Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Pozitív operátorok lokálisan konvex tereken

Diplomamunka

Göde Ábel

Matematikus MSc

Témavezető:

Dr. Tarcsay Zsigmond
egyetemi adjunktus
ELTE Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2021

1. fejezet

Bevezetés

Jelen dolgozatban anti-duális párok pozitív operátorainak tulajdonságait vizsgáljuk. Emlékeztetőül megjegyezzük, mit értünk pozitív operátor alatt a Hilbert terek elméletében. Legyen adva egy $A : H \to H$ operátor, ahol H komplex Hilbert tér. Ekkor a pozitivitás azt jelenti, hogy minden $x \in H$ esetén $(Ax|x) \geq 0$. A matematikai analízisben természetesen merülnek fel azzal kapcsolatos kérdések, hogy létezik-e valamilyen halmazra adott tulajdonságot megőrző kiterjesztése egy annak valamely részhalmazán értelmezett leképezésnek. Nevezetesen, ha adott egy $A : D \to H$ pozitív operátor, ahol D a H Hilbert-tér zárt lineáris altere, milyen feltételek teljesülése mellett terjed ki egy $\tilde{A} : H \to H$ pozitív operátorrá. Ennek a kérdésnek a megválaszolásához tekintsük a $H = D \oplus D^{\perp}$ ortogonális felbontást. Ekkor A felírható

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & * \\ A_{21} & * \end{bmatrix}$$

mátrix alakban, ahol $A_{11} : D \to D$ és $A_{21} : D \to D^{\perp}$ leképezések, és a jobb oldali oszlopban lévő $*$ szimbólumok helyét szeretnénk úgy kitölteni, hogy pozitív operátort kapjunk. Könnyen látszik, hogy A minden pozitív kiterjesztése

$$[\tilde{A}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21}^* \\ A_{21} & X \end{bmatrix}$$

alakban áll elő, ahol $A_{11} : D \to D$ és $X : D^{\perp} \to D^{\perp}$ pozitív operátorok. Ez azt jelenti, hogy A kiterjeszthetősége egy $\tilde{A}$ pozitív operátorrá ekvivalens azzal, hogy létezik olyan $X \geq 0$ operátor, melyre a fenti operátor mátrix pozitív.

Krein cikke pontosan megválaszolja ezt a kérdést Hilbert-tér esetében. A továbbiakban ismertetjük, hogyan általánosítható ez az eredmény anti-duális párok esetére, mely eredménynek szó lesz olyan releváns alkalmazásairól, melyeket a Hilbert-tér struktúra nem fed le (például Banach-terek operátorai illetve *-algebrák ábrázolható funkcionáljai). A dolgozat hátralevő részében a kiterjesztési tétel további alkalmazasaként szimmetrikus operátorok kiterjeszthetőségét illetve a fentihez hasonló

hiányos operátor mátrixok kiegészíthetőségét vizsgáljuk.
A bevezetőben előbb ismertetünk néhány felhasznált eredményt, majd anti-duális párok és az ezekhez kapcsolódó gyenge- illetve erős topológia fogalmát.

1.1. Felhasznált eredmények

A későbbiekben fontos szerepet kap Douglas faktorizációs tétele operátoregyenletek megoldhatóságáról.

1.1.1. TÉTEL. *Ha H Hilbert-tér, és $A,B \in \mathscr{B}(H)$ korlátos operátorok, az alábbiak ekvivalensek:*

(i) $ran(A) \subseteq ran(B)$,

(ii) $\exists \lambda \geq 0 \; \forall x \in H: \; \|A^*x\| \leq \lambda \cdot \|B^*x\|$,

(iii) $\forall y \in H \; \exists \lambda_y \geq 0 \; \forall x \in H: \; |(x|Ay)| \leq \lambda_y \cdot \|B^*x\|$,

(iv) *Létezik olyan $D \in \mathscr{B}(H)$ folytonos lineáris operátor, amire $A = BD$.*

Bizonyítás. (i)⇒(iii): Rögzítsünk egy $y \in H$ vektort. Az (i) feltétel szerint létezik olyan $z \in H$ vektor, amelyre $Ay = Bz$, tehát tetszőleges $x \in H$ vektor esetén

$$|(x|Ay)| = |(x|Bz)| = |(B^*x|z)| \leq \|z\| \cdot \|B^*x\|,$$

ez azt jelenti, hogy $\lambda_y := z$ választással teljesül (iii). A (iv)⇒(ii) implikáció $\lambda := \|D\|$ választással rögtön következik. A (ii)⇒(iii) implikáció abból következik, hogy

$$|(x|Ay)| = |(A^*x|y)| \leq \|A^*x\| \cdot \|y\| \leq \lambda \cdot \|y\| \cdot \|B^*x\|.$$

Hasonlóan egyszerűen kapjuk a (iv)⇒(i) implikációt.
(iii)⇒(iv): Rögzítsünk egy $y \in H$ vektort és tekintsük a

$$\varphi : \operatorname{ran}(B^*) \to \mathbb{C}; \qquad \varphi(B^*x) := (x|Ay), \qquad x \in H$$

leképezést, amely a (iii) feltétel szerint folytonos lineáris funkcionál $\|\varphi\| \leq \lambda_y$ operátornormával. Mivel a φ funkcionálnak egyértelműen létezik $\tilde{\varphi} : \overline{\operatorname{ran}(B^*)} \to \mathbb{C}$ folytonos lineáris kiterjesztése, így a Riesz reprezentációs tétel értelmében egyértelműen létezik olyan $z = D(y) \in \overline{\operatorname{ran}(B^*)}$ reprezentáns vektor, melyre

$$\tilde{\varphi}(v) = (v|D(y)), \qquad v \in \overline{\operatorname{ran}(B^*)}.$$

Speciálisan, $v = B^*x$ helyettesítéssel

$$(x|Ay) = (B^*x|D(y)), \qquad x, y \in H.$$

Az így definiált $D : H \to H$ lineáris operátor, hiszen $D(y) \in \overline{\operatorname{ran}(B^*)}$ tetszőleges $y \in H$ esetén. D folytonosságához elég a zártságát igazolni. Legyen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ olyan sorozat, melyre

$$y_n \to y$$

és

$$Dy_n \to z.$$

Ekkor elegendő megmutatni, hogy $Dy = z$. Egyrészt

$$(B^*x|Dy) = (x|Ay), \qquad x \in H,$$

másrészt minden n-re

$$(B^*x|Dy_n) = (x|Ay_n), \qquad x \in H,$$

így a $(B^*x|Dy_n) \to (B^*x|z)$ illetve az $(x|Ay_n) \to (x|Ay)$ konvergencia miatt

$$(B^*x|Dy) = (B^*x|z), \qquad x \in H.$$

Mivel Dy és z egyaránt eleme a $\overline{\operatorname{ran}(B^*)}$ halmaznak, így ebből mind a $Dy = z$ egyenlőség, mind D zártsága következik. Így igazoltuk, hogy $D \in \mathscr{B}(H)$ olyan folytonos lineáris operátor, melyre

$$(x|BDy) = (x|Ay), \qquad x, y \in H,$$

vagyis $A = BD$, így igazoltuk a (iv) állítást. □

A későbbiekben szerepet kap még az előjeles mértékek Hahn-Jordan felbontásának alábbi nem-kommutatív általánosítása.

1.1.2. Állítás. *Legyen $\mathscr{A}$ C*-algebra, és $f : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ folytonos önadjungált funkcionál. Ekkor léteznek $\mathscr{A}$ felett olyan f_+ és f_- pozitív funkcionálok, melyekre*

$$f = f_+ - f_-$$

és

$$\|f\| = \|f_+\| + \|f_-\|. \tag{1.1}$$

Ismertetünk továbbá egy fontos segédállítást ábrázolható funkcionálok különbségéről. Legyen $\mathscr{A}$ *-algebra, és $f : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ funkcionál. Azt mondjuk, hogy f pozitív, ha

$$f(a^*a) \geq 0, \qquad a \in \mathscr{A}.$$

Azt mondjuk, hogy f ábrázolható, ha létezik H Hilbert-tér, $\pi_f \in \mathscr{B}(H)$ operátor, és $\xi_f \in H$ vektor, melyekkel

$$f(a) = (\pi_f(a)\xi_f|\xi_f), \qquad a \in \mathscr{A}$$

Szükségünk lesz az alábbi állításra

1.1.3. Állítás. *Legyen $\mathscr{A}$ *-algebra, és $f,g : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ ábrázolható funkcionálok. Ekkor, ha az $f-g$ funkcionál pozitív, akkor ábrázolható.*

1.2. Anti-duális pár fogalma

Legyen E és F komplex vektortér. Egy $\langle\cdot,\cdot\rangle : F\times E \to \mathbb{C}$ függvényt anti-dualitásnak nevezünk, ha szeszkvilineáris (azaz lineáris az első változójában, és konjugáltan lineáris a második változójában), és szeparálja F és E pontjait (azaz, ha $\langle f,x\rangle = 0$ minden $x \in E$ esetén, akkor $f = 0_F$, és ha $\langle f,x\rangle = 0$ minden $f \in F$ esetén, akkor $x = 0_E$). Ekkor az $((E,F),\langle\cdot,\cdot\rangle)$ hármast anti-duális párnak nevezzük, és $\langle F,E\rangle$-vel jelöljük. Érdemes megjegyezni, hogy ha $\langle F,E\rangle$ anti-duális pár, akkor $\langle E,F\rangle'$ szintén anti-duális pár, ahol $\langle\cdot,\cdot\rangle' : E\times F \to \mathbb{C}$;

$$\langle x,f\rangle := \overline{\langle f,x\rangle}, \qquad x \in E, f \in F.$$

A legtermészetesebb anti-duális pár egy vektortér, és a konjugált algebrai duálisának egy szeparáló altere a kiértékeléssel, mint anti-dualitás. Sőt, minden anti-dualitás ilyen alakba írható, hiszen ha $\langle F,E\rangle$ anti-duális pár, akkor az

$$x \mapsto \varphi_x; \quad \varphi_x(f) := \langle f,x\rangle, \qquad f \in F$$

megfeleltetéssel tekinthetjük E-t F', azaz F algebrai duálisa lineáris alterének. Hasonlóan az

$$f \mapsto \psi_f; \quad \psi_f(x) := \langle f,x\rangle \quad x \in E \tag{1.2}$$

leképezéssel F tekinthető $\bar{E}'$, azaz E algebrai anti-duálisa lineáris alterének. Az anti-duális tér prototípusa a $((H,H),(\cdot|\cdot))$ rendszer, ahol H Hilbert tér a $(\cdot|\cdot)$ belső szorzattal. Ekkor a Riesz Reprezentációs Tétel értelmében H megfeleltethető a topológiai duálisával az $x \mapsto \varphi_x$ illetve az $f \mapsto \psi_f$ leképezésekkel. Hasonló tulajdonság érhető el általános esetben, ha az E és F tereket a megfelelő topológiával látjuk el. Ehhez azonban egy rövid kitekintésre van szükség.

1.3. Gyenge és erős topológiák

Jelen alfejezetben röviden ismertetjük azon topologikus vektortereket, amelyek a tárgyalt témakör szempontjából fontosak. Dolgozatomban olyan $(X,\mathscr{T})$ párokról lesz szó, ahol $\mathscr{T}$ lokálisan konvex topológia X-en, azaz olyan topológia, melyre a $\mathscr{T}(0)$ környezetszűrőnek van csupa konvex halmazból álló bázisa. Az ilyen tulajdonságú $(X,\mathscr{T})$ tereket lokálisan konvex tereknek nevezzük. Az alábbiakban röviden bemutatjuk a lokálisan konvex terek egy természetes (és egyben általános) konstrukcióját. Legyen most $\mathscr{P}$ félnormacsalád X-en, vagyis olyan halmaz, amelynek elemei az X vektortéren értelmezett félnormák. Jelölje $p \in \mathscr{P}$ esetén $S_p(x,\varepsilon)$ a

$$S_p(x,\varepsilon) := \{x \in X \,|\, p(x-y) < \varepsilon\}$$

gömböt. Ekkor $\mathscr{P}$ meghatároz egy $\mathscr{T}_{\mathscr{P}}$ lokálisan konvex topológiát, melyben az

$$\mathscr{S} := \{S_p(0),\varepsilon) \,|\, p \in \mathscr{P}, \varepsilon > 0\}$$

halmazrendszer a $\mathscr{T}_{\mathscr{P}}(0)$ környezetszűrő egy szubbázisa, és az ezekből képzett véges metszetek alkotják a környezetszűrő bázisát. Az így definiált $\mathscr{T}_{\mathscr{P}}$ topológiát a $\mathscr{P}$ félnormacsalád által meghatározott topológiának nevezzük. Megjegyezzük, hogy ekkor a

$$\mathscr{B}(0) := \{S_{p_i}(0),\varepsilon) \,|\, p_i \in \mathscr{P}(i=1,..,n), \varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}\} \tag{1.3}$$

egyenlőséggel értelmezett $\mathscr{B}(0)$ halmazrendszer szintén a $\mathscr{T}_{\mathscr{P}}$ környezetszűrő egy bázisát adja. De nem csak az igaz, hogy minden félnormacsalád lokálisan konvex topológiát definiál X-en, hanem az is, hogy minden lokálisan konvex topológiát egy félnormacsalád segítségével adhatunk meg a fent leírt módon.

Ismeretes, hogy amennyiben F egy adott függvénycsalád, azaz olyan halmaz, melynek elemei $f_i : X \to Y_i$ függvények, akkor létezik leggyengébb topológia X-en, amelyre nézve minden $f_i \in F$ függvény folytonos. Ezt a $\sigma(X,F)$ topológiát nevezzük az F függvénycsalád által meghatározott gyenge topológiának (vagy w-topológiának). Számunkra az a speciális eset lesz fontos a továbbiakban, ahol az F elemei $f_i : X \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionálok. Ebben az esetben az X-beli $\sigma(X,F)$ topológia olyan lokálisan konvex topológia, amelyben a $\sigma(X,F)(x)$ környezetszűrő egy szubbázisát alkotja a

$$\mathscr{S}(x) := \{S_f(x,\varepsilon) \,|\, f \in F, \varepsilon > 0\} \tag{1.4}$$

halmazrendszer, ahol

$$S_f(x,\varepsilon) := \{y \in X \,\big|\, |f(x) - f(y)| < \varepsilon\}. \tag{1.5}$$

Az F által meghatározott $\sigma(X,F)$ gyenge topológia megegyezik a

$$\mathscr{P} := \{|f| \,\big|\, f \in F\} \tag{1.6}$$

félnormacsalád által meghatározott $\mathscr{T}_{\mathscr{P}}$ lokálisan konvex topológiával. Sőt, ebben az esetben az $(X,\sigma(X,F))$ tér topológiai duálisa egybeesik az F lineáris burkával. Speciálisan, ha F az X' algebrai duális tetszőleges altere, akkor

$$(X,\sigma_F)^* = F, \tag{1.7}$$

és $\sigma(X,F)$ a leggyengébb olyan lokálisan konvex topológia, amire ez az egyenlőség fennáll. Az X^* topológiai duális téren az X elemei által meghatározott gyenge topológiát gyenge-*-topológiának nevezzük, és w^*-gal jelöljük.
Legyen most $\langle E,F\rangle$ anti-duális pár. Korábban láttuk, hogy ekkor E-t algebrailag megfeleltethetjük F algebrai duálisa egy lineáris alterével, illetve hasonlóan, F megfeleltethető E konjugált algebrai duálisa egy alterével. Ekkor F-en értelmezhető az E funkcionálcsalád által értelmezett $\sigma(F,E)$ gyenge topológia. Ezt nevezzük az $\langle F,E\rangle$ anti-duális párhoz tartozó gyenge topológiának. Ekkor $(F,\sigma(F,E))$ szeparált lokálisan konvex tér, amelynek topológiai duálisára

$$(F,\sigma(F,E))^* = E \tag{1.8}$$

teljesül. Hasonlóan értelmezhető a $\sigma(E,F)$ gyenge topológia az E vektortéren.
Szükségünk lesz még a $\beta(E,F)$ erős topológia fogalmára. Egy $M \subseteq X$ halmazt topológiai értelemben korlátosnak vagy $\mathscr{T}$-korlátosnak mondunk, ha minden $U \in \mathscr{T}(0)$ környezethez van olyan $r = r(U) > 0$ szám, hogy minden $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \geq r$ esetén

$$M \subseteq \lambda M, \tag{1.9}$$

amit úgy is mondhatunk, hogy az M halmazt a 0 pont minden környezete elnyeli.
Legyen $\langle F,E\rangle$ anti-duális pár. Ekkor egy $A \subseteq F$ részhalmaz polárisa az

$$A^\circ := \left\{x \in E \,\middle|\, \forall a \in A : |\langle a,x\rangle| \leq 1\right\}$$

abszolút konvex halmaz. A $\beta(E,F)$ erős topológia az F tér $\sigma(F,E)$-korlátos részhalmazainak polárisai által indukált vektortopológia E-n, vagyis az a lokálisan konvex topológia E felett, amelyban az alábbi

$$\mathscr{S} := \left\{A^\circ \,\middle|\, A \subseteq F \ \sigma(F,E)\text{-korlátos}\right\}$$

halmazrendszer a $0 \in E$ vektor egy környezetbázisa. Hasonlóan, a $\beta(F,E)$ erős topológia az E tér $\sigma(E,F)$-korlátos részhalmazainak polárisai által indukált vektortopológia F-en.

Ezen a ponton emlékeztetünk a Banach-Alaoglu tétel általános alakjára, amely a következőt mondja ki.

