most két főtagot kiemelve azt kapjuk, hogy

$$\frac{2p^{\frac{k}{2}}}{n}\sum_{i=1}^{n}U_k\left(\frac{\lambda_i}{2\sqrt{p}}\right)=\frac{4\left(p^{k+1}-1\right)}{n\left(p-1\right)}+o\left(p^k\right),$$

vagyis ekkor

$$C\left(p^k\right)=\frac{4\left(p^{k+1}-1\right)}{n\left(p-1\right)}+o\left(p^k\right)=\frac{4}{n}\sum_{d|p^k}d+o\left(p^k\right).$$

Ebből ugyanúgy a 4.3.3 lemmát használva az jön ki, hogy páratlan k-ra $C\left(p^k\right)=0$ és páros k-ra $C\left(p^k\right)=\frac{4\left(p^{k+1}-1\right)}{n(p-1)}$, ugyanis vegyük észre, hogy külön-külön alkalmazhatjuk a lemmát páros és páratlan esetben (az azonosan 0, illetve azonos $\frac{4}{n}$ periodikus függvényekre), mert a lemma bizonyítása akkor is ugyanúgy átmegy, ha csak páros, vagy ha csak páratlan k-kra tudjuk a feltételt. A lényeg, hogy ezután ismét kivonhatjuk a főtagokat és megkaptuk, hogy

$$\frac{2p^{\frac{k}{2}}}{n}\sum_{i=2}^{n-1}U_k\left(\frac{\lambda_i}{2\sqrt{p}}\right)=\mathcal{O}_\epsilon\left(p^{k\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)}\right).$$

Innen $|\lambda_i|\leq 2\sqrt{p}$ ugyanúgy következik, mint az előbb, és így beláttuk, hogy $G^{p,q}$ páros Ramanujan-gráf. □

5. fejezet

Páros Ramanujan-gráfok

Ebben a fejezetben bemutatjuk A. Marcus, D. Spielman és N. Srivastava páros Ramanujan-gráfokra [5]-ben adott konstrukcióját. Ehhez egy kis előkészület is szükséges, ezért az első két szekcióban főleg technikai állításokat fogunk bizonyítani, amiket később felhasználunk a konstrukció helyességének bizonyításához.

5.1. A párosítási polinom

Először a párosítási polinomról bizonyítunk be néhány alapvető állítást, a fő célunk az lesz, hogy megmutassuk, hogy d-reguláris gráfok esetén a párosítási polinom legnagyobb gyöke legfeljebb $2\sqrt{d-1}$, ugyanis ezt fogjuk kihasználni majd a páros Ramanujan-gráfok konstrukciója során. Az itteni állítások megtalálhatóak a [6] jegyzetben.

5.1.1. Definíció. *Legyen G egy n csúcsú gráf, és jelölje $m_k(G)$ a G k élű párosításainak a számát (azaz a k élű független élhalmazok számát). Ekkor a párosítási polinomot $\mu(G,x)$-szel jelöljük és a következőképpen definiáljuk:*

$$\mu(G,x) = \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^k m_k(G) x^{n-2k}.$$

5.1.2. Állítás. *Legyen $u \in V(G)$, ekkor*

$$\mu(G,x) = x\mu(G-u,x) - \sum_{v \in N(u)} \mu(G - \{u,v\},x).$$

Bizonyítás. Az x^{n-2k} tag együtthatóját vizsgálva, azt kell belátnunk, hogy

$$m_k(G) = m_k(G-u) + \sum_{v \in N(u)} m_{k-1}(G - \{u,v\}).$$

Ez viszont egyszerűen látható, hiszen G-nek egy k élű párosítása vegy nem tartalmazza u-t, ilyenből $m_k(G-u)$ darab van, vagy pedig tartalmazza u-t, de ekkor an pontosan egy $v \in N(u)$ szomszédja u-nak a párosításban, a maradék rész pedig egy $k-1$ élű párosítása $G - \{u, v\}$-nek, amiből éppen $m_{k-1}(G - \{u, v\})$ darab van. □

5.1.3. Tétel. *Tetszőleges G gráf esetén a $\mu(G, x)$ párosítási polinom minden gyöke valós.*

Bizonyítás. Csúcsok számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk be egyszerre a következő két állítást:

1. $\mu(G, x)$ minden gyöke valós.
2. Minden $u \in V(G)$ és minden $x \in \mathbb{C}$-re, amire $\operatorname{Im}(x) > 0$, teljesül
$$\operatorname{Im} \frac{\mu(G, x)}{\mu(G-u, x)} > 0.$$

Vegyük észre, hogy a (ii) állítás kimondásánál már induktívan használjuk az (i) állítást $G-u$-ra, miszerint $\mu(G-u, x)$ nem lehet 0, ha $\operatorname{Im} x > 0$. Másrészt pedig elég a (ii) állítást belátnunk, mert abból egyből következik az (i), hiszen ha lenne G-nek nem valós gyöke, akkor mivel $\mu(G, x)$ valós együtthatós polinom, akkor lenne olyan gyöke is, amire $\operatorname{Im} x > 0$, hiszen komplex-konjugált párokban érkeznek a gyökök, de ez ellentmondana (ii)-nek. Szóval bizonyítsuk be (ii)-t.
A rekurzív formulát felhasználva:
$$\frac{\mu(G, x)}{\mu(G-u, x)} = \frac{x\mu(G-u, x) - \sum_{v \in N(u)} \mu(G - \{u, v\}, x)}{\mu(G-u, x)} = x - \sum_{v \in N(u)} \frac{\mu(G - \{u, v\}, x)}{\mu(G-u, x)}$$

Az indukcióból tudjuk, hogy
$$\operatorname{Im} \frac{\mu(G-u, x)}{\mu(G - \{u, v\}, x)} > 0$$
ha $\operatorname{Im} x > 0$, és mivel az imaginárius részen belül vett reciprok és a negatív előjel is megfordítja az egyenlőtlenséget, így emiatt
$$-\operatorname{Im} \frac{\mu(G - \{u, v\}, x)}{\mu(G-u, x)} > 0$$
és ebből már a rekurzív formula alapján következik az állítás. □

5.1.4. Állítás. *Jelölje a G gráf legnagyobb fokszámát Δ és tegyük fel, hogy ez legalább 2. Ekkor $\mu(G, x)$ összes gyöke a $\left[-2\sqrt{\Delta-1}, 2\sqrt{\Delta-1}\right]$ intervallumba esik. Speciálisan, d-reguláris gráf esetén a $\left[-2\sqrt{d-1}, 2\sqrt{d-1}\right]$ intervallumba.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy ha u egy legfeljebb $\Delta - 1$ fokú csúcsa G-nek, akkor tetszőleges $x \geq 2\sqrt{\Delta - 1}$ esetén

$$\frac{\mu(G,x)}{\mu(G-u,x)} \geq \sqrt{\Delta - 1}.$$

Ezt csúcsok számára vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk. Egy csúcsú gráf esetén ez nyilvánvalóan igaz, feltehetjük, hogy G-nek legalább 2 csúcsa van. Ekkor a rekurziós formula alapján

$$\frac{\mu(G,x)}{\mu(G-u,x)} = \frac{x\mu(G-u,x) - \sum_{v \in N(u)} \mu(G - \{u,v\}, x)}{\mu(G-u,x)} = x - \sum_{v \in N(u)} \frac{\mu(G-\{u,v\},x)}{\mu(G-u,x)} \geq$$

$$\geq x - (\Delta - 1)\frac{1}{\sqrt{\Delta - 1}} \geq \sqrt{\Delta - 1}$$

ha $x \geq 2\sqrt{\Delta - 1}$, itt azt használtuk, hogy ha $v \in N(u)$, akkor v foka a $G - u$ gráfban legfeljebb $\Delta - 1$. Ezt felhasználva, most tetszőleges u csúcsra felírva a fentieket:

$$\frac{\mu(G,x)}{\mu(G-u,x)} = \frac{x\mu(G-u,x) - \sum_{v \in N(u)} \mu(G - \{u,v\}, x)}{\mu(G-u,x)} = x - \sum_{v \in N(u)} \frac{\mu(G-\{u,v\},x)}{\mu(G-u,x)} \geq$$

$$\geq x - \Delta\frac{1}{\sqrt{\Delta - 1}} > 0$$

ha $x \geq 2\sqrt{\Delta - 1}$, ismét kihasználva, hogy $v \in N(u)$ foka a $G-u$ gráfban legfeljebb $\Delta - 1$. Ezzel megmutattuk, hogy $\mu(G,x) \neq 0$, ha $x \geq 2\sqrt{\Delta - 1}$, és mivel a párosítási polinom gyökei szimmetrikusak az origóra, hiszen a nemnulla együtthatókhoz tartozó hatványkitevői azonos paritásúak a polinomnak, így beláttuk, hogy minden gyök a $\left[-2\sqrt{d-1}, 2\sqrt{d-1}\right]$ intervallumba esik, hiszen az előbb láttuk azt is, hogy mindegyik gyök valós. □

5.2. Valós stabil polinomok

5.2.1. Definíció. *Egy többváltozós $f \in \mathbb{R}[z_1, ..., z_n]$ polinomot valós stabilnak hívunk, ha azonosan 0 vagy ha*

$$f(z_1, ..., z_n) \neq 0$$

minden olyan $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$ komplex szám n-esre, ahol mindegyik szám imaginárius része pozitív.

Tehát egy valós stabil polinom valós együtthatókkal rendelkezik, de komplex számok felett nézzük a kiértékeléseit.
A következő lemma segítségével sok valós stabil polinomot tudunk találni. A bizonyítás a [7] cikkből való.

5.2.2. Lemma. *Legyenek $A_1, ..., A_n$ pozitív szemidefinit $m \times m$-es mátrixok. Ekkor*

$$\det(z_1 A_1 + ... + z_n A_n)$$

valós stabil polinom.

Bizonyítás. A komplex függvénytanból ismert Hurwitz-tétel szerint elegendő a tételt abban az esetben belátnunk, ha az A_i mátrixok mindegyike pozitív definit. Legyen $z = (z_1, ..., z_n)$ olyan komplex vektor, melynek mindegyik koordinátájnak pozitív az imaginárius része, és legyen $z_j = a_j + ib_j$. Jelölje továbbá $H = \sum a_j A_j$ és $Q = \sum b_j A_j$, ekkor Q pozitív szemidefinit mátrix, így van egy pozitív definit $Q^{\frac{1}{2}}$ négyzetgyöke. Mindezek alapján

$$\det(z_1 A_1 + ... + z_n A_n) = \det(H + iQ) = \det(H + iQ^{\frac{1}{2}} I Q^{\frac{1}{2}}) =$$
$$= \det(Q^{\frac{1}{2}}) \det(Q^{-\frac{1}{2}} H Q^{-\frac{1}{2}} + iI) \det(Q^{\frac{1}{2}}) = \det(Q) \det(Q^{-\frac{1}{2}} H Q^{-\frac{1}{2}} + iI)$$