1.3.1. Tétel. *Ha $(X,\mathscr{T})$ szeparált lokálisan konvex tér, akkor a nullvektor minden $U \in \mathscr{T}(0)$ környezetének U° polárisa w^*-kompakt halmaz.*

A metrikus terek elméletéből ismert teljesség fogalma is kiterjeszthető topologikus vektorterekre. Legyen ugyanis X topologikus vektortér, és $(x_i)_{i\in I} \subset X$ általánosított sorozat. Azt mondjuk, hogy (x_i) általánosított Cauchy-sorozat, ha a 0 minden V környezetéhez van olyan $i \in I$ index, hogy $j \geq i$ és $k \geq i$ esetén $x_j - x_k \in V$. Azt mondjuk, hogy az X tér teljes, ha minden X-ben futó általánosított Cauchy-sorozat konvergens. X sorozatteljes, ha minden benne futó Cauchy-sorozat konvergens. Vegyük észre, hogy a teljességből következik a sorozatteljesség, és ha X metrizálható, az ellenkező irányú implikáció is teljesül, ez azonban nem igaz általában. Ahhoz, hogy ezt lássuk, most bebizonyítunk néhány állítást.

1.3.2. Állítás. *Legyen E vektortér, és $w' := \sigma(\bar{E}', E)$ az $\langle \bar{E}', E \rangle$ anti-duális pár által meghatározott $\bar{E}'$-beli gyenge topológia. Ha az $Y \subseteq \bar{E}'$ lineáris altér szeparálja E pontjait, akkor Y sűrű $\bar{E}'$-ben a w' topológia szerint.*

Bizonyítás. Tekintsük az $\langle \bar{E}', E \rangle$ duális párt a w' topológiával. Ekkor a bipoláris tétel értelmében $\overline{Y} = Y^{\circ\circ}$. Elegendő azt belátni, hogy $Y^{\circ\circ} = \bar{E}'$, amihez elegendő, hogy $Y^{\circ} = \{0\}$. Legyen $x \in Y^{\circ}$ rögzített. Ekkor tetszőleges $y \in Y$ esetén $|y(x)| \leq 1$, de mivel Y lineáris altér, $y(x) = 0$. Y szeparálja E pontjait, tehát ekkor $x = 0$, azaz $Y^{\circ} = \{0\}$, amivel igazoltuk az állítást. □

1.3.3. Állítás. *Ha $\langle F, E \rangle$ anti-duális pár, F akkor és csak akkor $\sigma(F, E)$-teljes, ha $F = \bar{E}'$.*

Bizonyítás. Legyen $f \in \bar{E}'$ rögzített funkcionál. Az előző állítás miatt létezik olyan $(y_i)_{i \in \mathscr{I}} \subset F$ általánosított sorozat, amely $\sigma(\bar{E}', E)$-ben konvergál f-hez. Ez az $(y_i)_{i \in \mathscr{I}}$ Cauchy tulajdonságú általánosított sorozat F-ben a $\sigma(F, E)$ topológia szerint, hiszen $\sigma(F, E) = \sigma(\bar{E}', E)|_F$. Ekkor F teljessége miatt $f \in F$, így beláttuk, hogy $F = \bar{E}'$. □

1.3.4. Állítás. *Ha E normált tér, akkor az $\bar{E}^*$ konjugált topológiai duális akkor és csak akkor w^*-teljes, ha E véges dimenziós.*

Bizonyítás. A Hahn-Banach tétel értelmében $\bar{E}^*$ szeparálja E pontjait, vagyis $\langle \bar{E}^*, E \rangle$ természetes anti-duális párt alkot. $\bar{E}^*$ pontosan akkor teljes az előző állítás szerint, ha $\bar{E}^* = \bar{E}'$. Ez pedig azzal ekvivalens, hogy E véges dimenziós. □

1.3.5. Állítás. *Ha E Banach-tér, akkor az $\bar{E}^*$ konjugált topológiai duálisa w^*-sorozatteljes.*

Bizonyítás. Legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \bar{E}^*$ w^*-Cauchy-sorozat. Ez ekvivalens azzal, hogy minden $x \in X$ esetén $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat. Ekkor az

$$f : E \to \mathbb{C}; \qquad f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

jóldefiniált, és konjugáltan lineáris funkcionál E felett. A Banach-Steinhaus tétel értelmében ez a pontonkénti limesz folytonos, azaz $f \in \bar{E}^*$, és f_n a w^*-topológia szerint f-hez konvergál, így beláttuk, hogy az $\bar{E}^*$ tér w^*-sorozatteljes. □

Az előző két állítás következménye, hogy egy E végtelen dimenziós Banach-tér $\bar{E}^*$ konjugált topológiai duálisa a w^* topológia szerint sorozatteljes, de nem teljes.

1.4. Pozitív és szimmetrikus operátorok anti-duális párokon

Adott $\langle F, E\rangle$ anti-duális pár. Azt mondjuk, hogy egy $A : E \supseteq \mathrm{dom}(A) \to F$ operátor pozitív, ha

$$\langle Ax, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathrm{dom}(A) \tag{1.10}$$

és szimmetrikus, ha

$$\langle Ax, y\rangle = \overline{\langle Ay, x\rangle} \quad \forall x, y \in \mathrm{dom}(A). \tag{1.11}$$

Világos, hogy minden pozitív operátor szimmetrikus, illetve a fenti fogalmak a Hilbert terek elméletéből ismert pozitivitás és szimmetrikusság általánosításai.

A gyenge topológia egyik előnye, hogy a lineáris operátorok folytonossága jellemezhető a következőképp: egy $T : (V, \mathscr{T}_V) \to (F, \sigma(F, E))$ lineáris operátor akkor és csak akkor folytonos, ha minden $x \in E$ esetén a

$$\vartheta_x : V \to \mathbb{C}, \quad \vartheta_x(v) := \langle Tv, x\rangle \tag{1.12}$$

lineáris funkcionál folytonos. Mostantól a következő jelöléseket használjuk: ha $\langle F_1, E_1\rangle_1$ és $\langle F_2, E_2\rangle_2$ anti-duális párok, azt mondjuk, hogy egy $T : E_1 \to E_2$ lineáris operátor gyengén folytonos, ha $\sigma(E_1, F_1) - \sigma(E_2, F_2)$-folytonos. A $T : E_1 \to E_2$ gyengén folytonos lineáris operátorok halmazát jelölje $\mathscr{L}(E_1; E_2)$. Most $\langle F_2, E_2\rangle_2$-t az $\langle E_2, F_2\rangle_2'$ anti-duális párral helyettesítve azt mondhatjuk, hogy egy $T : E_1 \to F_2$ operátor gyengén folytonos akkor és csak akkor, ha minden $x_2 \in E_2$ elemhez létezik olyan $f_1 \in F_1$, amire

$$\langle Tx_1, x_2\rangle_2 = \overline{\langle f_1, x_1\rangle_1} (= \langle x_1, f_1\rangle_1') \quad \forall x_1 \in E_1. \tag{1.13}$$

Ekkor T adjungáltjának nevezzük azt a $T^* : E_2 \to F_1$ operátort, amire

$$\langle Tx_1, x_2\rangle_2 = \overline{\langle T^* x_2, x_1\rangle_1} \quad x_1 \in E_1, x_2 \in E_2. \tag{1.14}$$

Speciálisan, ha $E_1 = E_2 =: E$ és $F_1 = F_2 =: F$, egy $A \in \mathscr{L}(E; F)$ operátor adjungáltja szintén $\mathscr{L}(E; F)$-beli, így van értelme A önadjungáltságáról beszélni, amennyiben $A = A^*$. Ekkor minden $A : E \to F$ szimmetrikus operátor gyengén folytonos és önadjungált, egy $A : E \supseteq \mathrm{dom}(A) \to F$ operátor pedig akkor és csak akkor szimmetrikus, ha $\langle Ax, x\rangle$ minden $x \in \mathrm{dom}(A)$ esetén valós.
Pozitív operátorra az alábbi példa adható. Legyen $\langle F, E\rangle$ anti-duális pár és H Hilbert tér. Ha $T : E \to H$ egy $\sigma(E, F) - \sigma(H, H)$-folytonos, akkor a $T^* : H \to F$ adjungáltja $\sigma(H, H) - \sigma(F, E)$-folytonos, így a $T^*T \in \mathscr{L}(E; F)$ operátor pozitív, hiszen

$$\langle T^*Tx, x\rangle = (Tx|Tx) \geq 0 \quad x \in E. \tag{1.15}$$

2. fejezet

Pozitív operátorok kiterjesztése

2.1. Anti-duális pár esete

Ebben a fejezetben azt vizsgálom, hogy amennyiben adott $\langle F,E\rangle$ anti-duális pár és egy $A : E \supseteq \mathrm{dom}(A) \to F$ pozitív operátor, milyen egyszerű karakterizációt adhatunk arra, hogy A pozitívan kiterjed a teljes E-re.
Ez még véges dimenziós vektorterek esetében sem triviális probléma. Legyen ugyanis $H := \mathbb{C}^2$ és

$$A : \left\{(z,0) \,\middle|\, z \in \mathbb{C}\right\} \to H; \qquad (z,0) \mapsto (0,z).$$

Ez nyilván pozitív operátor, hiszen

$$(A(z,0)|(z,0)) = 0 \geq 0, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Az A leképezéshez tartozó mátrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & * \\ 1 & * \end{bmatrix}$$

alakú. Indirekt tegyük fel, hogy létezik $\tilde{A} : H \to H$ pozitív kiterjesztése. Felhasználva azt a tényt, hogy minden pozitív leképezés önadjungált, az $\tilde{A}$ leképezés mátrixa

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x \end{bmatrix}$$

alakú, ennek a determinánsa azonban tetszőleges $x \in \mathbb{C}$ érték esetén -1, vagyis nem létezik pozitív kiterjesztés.
Mielőtt kimondjuk a főtételt, egy segédtételt bizonyítunk sorozatteljes terek sűrű alterén értelmezett lineáris operátorok kiterjeszthetőségéről.

2.1.1. Állítás. *Legyen H Hilbert-tér, $\langle F,E\rangle$ pedig olyan anti-duális pár, ahol F gyengén sorozatteljes. Legyen továbbá M a H egy sűrű lineáris altere, és legyen*

$T_0 : M \to F$ egy $\sigma(M,H) - \sigma(F,E)$ folytonos lineáris operátor. Ekkor T_0-nak egyértelműen létezik $\sigma(H,H) - \sigma(F,E)$ folytonos lineáris kiterjesztése H-ra.

Bizonyítás. A kiterjesztés egyértelműsége nyilvánvaló következménye annak, hogy M sűrű.
A létezés bizonyításához vegyük észre, hogy létezik olyan $S : E \to H$ operátor, amelyre

$$\langle T_0 h, x\rangle = (h|Sx), \qquad h \in M, x \in E.$$

Megmutatjuk, hogy minden $h \in H$ elemhez egyértelműen létezik olyan $y \in F$, amivel

$$(h|Sx) = \langle y, x\rangle, \qquad \forall x \in E. \tag{2.1}$$

Jelölje N azon $h \in H$ elemek halmazát, amire létezik a (2.1) tulajdonságot kielégítő $y \in F$. Nyilvánvaló, hogy N a H Hilbert-tér egy M-et tartalmazó lineáris altere. Vegyük észre, hogy H legkisebb M-et tartalmazó sorozatteljes lineáris altere maga H, így elég azt belátni, hogy N sorozatteljes. Ehhez legyen (h_n) olyan N-ben futó sorozat, ami $\sigma(H,H)$-ban konvergál h-hoz. N definíciója miatt van olyan F-ben futó (y_n), hogy minden $x \in E$-re $(h_n|Sx) = \langle y_n, x\rangle$. Ebből következik, hogy

$$\lim\langle y_n, x\rangle = \lim(h_n|Sx) = (h|Sx), \qquad \forall x \in E.$$

Így beláttuk, hogy (y_n) Cauchy-sorozat, vagyis F sorozatteljessége miatt $\sigma(F,E)$-ben konverál egy y vektorhoz. Ezzel az y-nal teljesül a (2.1) tulajdonság, azaz $h \in N$. Ezzel beláttuk, hogy $N = H$. A (2.1) tulajdonságot kielégítő $T : H \to F, \quad h \mapsto y$ lineáris, $\sigma(H,H) - \sigma(F,E)$ folytonos kiterjesztése T_0-nak. □

A továbbiakban egy pozitív operátor esetén kulcsszerepet játszik az alábbi halmaz:

$$W(A) := \big\{x \in \operatorname{dom}(A) \,\big|\, \langle Ax, x\rangle \le 1\big\} \subseteq F \tag{2.2}$$

Elérkeztünk a fejezet legfontosabb eredményéhez, mely szükséges és elégséges feltételt nyújt Krein-Neumann kiterjesztés létezéséhez.

2.1.2. TÉTEL. *Legyen $\langle F, E\rangle$ w^*-sorozatteljes anti-duális pár és $A : E \supseteq \operatorname{dom}(A) \to F$ pozitív operátor, ahol $\operatorname{dom}(A)$ lineáris altere az E vektortérnek. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

(i) *Létezik az A operátornak egy $\tilde{A} : E \to F$ pozitív kiterjesztése.*

(ii) *A $W(A)$ halmaz $\beta(F,E)$-korlátos F-ben.*

(iii) *A $W(A)$ halmaz $\sigma(F,E)$-korlátos F-ben.*

(iv) *Minden $y \in E$ vektorhoz létezik $M_y \ge 0$, hogy minden $x \in \operatorname{dom}(A)$ mellett $|\langle Ax, y\rangle|^2 \le M_y \langle Ax, x\rangle$.*

Amennyiben a fenti feltételek teljesülnek, A-nak létezik egy kitüntetett A_N pozitív kiterjesztése, az úgynevezett Krein-Neumann kiterjesztés, amelyre $A_N \leq \tilde{A}$ tetszőleges $\tilde{A} : E \to F$ pozitív kiterjesztés esetén.

Bizonyítás. Először bebizonyítjuk, hogy a (iv) feltételből következik (i). Tekintsük A értékkészletén az alábbi belső szorzatot:

$$(Ax \,|\, Ax')_A := \langle Ax, x' \rangle, \qquad x, x' \in \operatorname{dom}(A). \tag{2.3}$$

Ez jóldefiniált, hiszen ha $Ax = Ax'$ és $Ay = Ay'$, akkor

$$\langle Ax, y \rangle = \langle Ax', y \rangle = \overline{\langle Ay, x' \rangle} = \overline{\langle Ay', x' \rangle} = \langle Ax', y' \rangle$$

A (iv) feltételből következik, hogy ha valamilyen $x \in \operatorname{dom}(A)$ esetén $\langle Ax, x \rangle = 0$, akkor $\langle Ax, y \rangle = 0$ tetszőleges $y \in E$-re, így $x = 0$, amiből következik, hogy $(\operatorname{ran}(A), (\cdot|\cdot)_A)$ prehilbert tér. Emlékeztetek rá, hogy egy prehilbert tér természetes módon beágyazható a biduálisába, és a beágyazó leképezés értékkészlete sűrű a biduális térben. Ezt nevezzük a prehilbert tér teljessé tételének. Nevezzük H_A-nak a $(\operatorname{ran}(A), (\cdot|\cdot)_A)$ prehilbert tér teljessé tételét a

$$J : H_A \supseteq \operatorname{ran}(A) \to F; \quad J(Ax) := Ax, \quad x \in \operatorname{dom}(A) \tag{2.4}$$

kanonikus beágyazással. (iv) miatt tetszőleges $y \in E$ esetén

$$|\langle Ax, y \rangle|^2 \leq M_y (Ax \,|\, Ax)_A, \quad x \in \operatorname{dom}(A),$$

így a

$$H_A \supseteq \operatorname{ran}(A) \ni Ax \mapsto \langle Ax, y \rangle$$

lineáris funkcionál folytonos a $(\cdot|\cdot)_A$ belső szorzat által indukált normára nézve. Ez azt jelenti, hogy a J beágyazás $\sigma(\operatorname{ran}(A), H_A) - \sigma(F, E)$ folytonos, és mivel $\operatorname{ran}(A)$ sűrű H_A-ban, a 2.1.1. Tétel és az F tér w*-sorozatteljessége miatt egyértelműen kiterjed H_A-ra. Mostantól ezt a kiterjesztést is jelölje $J \in \mathscr{L}(H_A; F)$. Legyen $J^* \in \mathscr{L}(E; H_A)$ a J adjungáltja. Ekkor tetszőleges $x, x' \in dom(A)$ esetén

$$(Ax'|J^*x)_A = \langle J(Ax'), x \rangle = \langle Ax', x \rangle = (Ax'|Ax)_A,$$

amiből

$$J^*x = Ax \quad x \in \operatorname{dom}(A). \tag{2.5}$$

A (2.5) egyenlőségből következik, hogy tetszőleges $x \in \operatorname{dom}(A)$ esetén $JJ^*x = J(Ax) = Ax$, azaz $JJ^* \in \mathscr{L}(E; F)$ az A operátor pozitív kiterjesztése. Jelölje A_N az így kapott kiterjesztést.