Mivel $det(Q) \neq 0$, hiszen Q pozitív definit, így ez csak úgy lehet 0, ha a második determináns 0, de ez azt jelentené, hogy a $Q^{-\frac{1}{2}} H Q^{-\frac{1}{2}}$ mátrixnak sajátértéke i, de ez egy valós szimmetrikus mátrix, hiszen minden tényező valós szimmetrikus, ezért csak valós sajátértékei lehetnek, tehát nem lehet a determináns 0. De ez éppen azt jelenti, hogy $\det(z_1 A_1 + ... + z_n A_n)$ valós stabil polinom. □

Hurwitz tételéből az is következik, hogy ha $f(x_1, ..., x_n)$ valós stabil polinom, akkor minden $c \in \mathbb{R}$ számra $f(x_1, ..., x_{n-1}, c)$ is valós stabil. A továbbiakban x_i változó esetén jelölje Z_{x_i} azt az operátort, ami úgy hat a polinomokon, hogy az x_i változó értékét 0-ra állítja. Így az előzőek alapján a Z_{x_i} operátor megőrzi a valós stabilitást.
Megadunk még egy operátorcsaládot, ami megőrzi a valós stabilitást: jelölje ∂_{z_i} a z_i változó szerinti deriválást. A következő állítás bizonyítása [6]-ből való.

5.2.3. Állítás. *Tetszőleges $a, b \geq 0$ valós számokra és x, y változókra a $T = 1 + a\partial_x + b\partial_y$ operátor megőrzi a valós stabilitást.*

Bizonyítás. Ha $a = b = 0$, akkor világos az állítás, tehát feltehetjük, hogy legalább az egyik pozitív. Legyen $f(z_1, ..., z_n)$ tetszőleges valós stabil polinom, $\alpha = (a_1, ..., a_n)$

vektor, aminek mindegyik koordinátájának pozitív a képzetes része. Elegendő belátni, hogy $\operatorname{Im}\left(\frac{\partial_x f(\alpha)}{f(\alpha)}\right) < 0$, mert ekkor ugyanúgy $\operatorname{Im}\left(\frac{\partial_y f(\alpha)}{f(\alpha)}\right) < 0$ és így $\operatorname{Im}\left(\frac{Tf(\alpha)}{f(\alpha)}\right) < 0$, tehát nem lehet gyök az α. Feltehetjük, hogy ∂_x az első változó szerinti deriválás. Legyen $g(x) = f(x, a_2, ..., a_n)$. Ekkor ha a gyöktényezős felbontása $\mathbb{C}$ felett $g(x) = \prod_{i=1}^{t}(x - \rho_i)$, akkor

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{x - \rho_i}.$$

Vegyük észre, hogy $\operatorname{Im}(\rho_i) \leq 0$, mert máskülönben $f(\rho_i, a_2, ..., a_k) = 0$ gyök lenne a tiltott tartományban. Ezek alapján:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\partial_x f(\alpha)}{f(\alpha)}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{g'(a_1)}{g(a_1)}\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{i=1}^{t} \frac{1}{a_1 - \rho_i}\right) < 0,$$

hiszen a nevezőkben így a komplex számok képzetes részei negatívak, tehát reciprokuk képzetes része pozitív, és éppen ezt kellett belátnunk. □

5.2.4. Lemma. *Ha A invertálható mátrix, u és v vektorok, és $p \in [0,1]$ valós szám, akkor*

$$Z_x Z_y \left(1 + p\partial_x + (1-p)\,\partial_y\right) \det\left(A + xuu^t + yvv^T\right) = p \det\left(A + uu^T\right) + (1-p)\det\left(A + vv^T\right)$$

Bizonyítás. A lineáris algebrából ismert mátrix determináns lemma szerint, ha A invertálható mátrix és t valós szám, akkor

$$\det\left(A + tuu^T\right) = \det(A)\left(1 + tu^T A^{-1} u\right).$$

Ennek egyenes következménye a következő formula a t szerint való deriválásra:

$$\partial_t \det\left(A + tuu^T\right) = \det(A)\left(u^T A^{-1} u\right).$$

Ezt felhasználva:

$$Z_x Z_y \left(1 + p\partial_x + (1-p)\,\partial_y\right) \det\left(A + xuu^t + yvv^T\right) =$$

$$= \det(A)\left(1 + p\left(u^T A^{-1} u\right) + (1-p)\left(v^T A^{-1} v\right)\right).$$

Itt csak annyi történt, hogy alkalmaztuk x szerinti és y szerinti deriválásra az előző formulát, majd 0-t helyettesítettünk mindenhol az x és y változók helyébe. Ismét alkalmazva a mátrix determináns lemmát kétszer, azt kapjuk, hogy

$$\det(A)\left(1 + p\left(u^T A^{-1} u\right) + (1-p)\left(v^T A^{-1} v\right)\right) =$$

$$= p \det(A) \det\left(1 + u^T A^{-1} u\right) + (1-p) \det(A) \det\left(1 + v^T A^{-1} v\right) =$$

$$= p \det\left(A + uu^T\right) + (1-p) \det\left(A + vv^T\right)$$

és ezt kellett belátnunk. □

Ennyi előkészület után kimondjuk az itteni főtételt, amit alkalmazni fogunk később.