Most belátjuk, hogy az (i) feltétel implikálja (ii)-t. Amennyiben $\tilde{A} \in \mathscr{L}(E; F)$ az A operátor pozitív kiterjesztése, akkor nyilvánvalóan fennáll a $W(A) \subseteq W(\tilde{A})$ tartalmazás, ahol $W(A)$ a (2.2) egyenlőséggel definiált halmaz. Emiatt mostantól feltehetjük, hogy A az E-n mindenütt értelmezett, azaz $A \in \mathscr{L}(E; F)$. A $W(A)$ halmaz erős topológia szerinti korlátosságához azt kell megmutatni, hogy tetszőleges

$B \subseteq E$ gyengén korlátos részhalmaz esetén a B° poláris elnyeli $W(A)$-t. $A = JJ^*$ és mivel $W(A)$ a $(ran(A), (\cdot|\cdot)_A)$ prehilbert tér zárt egységgömbje, $W(A) \subseteq J\langle B_A \rangle$, ahol B_A jelöli a H_A zárt egységgömbjét. A Banach-Alaoglu tétel miatt B_A kompakt a gyenge-*-topológiára nézve és a $J\langle B_A \rangle$ halmazt elnyeli B° poláris. Ekkor persze B° elnyeli $W(A)$-t is.
A (ii)⇒(iii) implikáció abból következik, hogy a $\beta(F;E)$ topológia erősebb, mint $\sigma(F;E)$.
A (iii)⇒(iv) implikáció bizonyításához tegyük fel, hogy $W(A)$ gyenge-*-korlátos F-ben, és legyen $y \in E$. A folytonosságból következik, hogy $\langle \cdot, y \rangle$ korlátos $W(A)$-n amiből azt kapjuk, hogy az

$$M_y := \sup\left\{ |\langle Ax, y\rangle|^2 \,\middle|\, x \in \mathrm{dom}(A), \langle Ax, x\rangle \leq 1 \right\} < +\infty$$

választással teljesül (iv). Ezzel beláttuk a négy állítás ekvivalenciáját.

Hogy belássuk az A_N operátor minimalitását, először megmutatjuk, hogy

$$\langle A_N y, y\rangle = \sup\left\{ |\langle Ax, y\rangle|^2 \,\middle|\, x \in dom(A), \langle Ax, x\rangle \leq 1 \right\}, \quad y \in \mathrm{dom}(A). \tag{2.6}$$

Mivel $\mathrm{ran}(A)$ sűrű H_A-ban, azért tetszőleges $y \in E$ esetén

$$\begin{aligned}\langle A_N y, y\rangle &= (J^* y \,|\, J^* y)_A \\ &= \sup\left\{ |(Ax \,|\, J^* y)_A|^2 \,\middle|\, x \in \mathrm{dom}(A), (Ax \,|\, Ax)_A \leq 1 \right\} \\ &= \sup\left\{ |\langle Ax, y\rangle|^2 \,\middle|\, x \in \mathrm{dom}(A), \langle Ax, x\rangle \leq 1 \right\}\end{aligned}$$

Legyen $\widetilde{A} \in \mathscr{L}(E;F)$ tetszőleges pozitív kiterjesztés. Ekkor minden $y \in E$ esetén

$$\begin{aligned}\langle A_N y, y\rangle &= \sup\left\{ |\langle Ax, y\rangle|^2 \,\middle|\, x \in \mathrm{dom}(A), \langle Ax, x\rangle \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup\left\{ |\langle \tilde{A}x, y\rangle|^2 \,\middle|\, x \in E, \langle Ax, x\rangle \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup\left\{ \langle \tilde{A}x, x\rangle \langle \tilde{A}y, y\rangle \,\middle|\, x \in E, \langle Ax, x\rangle \leq 1 \right\} \\ &= \langle \tilde{A}y, y\rangle.\end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy $A_N \leq \tilde{A}$. □

A következő tétel arról szól, hogy a felülről egy adott operátorral korlátolt folytonos pozitív kiterjesztések közül van egy maximális.

2.1.3. TÉTEL. *Legyen $\langle F, E\rangle$ w^*-sorozatteljes anti-duális pár, $A : E \supseteq dom(A) \to F$ a fenti tétel feltételeinek megfelelő operátor, $B \in \mathscr{L}(E;F)$ pedig olyan pozitív operátor, melyre $A_N \leq B$. Ekkor A pozitív kiterjesztései között van olyan $A^B_{max} \in \mathscr{L}(E;F)$, amelyre $A^B_{max} \leq B$, és A tetszőleges olyan $\tilde{A} \in \mathscr{L}(E;F)$ kiterjesztésére, melyre $0 \leq \tilde{A} \leq B$, $\tilde{A} \leq A^B_{max}$ teljesül, azaz*

$$A^B_{max} = \max\left\{ \tilde{A} \in \mathscr{L}(E;F) \,\middle|\, 0 \leq \tilde{A} \leq B, A \subset \tilde{A} \right\}.$$

Sőt, egy $0 \leq \tilde{A} \leq B$ operátor pontosan akkor lesz A kiterjesztése, ha $A_N \leq \tilde{A} \leq A^B_{max}$:

$$[A_N, A^B_{max}] = \left\{ \tilde{A} \in \mathscr{L}(E;F) \,\middle|\, 0 \leq \tilde{A} \leq B, A \subset \tilde{A} \right\}. \tag{2.7}$$

Bizonyítás. Mivel $B-A_N$ pozitív kiterjesztése a $B-A$ operátornak, így létezik $(B-A)_N$. Legyen

$$A^B_{max} := B-(B-A)_N.$$

A^B_{max} definíciójából következik $0 \leq A^B_{max} \leq B$ és $A \subset A^B_{max}$. Ha $0 \leq \tilde{A} \leq B$ az A operátor kiterjesztése, akkor $B-A \subset B-\tilde{A}$ miatt $(B-A)_N \leq B-\tilde{A}$, így $\tilde{A} = B-(B-\tilde{A}) \leq A^B_{max}$. Legyen most $A_N \leq \tilde{A} \leq A^B_{max}$ tetszőleges. Legyen $x \in dom(A)$ rögzített. Ekkor minden $y \in E$ elemre

$$\begin{aligned}
|\langle \tilde{A}x - Ax, y\rangle|^2 &= |\langle (\tilde{A}-A_N)x, y\rangle|^2 \\
&\leq \langle (\tilde{A}-A_N)x, x\rangle \langle (\tilde{A}-A_N)y, y\rangle \\
&\leq \langle (A^B_{max}-A_N)x, x\rangle \langle (\tilde{A}-A_N)y, y\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Azt kaptuk, hogy $\tilde{A}x = Ax$, azaz $A \subset \tilde{A}$. □

A továbbiakban megmutatom a főtételnek egy alkalmazását. Legyen $\langle F, E\rangle$ w*-sorozatteljes anti-duális pár és Z egy nemüres halmaz. Jelölje $\mathscr{F}$ a véges tartójú $u : Z \to E$ függvények vektorterét, $\mathscr{F}^*$ pedig $\mathscr{F}$ konjugált algebrai duálisát. Azt mondjuk, hogy egy $K : Z \times Z \to \mathscr{L}(E;F)$ függvény pozitív definit operátorfüggvény (vagy röviden magfüggvény), amennyiben

$$\sum_{s,t \in Z} \langle K(s,t)u(s), u(t)\rangle \geq 0, \quad u \in \mathscr{F}. \tag{2.8}$$

A K magfüggvényt megfeleltethetjük annak az $A_K : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^*$ pozitív operátornak, amelyre

$$\langle A_K u, v\rangle := \sum_{s,t \in Z} \langle K(s,t)u(s), v(t)\rangle, \quad u, v \in \mathscr{F}.$$

Adott K és L magfüggvények esetén azt mondjuk, hogy $K \preceq L$, ha a hozzájuk tartozó A_K illetve A_L pozitív operátorokra $A_K \leq A_L$. A K magfüggvényt felfoghatjuk $\mathscr{F} \times \mathscr{F}^*$ altereként is $\{(u, A_K u) | u \in \mathscr{F}\}$ alakban, ezt nevezzük K grafikonjának. A következő tételben szükséges és elégséges feltételt mutatunk arra, hogy egy $A : \mathscr{F}_0 \to \mathscr{F}^*$ operátor által meghatározott altér mikor terjeszthető ki egy magfüggvény grafikonjává.

2.1.4. TÉTEL. *Legyen $\mathscr{F}_0$ az $\mathscr{F}$ lineáris altere, és $A : \mathscr{F}_0 \to \mathscr{F}^*$ pozitív operátor. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

(i) *Létezik $K : Z \times Z \to \mathscr{L}(E;F)$ magfüggvény, amelyre $A \subseteq A_K$,*

(ii) *Minden $v \in \mathscr{F}$ elemhez létezik olyan $M_v \geq 0$, amelyre*

$$|\langle Au, v\rangle|^2 \leq M_v \langle Au, u\rangle, \quad \forall u \in \mathscr{F}_0$$

Továbbá, létezik olyan K, amely legkisebb abban az értelemben, hogy $K \preceq L$ minden olyan L magfüggvényre, amelyre $A \subseteq A_L$.

Bizonyítás. Az (i) állításból $M_v := \langle A_K v, v\rangle$ választással következik (ii).
Az ellenkező irányú implikációhoz azt használjuk, hogy $\mathscr{F}$ és $\mathscr{F}^*$ a kiértékeléssel gyenge-*-sorozatteljes anti-duális párt alkot, így alkalmazható a 2.1.1. Tétel. A Tétel állítása szerint létezik A_N Krein-Neumann kiterjesztés, így már csak azt kell megmutatnunk, hogy létezik olyan K magfüggvény, ami éppen az A_N operátort indukálja. Bevezetjük minden rögzített $s \in Z$ és $x \in E$ esetén az $u_{s,x} \in \mathscr{F}$ függvényt, amelyre

$$u_{s,x}(s') := \delta_s(s') \cdot x, \quad s' \in Z,$$

ahol δ_s az s-be koncentrált Dirac-függvény. $s,t \in Z$ elemek esetén definiáljuk a $K(s,t) : E \to F$ lineáris operátort a következőképp:

$$\langle K(s,t)x, y\rangle := \langle A_N u_{s,x}, u_{t,y}\rangle, \quad x,y \in E.$$

A_N szimmetriája alapján

$$\langle K(s,t)x, y\rangle = \langle A_N u_{s,x}, u_{t,y}\rangle = \overline{\langle A_N u_{t,y}, u_{s,x}\rangle} = \overline{\langle K(t,s)y, x\rangle},$$

amiből következik, hogy $K(s,t) \in \mathscr{L}(E;F)$ (illetve az, hogy $K(s,t)^* = K(t,s)$). Mivel minden $u \in \mathscr{F}$ függvényt felírhatunk $\sum_{s\in Z} u_{s,u(s)}$ alakban, azt kapjuk, hogy

$$\langle A_N u, v\rangle = \sum_{s,t\in Z} \langle A_N u_{s,u(s)}, u_{t,v(t)}\rangle = \sum_{s,t\in Z} \langle K(s,t)u(s), v(t)\rangle,$$

ami éppen azt jelenti, hogy az A_N Krein-Neumann kiterjesztést a K magfüggvény indukálja. □

2.2. A Banach-tér esete

Most megvizsgáljuk azt a speciális esetet, amikor az anti-dualitás a kiértékelés egy E Banach-tér és az $\bar{E}^*$ konjugált topológiai duálisa által alkotott pár felett. Az 1.3.5 állítás értelmében $\bar{E}^*$ gyengén sorozatteljes, így alkalmazhatjuk a főtételünket az $\langle \bar{E}^*, E\rangle$ anti-duális párra. Először belátjuk a Schwarz egyenlőtlenség egy megfelelő általánosítását.

2.2.1. Állítás. *Legyen E Banach-tér és $A_i : E \to \bar{E}^*$ $(1 \le i \le n)$ pozitív operátorok. Ekkor vektorok tetszőleges $x_i \in E$ $(1 \le i \le n)$ véges rendszere esetén teljesül az alábbi egyenlőtlenség:*

$$\|\sum_{j=1}^n A_j x_j\|^2 \le \|\sum_{j=1}^n A_j\| \cdot \sum_{j=1}^n \langle A_j x_j, x_j\rangle. \tag{2.9}$$

Sőt, $C := \|\sum_{j=1}^n A_j\|$ a legkisebb konstans, amivel az egyenlőtlenség fennáll.

Bizonyítás. Legyen $K := \bigoplus_{j=1}^{n} H_{A_j}$ Hilbert-tér, $V : E \to K$; pedig azon lineáris operátor, melyet a $Vx := (A_1x, A_2x, \ldots, A_nx)$ $(x \in E)$ egyenlőséggel definiálunk. V korlátos, és az operátornormájára $\|V\|^2 \le \|\sum_{j=1}^{n} A_j\|$. Az adjungáltjára fennáll $V^*(A_1x_1, \ldots, A_nx_n) = \sum_{j=1}^{n} A_jx_j$, $(x_1, \ldots, x_n \in E)$. Mivel $\|V^*\| = \|V\|$, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\|\sum_{j=1}^{n} A_jx_j\|^2 &= \|V^*(A_1x_1, \ldots, A_nx_n)\|^2 \\ &\le \|V^*\|^2 \cdot \|(A_1x_1, \ldots, A_nx_n)\|^2 \\ &\le \|\sum_{j=1}^{n} A_j\| \cdot \sum_{j=1}^{n} \langle A_jx_j, x_j\rangle.\end{aligned}$$

A minimalitás bizonyításához legyen $C \ge 0$ rögzített konstans, amelyre

$$\|\sum_{j=1}^{n} A_jx_j\|^2 \le C \cdot \sum_{j=1}^{n} \langle A_jx_j, x_j\rangle.$$

Mivel

$$C \cdot \sum_{j=1}^{n} \langle A_jx_j, x_j\rangle \le C \cdot \|\sum_{j=1}^{n} A_j\| \cdot \|x\|^2,$$

megkapjuk, hogy

$$\|\sum_{j=1}^{n} A_j\| \le C,$$

ami bizonyítandó volt. □

Az $n = 1$ speciális esetben azt kapjuk, hogy

$$\|Ax\|^2 \le \|A\| \langle Ax, x\rangle, \quad x \in E. \tag{2.10}$$

Most kimondjuk a főtétel következményét Banach-tér esetében a Krein-Neumann kiterjesztés kommutálási tulajdonságaival.

2.2.2. Tétel. *Legyen E Banach-tér és $A : E \supseteq \mathrm{dom}(A) \to \bar{E}^*$ pozitív lineáris operátor. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

(i) *Létezik az A operátornak $\tilde{A} \in \mathscr{L}(E; \bar{E}^*)$ korlátos pozitív kiterjesztése.*

(ii) *Létezik $M \ge 0$ konstans, amivel*

$$\|Ax\|^2 \le M \cdot \langle Ax, x\rangle, \quad x \in \mathrm{dom}(A), \tag{2.11}$$

(iii) *Minden $y \in E$ elemhez létezik olyan $M_y \ge 0$, amivel*

$$|\langle Ax, y\rangle|^2 \le M_y \cdot \langle Ax, x\rangle, \quad x \in \mathrm{dom}(A).$$

Amennyiben teljesülnek a fenti feltételek, létezik az A operátor A_N Krein-Neumann kiterjesztése, amely a legkisebb A pozitív kiterjesztései közül. A_N operátornormájára

$$\|A_N\| = \inf\left\{M \geq 0 \,\middle|\, \forall x \in \operatorname{dom}(A) : \|Ax\|^2 \leq M \cdot \langle Ax, x\rangle\right\} \tag{2.12}$$

Ha $B, C \in \mathscr{L}(E;E)$ olyan folytonos operátorok, melyekre dom(A) invariáns, $C^*A \subset AB$, és $B^*A \subset AC$, akkor

$$C^*A_N = A_N B \tag{2.13}$$

és

$$B^*A_N = A_N C. \tag{2.14}$$

Bizonyítás. Az (i) és (iii) állítás ekvivalenciája a 2.1.2. Tétel közvetlen következménye. Az (i)⇒(ii) implikáció a (2.10) egyenlőtlenségből következik $M := \|\tilde{A}\|$ választással. Ahhoz, hogy belássuk, hogy (ii) implikálja a (iii) állítást, rögzítsünk egy $y \in E$ elemet. Ekkor

$$|\langle Ax, y\rangle|^2 \leq \|Ax\|^2\|y\|^2 \leq M \cdot \|y\|^2 \cdot \langle Ax, x\rangle, \quad x \in \operatorname{dom}(A).$$

Ebből következik (iii) $M_y := M \cdot \|y\|^2$ választással.
Hogy bebizonyítsuk a (2.12) egyenlőséget, jelölje M_A a benne szereplő infinumot. A (2.23) egyenlőtlenségből következik, hogy $M_A \leq \|A_N\|$. Az ellenkező irányú egyenlőtlenség bizonyításához legyen $y \in E$, $\|y\| \leq 1$. Ekkor minden $x \in \operatorname{dom}(A)$ esetén

$$|\langle Ax, y\rangle|^2 \leq \|Ax\|^2 \leq M \cdot \langle Ax, x\rangle,$$

amiből a (2.6) képlet miatt $\langle Ay, y\rangle \leq M$ adódik. Ekkor viszont $\|A_N\|^2 \leq M^2$, hiszen

$$\sup_{\substack{y,z \in E \\ \|y\|=\|z\|=1}} |\langle A_N y, z\rangle|^2 \leq \sup_{\substack{y,z \in E \\ \|y\|=\|z\|=1}} \langle A_N y, y\rangle\langle A_N z, z\rangle \leq M^2.$$

A kommutálási tulajdonság bizonyításához bevezetjük a $\hat{B}$ és $\hat{C}$ operátorokat a *ran*$(A) \subseteq H_A$ sűrű lineáris altéren az alábbi módon:

$$\hat{B}(Ax) := ABx, \quad \hat{C}(Ax) := ACx, \quad x \in \operatorname{dom}(A).$$

A fenti $\hat{B}$ és $\hat{C}$ operátorokra az alábbi teljesül:

$$(\hat{B}(Ax)|Ay)_A = (Ax|\hat{C}(Ay))_A, \quad x, y \in \operatorname{dom}(A),$$

hiszen

$$(ABx|Ay)_A = \langle ABx, y\rangle = \langle Ax, Cy\rangle = (Ax|ACy)_A.$$

Most belátjuk, hogy $\hat{B}$ és $\hat{C}$ folytonosak és egymás adjungáltjai.
A B és C operátorokra tett feltételeink alapján

$$\langle ACBx, y\rangle = \langle Ax, CBy\rangle, \quad \langle ABCx, y\rangle = \langle Ax, BCy\rangle, \quad x \in \operatorname{dom}(A), y \in H_A.$$