5.2.5. Tétel. *Legyenek $u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_m$ $\mathbb{R}^n$-beli vektorok, $p_1, ..., p_m$ $[0,1]$-beli valós számok. Ekkor a*

$$P(x) = \sum_{S \subseteq [m]} \left(\prod_{i \in S} p_i\right) \left(\prod_{i \notin S} (1 - p_i)\right) \det\left(xI + \sum_{i \in S} u_i u_i^T + \sum_{i \notin S} v_i v_i^T\right).$$

polinom minden gyöke valós.

Bizonyítás. Vegyük az $y_1, ..., y_m, z_1, ..., z_m$ változókat és tekintsük a következő polinomot:

$$Q(x, y_1, ..., y_m, z_1, ..., z_m) = \det\left(xI + \sum_{i=1}^{m} y_i u_i u_i^T + \sum_{i=1}^{m} z_i v_i v_i^T\right).$$

Ekkor az 5.2.2 lemma miatt Q valós stabil polinom, hiszen mindegyik megjelenő mátrix pozitív szemidefinit. Azt állítjuk, hogy P-t megkaphatjuk Q-ból a következő módon:

$$P(x) = \left(\prod_{i=1}^{m} Z_{y_i} Z_{z_i} T_i\right) Q(x, y_1, ..., y_m, z_1, ..., z_m),$$

ahol $T_i = 1 + p_i \partial_{y_i} + (1 - p_i)\, \partial_{z_i}$. Ez onnan következik, hogy k-ra teljes indukcióval belátjuk, hogy

$$\left(\prod_{i=1}^{k} Z_{y_i} Z_{z_i} T_i\right) Q(x, y_1, ..., y_m, z_1, ..., z_m) =$$

$$= \sum_{S \subseteq [k]} \left(\prod_{i \in S} p_i\right) \left(\prod_{i \in [k] \setminus S} (1 - p_i)\right) \cdot$$

$$\cdot \det\left(xI + \sum_{i \in S} u_i u_i^T + \sum_{i \in [k] \setminus S} v_i v_i^T + \sum_{i > k} \left(y_i u_i u_i^T + z_i v_i v_i^T\right)\right).$$

Ebből már következni fog P-re a formula $k = m$ helyettesítéssel. A $k = 0$ eset a q definíciója maitt igaz, az indukciós lépés helyességét pedig éppen az előző lemma biztosítja. Mivel korábban már láttuk, hogy a Z, T operátorok megőrzik a polimok valós stabilitását, így ebből következik hogy P valós stabil polinom, de mivel egyváltozós, ezért emiatt minden gyöke valós (hiszen mivel a gyökök komplex konjugált párokban érkeznek, ezért ha lenne komplex gyök, lenne pozitív képzetes részes gyök is). □

5.3. A konstrukció áttekintése

Legyen $d \geq 2$ pozitív egész szám. Induktívan fogjuk felépíteni d-reguláris páros Ramanujan-gráfok egy végtelen sorozatát. Ehhez definiáljuk egy gráf 2-fedését: ha $G = (V, E)$, akkor minden ilyen $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ gráfot a G egy 2-fedésének hívunk, aminek minden $v \in V$-hez pontosan két csúcsa van: $\{v_0, v_1\} \subseteq \hat{V}$ és minden $e = (u, v) \in E$-hez pontosan két él tartozik: vagy $\{(u_0, v_0), (u_1, v_1)\} \subseteq \hat{E}$, vagy pedig $\{(u_0, v_1), (u_1, v_0)\} \subseteq \hat{E}$. Tulajdonképpen annyi történik, hogy megduplázzuk a csúcshalmazt, utána pedig minden élre az eredeti gráfban vagy behúzzuk az eredeti és a másolatgráfban is, vagy pedig keresztben kötjük be az éleket.

A fő tulajdonság, amit használni fogunk, az lesz, hogy egy gráf 2−-fedésének sajátértékeit egyszerűen meghatározhatjuk az eredeti gráf adjacenciamátrixából. Legyen ugyanis $A = A(G)$ a G adjacenciamátrixa, és egy adott 2-fedés esetén tekintsük G éleinek egy $s : E \to \{\pm 1\}$ előjelezését, amit úgy kapunk, hogy $s(u, v) = 1$ ha az $\{(u_0, v_0), (u_1, v_1)\}$ éleket húztuk be $\hat{G}$-nél, és $s(u, v) = -1$ ha keresztbe kötöttük össze az éleket. Definiáljuk az A_s előjelezett adjacenciamátrixot úgy, hogy az A mátrixnál minden (u, v) él helyére $s(u, v)$-t írjuk (tehát keresztbe kötött élnél $+1$ helyett -1 áll). Ekkor a következő egyszerű tétel írja le $\hat{G}$ sajátértékéit:

5.3.1. Tétel. *$\hat{G}$ sajátértékei az A és A_s mátrixok sajátértékeinek multihalmazának uniója.*

Bizonyítás. Legyen $A_1 = \frac{A+A_s}{2}$ és $A_2 = \frac{A-A_s}{2}$, vagyis A_1 olyan mátrix, ahol az (u, v) pozícióban 1 áll ha az eredeti gráfban u és v között volt él, és a felemelésnél megdupláztuk, és 0 egyébként, A_2-nél pedig pontosan akkor áll 1 az (u, v) elem helyén, ha az eredeti gráfban u és v között volt él és a felemelésnél keresztbe kötöttük. Ebből következik, hogy a 2-fedés adjacenciamátrixa a következő:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}$$

Legyen v az A-nak egy sajátvektora λ sajátértékkel, ekkor $\hat{v} = (v, v)$ sajátértéke $\hat{A}$-nak szintén λ sajátértékkel, ugyanis

$$A_1 v + A_2 v = \frac{Av + A_s v}{2} + \frac{Av - A_s v}{2} = Av = \lambda v,$$

s hasonlóan, ha u sajátvektora A_s-nek μ sajátértékkel, akkor $\hat{u} = (u, -u)$ sajátértéke lesz $\hat{A}$-nak μ sajátértékkel, mert

$$A_1 u - A_2 u = \frac{Au + A_s u}{2} - \frac{Au - A_s u}{2} = A_s u = \mu u.$$

Ha vesszük A-nak és A_s-nek is egy-egy ortogonális sajátbázisát, és a fent látható módon képzünk $2n$ vektort, akkor ezen vektorok könnyen láthatóan $\hat{A}$-nak ortogonális sajátbázisát fogják alkotni, és a hozzájuk tartozó sajátértékek éppen A és A_s sajátérték-multihalmazainak uniója. $\square$

Mivel egy páros gráf 2-fedése páros (minden új csúcsnak adhatjuk ugyanazt a színt, mint a párjának), ezért ha belátnánk azt, hogy minden d-reguláris gráf adjacenciamátrixának létezik olyan előjelezése, aminek legnagyobb sajátértéke legfeljebb $2\sqrt{d-1}$, akkor induktívan egyszerűen meg tudjuk konstruálni d-reguláris páros Ramanujan-gráfok egy végtelen családját, ugyanis kiindulva a teljes páros d-reguláris gráfból, mindig vehetjük azt a 2-fedést, ami ehhez az előjelezett mátrixhoz tartozik és így kapunk egy kétszer annyi csúccsal rendelkező Ramanujan-gráfot.
Vizsgáljuk meg, hogy mi történik akkor, ha véletlenszerűen, egyenletesen választunk egy előjelezést, azaz minden 1-esből $\frac{1}{2}$ valószínűséggel lesz $+1$, illetve $\frac{1}{2}$ valószínűséggel -1. G gráf esetén tetszőlegesen sorba rendezzük az m darab élét és egy $s \in \{\pm 1\}^m$ vektort nevezünk előjelezésnek, és $f_s(x)$-szel jelöljük a hozzá tartozó előjelezett mátrix karakterisztikus polinomját. A következő tétel azt mutatja meg, hogy s egyenletes választása esetén a karakterisztikus polinom várható értéke éppen a gráf párosítási polinomja.

5.3.2. Tétel.

$$\mathbb{E}_{s \in \{\pm 1\}^m} \left(f_s(x) \right) = \mu(G, x).$$

Bizonyítás. Jelölje $sym(S)$ egy S halmaz elemeinek az összes lehetséges permutációjának a halmazát, és $\sigma \in sym(S)$ esetén legyen $sgn(\sigma)$ a σ permutáció előjele, továbbá pozitív egész l esetén jelölje $[l]$ az $1, 2, ..., l$ számok halmazát. Kifejtve a determinánst, majd felhasználva a várható érték linearitását és csoportosítva az x változó szerint:

$$\mathbb{E}_s \left(f_s(x) \right) = \mathbb{E}_s \left(\det \left(xI - A_s \right) \right) = \mathbb{E}_s \left(\sum_{\sigma \in sym[n]} (-1)^{sgn(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} \left(xI - A_s \right)_{i,\sigma(i)} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} x^{n-k} (-1)^k \sum_{S \subset [n], |S| = k} \sum_{\pi \in sym(S)} \mathbb{E}_s \left((-1)^{sgn(\pi)} \prod_{i \in S} \left(A_s \right)_{i,\pi(i)} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} x^{n-k} (-1)^k \sum_{S \subset [n], |S|=k} \sum_{\pi \in sym(S)} \mathbb{E}_s \left((-1)^{sgn(\pi)} \prod_{i \in S} s_{i,\pi(i)} \right)$$

Mivel az $s_{i,j}$ változók függetlenek ((i,j)-re rendezetlen párként tekintve) és 0 várható értékűek, ezért az utolsó zárójelben csak azok a szorzatok nem tűnnek el, amiknél minden $s_{i,j}$ kitevője páros, de itt így csak 0 vagy 2 lehet, és ezek a szorzatok éppen azokhoz a permutációkhoz tartoznak, amiknek minden orbitja 2 elemű, tehát elegendő ezeket vizsgálnunk. De ezek éppen S teljes párosításainak felelnek meg, hiszen ezek diszjunkt transzpozíciók szorzatai melyek orbitjai teljesen lefedik S-t. Ha $|S|$ páratlan, akkor nincs teljes párosítás, ha pedig $|S|$ páros, akkor minden teljes párosításhoz $\frac{|S|}{2}$ diszjunkt transzpozíció szorzata tartozik. Mivel $\mathbb{E}_s \left(s_{i,j}^2 \right) = 1$, így

$$\mathbb{E}_s \left(f_s(x) \right) = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x^{n-2l} \sum_{S \subset [n], |S|=2l} \sum_{\text{párosítások S-en}} (-1)^l = \mu(G,x),$$

és éppen ezt akartuk belátni. $\square$

Ez már bizakodásra adhat okot, hiszen nemrég beláttuk, hogy a párosítási polinom legnagyobb gyöke legfeljebb $2\sqrt{d-1}$. Általánosságban viszont az, hogy tudunk valamit polinomok várható értékének (itt: összegének) a legnagyobb gyökéről, nem árul el sokat az egyes polinomok gyökéről, és nem garantálja azt, hogy van olyan a polinomok között, melynek a legnagyobb gyöke a várható érték legnagyobb gyöke alatt van. A következő alfejezetben viszont speciális polinomcsaládokat fogunk vizsgálni, amikre mégis teljesül ez utóbbi tulajdonság, és be is fogjuk látni, hogy az előjelezett mátrixok karakterisztikus polinomjai egy ilyen polinomcsaládot alkotnak.