$\hat{B}$ és $\hat{C}$ definíciójából tetszőleges $x \in \mathrm{dom}(A)$ elemre

$$(\hat{B}(Ax)|\hat{B}(Ax))_A = (ABx, ABx)_A = \langle ABx, Bx\rangle = \langle Ax, CBx\rangle = (Ax|ACBx)_A$$

és

$$(\hat{C}(Ax)|\hat{C}(Ax))_A = (ACx, ACx)_A = \langle ACx, Cx\rangle = \langle Ax, BCx\rangle = (Ax|ABCx)_A.$$

Az eddigiek illetve a Schwarz-egyenlőtlenség alapján azt kapjuk, hogy tetszőleges $x \in \mathrm{dom}(A)$ esetén

$$\begin{aligned}(\hat{B}(Ax)|\hat{B}(Ax))_A &\leq (Ax|Ax)_A^{\frac{1}{2}}(ACBx|ACBx)_A^{\frac{1}{2}}\\ &= (Ax|Ax)_A^{\frac{1}{2}}\langle ACBx, CBx\rangle^{\frac{1}{2}}\\ &= (Ax|Ax)_A^{\frac{1}{2}}\langle Ax, (CB)^2x\rangle^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

amiből teljes indukcióval következik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(\hat{B}(Ax)|\hat{B}(Ax))_A \leq (Ax|Ax)_A^{1-2^{-n}}\langle Ax, (CB)^{2^n}\rangle^{2^{-n}},$$

ahol az indukciós lépés az alábbi módon történik:

$$\begin{aligned}\langle Ax, (CB)^{2^n}x\rangle &= (Ax|A(CB)^{2^n}x)_A\\ &\leq (Ax|Ax)_A^{\frac{1}{2}}(A(CB)^{2^n}x|A(CB)^{2^n}x)_A^{\frac{1}{2}} =\\ &(Ax|Ax)_A^{\frac{1}{2}}\langle A(CB)^{2^n}x, (CB)^{2^n}x\rangle^{\frac{1}{2}} =\\ &(Ax|Ax)_A^{\frac{1}{2}}\langle Ax, (CB)^{2^{n+1}}x\rangle^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Ehhez hasonlóan kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathrm{dom}(A)$ esetén

$$(\hat{C}(Ax)|\hat{C}(Ax))_A \leq (Ax|Ax)_A^{1-2^{-n}}\langle Ax, (BC)^{2^n}\rangle^{2^{-n}}.$$

Ebből viszont az következik, hogy ha $Ax \neq 0$, akkor

$$(\hat{B}(Ax)|\hat{B}(Ax))_A \leq (Ax|Ax)_A\left[\frac{\|Ax\|\cdot\|x\|}{(Ax|Ax)_A}\right]^{2^{-n}}\|(CB)^{2^n}\|^{2^{-n}}, \quad x \in \mathrm{dom}(A),$$

és

$$(\hat{C}(Ax)|\hat{C}(Ax))_A \leq (Ax|Ax)_A\left[\frac{\|Ax\|\cdot\|x\|}{(Ax|Ax)_A}\right]^{2^{-n}}\|(BC)^{2^n}\|^{2^{-n}}, \quad x \in \mathrm{dom}(A).$$

Az $n \to \infty$ határátmenettel adódik, hogy

$$(\hat{B}(Ax)|\hat{B}(Ax))_A \leq r(CB)(Ax|Ax)_A, \quad x \in \mathrm{dom}(A),$$

és
$$(\hat{C}(Ax)|\hat{C}(Ax))_A \leq r(BC)(Ax|Ax)_A, \quad x \in \mathrm{dom}(A).$$
Ebből látszik, hogy az $r(CB)$ és az $r(BC)$ spektrálsugarak megegyeznek, illetve hogy mind a $\hat{B}$, mind a $\hat{C}$ operátor kiterjeszthető H_A-beli operátorrá, és korlátosak az $r(CB)^{\frac{1}{2}} = r(BC)^{\frac{1}{2}}$ korláttal.
Most a $\hat{B}$ és a $\hat{C}$ definíciójából következik, hogy

$$\begin{aligned}(\hat{B}(Ax)|Ay)_A &= (ABx|Ay)_A\\ &= \langle ABx, y\rangle\\ &= \langle C^*Ax, y\rangle\\ &= \langle Ax, Cy\rangle\\ &= (Ax|ACy)_A\\ &= (Ax|\hat{C}(Ay))_A\end{aligned}$$

tetszőleges $x, y \in \mathrm{dom}(A)$ elemekre, de mivel $\mathrm{ran}(A)$ sűrű a H_A Hilbert-térben, és $\hat{B}$ illetve $\hat{C}$ folytonos operátorok, határátmenettel adódik, hogy ezek egymás adjungáltjai a teljes H_A Hilbert-téren.
Most megmutatjuk, hogy $\mathrm{ran}(J^*) \subseteq \mathrm{dom}(\hat{B})$ és $J^*B = \hat{B}J^*$. Legyen $y \in E$ és $x \in dom(A)$. Ekkor $(\hat{C}(Ax)|J^*y)_A = \langle ACx, y\rangle = \langle Ax, By\rangle = (Ax|J^*By)_A$, hiszen $J^*y \in \mathrm{dom}(\hat{C}^*)$, és $\hat{C}^*J^*y = J^*By$. Mivel $\hat{B}$ és $\hat{C}$ egymás konjugáltjai, azt kaptuk, hogy $J^*B = \hat{B}J^*$. Hasonlóan $J^*C = \hat{C}J^*$. Az alábbi eredményre jutottunk:
$$A_NB = JJ^*B = J\hat{B}J^* = (J\hat{B}^*J^*)^* = (J\hat{C}J^*)^* = (A_NC)^* = C^*A_N,$$
és hasonlóan, $A_NC = B^*A_N$. □

Az előző tétel következményeként kimondjuk a Hilbert-terekre vonatkozó klasszikus eredményt.

2.2.3. TÉTEL. *Legyen H Hilbert-tér és $A : H \supseteq dom(A) \to H$ lineáris operátor. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

(i) *Létezik az A operátornak $\tilde{A} \in \mathscr{B}(H)$ folytonos pozitív kiterjesztése,*

(ii) *Létezik $M \geq 0$ konstans, amivel*
$$\|Ax\|^2 \leq M \cdot (Ax|x), \quad x \in dom(A),$$

(iii) *Minden $y \in H$ elemhez létezik olyan $M_y \geq 0$, hogy*
$$(Ax|y) \leq M_y \cdot (Ax|x), \quad x \in dom(A).$$

A fenti feltételek teljesülése esetén létezik az A operátor A_N Krein-Neumann kiterjesztése, melynek operátornormájára

$$\|Ax\| = \inf\{M \geq 0 | \forall x \in dom(A) : \|Ax\|^2 \leq M \cdot (Ax|x)\}.$$

Ha $B, C \in \mathscr{B}(H)$ korlátos operátorok, melyekre $dom(A)$ invariáns, $C^*A \subset AB$, és $B^*A \subset AC$, akkor az A Krein-Neumann kiterjesztésére

$$C^*A_N = A_N B$$

és

$$B^*A_N = A_N C.$$

Megjegyezzük, hogy egy $A \in \mathscr{B}(H)$ pozitív operátor operátornormájára pontosan akkor áll fenn $\|A\| \leq M$, ha $A \leq M \cdot I$, ahol I a H Hilbert-tér identikus operátora. Ezt felhasználva a 2.1.3. Tétel következménye az alábbi tétel.

2.2.4. TÉTEL. *Legyen $A : dom(A) \to H$ az előző tétel feltételeit kielégítő pozitív operátor. Ekkor bármely $M \geq \|A_N\|$ konstanshoz létezik az A operátornak olyan A^M_{max} pozitív kiterjesztése, melyre $\|A^M_{max}\| \leq M$, és A összes olyan $\tilde{A}$ kiterjesztésére, melyre $\|\tilde{A}\| \leq M$ teljesül, fennáll $\tilde{A} \leq A^M_{max}$, azaz*

$$A^M_{max} = \max\left\{\tilde{A} \in \mathscr{B}(H) \,\middle|\, \tilde{A} \geq 0, A \subset \tilde{A}, \|\tilde{A}\| \leq M\right\}.$$

Sőt, fennáll, hogy

$$[A_N, A^M_{max}] = \left\{\tilde{A} \in \mathscr{B}(H) \,|\, \tilde{A} \geq 0, A \subset \tilde{A}, \|\tilde{A}\| \leq M\right\}.$$

A most következő tétel úgynevezett hiányos operátormátrixok kiegészíthetőségével kapcsolatos. Legyen H Hilbert-tér, és tekintsük a $H = H_0 \oplus H_0^\perp$ ortogonális felbontását. Ekkor egy $A : H \to H$ operátort felírhatunk

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

mátrix alakban, ahol $A_{11} : H_0 \to H_0$, $A_{12} : H_0^\perp \to H_0$, $A_{21} : H_0 \to H_0^\perp$, $A_{22} : H_0^\perp \to H_0^\perp$ operátorok.

2.2.5. TÉTEL. *Legyen $A := \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & * \end{bmatrix}$ hiányos operátormátrix a $H = H_0 \oplus H_0^\perp$ Hilbert-téren, és legyen $\mathrm{dom}(A) = H_0$. Tegyük fel, hogy $A_{11} \geq 0$ és $A_{21} = A_{12}^*$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

(i) *létezik olyan $A_{22} \geq 0$, amellyel A pozitív, azaz $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \geq 0$,*

(ii) $A_{21}^* A_{21} \le M \cdot A_{11}$ *megfelelő* $M \ge 0$ *konstansra,*

(iii) $\operatorname{ran}(A_{21}^*) \subseteq \operatorname{ran}(A_{11}^{1/2})$.

Bizonyítás. Tegyük fel az (i) állítást: $B := \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \ge 0$. Mivel B pozitív operátor, $B^2 \le \|B\| \cdot B$, így tetszőleges $x \in H_0$ elemre

$$\|A_{11}x\|^2 + \|A_{21}x\|^2 = \left\| B \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right\|^2 \le \|B\| \cdot \left(B \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \|B\| \cdot (A_{11}x|x).$$

Mivel $A_{11}^2 \le \|A_{11}\| \cdot A_{11}$, ebből következik (ii).
A (ii) és a (iii) állítás ekvivalenciája azon múlik, hogy az 1.1.1 Douglas faktorizációs tétel szerint (iii) azzal ekvivalens, hogy minden $y \in H_0$ vektorhoz létezik olyan $\lambda_y \ge 0$ konstans, hogy $x \in H_0$ esetén

$$|(x|A_{21}^* y)| \le \lambda_y \cdot \|A_{11}^{\frac{1}{2}} x\|.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy

$$|(x|A_{21}^* A_{21} x)| \le \lambda_{A_{21}x} \cdot |(x|A_{11}x)|.$$

Most tegyük fel, hogy igaz (ii), ekkor

$$\left\| A \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right\|^2 \le \|A_{11}\| \cdot (A_{11}x|x) + M \cdot (A_{11}x|x), \quad x \in H_0,$$

ezért a 2.1.1. Tétel értelmében A-nak létezik korlátos pozitív kiterjesztése, azaz A kiegészíthető pozitív operátorrá. □

2.3. Ábrázolható funkcionálok kiterjesztései

Ebben a részben megmutatom, hogyan alkalmazhatók az eddigi eredményeink *-algebrák pozitív funkcionáljaira.
Emlékeztetek a pozitív illetve ábrázolható funkcionálok fogalmára. Legyen $\mathscr{A}$ nem feltétlenül egységelemes komplex *-algebra. Azt mondjuk, hogy egy $f : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál pozitív, ha

$$f(a^* a) \ge 0, \qquad a \in \mathscr{A}.$$

Azt mondjuk, hogy egy $f : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál ábrázolható, ha létezik egy H Hilbert-tér, egy $\pi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(H)$ *-reprezentáció (azaz *-homomorfizmus) és egy $\xi \in H$ vektor, melyekre

$$f(a) = (\pi(a)\xi|\xi), \quad a \in \mathscr{A}.$$

Megjegyezzük, hogy minden ábrázolható funkcionál pozitív, de ennek a fordítottja általában nem igaz. Legyen ugyanis $\mathscr{A}$ olyan *-algebra, ahol tetszőleges $a,b \in \mathscr{A}$ elemek esetén $ab = 0$. Ekkor definíció szerint minden $f : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ funkcionál pozitív, de az alább definiált Hilbert-korlátosság miatt kizárólag az azonosan 0 funkcionál ábrázolható.
Legyen most $\mathscr{I}$ az $\mathscr{A}$ balideálja, és $f : \mathscr{I} \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál. A továbbiakban szükséges és elégséges feltételeket adunk arra, hogy egy ilyen f ábrázolható módon kiterjed $\mathscr{A}$-ra. Mivel f lineáris funkcionál, megfeleltethetjük egy $A : \mathscr{I} \to \bar{\mathscr{A}}^*$ operátornak az

$$\langle Aa, x\rangle := f(x^*a), \quad x \in \mathscr{A}, a \in \mathscr{I} \tag{2.15}$$

azonosítással. A pontosan akkor pozitív, ha f pozitív, azaz minden $a \in \mathscr{I}$ elemre $f(a^*a) \geq 0$.
Innentől a funkcionálok ábrázolható kiterjesztéseire fókuszálunk. Azt mondjuk, hogy f Hilbert-korlátos, ha van olyan $M \geq 0$ konstans, amellyel

$$|f(a)|^2 \leq Mf(a^*a), \quad \forall a \in \mathscr{I}, \tag{2.16}$$

és akkor nevezzük f-et admisszibilisnek, ha minden $x \in \mathscr{A}$ elemhez van olyan $\lambda_x \geq 0$, amellyel

$$f(a^*x^*xa) \leq \lambda_x f(a^*a), \quad \forall a \in \mathscr{I}. \tag{2.17}$$

2.3.1. TÉTEL. *Legyen $\mathscr{A}$ *-algebra, $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{A}$ balideál, és $f : \mathscr{I} \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(i) *létezik $\tilde{f} \in \mathscr{A}^*$ ábrázolható funkcionál, amely kiterjeszti f-et,*

(ii) *f admisszibilis és Hilbert-korlátos.*

Amennyiben létezik reprezentálható kiterjesztés, létezik egy f_N minimális kiterjesztés, azaz melyre $f_N \leq \tilde{f}$ tetszőleges $\tilde{f}$ ábrázolható kiterjesztés esetén.

Bizonyítás. (i)⇒(ii): Legyen $\tilde{f}$ az f ábrázolható kiterjeszése.

$$\tilde{f}(a^*x^*xa) = (\pi(xa)\xi|\pi(xa)\xi) \leq (\pi(x)|\pi(x))(\pi(a)\xi|\pi(a)\xi) = \|\pi(x)\|^2\tilde{f}(a^*a),$$

azaz $\tilde{f}$ admisszibilis $\lambda_x := \|\pi(x)\|^2$ választással.

$$|\tilde{f}(a)|^2 = |(\pi(a)\xi|\xi)|^2 \leq \|\xi\|^2(\pi(a)\xi|\pi(a)\xi) = \|\xi\|^2(\pi(a^*a)\xi|\xi) = \|\xi\|^2\tilde{f}(a^*a),$$

így $M := \|\xi\|^2$ választással $\tilde{f}$ Hilbert-korlátos.
(ii)⇒(i): Belátjuk, hogy ha f admisszibilis és Hilbert-korlátos lineáris funkcionál az $\mathscr{A}$ *-algebra $\mathscr{I}$ balideálján, akkor létezik minimális ábrázolható kiterjesztése. Tekintsük azt az $A : \mathscr{I} \to \bar{\mathscr{A}}^*$ operátort, melyre

$$\langle Aa, x\rangle := f(x^*a), \quad x \in \mathscr{A}, a \in \mathscr{I}.$$

Mivel tetszőleges $x \in \mathscr{A}$ és $a \in \mathscr{I}$ esetén

$$|\langle Aa, x\rangle| = |f(x^*a)| \leq Mf(a^*xx^*a) \leq \lambda_x Mf(a^*a) = \lambda_x M\langle Aa, a\rangle,$$

megállapíthatjuk, hogy a 2.1.2 Tétel értelmében létezik az A operátor $A_N = JJ^* : \mathscr{A} \to \bar{\mathscr{A}}^*$ Krein-Neumann kiterjesztése. Tekintsük a H_A Hilbert-teret, és legyen minden $x \in \mathscr{A}$ elemhez

$$\pi_f(x)(Aa) := A(xa), \quad a \in \mathscr{I}$$

operátor.
$\pi_f(x)$ korlátossága az admisszibilitásból következik:

$$\|\pi_f(x)(Aa)\|_A^2 = \langle A(xa), xa\rangle = f(a^*x^*xa) \leq \lambda_x f(a^*a) = \lambda_x \|Aa\|_A^2.$$