5.4. Átszövő polinomcsaládok

5.4.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $g(x) = \prod_{i=1}^{n-1}(x - \alpha_i)$ polinom átszövi az $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \beta_i)$ polinomot, ha*

$$\beta_1 \leq \alpha_1 \leq \beta_2 \leq \alpha_2 \leq ... \leq \alpha_{n-1} \leq \beta_n.$$

Azt mondjuk, hogy az $f_1, f_2, ..., f_k$ polinomoknak van egy közös átszövése, ha létezik olyan g polinom, ami mindegyik f_i-t átszövi.

Máshogy elmondva, az $f_1, ..., f_k$ polinomoknak akkor van közös átszövése, hogy ha az i. polinom j. legkisebb gyökét $\beta_{i,j}$ jelöli, akkor léteznek olyan $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq ... \leq \alpha_n$ számok, hogy $\beta_{i,j} \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j]$ minden i-re és j-re.

A következő lemma biztosítja a közös átszövéssel rendelkező polinomoknak azt a kulcsfontosságú tulajdonságát, amit kihasználunk a Ramanujan-gráfok keresésekor:

5.4.2. Lemma. *Legyenek $f_1, ..., f_k$ pozitív főegyütthatós n-edfokú polinomok, amiknek minden gyöke valós, és legyen*

$$f_\theta = \sum_{i=1}^{k} f_i.$$

Ha $f_1, ..., f_k$-nak van közös átszövése, akkor létezik olyan i index, hogy az f_i legnagyobb gyöke legfeljebb akkora, mint f_θ legnagyobb gyöke.

Bizonyítás. Vegyünk egy g polinomot, mely átszövi az f_i-ket és jelölje α_{n-1} a g legnagyobb gyökét. Ekkor mindegyik f_i nempozitív α_{n-1}-ben, hiszen pontosan egy gyökük van, ami legalább α_{n-1} és pozitív főegyütthatóik miatt elég nagy értékekre pozitívak. Ezért f_θ szintén nempozitív α_{n-1}-ben, de pozitív főegyütthatója miatt elég nagy értékekre pozitív, tehát van egy olyan gyöke, ami legalább akkora, mint α_{n-1}, legyen ez β_n. Mivel f_θ az f_i-k összege, ezért van egy olyan i index, amire $f_i(\beta_n) \geq 0$. De f_i-nek pontosan egy gyöke van, ami legalább α_{n-1}, és $f_i(\alpha_{n-1}) \leq 0$, így ennek a gyöknek, ami egyben f_i legnagyobb gyöke is, α_{n-1} és β_n közé kell esnie, vagyis legfeljebb akkora, mint β_n. □

Most a közös átszövés fogalmát egy kicsit általánosítjuk olyan szituációra, ami jobban hasonlít az általunk vizsgált előjelezett gráfok karakterisztikus polinomjainak esetére, majd belátjuk ennek a lemmának a megfelelőjét abban az esetben is.

5.4.3. Definíció. *Legyen $S_1, ..., S_m$ véges halmazok és legyen adott minden $(s_1, ..., s_m) \in S_1 \times ... \times S_m$ esetén egy $f_{s_1,...,s_m}(x)$ pozitív főegyütthatós, csak valós gyökökkel rendelkező polinom. Ha $k < m$ és $(s_1, ..., s_k) \in S_1 \times ... \times S_k$, akkor legyen*

$$f_{s_1,...,s_k} = \sum_{s_{k+1} \in S_{k+1},...,s_m \in S_m} f_{s_1,...,s_k,s_{k+1},...,s_m}.$$

(Azaz az első k koordinátát rögzítjük és összeadjuk az összes olyan polinomot, aminek az az első k koordinátája.) Továbbá legyen

$$f_\theta = \sum_{s_1 \in S_1,...,s_m \in S_m} f_{s_1,...,s_m}$$

Azt mondjuk, hogy az $\{f_{s_1,...,s_m}\}_{s_1,...,s_m}$ polinomok egy átszövő polinomcsaládot alkotnak, hogyha minden $k = 0, 1, ..., m-1$ és minden $(s_1, ..., s_k) \in S_1 \times ... \times S_k$ esetén az

$$\{f_{s_1,...,s_k,t}\}_{t \in S_{k+1}}$$

polinomhalmaznak van közös átszövése.

5.4.4. Tétel. *Legyen $S_1, ..., S_m$ véges halmazok és legyen $\{f_{s_1,...,s_m}\}$ átszövő polinomcsalád. Ekkor létezik olyan $(s_1, ..., s_m) \in S_1 \times ... \times S_m$, hogy az $f_{s_1,...,s_m}$ polinom legnagyobb gyöke legfeljebb akkora, mint f_θ legnagyobb gyöke.*

Bizonyítás. Az átszövő polinomcsalád definíciója szerint az $\{f_t\}_{t\in S_1}$ polinomoknak van közös átszövése, valamint az összegük f_θ. Így az előző lemma van köztük egy olyan, mondjuk f_{s_1}, aminek a legnagyobb gyöke legfeljebb akkora, mint f_θ legnagyobb gyöke. Ezután k-ra induktívan bizonyítunk. Válasszuk tehát az $s_1, ..., s_k$ indexeket úgy, hogy már teljesüljön, hogy $f_{s_1,...,s_k}$ legnagyobb gyöke legfeljebb akkora, mint f_θ legnagyobb gyöke, ekkor definíció szerint az $\{f_{s_1,...,s_k,t}\}_{t\in S_{k+1}}$ polinomoknak van közös átszövése, és összegük $f_{s_1,...,s_k}$. Így szintén a lemma miatt valamely t-re, mondjuk s_{k+1}-re, az $f_{s_1,...,s_{k+1}}$ polinom legnagyobb gyöke legfeljebb akkora, mint $f_{s_1,...,s_k}$ legnagyobb gyöke, ami viszont legfeljebb akkora, mint f_θ legnagyobb gyöke, így készen vagyunk. □

A továbbiakban belátjuk, hogy az $\{f_s\}_{s\in\{\pm 1\}}$ polinomok, amik az előjelezett adjacenciamátrixokhoz tartozó karakterisztikus polinomok, egy átszövő polinomcsaládot alkotnak, és így az előző tétel miatt lesz olyan előjelezés, aminél a legnagyobb sajátérték legfeljebb $2\sqrt{d-1}$, és ez biztosítja az előbbi alfejezetben leírt induktív konstrukció működését páros Ramanujan-gráfokra.

Ehhez először belátjuk a következő lemmát, ami egy jól kezelhető feltételt biztosít arra, hogy polinomoknak hogy mikor létezik polinomoknak közös átszövése. A bizonyítás a [8] cikkből való.

5.4.5. Lemma. *Legyenek $f_1, ..., f_k$ pozitív együtthatós n-edfokú polinomok, és tegyük fel, hogy tetszőleges $\lambda_1, ..., \lambda_k$ nemnegatív valós számokra a $\lambda_1 f_1 + ... + \lambda_k f_k$ polinomnak csak valós gyökei vannak. Ekkor az $f_1, ..., f_k$ polinomoknak van közös átszövése.*

Bizonyítás. Elég $k = 2$-re belátnunk az állítást, ugyanis igaz az, hogyha k darab polinom közül bármely kettőnek van közös átszövése, akkor van olyan polinom, ami átszövi mind a k darabot: hiszen ekkor ha az i. polinom l. legnagyobb gyökét $\beta_{i,l}$ jelöli, akkor ez azt jelenti, hogy tetszőleges i, j indexekre és $1 \leq l \leq n-1$ esetén a $[\beta_{i,l}, \beta_{i,l+1}]$ és $[\beta_{j,l}, \beta_{j,l+1}]$ intervallumok metszete nemüres, de ekkor Helly tételét alkalmazva a $[\beta_{i,l}, \beta_{i,l+1}]$ intervallumokra, ahol i fut, azt kapjuk hogy az i-kre összemetszve sem üres a metszet, és ezt minden l-re felírva kapjuk, hogy van közös átszövése a k darab polinomnak.
Legyen tehát két polinomunk, f_1 és f_2, és legyen $f_t = tf_1 + (1-t)f_2$, ahol $t \in [0, 1]$,

a feltételek szerint így mindegyik f_t-nek csak valós gyökei vannak. Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor f_1-nek és f_2-nek nincs közös gyöke. Ekkor f_t gyökei n különböző intervallumot futnak be, ha t fut 0-tól 1-ig, és minden ilyen intervallumban pontosan egy gyöke van f_1-nek és egy f_2-nek, ugyanis ellenkező esetben létezne olyan $t \neq 0, 1$ és x valós szám, hogy mondjuk $f_t(x) = f_1(x) = 0$, de ekkor $f_2(x) = 0$ szintén, ami ellentmond annak, hogy nincs közös gyök. De így az n különböző intervallumból kiválaszthatunk páronként diszjunkt részintervallumokat (illetve többszörös gyök esetén multiplicitással választunk ki intervallumokat, de az is ugyanígy működik), melyek mindegyike pontosan egy gyökét tartalmazza f_1-nek és f_2-nek is, és így készen vagyunk ezzel az esettel.
Vegyük észre, hogy ha f_1-nek és f_2-nek vannak közös gyökei, akkor leoszthatunk az azokhoz tartozó gyöktényezőkkel, alkalmazhatjuk az előbbi esetet, majd könnyen kiegészíthetjük az ott kapott átszövést a közös gyököknél felvett osztópontokkal. Így ezzel beláttuk a lemmát. $\square$

Valójában a lemma állítása oda-vissza igaz, de nekünk csak a fenti irányra lesz szükségünk.

5.4.6. Tétel. *Ha $p_1, ..., p_m \in [0, 1]$, akkor a*

$$\sum_{s\in\{\pm 1\}^m} \left(\prod_{i:s_i=1} p_i\right) \left(\prod_{i:s_i=-1} (1-p_i)\right) f_s(x)$$

polinomnak csak valós gyökei vannak.