A korlátosság miatt $\pi_f(x)$ egyértelműen kiterjed $\mathscr{B}(H_A)$ operátorrá.
Azt állítjuk, hogy a $\pi_f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(H_A)$ *-homomorfizmus. Az nyilvánvaló, hogy lineáris és szorzattartó. Ahhoz, hogy belássuk, hogy π_f invariáns az involúcióra nézve, rögzítsük az $x \in \mathscr{A}$ és $a, b \in \mathscr{I}$ elemeket. Ekkor

$$\begin{aligned}(\pi_f(x)(Aa)|Ab)_A &= \langle A(xa), b\rangle \\ &= f(b^*xa) \\ &= f((x^*b)^*a) \\ &= \langle Aa, x^*b\rangle \\ &= (Aa|\pi_f(x^*)(Ab))_A,\end{aligned}$$

amiből következik, hogy $\pi_f(x)^* = \pi_f(x^*)$, mivel $\operatorname{ran}(A)$ sűrű altér H_A-ban. Most megmutatjuk, hogy létezik olyan $\zeta_f \in H_A$ vektor, amelyre

$$f(a) = (\pi_f(a)\zeta_f|\zeta_f)_A, \quad x \in \mathscr{I}.$$

Tekintsük ehhez a

$$\varphi : H_A \supseteq \operatorname{ran}(A) \to \mathbb{C}, \quad \varphi(Aa) := f(a), \quad a \in \mathscr{I} \tag{2.18}$$

lineáris funkcionált, amely korlátos az f Hilbert-korlátossága miatt:

$$|\varphi(Aa)|^2 \leq Mf(a^*a) = M\|Aa\|_A^2, \quad a \in \mathscr{I}.$$

A Riesz reprezentációs tétel értelmében egyértelműen létezik a φ funkcionálhoz $\zeta_f \in H_A$ reprezentáns vektor, amelyre

$$\varphi(Aa) = (Aa|\zeta_f)_A, \quad a \in \mathscr{I}. \tag{2.19}$$

Azt állítjuk, hogy

$$f_N(x) := \overline{\langle J\zeta_f, x\rangle}, \quad x \in \mathscr{A} \tag{2.20}$$

olyan ábrázolható funkcionál, amelyre $f \subset f_N$. Ehhez először azt fogjuk belátni, hogy

$$\pi_f(x)\zeta_f = J^* x, \quad x \in \mathscr{A}. \tag{2.21}$$

Legyen $x \in \mathscr{A}$ és $a \in \mathscr{I}$ rögzített. Ekkor $\operatorname{ran}(A)$ sűrűsége miatt

$$(Aa|\pi_f(x)\zeta_f)_A = (A(x^*a)|\zeta_f)_A = f(x^*a) = \langle Aa, x\rangle = \langle J^*(Aa), x\rangle = (Aa|J^*x)_A.$$

Ekkor tetszőleges $a \in \mathscr{I}$ elemre $f(a) = (Aa|\zeta_f)_A = (J^*a|\zeta_f)_A = \overline{\langle J\zeta_f, a\rangle} = f_N(a)$, így $f \subset f_N$. Másrészt tudjuk, hogy

$$(\pi_f(x)\zeta_f|\zeta_f)_A = (J^*x|\zeta_f)_A = \overline{\langle J\zeta_f, x\rangle} = f_N(x), \quad x \in \mathscr{A},$$

így f_N ábrázolható. Már csak f_N minimalitását kell belátni. Legyen $x \in \mathscr{A}$ rögzített. Ekkor

$$f_N(x^*x) = \overline{\langle J\zeta_f, x^*x\rangle} = (J^*(x^*x)|\zeta_f)_A = (J^*x|J^*x)_A,$$

de $\operatorname{ran}(A)$ sűrű H_A-ban, ezért

$$\begin{aligned}(J^*x|J^*x)_A &= \sup\left\{|(Aa|J^*x)_A|^2 \,\middle|\, a \in \mathscr{I}, \|Aa\|_A^2 \le 1\right\}\\ &= \sup\left\{|f(x^*a)|^2 \,\middle|\, a \in \mathscr{I}, f(a^*a) \le 1\right\}.\end{aligned}$$

Most legyen $\tilde{f}$ az f tetszőleges ábrázolható kiterjesztése. Mivel $\tilde{f} = \tilde{f}_N$,

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x^*x) &= \sup\left\{|\tilde{f}(x^*a)|^2 \,\middle|\, a \in \mathscr{I}, f(a^*a) \le 1\right\}\\ &\ge \sup\left\{|f(x^*a)|^2 \,\middle|\, a \in \mathscr{I}, f(a^*a) \le 1\right\}\\ &= f_N(x^*x),\end{aligned}$$

így $f_N \le \tilde{f}$, amivel igazoltuk a tételt. □

A továbbiakban f_N-t az f Krein-Neumann kiterjesztésének nevezzük.

Megjegyzés. A bizonyítás során az explicit formulát nyertünk f_N-re, és a pozitív elemeken felvett értékére:

$$f_N(x) = \overline{\langle J\zeta_f, x\rangle}, \quad x \in \mathscr{A}, \tag{2.22}$$

illetve

$$f_N(x^*x) = \sup\left\{|f(x^*a)|^2 \,\middle|\, a \in \mathscr{I}, f(a^*a) \le 1\right\}. \tag{2.23}$$

A fenti tétel egy egyszerűbb változatát kapjuk, amennyiben az $\mathscr{A}$ *-algebra egységelemes.

2.3.2. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy $\mathscr{A}$ egységelemes *-algebra, és $f : \mathscr{I} \to \mathbb{C}$ admisszibilis funkcionál. Ekkor f Hilbert-korlátos, és a Krein-Neumann kiterjesztésére az alábbi teljesül:*

$$f_N(x) = \overline{\langle A_N 1, x\rangle}, \quad x \in \mathscr{A}. \tag{2.24}$$

Bizonyítás. Legyen $a \in \mathscr{I}$, ekkor

$$|f(a)|^2 = |f(1^*a)|^2 \leq f(1)f(a^*a),$$

így f Hilbert-korlátos. Másrészt

$$(Aa|J^*1)_A = \langle Aa, 1\rangle = f(a) = (Aa|\zeta_f)_A,$$

így $J^*1 = \zeta_f$. Ebből következik, hogy

$$\langle A_N 1, x\rangle = (J^*1|J^*x)_A = (\zeta_f|J^*x)_A = \langle J\zeta_f, x\rangle = \overline{f_N(x)}, \quad x \in \mathscr{A},$$

ezzel igazoltuk a tételt. □

Most bebizonyítjuk a 2.1.3. Tétel megfelelőjét *-algebrák ábrázolható funkcionáljaira.

2.3.3. TÉTEL. *Legyen $f : \mathscr{I} \to \mathbb{C}$ admisszibilis és Hilbert-korlátos funkcionál, $g \in \mathscr{A}^*$ pedig olyan ábrázolható funkcionál, melyre $f_N \leq g$. Ekkor létezik az f funkcionálnak olyan $f^g_{max} \in \mathscr{A}^*$ ábrázolható kiterjesztése, melyre $f^g_{max} \leq g$, és f bármely $\tilde{f}$ ábrázolható kiterjesztésére fennáll $\tilde{f} \leq f^g_{max}$, azaz*

$$f^g_{max} = \max\left\{\tilde{f} \in \mathscr{A}^* \,\middle|\, \tilde{f} \leq g, f \subset \tilde{f}\right\}.$$

Egy $\tilde{f} \leq g$ ábrázolható funkcionál pontosan akkor f kiterjesztése, ha $f_N \leq \tilde{f} \leq f^g_{max}$, azaz

$$[f_N, f^g_{max}] = \left\{\tilde{f} \in \mathscr{A}^* \,\middle|\, \tilde{f} \leq g, f \subset \tilde{f}\right\}.$$

Bizonyítás. $0 \leq g - f_N \leq g$ miatt $g - f_N$ ábrázolható az 1.1.3 Állítás értelmében. Mivel $g - f \subset g - f_N$, létezik $(g - f)_N$. Legyen

$$f^g_{max} := g - (g - f)_N,$$

ami szintén ábrázolható, és a korábbi bizonyításhoz hasonlóan ellenőrizhetjük, hogy ez is rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal.
Legyen most $\tilde{f} \in [f_N, f^g_{max}]$ és $a \in \mathscr{I}$. Ekkor a Hilbert-korlátosság miatt van olyan $M' \geq 0$ konstans, amire

$$|(\tilde{f} - f)(a)|^2 = |(\tilde{f} - f_N)(a)|^2 \leq M'(\tilde{f} - f_N)(a^*a) \leq M'(f^g_{max} - f_N)(a^*a) = 0.$$

Tehát $f \subset \tilde{f}$, amivel igazoltuk a tételt. □

3. fejezet

Szimmetrikus és duális kiterjesztések

3.1. Szimmetrikus operátorok

M. G. Krein klasszikus eredménye [8] szerint Hilbert-terek korlátos, szimmetrikus operátorainak létezik normatartó önadjungált kiterjesztése. Anti-duális párok esetén, mint már láttuk, van értelme önadjungáltságról beszélni, azonban mivel nincs norma, kell találni a normatartósággal analóg fogalmat. Vegyük észre, hogy egy $S \in \mathscr{B}(H)$ szimmetrikus operátor normája kifejezhető a pozitivitás által indukált részbenrendezés segítségével, ugyanis az $\|S\|$ operátornorma a legkisebb olyan $\alpha \geq 0$ konstans, amire $-\alpha I \leq S \leq \alpha I$. Mostantól, rögzített $A \in \mathscr{L}(E;F)$ operátor esetén azt mondjuk, hogy egy $S_0 : E \supseteq \operatorname{dom}(S_0) \to F$ szimmetrikus operátor A-korlátos, ha fennáll, hogy

$$|\langle S_0x, y\rangle|^2 \leq \alpha^2 \langle Ax, x\rangle \langle Ay, y\rangle, \qquad x \in \operatorname{dom}(S_0), y \in E.$$

A legkisebb ilyen α konstanst az S_0 operátor A-korlátjának nevezzük, és $\alpha_A(S_0)$-lal jelöljük. Azt mondjuk, hogy az $S \supset S_0$ kiterjesztés A-korláttartó, ha $\alpha_A(S) = \alpha_A(S_0)$.

A következő tételben elégséges feltételt mutatunk arra, hogy egy szimmetrikus operátornak mikor létezik önadjungált kiterjesztése, továbbá jellemzést adunk adott szimmetrikus operátor A-korláttartó önadjungált kiterjesztéseinek halmazára.

3.1.1. Tétel. *Legyen $\langle F, E\rangle$ w^*-sorozatteljes anti-duális pár, és $S_0 : \operatorname{dom}(S_0) \to F$ szimmetrikus operátor, azaz*

$$\langle S_0x, y\rangle = \overline{\langle S_0y, x\rangle}, \qquad x, y \in \operatorname{dom}(S_0).$$

Tegyük fel, hogy az S_0 operátor A-korlátos, ahol $A \in \mathscr{L}(E;F)$ pozitív operátor. Ekkor léteznek S_0-nak $S_m, S_M \in \mathscr{L}(E;F)$ különböző önadjungált kiterjesztései, me-

lyekre

$$\alpha_A(S_m) = \alpha_A(S_M) = \alpha_A(S_0),$$

továbbá az $[S_m, S_M]$ *intervallum pontosan azon* $S \supset S_0$ *önadjungált kiterjesztésekből áll, melyekre* $\alpha_A(S) = \alpha_A(S_0)$*, azaz*

$$[S_m, S_M] = \big\{ S \in \mathscr{L}(E;F) \,\big|\, S_0 \subset S = S^*, \alpha_A(S) = \alpha_A(S_0) \big\}. \tag{3.1}$$

Bizonyítás. Legyen

$$\mathrm{dom}(\hat{S}_0) := \big\{ Ax \,\big|\, x \in \mathrm{dom}(S_0) \big\} \subseteq H_A,$$

és rögzítsünk egy $x \in \mathrm{dom}(S_0)$ elemet. Legyen most

$$f_x : \mathrm{ran}(A) \subseteq H_A \to \mathbb{C}, \qquad f_x(y) := \langle S_0 x, y \rangle, \qquad y \in E$$

konjugáltan lineáris funkcionál. Vegyük észre, hogy f_x folytonos, hiszen az A-korlátosság miatt létezik olyan α konstans, mellyel fennáll

$$|f_x(Ay)|^2 \leq \alpha^2 \cdot \langle Ax, x \rangle, \qquad y \in E, (Ay|Ay)_A \leq 1. \tag{3.2}$$

Ekkor a Riesz Reprezentációs Tétel értelmében egyértelműen létezik olyan $\zeta_x \in H_A$ reprezentáns vektor, mellyel

$$\langle S_0 x, y \rangle = (\zeta_x | Ay)_A, \qquad y \in E.$$

Vegyük észre, hogy ha $x, x' \in \mathrm{dom}(S_0)$ elemekre $Ax = Ax'$, akkor $f_x = f_{x'}$, és így $\zeta_x = \zeta_{x'}$. Ebből következik, hogy az

$$\hat{S}_0 : \mathrm{dom}(\hat{S}_0) \to H_A; \qquad \hat{S}_0(Ax) := \zeta_x$$

leképezés jóldefiniált és lineáris. (3.2) miatt fennáll

$$(\hat{S}_0(Ax) | \hat{S}_0(Ax))_A \leq \alpha^2 \cdot (Ax|Ax)_A, \qquad x \in \mathrm{dom}(S_0),$$

amiből következik, hogy $\hat{S}_0$ korlátos, és az operátornormája $\|\hat{S}_0\| = \alpha_A(S_0)$. $\hat{S}_0$ szimmetrikus, hiszen tetszőleges $x, y \in \mathrm{dom}(\hat{S}_0)$ elemekre

$$(\hat{S}_0(Ax)|Ay)_A = \langle S_0 x, y \rangle = \overline{\langle y, S_0 x \rangle} = (Ax|\hat{S}_0(Ay))_A.$$

Legyen

$$\hat{T}_m := \|\hat{S}_0\| + \hat{S}_0, \qquad \hat{T}_M := \|\hat{S}_0\| - \hat{S}_0.$$

$\hat{T}_m$ és $\hat{T}_M$ pozitív operátorok $\hat{S}_0$ értelmezési tartományán. Fennáll továbbá minden $h \in \mathrm{dom}(\hat{S}_0)$ elemre

$$\|\hat{T}_m h\|_A^2 = \|\hat{S}_0 h\|_A^2 + 2(\hat{S}_0 h|h)_A + \|\hat{S}_0\|^2 \|h\|_A^2 \leq 2\|\hat{S}_0\| (\hat{T}_m h|h)_A,$$

és hasonlóan
$$\|\hat{T}_M h\|_A^2 \leq 2\|\hat{S}_0\|(\hat{T}_M h|h)_A.$$
Tekintsük a $\hat{T}_m$ és $\hat{T}_M$ operátorok $\hat{A}_m, \hat{A}_M \in \mathscr{B}(H_A)$ Krein-Neumann kiterjeszését. Minden $k \in H_A$ elemre fennáll
$$\|\hat{A}_m k\|_A^2 \leq 2\|\hat{S}_0\|(\hat{A}_m k|k)_A$$
és
$$\|\hat{A}_M k\|_A^2 \leq 2\|\hat{S}_0\|(\hat{A}_M k|k)_A.$$
Legyen most
$$\hat{S}_m := \hat{A}_m - \|\hat{S}_0\|, \qquad \hat{S}_M := \|\hat{S}_0\| - \hat{A}_M.$$
Az így definiált $\hat{S}_m, \hat{S}_M \in \mathscr{B}(H_A)$ operátorok $\hat{S}_0$ önadjungált kiterjesztései. Tetszőleges $k \in H_A$ elemre
$$\|\hat{S}_m k\|_A^2 = \|\hat{T}_m k\|_A^2 - 2\|\hat{S}_0\|(\hat{T}_m k|k)_A + \|\hat{S}_0\| \cdot \|k\|_A^2 \leq \|\hat{S}_0\| \cdot \|k\|_A^2,$$
így $\|\hat{S}_m\| = \|\hat{S}_0\| = \alpha_A(S_0)$. Hasonlóan $\|\hat{S}_M\| = \alpha_A(S_0)$. Legyen
$$S_m := J\hat{S}_m J^*$$
és
$$S_M := J\hat{S}_M J^*.$$
Ekkor $S_m, S_M \in \mathscr{L}(E;F)$ olyan önadjungált operátorok, melyekre
$$\alpha_A(S_m) = \alpha_A(S_M) = \alpha_A(S_0).$$
$S_0 \subset S_m$, hiszen tetszőleges $x \in \mathrm{dom}(S_0)$ és $y \in E$ esetén
$$\langle S_m x, y\rangle = (\hat{S}_m(Ax)|Ay)_A = (\hat{S}_0(Ax)|Ay)_A = \langle S_0 x, y\rangle.$$
Hasonlóan látszik, hogy $S_0 \subset S_M$.
$\hat{S}_0 \subset \hat{S}_M$ miatt $\|\hat{S}_0\| + \hat{S}_0 \subset \|\hat{S}_0\| + \hat{S}_M$, másrészt $\|\hat{S}_M\| = \|\hat{S}_0\|$ miatt $\|\hat{S}_0\| + \hat{S}_M \geq 0$, azaz $\|\hat{S}_0\| + \hat{S}_M$ pozitív kiterjesztése az $\|\hat{S}_0\| + \hat{S}_0$ operátornak. Ebből következik, hogy
$$\hat{A}_m \leq \|\hat{S}_0\| + \hat{S}_M,$$
így
$$\hat{S}_m \leq \hat{S}_M.$$
Most belátjuk a (3.1)-et. Legyen $S \in [S_m, S_M]$, $x \in \mathrm{dom}(S_0)$ és $y \in E$. Mivel $S - S_m \geq 0$,
$$\begin{aligned}|\langle (S-S_m)x, y\rangle|^2 &\leq \langle (S-S_m)x, x\rangle\langle (S-S_m)y, y\rangle \\ &\leq \langle (S_M-S_m)y, y\rangle\langle (S-S_m)y, y\rangle = 0,\end{aligned}$$

így $Sx = S_m x = S_0 x$, azaz $S_0 \subset S$. Másrészt, $S_m \leq S \leq S_M$ miatt

$$\begin{aligned}|\langle Sx, y\rangle| &\leq \langle (S - S_m)x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \langle (S - S_m)y, y\rangle^{\frac{1}{2}} + |\langle S_m x, y\rangle| \\ &\leq 3\alpha_A(S_0)\langle Ax, x\rangle^{\frac{1}{2}} \langle Ay, y\rangle^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

így létezik $\hat{S} \in \mathscr{B}(H_A)$ szimmetrikus operátor, amire $\|\hat{S}\| \leq 3\alpha_A(S_0)$, és $S = J\hat{S}J^*$. Ekkor $\hat{S}_m \leq \hat{S} \leq \hat{S}_M$, vagyis $\alpha_A(S_0) = \|\hat{S}\| = \alpha_A(S)$. A fordított tartalmazáshoz tegyük fel, hogy $S_0 \subset S$ tetszőleges önadjungált kiterjesztés, amire $\alpha_A(S) = \alpha_A(S_0)$. Ekkor $\alpha_A(S_0) \pm \hat{S}$ korlátos pozitív kiterjesztései az $\alpha_A(S_0) \pm \hat{S}_0$ operátoroknak, így $\hat{A}_m \leq \alpha_A(S_0) + \hat{S}$ és $\hat{A}_M \leq \alpha_A(S_0) - \hat{S}$. Következésképp $\hat{S}_m \leq \hat{S} \leq \hat{S}_M$, és $S_m \leq S \leq S_M$, amivel igazoltuk a tételt. □

Ennek következményeként megkapjuk a klasszikus tételt az önadjungált normatartó kiterjeszésekről.

3.1.2. TÉTEL. *Legyen H Hilbert-tér és $S_0 : \mathrm{dom}(S_0) \to H$ korlátos szimmetrikus operátor. Ekkor S-nek létezik $S_m, S_M \in \mathscr{B}(H)$, $S_m \leq S_M$ önadjungált, normatartó kiterjesztése, melyekre az $[S_m, S_M]$ intervallum pontosan S_0 önadjungált, normatartó kiterjesztéseiből áll:*

$$[S_m, S_M] = \left\{ S \in \mathscr{B}(H) \,\middle|\, S_0 \subset S = S^*, \|S\| = \|S_0\| \right\}.$$

Ha egy, az S_0 értelmezési tartományát önmagába képező $B \in \mathscr{B}(H)$ önadjungált operátorra fennáll $BS_0 \subset S_0 B$, akkor

$$S_m B = BS_m, \qquad S_M B = BS_M. \tag{3.3}$$

Bizonyítás. Az előző tétel bizonyításából látszik, hogy $S_m = (S_0 + \|S_0\|)_N - \|S_0\|$ és $S_M = \|S_0\| - (\|S_0\| - S_0)_N$. A feltétel alapján

$$B(\|S_0\| - S_0) \subset (\|S_0\| - S_0)B$$

és

$$B(S_0 + \|S_0\|) \subset (S_0 + \|S_0\|)B,$$

így a 2.2.3. Tétel miatt $B(S_0 + \|S_0\|)_N = (S_0 + \|S_0\|_N B$ és $B(\|S_0\| - S_0)_N = (\|S_0\| - S_0)_N B$, amiből már a bizonyítandó állítás adódik. □

3.2. Az Erős Parrott Tétel általánosítása

A következő részben általánosítjuk Parrott tételét a kétszer kettes operátormátrixok kontraktív kiterjesztéseiről.

3.2.1. TÉTEL. *Legyenek $\langle F_1, E_1\rangle_1$ és $\langle F_2, E_2\rangle_2$ gyenge-*-sorozatteljes anti-duális párok, és legyenek $T_1 : E_1 \supseteq \operatorname{dom}(T_1) \to F_2$ és $T_2 : E_2 \supseteq \operatorname{dom}(T_2) \to F_1$ olyan lineáris operátorok, melyekre*

$$\langle T_1x_1, x_2\rangle_2 = \overline{\langle T_2x_2, x_1\rangle_1}, \qquad x_1 \in \operatorname{dom}(T_1), x_2 \in \operatorname{dom}(T_2).$$

Tegyük fel továbbá, hogy léteznek olyan $A_i \in \mathscr{L}(E_i, F_i)$ pozitív operátorok és α_i nemnegatív konstansok ($i = 1,2$), melyekre fennállnak az alábbi becslések:

$$|\langle T_1x_1, y_2\rangle_2|^2 \leq \alpha_1\langle A_1x_1, x_1\rangle_1\langle A_2y_2, y_2\rangle_2, \qquad x_1 \in \operatorname{dom}(T_1), y_2 \in E_2,$$

$$|\langle T_2x_2, y_1\rangle_1|^2 \leq \alpha_2\langle A_1y_1, y_1\rangle_1\langle A_2x_2, x_2\rangle_2, \qquad x_2 \in \operatorname{dom}(T_2), y_1 \in E_1.$$

Ekkor létezik olyan $T \in \mathscr{L}(E_1, F_2)$ operátor, melyre $T_1 \subseteq T$ illetve $T_2 \subseteq T^*$ és fennáll, hogy

$$|\langle T_1y_1, y_2\rangle_2|^2 \leq \max\{\alpha_1, \alpha_2\} \cdot \langle A_1y_1, y_1\rangle_1\langle A_2y_2, y_2\rangle_2, \qquad y_1 \in E_1, y_2 \in E_2.$$

Bizonyítás. Tekintsük az $(E_1 \times E_2, F_1 \times F_2)$ párt az

$$[(f_1, f_2), (e_1, e_2)] := \langle f_1, e_1\rangle_1 + \langle f_2, e_2\rangle_2$$

anti-dualitással, és az alábbi lineáris operátort:

$$S_0 : E_1 \times E_2 \supseteq \operatorname{dom}(T_1) \times \operatorname{dom}(T_2) \to F_1 \times F_2, \qquad S_0(x_1, x_2) := (T_2x_2, T_1x_1).$$

S_0 szimmetrikus, hiszen ha $x_1, z_1 \in \operatorname{dom}(T_1)$ és $x_2, z_2 \in \operatorname{dom}(T_2)$, akkor

$$\begin{aligned}[S_0(x_1, x_2), (z_1, z_2)] &= \langle T_2x_2, z_1\rangle_1 + \langle T_1x_1, z_2\rangle_2 = \overline{\langle T_2z_2, x_1\rangle_1} + \overline{\langle T_1z_1, x_2\rangle_2}\\ &= \overline{[S_1(z_1, z_2), (x_1, x_2)]}.\end{aligned}$$

Tekintsük az $E_1 \times F_1$ és $E_2 \times F_2$ között ható $\Lambda := \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ lineáris operátort. Ekkor tetszőleges $x_i \in \operatorname{dom}(T_i), y_i \in E_i\,(i = 1,2)$ elemek esetén

$$\begin{aligned}|[S_0(x_1, x_2), (y_1, y_2)]| &\leq |\langle T_2x_2, y_1\rangle_1| + |\langle T_1x_1, y_2\rangle_2|\\ &\leq \alpha\big(\langle A_1x_1, x_1\rangle_1^{\frac{1}{2}}\langle A_2y_2, y_2\rangle_2^{\frac{1}{2}} + \langle A_1y_1, y_1\rangle_1^{\frac{1}{2}}\langle A_2x_2, x_2\rangle_2^{\frac{1}{2}}\big)\\ &\leq \alpha[\Lambda(x_1, x_2), (x_1, x_2)][\Lambda(y_1, y_2), (y_1, y_2)],\end{aligned}$$

ahol $\alpha = \max\{\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}\}$. Mivel S_0 szimmetrikus és Λ-korlátos, alkalmazható rá a 3.1.1. Tétel. Ennek értelmében létezik az S_0 operátornak $S \in \mathscr{L}(E_1 \times E_2; F_1 \times F_2)$ önadjungált kiterjesztése, melyre tetszőleges $y_i, w_i \in E_i\,(i = 1,2)$ elemek esetén

$$|[S(y_1, y_2), (w_1, w_2)]|^2 \leq \alpha^2[\Lambda(y_1, y_2), (y_1, y_2)][\Lambda(w_1, w_2), (w_1, w_2)].$$

S-et felírhatjuk operátormátrixként

$$S = \begin{bmatrix} B_1 & T^* \\ T & B_2 \end{bmatrix}$$

alakban, ahol $B_i \in \mathscr{L}(E_i;F_i)$ önadjungált operátorok, és $T \in \mathscr{L}(E_1;F_2)$. Azt állítjuk, hogy az így definiált T operátor rendelkezik az elvárt tulajdonságokkal. $T_1 \subset T$ és $T_2 \subset T^*$, hiszen tetszőleges $x_1 \in \operatorname{dom}(T_1)$ és $y_2 \in E_2$ elemek esetén

$$\langle Tx_1, y_2\rangle_2 = [S(x_1,0),(0,y_2)] = [S_0(x_1,0),(0,y_2)] = \langle T_1x_1, y_2\rangle_1,$$

és hasonlóan, $x_2 \in \operatorname{dom}(T_2)$ és $y_1 \in E_1$ esetén

$$\langle T^*x_2, y_1\rangle_1 = [S(0,x_2),(y_1,0)] = [S_0(0,x_2),(y_1,0)] = \langle T_2x_2, y_1\rangle_2.$$

Végül, tetszőleges $y_i \in E_i\,(i=1,2)$ elemekre

$$\begin{aligned}
|\langle Ty_1,y_2\rangle_2|^2 &= |[S(y_1,0),(0,y_2)]|^2 \\
&\leq \alpha^2[\Lambda(y_1,0),(y_1,0)][\Lambda(0,y_2),(0,y_2)] \\
&= \alpha^2\langle A_1y_1,y_1\rangle_1\langle A_2y_2,y_2\rangle_2,
\end{aligned}$$

így igazoltuk a tételt. □

Ennek következményeként kapjuk az alábbi tételt:

3.2.2. TÉTEL. *Legyenek $\langle F_1,E_1\rangle_1$ és $\langle F_2,E_2\rangle_2$ anti-duális párok, H és K pedig Hilbert-terek. Az $S_1 \in \mathscr{L}(E_1;H)$, $S_2 \in \mathscr{L}(E_1;K)$, $T_1 \in \mathscr{L}(H;F_2)$ és $T_2 \in \mathscr{L}(K;F_2)$ operátorokra az alábbi állítások ekvivalensek:*

(i) $T_1S_1 = T_2S_2$, $S_2^*S_2 \leq S_1^*S_1$, *és* $T_1T_1^* \leq T_2T_2^*$;

(ii) $\exists X \in \mathscr{B}(H,K)$, $\|X\| \leq 1$, $XS_1 = S_2$, $T_2X = T_1$.

Bizonyítás. A (ii)⇒(i) implikáció nyilvánvaló, így elég azt bizonyítani, hogy (i) implikálja (ii)-t. Tekintsük a $(H|H)$ és $(K|K)$ anti-duális párokat, továbbá az

$$X_0 : H \supseteq \operatorname{ran}(S_1) \to K; \qquad X_0(S_1x_1) := S_2x_1$$

és

$$X_1 : K \supseteq \operatorname{ran}(T_2^*) \to H; \qquad X_1(T_2^*x_2) := T_1^*x_2$$

operátorokat. Az (i) feltétel alapján X_0 és X_1 jóldefiniált kontrakciók, melyekre tetszőleges $x_1 \in E_1$ és $x_2 \in E_2$ elemek esetén fennáll

$$(X_0(S_1x_1)|T_2^*x_2) = (S_2x_1|T_2^*x_2) = (S_1x_1|T_1^*x_2) = (S_1x_1|X_1(T_1^*x_2)).$$

Ekkor az X_0, X_1 operátorokra alkalmazható a 3.2.1. Tétel $A_1 = I_H, A_2 = I_K$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ szereposztással. Ennek értelmében létezik $X \in \mathscr{B}(H,K)$, $\|X\| \leq 1$, melyre $X_0 \subset X$ és $X_1 \subset X^*$, amiből $XS_1 = S_2$ és $X^*T_2^* = T_1^*$, így beláttuk a (ii) állítást. □

Ennek közvetlen következménye az alábbi klasszikus eredmény:

3.2.3. TÉTEL. *Legyenek H és K Hilbert-terek, $H_1 \subseteq H$ és $K_1 \subseteq K$ pedig zárt lineáris alterek, és jelölje P_{K_1} a K_1 altérre való merőleges vetítést. Adott $X_1 : H_1 \to K$ és $X_1' : H \to K_1$ kontrakciók esetén az alábbiak ekvivalensek:*

(i) $P_{K_1} X_1 = X_1'|_{H_1}$;

(ii) *létezik olyan $X \in \mathscr{B}(H,K)$ kontrakció, melyre*

$$X_1 = X|_{H_1}, \qquad X_1' = P_{K_1} X.$$

Bizonyítás. Ha fennáll (ii), akkor

$$P_{K_1} X_1 = X_1'|_{H_1} = X|_{H_1}.$$

(i)⇒(ii): A 3.2.2 Tétel jelöléseivel legyen rendre $E_1 := H_1$, $F_2 := K_1$, $S_2 := X_1$, $T_1 := X_1'$, $T_2 := P_{K_1}$ és S_2 a H_1 altér identikus beágyazása. Ekkor *a* 3.2.2 Tétel állításaként adódik a (ii) állításban szereplő $X \in \mathscr{B}(H)$ kontrakció létezése. □

3.3. Lineáris funkcionálok hermitikus kiterjesztése

Mivel a pozitív funkcionálok fontos szerepet töltenek be az algebrák reprezentációelméletében, ezen funkcionálok kiterjeszthetősége aktívan kutatott terület. Például, C*-algebrák zárt ideáljain értelmezett pozitív lineáris funkcionálok mindig kiterjednek normatartó módon. A következő részben megmutatjuk, hogyan konstruálhatjuk meg egységelemes *-algebrák lineáris funkcionáljainak hermitikus kiterjesztéseit az anti-duális párokra bizonyított kiterjesztési tételek segítségével.
Legyen $\mathscr{A}$ egységelemes *-algebra. Amennyiben $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{A}$ balideál, egy $g : \mathscr{I} \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionált szimmetrikusnak nevezünk, ha

$$g(b^*a) = \overline{g(a^*b)}, \qquad a,b \in \mathscr{I}.$$

Egy $g \in \mathscr{A}^*$ lineáris funkcionált hermitikusnak nevezünk, amennyiben

$$g(x^*) = \overline{g(x)}, \qquad x \in \mathscr{A}.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy egy $g \in \mathscr{A}^*$ lineáris funkcionál akkor és csak akkor szimmetrikus, ha hermitikus, azonban nem egységelemes *-algebrák esetén ez az ekvivalencia nem áll fenn.
Tegyük fel, hogy adott az $f : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ pozitív lineáris funkcionál. Azt mondjuk, hogy a $g : \mathscr{I} \to \mathbb{C}$ szimmetrikus funkcionál f-korlátos, amennyiben valamely $\alpha > 0$ konstanssal fennáll, hogy

$$|g(x^*a)|^2 \leq \alpha^2 f(x^*x) f(a^*a), \qquad x \in \mathscr{A}, a \in \mathscr{I}. \tag{3.4}$$

A g funkcionál $\alpha_f(g)$ f-korlátja a legkisebb α konstans, amellyel fennáll (3.4). Ha $l : \mathscr{I} \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál, akkor az

$$\langle La, x\rangle := l(x^*a), \qquad a \in \mathscr{I}, x \in \mathscr{A}$$

egyenlőséggel definiált $L : \mathscr{I} \to \bar{\mathscr{A}}^*$ lineáris operátor pozitív, amennyiben l pozitív, és szimmetrikus, amennyiben l is az. Most tegyük fel, hogy $f \in \mathscr{A}^*$ pozitív funkcionál, és jelölje A az f funkcionálhoz tartozó pozitív operátort, azaz

$$\langle Ax, y\rangle = f(y^*x), \qquad x, y \in \mathscr{A}.$$

Tekintsük a $\operatorname{ran}(A)$ képtér teljessé tételével keletkező H_A Hilbert-teret. Ennek belső szorzatára fennáll

$$(Ax|Ay)_A = f(y^*x), \qquad x, y \in \mathscr{A}.$$

Tekintsük a $J : H_A \to \bar{\mathscr{A}}^*$ kanonikus beágyazást. Emlékeztetünk rá, hogy erre fennáll

$$J^*x = Ax, \qquad x \in \mathscr{A}$$

és $JJ^* = A$. Tegyük fel továbbá, hogy valamely $M_x \geq 0$ konstanssal fennáll

$$|f(y^*x^*xy)| \leq M_x f(y^*y), \qquad x, y \in \mathscr{A}. \tag{3.5}$$

Ekkor a

$$\pi_f(x)(J^*y) := J^*(xy), \qquad y \in \mathscr{A}$$

egyenlőséggel definiált $\pi_f(x)$ operátorok folytonosak a H_A Hilbert-téren $M_x^{\frac{1}{2}}$ operátornormával. Ez azt jelenti, hogy rögzített $x \in H_A$ esetén $\pi_f(x)$ kiterjed egy $\mathscr{B}(H_A)$-beli operátorrá. Ily módon egy $\pi_f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(H_A)$ *-homomorfizmust definiáltunk, melyre

$$f(x) = (\pi_f(x)(J^*1)|J^*1)_A, \qquad x \in \mathscr{A}. \tag{3.6}$$

Amennyiben egy pozitív funkcionálra teljesül (3.5) (és így (3.6)), azt mondjuk, hogy a funkcionál ábrázolható.