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy a

$$\sum_{s\in\{\pm 1\}^m} \left(\prod_{i:s_i=1} p_i\right) \left(\prod_{i:s_i=-1} (1-p_i)\right) \det(xI - A_s)$$

polinomnak csak valós gyökei vannak, ami ekvivalens azzal, hogy a

$$\sum_{s\in\{\pm 1\}^m} \left(\prod_{i:s_i=1} p_i\right) \left(\prod_{i:s_i=-1} (1-p_i)\right) \det(xI + dI - A_s)$$

polinom minden gyöke valós, hiszen itt csak eltoltuk d-vel a gyököket. A gráf minden u csúcsára tekintsük az e_u vektort, aminek u-hoz tartozó kooridnátája 1, a többi 0, legyen $s_{u,v}$ az előjele az (u, v) élnek s-nél, majd legyen tetszőleges (u, v) élre $a_{u,v} = e_u - e_v$ és $b_{u,v} = e_u + e_v$. Ekkor egyszerű számolás mutatja, hogy

$$dI - A_s = \sum_{s_{u,v}=1} a_{u,v}a_{u,v}^T + \sum_{s_{u,v}=-1} b_{u,v}b_{u,v}^T.$$

Így tehát a vizsgált polinomunk a következővel egyezik meg:

$$\sum_{s\in\{\pm 1\}^m}\left(\prod_{i:s_i=1} p_i\right)\left(\prod_{i:s_i=-1}(1-p_i)\right)\det\left(xI+\sum_{s_{u,v}=1} a_{u,v}a_{u,v}^T+\sum_{s_{u,v}=-1} b_{u,v}b_{u,v}^T\right).$$

De ennek már minden gyöke valós az 5.2.5 tétel szerint. □

5.4.7. Következmény. *Az* $\{f_s\}_{s\in\{\pm 1\}}$ *polinomok átszövő polinomcsaládot alkotnak.*

Bizonyítás. Legyen $0\le k\le m-1$, $s_1\in\{\pm 1\},...,s_k\in\{\pm 1\}$ tetszőlegesek, valamint $\lambda\in[0,1]$ valós szám. Ekkor az előző tételben $p_{k+1}=\lambda, p_{k+2},...,p_m=\frac{1}{2}$, valamint $1\le i\le k$ esetén $p_i=\frac{1+s_i}{2}$ választással azt kapjuk, hogy a

$$\lambda f_{s_1,...,s_k,1}(x)+(1-\lambda)f_{s_1,...,s_k,-1}(x)$$

polinomnak csak valós gyökei vannak. De ekkor a lemmából már következik az állítás (hiszen megfelelő λ-választás és felszorzás után így tetszőleges nemnegatív lineáris kombinációjának a két polinomnak csak valós gyökei vannak). □

Minden szükséges tételt beláttunk, tekintsük át még egyszer a konstrukciót ezek ismeretében: veszünk egy $d\ge 3$ pozitív egész számot, és kiindulunk egy tetszőleges G d-reguláris páros Ramanujan-gráfból. Tekintjük G adjacenciamátrixának összes lehetséges előjelezését, ezek karakterisztikus polinomjai a fenti következmény szerint átszövő polinomcsaládot alkotnak. Továbbá korábban beláttuk, hogy ezen polinomok várható értéke éppen G párosítási polinomja (és így ezen polinomok összege a párosítási polinom konstansszorosa), aminek minden gyökének legfeljebb $2\sqrt{d-1}$ az abszolútértéke. Az 5.4.4 tétel értelmében így van olyan a karakterisztikus polinomok között, aminek legnagyobb gyökének is legfeljebb $2\sqrt{d-1}$ az abszolútértéke. Így az ehhez az előjelezéshez tartozó 2-fedése G-nek ismét páros Ramanujan-gráf lesz, mert minden új sajátértéke az előbb választott karakterisztikus polinom gyökei közül kerül ki, amiknek nem lehet $2\sqrt{d-1}$-nél nagyobb az értéke. Ezt az eljárást iterálva kapjuk d-reguláris páros Ramanujan-gráfok egy végtelen családját.

Irodalomjegyzék

[1] P. CSIKVÁRI. *Diszkrét matematika jegyzet*
http://csikvarip.web.elte.hu/diszkret_matematika_jegyzet.pdf

[2] A. NILLI. *Tight estimates for eigenvalues of regular graphs.* Electron. J. Combin 11 (2004)

[3] S. CIOBA. *On the extreme eigenvalues of regular graphs.* Journal of Combinatorial Theory, Series B 96, pp. 367-373 (2006)

[4] A. LUBOTZKY, R. PHILLIPS, P. SARNAK. *Ramanujan graphs.* Combinatorica, 8 (3), pp. 261–277 (1988)

[5] A. MARCUS, D. SPIELMAN, N. SRIVASTAVA. *Interlacing Families I: Bipartite Ramanujan Graphs of All Degrees.* Annals of Mathematics, 182 (1), pp. 307-325. (2015)

[6] P. CSIKVÁRI. *Counting in sparse graphs*
http://csikvarip.web.elte.hu/counting_graphs_book.pdf

[7] D. G. WAGNER. *Multivariate stable polynomials: theory and applications.* Bull. Amer. Math. Soc. 48, pp. 53–84. (2011)

[8] A. MARCUS, D. SPIELMAN, N. SRIVASTAVA. *Ramanujan Graphs and the Solution of the Kadison–Singer Problem.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 3 (2014)

[9] S. RAMANUJAN. *On certain arithmetical functions.* Trans. Camb. Phil. Soc. 22, pp. 159-184 (1916)

[10] M.EICHLER. *Quaternäre quadratische Formen und die Riemannsche Vermutung für die kongruentz Zeta Funktion.* Archiv. der Math., pp.3 55-366 (1954)

[11] J.IGUSA. *Fibre systems of Jacobian varieties III.* American Jnl. of Math. 81, pp. 453-476 (1959)

[12] MALIŠEV. *On the representation of integers by positive definite forms.* Mat. Steklov 65 (1962)