3.3.1. TÉTEL. *Legyen $\mathscr{A}$ egységelemes *-algebra, $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{A}$ balideál, $f \in \mathscr{A}^*$ pedig ábrázolható pozitív funkcionál. Ha $g_0 : \mathscr{I} \to \mathbb{C}$ f-korlátos, szimmetrikus funkcionál $\alpha_f(g_0)$ f-korláttal, akkor léteznek $g_m, g_M \in \mathscr{A}^*$ különböző f-korlátos, szimmetrikus kiterjesztései g_0-nak, melyekre $\alpha_f(g_m) = \alpha_f(g_M) = \alpha_f(g_0)$, továbbá $g_m \leq g_M$, és a $[g_m, g_M]$ intervallum pontosan g_0 hermitikus, f-korláttartó kiterjesztéseiből áll, azaz*

$$[g_m, g_M] = \{g \in \mathscr{A}^* \,|\, g_0 \subset g = g^*, \alpha_f(g) = \alpha_f(g_0)\}.$$

Bizonyítás. A korábbiakhoz hasonlóan vezessünk be egy S_0 szimmetrikus operátort a $\operatorname{dom}(S_0) := \{J^*a \,|\, a \in \mathscr{I}\}$ halmazon úgy, hogy

$$(S_0(J^*a)|J^*x)_A = g_0(x^*a), \qquad a \in \mathscr{I}, x \in \mathscr{A}.$$

Ekkor $S_0 : \mathrm{dom}(S_0) \to H_A$ korlátos operátor $\|S_0\| = \alpha_f(g_0)$ operátornormával. $x, y \in \mathscr{A}$ és $a \in \mathscr{I}$ esetén

$$\begin{aligned}(S_0\pi_f(x)(J^*a)|J^*y)_A &= (S_0J^*(xa)|J^*y)_A = g(y^*xa) = (S_0(J^*a)|J^*(x^*y))_A \\ &= (S_0J^*a|\pi_f(x^*)J^*y)_A = (\pi_f(x)S_0(J^*a)|J^*y)_A;\end{aligned}$$

azaz $\mathrm{dom}(S_0)$ π_f-invariáns, és minden $x \in \mathscr{A}$ elemre fennáll $\pi_f(x)S_0 \subset S_0\pi_f(x)$. A 3.1.2. Tétel értelmében léteznek az S_0 operátor $S_m, S_M \in \mathscr{B}(H_A)$ különböző normatartó önadjungált kiterjesztései, melyekre

$$\pi_f(x)S_m = S_m\pi_f(x), \qquad \pi_f(x)S_M = S_M\pi_f(x) \tag{3.7}$$

minden önadjungált x-re, így minden $x \in \mathscr{A}$ esetén. Azt állítjuk, hogy a

$$g_m(x) := (S_mJ^*x|J^*1)_A, \qquad x \in \mathscr{A}$$

és

$$g_M(x) := (S_MJ^*x|J^*1)_A, \qquad x \in \mathscr{A}$$

funkcionálok kielégítik a tételben szereplő feltételeket. Először is, g_m és g_M hermitikus funkcionálok, hiszen (3.7) miatt

$$g_m(x^*) = (S_mJ^*x|J^*1)_A = (\pi_f(x^*)S_mJ^*1|J^*1)_A = (S_mJ^*1|J^*x)_A = \overline{g_m(x)}.$$

Hasonlóan következik, hogy g_M hermitikus. Emellett g_m és g_M kiterjeszti g_0-t, ugyanis minden $a \in \mathscr{I}$ elemre fennáll, hogy

$$g_m(a) = (S_mJ^*a|J^*1)_A = (S_0J^*a|J^*1)_A = g_0(a),$$

és hasonlóan, $g_M(a) = g_0(a)$. Végül pedig fennáll, hogy

$$\|S_m\| = \|S_M\| = \|S\| = \alpha_f(g_0),$$

amiből következik, hogy

$$\alpha_f(g_m) = \alpha_f(g_M) = \alpha_f(g_0).$$

Most tegyük fel, hogy $g \in \mathscr{A}^*$ a g_0 funkcionál olyan hermitikus kiterjesztése, melyre $\alpha_f(g) = \alpha_f(g_0)$. Ekkor létezik olyan $S \in \mathscr{B}(H_A)$ önadjungált operátor, melyre $\|S\| = \alpha_f(g_0)$, és

$$(SJ^*x|J^*y)_A = g(y^*x), \qquad x, y \in \mathscr{A}.$$

Ekkor $S_0 \subset S$, így a 3.1.2. Tétel értelmében $S_m \leq S \leq S_M$. Ennek közvetlen következményeként megállapíthatjuk, hogy $g_m \leq g \leq g_M$. A fordított irányhoz tegyük fel, hogy $g \in \mathscr{A}^*$ olyan hermitikus funkcionál, melyre fennáll $g_m \leq g \leq g_M$. Ekkor a g funkcionál f-korlátos, ugyanis

$$\begin{aligned}|g(y^*x)| &\leq (g-g_m)(x^*x)^{\frac{1}{2}}(g-g_m)(y^*y)^{\frac{1}{2}} + |g_m(y^*x)| \\ &\leq 3\alpha_f(g_0)f(x^*x)^{\frac{1}{2}}f(y^*y)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Ekkor létezik olyan $S \in \mathscr{B}(H_A)$ önadjungált operátor, melyre

$$g(y^*x) = (JSJ^*x|y)_A, \qquad x,y \in \mathscr{A}.$$

A $g_m \leq g \leq g_M$ feltételből következik, hogy $S_m \leq S \leq S_M$, melyből a 3.1.2. Tétel értelmében $S_0 \subset S$. Ennek következményeként

$$g_0(a) = (S_0J^*a|J^*1)_A = (SJ^*a|J^*1)_A = g(a), \qquad a \in \mathscr{I},$$

azaz $g_0 \subset g$. Ezzel a tételt igazoltuk. □

Megjegyezzük, hogy a fenti tétel csupán elégséges feltételt nyújt hermitikus kiterjesztés létezésére. C*-algebrák esetében ez az állítás kétféleképpen is erősíthető. Először is, ahelyett, hogy f ábrázolható, feltehetjük, hogy pozitív, ami formálisan gyengébb feltétel. Másrészt, domináló pozitív funkcionál létezése már szükséges és elégséges.

3.3.2. TÉTEL. *Legyen $\mathscr{A}$ egységelemes C*-algebra és $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{A}$ balideál. Egy $g_0 : \mathscr{I} \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionálnak akkor és csak akkor létezik g folytonos hermitikus kiterjesztése, ha g_0 szimmetrikus és f-korlátos valamely $f \in \mathscr{A}^*$ pozitív funkcionálra.*

Bizonyítás. C*-algebrán minden f pozitív funkcionál ábrázolható. Ha g_0 szimmetrikus és f-korlátos, akkor létezik g folytonos hermitikus kiterjesztése

$$g(a) = (SJ^*a|J^*1)_A, \qquad a \in \mathscr{A}$$

alakban, ahol S korlátos önadjungált operátor a H_A Hilbert-téren. Ez maga után vonja a g funkcionál folytonosságát. A fordított irányhoz tegyük fel, hogy $g \in \mathscr{A}^*$ a g_0 funkcionál egy folytonos, hermitikus kiterjesztése. Az 1.1.2 állítás értelmében létezik a g funkcionál $g = g_+ - g_-$ Hahn-Jordan felbontása $g_+, g_- \in \mathscr{A}$ pozitív funkcionálokra. Ekkor nem nehéz megállapítani, hogy $f := g_+ + g_-$ helyettesítéssel a g funkcionál f-korlátos és $\alpha_f(g) = 4$. □

4. fejezet

Általánosított Schur-komplemens

A lineáris algebra és funkcionálanalízis sűrűn kutatott területe az úgynevezett hiányos mátrixrendszerek (illetve operátorrendszerek) kiegészítése. A klasszikus kérdésben az A, B n-szer n-es mátrixok $\begin{bmatrix} A & B \\ B & * \end{bmatrix}$ hiányos rendszerét tekintjük. A feladat megtalálni egy olyan D mátrixot, amelyre $\begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}$ pozitív szemidefinit $2n$-szer $2n$-es mátrix. Ha A_B jelöli a legkisebb lehetséges megoldást, akkor D Schur-komplemense az $\begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}$ blokkmátrixban $D - A_B$.

4.1. Operátorrendszerek pozitív kiterjesztése

Ebben a fejezetben anti-duális párok operátorainak Krein-Neumann kiterjesztését alkalmazzuk hiányos operátorrendszerek kiegészíthetőségének eldöntésére. Tekintsük adott $A, B, C \in \mathscr{L}(E;F)$ operátorok $\begin{bmatrix} A & B \\ C & * \end{bmatrix}$ hiányos operátormátrixát. Egy ilyen rendszert pozitívnak nevezünk, amennyiben létezik $D \in \mathscr{L}(E;F)$ operátor, melyre $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ pozitív. Ennek nyilvánvalóan szükséges feltétele $A \geq 0$ és $C = B^*$, továbbá minden D operátor, amely az $\begin{bmatrix} A & B \\ C & * \end{bmatrix}$ rendszert pozitívvá teszi, maga is pozitív kell, hogy legyen. Általánosság nélkül feltehető tehát, hogy a rendszer $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & * \end{bmatrix}$ alakú, ahol $A \geq 0$.
A következő tétel szükséges és elégséges feltételt nyújt a pozitivitásra.

4.1.1. TÉTEL. *Legyen $\langle F_1, E_1\rangle$ és $\langle F_2, E_2\rangle$ w^*-sorozatteljes anti-duális párok, $A \in \mathscr{L}(E_1; F_1)$ és $B \in \mathscr{L}(E_1; F_2)$ pedig gyengén folytonos lineáris operátorok, melyre $A \geq 0$. Az alábbiak ekvivalensek:*

(i) *Létezik $C \in \mathscr{L}(E_2; F_2)$ pozitív operátor, amelyre az $\begin{bmatrix} A & B^* \\ B & C \end{bmatrix}$ operátormátrix pozitív.*

(ii) *Minden $y_2 \in E_2$ elemhez létezik $M_{y_2} \geq 0$ konstans, mellyel*

$$|\langle Bx_1, y_2\rangle|^2 \leq M_{y_2}\langle Ax_1, x_1\rangle, \qquad \forall x_1 \in E_1.$$

(iii) *A $J : H_A \to F_1$ kanonikus beágyazási operátor képterére fennáll*

$$\operatorname{ran} B^* \subseteq \operatorname{ran}(J).$$

Amennyiben a fenti feltételek teljesülnek, az

$$S_0 : H_A \supseteq \operatorname{ran}(A) \to F_2; \qquad Ax_1 \mapsto Bx_1, \qquad x_1 \in E_1 \tag{4.1}$$

lineáris operátor jóldefiniált és gyengén folytonos. Továbbá, az $S \in \mathscr{L}(H_A; F_2)$ operátorra, az S_0 egyértelmű folytonos kiterjesztésére

$$A_B := SS^* \tag{4.2}$$

a legkisebb olyan pozitív operátor, amely pozitívvá tesz az $\begin{bmatrix} A & B^* \\ B & * \end{bmatrix}$ rendszert. A_B kvadratikus alakja

$$\langle SS^* y_2, y_2\rangle = \sup\left\{ |\langle Bx_1, y_2\rangle|^2 \,\middle|\, x_1, \langle Ax_1, x_1\rangle \leq 1 \right\} \tag{4.3}$$

és

$$\langle SS^* y_2, y_2\rangle = \sup\left\{ \langle Bx_1, y_2\rangle + \langle B^* y_2, x_1\rangle - \langle Ax_1, x_1\rangle \,\middle|\, x_1 \in E_1 \right\} \tag{4.4}$$

alakban is felírható.

Bizonyítás. (i)⇒(ii): Rögzítsünk egy $y_2 \in E_2$ elemet. Ekkor a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség értelmében minden $x_1 \in E_1$ elemre

$$\begin{aligned}
|\langle Bx_1, y_2\rangle|^2 &= \left| \left\langle \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle \right|^2 \\
&\leq \left\langle \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle \langle Ax_1, x_1\rangle.
\end{aligned}$$

Ezzel beláttuk a (ii) állítást.
(ii)⇒(iii): Tekintsük a H_A Hilbert-teret és egy rögzített $y_2 \in E_2$ vektort. Legyen

$$\varphi : H_A \supseteq \operatorname{ran}(A) \to \mathbb{C}, \qquad \varphi(Ax_1) := \langle Bx_1, y_2 \rangle, \qquad x_1 \in E_1$$

lineáris funkcionál. (ii) miatt

$$|\varphi(Ax_1)|^2 = |\langle Bx_1, y_2 \rangle|^2 \leq M_{y_2} \langle Ax_1, x_1 \rangle,$$

tehát φ korlátos, így a Riesz reprezentációs tétel értelmében létezik $h \in H_A$ reprezentáns vektor, mellyel

$$(Ax_1|h)_A = \langle Bx_1, y_2 \rangle, \qquad x_1 \in E_1.$$

Legyen $J : H_A \to F_1$ a kanonikus beágyazó operátor. Mivel minden $x_1 \in E_1$ vektorra fennáll $J^*x_1 = Ax_1$, így

$$\langle Jh, x_1 \rangle = (h|Ax_1)_A = \overline{\langle Bx_1, y_2 \rangle} = \langle B^*y_2, x_1 \rangle.$$

Ebből következik, hogy $B^*y_2 = Jh \in \operatorname{ran}(J)$, amiből már adódik (iii).
(iii)⇒(i): Megmutatjuk, hogy a

$$T_0 : E_1 \times \{0\} \to F_1 \times F_2, \qquad T_0 \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} Ax_1 \\ Bx_1 \end{bmatrix}$$

operátornak létezik $T \in \mathscr{L}(E_1 \times E_2; F_1 \times F_2)$ pozitív kiterjesztése. Mivel minden ilyen kiterjesztés felírható operátormátrixként $T = \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & C \end{bmatrix}$ alakban, ahol $C \in \mathscr{L}(E_2; F_2)$, $C \geq 0$, ebből már következik a bizonyítandó állítás.
Mivel az $\langle F_1 \times F_2, E_1 \times E_2 \rangle$ anti-duális pár w^*-sorozatteljes, a Krein-Neumann kiterjesztés létezéséhez a 2.1.2 Tétel értelmében elég belátni, hogy minden $y \in E_1 \times E_2$ elemhez létezik olyan $M_y \geq 0$ konstans, hogy minden $x \in E_1 \times \{0\}$ elemre

$$|\langle T_0 x, y \rangle|^2 \leq M_y \langle T_0 x, x \rangle. \tag{4.5}$$

Ehhez rögzítsünk egy $y := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in E_1 \times E_2$ elemet. Ekkor minden $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{dom}(T_0) = E_1 \times \{0\}$ elemre fennáll, hogy

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle T_0 \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle \right|^2 &= \left| \left\langle \begin{bmatrix} Ax_1 \\ Bx_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle \right|^2 \\
&= |\langle Ax_1, y_1 \rangle + \langle Bx_1, y_2 \rangle|^2 \\
&\leq 2|\langle Ax_1, y_1 \rangle|^2 + 2|\langle Bx_1, y_2 \rangle|^2 \\
&\leq 2\langle Ax_1, x_1 \rangle \langle Ay_1, y_1 \rangle + 2M_{y_2} \langle Ax_1, x_1 \rangle \\
&= M'_{y_1,y_2} \left\langle \begin{bmatrix} Ax_1 \\ Bx_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = M'_{y_1,y_2} \left\langle T_0 \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.
\end{aligned}$$

A többi állítás bizonyításához írjuk fel a (ii) egyenlőtlenséget

$$|\langle Bx_1, y_2\rangle|^2 \leq M_{y_2}(Ax_1|Ax_1)_A, \qquad x_1 \in E_1, y_2 \in E_2$$

alakban. Ennek az egyenlőtlenségnek a következménye, hogy rögzített $y_2 \in E_2$ esetén a $\operatorname{ran}(A)$ képtéren értelmezett

$$Ax_1 \mapsto \langle Bx_1, y_2\rangle$$

funkcionál folytonos. Ez garantálja, hogy a (4.1) képletben definiált S_0 operátor jóldefiniált és gyengén folytonos. Jelölje T_N a T_0 operátor Krein-Neumann kiterjesztését. Ha a T_N operátort $T_N = \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & C_N \end{bmatrix}$ alakban írjuk fel, nyilvánvalóan $C_N \in \mathscr{L}(E_2; F_2)$ a legkisebb pozitív operátor, amely pozitívvá teszi az $\begin{bmatrix} A & B^* \\ B & * \end{bmatrix}$ rendszert. Elég tehát azt belátni, hogy $C_N = SS^*$. Rögzítsünk egy $y_2 \in E_2$ vektort. A 2.1.2 Tétel alapján

$$\begin{aligned}
\langle C_N y_2, y_2\rangle &= \left\langle T_N \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle \\
&= \sup\left\{ \left| \left\langle \begin{bmatrix} Ax_1 \\ Bx_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle \right|^2 \,\middle|\, x_1 \in E_1, \left\langle \begin{bmatrix} Ax_1 \\ Bx_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \leq 1 \right\} \\
&= \sup\left\{ |\langle Bx_1, y_2\rangle|^2 \,\middle|\, x_1 \in E_1, \langle Ax_1, x_1\rangle \leq 1 \right\}.
\end{aligned}$$

Másrészt

$$\begin{aligned}
\langle SS^* y_2, y_2\rangle &= (S^* y_2 | S^* y_2)_A \\
&= \sup\left\{ |(Ax_1|S^* y_2)_A|^2 \,\middle|\, x_1 \in E_1, (Ax_1|Ax_1)_A \leq 1 \right\} \\
&= \sup\left\{ |\langle S_0(Ax_1), y_2\rangle|^2 \,\middle|\, x_1 \in E_1, \langle Ax_1, x_1\rangle \leq 1 \right\} \\
&= \sup\left\{ |\langle Bx_1, y_2\rangle|^2 \,\middle|\, x_1 \in E_1, \langle Ax_1, x_1\rangle \leq 1 \right\}.
\end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy C_N és SS^* kvadratikus alakja megegyezik, azaz $C_N = SS^*$. Végül, C_N kvadratikus alakja

$$\begin{aligned}
\langle C_N y, y\rangle = \sup&\left\{ \left\langle \begin{bmatrix} Ax_1 \\ Bx_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle + \overline{\left\langle \begin{bmatrix} Ax_1 \\ Bx_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle} - \left\langle \begin{bmatrix} Ax_1 \\ Bx_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \,\middle|\, x_1 \in E_1 \right\} \\
= \sup&\left\{ \langle Bx_1, y_2\rangle + \langle B^* y_2, x_1\rangle - \langle Ax_1, x_1\rangle \,\middle|\, x_1 \in E_1 \right\}.
\end{aligned}$$

Ezzel a tételt igazoltuk. $\square$

Ezen a ponton bevezetjük a komplemens fogalmát.

4.1.2. Definíció. A (4.2) egyenlőségben definiált A_B operátort nevezzük az A operátor B-re vonatkozó komplemensének. Ha $C \in \mathscr{L}(E_2;F_2)$ olyan pozitív operátor, amely pozitívvá teszi az $\begin{bmatrix} A & B^* \\ B & C \end{bmatrix}$ rendszert, akkor a $C - A_B$ pozitív operátort nevezzük a C Schur-komplemensének az $\begin{bmatrix} A & B^* \\ B & C \end{bmatrix}$ blokkmátrixban.

Mostantól azt a speciális esetet vizsgáljuk, amikor $\langle F,E\rangle$ anti-duális pár és $A,B \in \mathscr{L}(E;F)$ pozitív (és így önadjungált operátorok). Ekkor A_B kvadratikus alakja

$$\langle A_B y, y\rangle = \sup\left\{ \langle By,x\rangle + \langle Bx,y\rangle - \langle Ax,x\rangle \,\middle|\, x \in E \right\} \tag{4.6}$$

alakban írható fel.
A fenti tétel közvetlen következménye az alábbi klasszikus eredmény.

4.1.3. Tétel. *Legyen H Hilbert-tér, $A,B \in \mathscr{B}(H)$ korlátos operátorok, és tegyük fel, hogy A pozitív. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

(i) *Létezik $C \in \mathscr{B}(H)$, amire $\begin{bmatrix} A & B^* \\ B & C \end{bmatrix}$ pozitív.*

(ii) *Létezik $m \geq 0$ konstans, mellyel $B^*B \leq mA$.*

(iii) $\operatorname{ran} B^* \subseteq \operatorname{ran}(A^{\frac{1}{2}})$.

Bizonyítás. Az (i) és (ii) állítás ekvivalenciája a 4.1.1 Tétel közvetlen következménye. A (ii) és (iii) állítás ekvivalenciájához azt vegyük észre, hogy az 1.1.1 Douglas faktorizációs tétel szerint (iii) pont azzal ekvivalens, hogy minden $y \in H$ vektorhoz létezik $\lambda_y \geq 0$ konstans, amellyel tetszőleges $x \in H$ vektorhoz

$$|(x|B^*y)| \leq \lambda_y \cdot \|A^{\frac{1}{2}}x\|,$$

ami azt jelenti, hogy

$$|(x|B^*Bx)| \leq \lambda_{Bx} \cdot |(x|Ax)|.$$

□

Mielőtt továbbmegyünk, két rövid megjegyzést teszünk. Egyrészt, ha tekintünk egy adott E komplex vektortér feletti $t : E \times E \to \mathbb{C}$ szeszkivilineáris formát, ennek megfeleltethetünk egy

$$A_t : E \to \bar{E}', \qquad \langle A_t x, y\rangle := t(x,y), \qquad x,y \in E \tag{4.7}$$

lineáris operátort. Ekkor nyilvánvaló, hogy A_t gyengén folytonos, és akkor és csak akkor pozitív, ha t nemnegatív szemidefinit, illetve A_t akkor és csak akkor önadjungált, ha t hermitikus. Másrészt, ha adott egy $\langle F,E\rangle$ anti-duális pár és egy $A : E \to F$ pozitív operátor, megfeleltethetünk neki egy

$$t_A : E\times E \to \mathbb{C}, \qquad t_A(x,y) := \langle Ax,y\rangle, \qquad x,y\in E \tag{4.8}$$

hermitikus formát. Így a fenti tétel segítségével definiálhatjuk szeszkvilineáris formák komplemensét.

Most bevezetjük anti-duális párok pozitív operátorainak párhuzamos összegét. Tekintsük az $\begin{bmatrix} A+B & A \\ A & * \end{bmatrix}$ hiányos operátormátrixot, és vegyük észre, hogy pozitív, hiszen $\begin{bmatrix} A+B & A \\ A & A \end{bmatrix}$ pozitív. Speciálisan, az $(A+B)_A$ komplemensre fennáll $(A+B)_A \leq A$, a kvadratikus alakja pedig (4.6) értelmében

$$\begin{aligned}\langle (A+B)_A y,y\rangle &= \sup\big\{\langle Ax,y\rangle + \langle Ay,x\rangle - \langle (A+B)x,x\rangle \,\big|\, x\in E\big\}\\ &= -\inf\big\{\langle Ax,y\rangle + \langle Ay,x\rangle + \langle Ax,x\rangle + \langle Bx,x\rangle \,\big|\, x\in E\big\}\\ &= \langle Ay,y\rangle - \inf\big\{\langle A(y+x),y+x\rangle + \langle Bx,x\rangle \,\big|\, x\in E\big\}.\end{aligned}$$

Ekkor a következő módon definiálhatjuk pozitív operátorok párhuzamos összegét.

4.1.4. Definíció. Tegyük fel, hogy $A,B\in\mathscr{L}(E;F)$ pozitív operátorok. Ekkor A és B

$$A : B := A - (A+B)_A \tag{4.9}$$

párhuzamos összege pozitív operátor, és teljesül rá

$$\langle (A:B)y,y\rangle = \inf\big\{\langle A(y+x),y+x\rangle + \langle Bx,x\rangle \,\big|\, x\in E\big\}. \tag{4.10}$$

Vegyük észre, hogy $A : B$ definíció szerint A Schur-komplemense az $\begin{bmatrix} A+B & A \\ A & A \end{bmatrix}$ blokkmátrixban. Vegyük észre továbbá, hogy (4.10) alapján $A : B = B : A$.

4.2. Ábrázolható funkcionálok

A következő részben megmutatjuk, hogyan alkalmazható az általánosított Schur-komplemens az ábrázolható funkcionálok elméletében.

Legyen $\mathscr{A}$ nem feltétlenül egységelemes *-algebra, és jelölje $\mathscr{A}^{\#}$ az ábrázolható funkcionáljainak halmazát. Legyen most f ábrázolható funkcionál, és egy ábrázolása

$$f(a) = (\pi_f(a)\xi_f|\xi_f)_f,$$

ahol H_f Hilbert-tér, $\pi_f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(H_f)$ *-homomorfizmus és $\xi_f \in H_f$ vektor. Legyen továbbá

$$A : \mathscr{A} \to \bar{\mathscr{A}}^*, \qquad \langle Aa, b\rangle := f(b^*a), \qquad a,b \in \mathscr{A}$$

a neki megfeleltetett pozitív operátor.
A következő tétel elégséges feltételt nyújt funkcionálok komplemensének létezésére.

4.2.1. Tétel. *Legyenek f, g lineáris funkcionálok egy $\mathscr{A}$ *-algebrán. Tegyük fel, hogy f ábrázolható, és létezik $C \geq 0$ konstans, mellyel*

$$|g(a)|^2 \leq Cf(a^*a), \qquad a \in \mathscr{A}. \tag{4.11}$$

Ekkor létezik olyan h ábrázolható pozitív funkcionál, hogy $f+g+g^*+h$ is ábrázolható, és tetszőleges $a,b \in \mathscr{A}$ esetén fennáll

$$f(a^*a)+g(b^*a)+\overline{g(b^*a)}+h(b^*b) \geq 0. \tag{4.12}$$

Sőt, az ilyen tulajdonságú h funkcionálok között létezik legkisebb.

Bizonyítás. Tekintsük a H_f Hilbert-téren a

$$\pi_f(a)\xi_f \mapsto g(a), \qquad a \in \mathscr{A}$$

lineáris funkcionált. Ez (4.11) miatt korlátos, így egyértelműen létezik $\eta_g \in H_f$ reprezentáns vektor, mellyel

$$g(a) = (\pi_f(a)\xi_f|\eta_g)_f, \qquad a \in \mathscr{A}. \tag{4.13}$$

Legyen

$$h(a) := (\pi_f(a)\eta_g|\eta_g)_f, \qquad a \in \mathscr{A}. \tag{4.14}$$

Ekkor a definícióból látszik, hogy h ábrázolható. Azt állítjuk, hogy a legkisebb ábrázolható funkcionál, ami kielégíti a (4.12) egyenlőtlenséget. Tekintsük ugyanis az $A,B \in \mathscr{L}(\mathscr{A};\bar{\mathscr{A}}')$ operátorokat, melyekre $\langle Aa,b\rangle := f(b^*a)$ és $\langle Ba,b\rangle := g(b^*a)$, $\quad a,b \in \mathscr{A}$. Ekkor az $\begin{bmatrix} A & B^* \\ B & * \end{bmatrix}$ hiányos mátrix pozitív, hiszen rögzített $a,b \in \mathscr{A}$ elemekre

$$\begin{aligned}|\langle Ba,b\rangle|^2 &= |g(b^*a)|^2 \leq Cf(a^*bb^*a) = \|\pi_f(b^*a)\xi_f\|_f^2 \\ &\leq \|\pi_f(b^*)\xi_f\|_f^2\|\pi_f(a)\xi_f\|_f^2 = \|\pi_f(b^*)\xi_f\|_f^2\langle Aa,a\rangle.\end{aligned}$$

Ekkor a 4.1.1 Tétel értelmében létezik olyan $A_B : \mathscr{A} \to \bar{\mathscr{A}}'$ pozitív operátor, mellyel $\begin{bmatrix} A & B^* \\ B & A_B \end{bmatrix}$ pozitív, és amelynek kvadratikus alakja

$$\begin{aligned}
\langle A_B a, a \rangle &= \sup \left\{ |\langle Bb, a \rangle|^2 \,\middle|\, b \in \mathscr{A}, \langle Ab, b \rangle \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ |g(a^* b)|^2 \,\middle|\, b \in \mathscr{A}, \langle Ab, b \rangle \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ |(\pi_f(a^* b)\xi_f | \eta_g)_f|^2 \,\middle|\, b \in \mathscr{A}, \|\pi_f(b)\|_f^2 \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ |(\pi_f(b)\xi_f | \pi_f(a)\eta_g)_f|^2 \,\middle|\, b \in \mathscr{A}, \|\pi_f(b)\|_f^2 \leq 1 \right\} \\
&= \|\pi_f(a)\eta_g\|_f^2 \\
&= h(a^* a).
\end{aligned}$$

Ekkor rögzített $a, b \in \mathscr{A}$ elemekre

$$f(a^* a) + \overline{g(b^* a)} + g(b^* a) + h(b^* b) = \left\langle \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & A_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\rangle \leq 0,$$

vagyis h kielégíti a (4.12) egyenlőtlenséget. h minimalitásának belátásához tegyük fel, hogy a $h' \in \mathscr{A}^\#$ funkcionálra is fennáll (4.12). Ekkor a

$$\langle C' a, b \rangle := h'(b^* a)$$

operátorra $\begin{bmatrix} A & B^* \\ B & C' \end{bmatrix} \geq 0$, így a 4.1.1 Tétel értelmében $A_B \leq C'$, ami éppen azzal ekvivalens, hogy $h \leq h'$. Végül, megállapíthatjuk, hogy

$$(\pi_f(a)(\xi_f + \eta_g) | \xi_f + \eta_g)_f = f(a) + g(a) + \overline{g(a^*)} + h(a), \qquad a \in \mathscr{A},$$

így beláttuk, hogy az $f + g + \overline{g} + h$ funkcionál ábrázolható. □

4.2.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy f komplemense g-re nézve a legkisebb ábrázolható funkcionál, amely kielégíti a (4.12) egyenlőtlenséget. Ezt a funkcionált f_g-vel jelöljük, és felírhatjuk

$$f_g(a) = (\pi_f(a)\eta_g | \eta_g)_f, \qquad a \in \mathscr{A}$$

alakban, ahol $\eta_g \in H_f$ a

$$H_f \to \mathbb{C}; \qquad \pi_f(a)\xi_f \mapsto g(a)$$

lineáris funkcionálhoz tartozó reprezentáns vektor.

Megállapíthatjuk továbbá, hogy eddigi jelöléseinkkel, fennáll

$$f_g(a^* a) = \langle A_B a, a \rangle, \qquad a \in \mathscr{A}.$$

Ekkor két formulát is felírhatunk $f_g(a^*a)$-ra: egyrészt, (4.3) miatt

$$f_g(a^*a) = \sup\left\{|g(a^*b)|^2 \,\middle|\, b \in \mathscr{A}, f(b^*b) \leq 1\right\}, \tag{4.15}$$

másrészt, (4.4) miatt

$$f_g(a^*a) = \sup\left\{g(a^*b) + \overline{g(a^*b)} - f(b^*b) \,\middle|\, b \in \mathscr{A}\right\}. \tag{4.16}$$

Emlékeztetünk rá, hogy a 4.1.1 Tétel szerint $A_B = SS^*$, ahol $S : H_A \to F$ az egyértelmű gyengén folytonos operátor, amelyre

$$S(Ax) = Bx, \qquad x \in E.$$

Ez az operátor fontos szerepet kap a következő tételben, amely egyszerű formulát ad a komplemensre abban a speciális esetben, amikor $\mathscr{A}$ egységelemes *-algebra.

4.2.3. Tétel. *Legyenek f és g lineáris funkcionálok az $\mathscr{A}$ *-algebrán. Tegyük fel továbbá, hogy f ábrázolható, és teljesül a* (4.11) *egyenlőtlenség. Ekkor az f funkcionál g-re vonatkozó f_g komplemense felírható $f_g = \overline{S\eta_g}$ alakban, pontosabban*

$$f_g(a) = \overline{\langle S\eta_g, a\rangle}, \qquad a \in \mathscr{A}. \tag{4.17}$$

Amennyiben $\mathscr{A}$ egységelemes, $f_g = \overline{A_B 1}$, azaz

$$f_g(a) = \overline{\langle A_B 1, a\rangle}, \qquad a \in \mathscr{A}. \tag{4.18}$$

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy tetszőleges $a \in \mathscr{A}$ elemre fennáll, hogy $S^*a = \pi_f(a)\eta_g$, ugyanis $g(a) = (\pi_f(a)\xi_f|\eta_g)_f$ miatt

$$\begin{aligned}(Ax|S^*a)_f &= \langle S(Ax), a\rangle = \langle Bx, a\rangle = g(a^*x)\\ &= (\pi_f(a^*x)\xi_f|\eta_g)_f = (\pi_f(x)\xi_f|\pi_f(a)\eta_g)_f = (Ax|\pi_f(a)\eta_g)_f.\end{aligned}$$

Ennek az azonosságnak a segítségével könnyen megállapíthatjuk, hogy

$$\overline{\langle S\eta_g, a\rangle} = (S^*a|\eta_g)_f = (\pi_f(a)\eta_g|\eta_g)_f = f_g(a),$$

így beláttuk a (4.17) egyenlőséget. Szintén $S^*a = \pi_f(a)\eta_g$ következménye

$$\begin{aligned}\langle A_B x, a\rangle &= \langle SS^*x, a\rangle = (S^*x|S^*a)_f\\ &= (\pi_f(x)\eta_g|\pi_f(a)\eta_g)_f = (\eta_g|\pi_f(x^*a)\eta_g)_f = \overline{f_g(x^*a)},\end{aligned}$$

amiből egységelemes $\mathscr{A}$ esetén $x := 1$ helyettesítéssel adódik (4.18). □

Ezen a ponton bevezethetjük funkcionálok párhuzamos összegének fogalmát. Tekintsük az $f, g \in \mathscr{A}^\#$ ábrázolható funkcionálokat. Ekkor az $f + g$ funkcionál is ábrázolható, és fennáll, hogy

$$|f(a)|^2 \leq M(f(a^*a) + g(a^*a)), \qquad a \in \mathscr{A}$$

alkalmas M konstans választásával. Ekkor

$$f(a^*a)+g(a^*a)+f(b^*a)+\overline{f(b^*a)}+f(b^*b)=f((a+b)^*(a+b))+g(a^*a)\geq 0,$$

így létezik az $(f+g)_f \in \mathscr{A}^\#$ funkcionál, és $f \geq (f+g)_f$.

4.2.4. Definíció. Legyen f és g ábrázolható funkcionál az $\mathscr{A}$ *-algebrán. Ekkor az $(f:g) := f-(f+g)_f$ egyenlőséggel definiált $f:g$ párhuzamos összegük szintén ábrázolható funkcionál, melyre fennáll

$$(f:g)(a^*a)=\inf\left\{f((a+b)^*(a+b))+g(b^*b)\,\middle|\,b\in\mathscr{A}\right\}. \tag{4.19}$$

Irodalomjegyzék

[1] Tarcsay Zsigmond, Titkos Tamás,
Operators on anti-dual pairs: Generalised Krein-von Neumann extension,
Mathematische Nachrichten, 2020, megjelenés alatt.

[2] Tarcsay Zsigmond, Titkos Tamás,
Operators on anti-dual pairs: Self-adjoint Extensions and the Strong Parrott Theorem,
Canad. Math. Bull., 63 (4) (2020), 813-824.

[3] Tarcsay Zsigmond, Titkos Tamás,
Operators on anti-dual pairs: Generalized Schur Complement,
Linear Algebra Appl., (2020)

[4] Kristóf János,
A matematikai analízis elemei IV.
ELTE, Egyetemi jegyzet

[5] Czách László, Tarcsay Zsigmond,
Funkcionálanalízis topologikus vektortereken
ELTE, Egyetemi jegyzet (2021)

[6] Hassi, Sebestyén, De Snoo,
On the nonnegativity of operator products,
Acta Mathematica Hungarica, 109, (2005)

[7] Tarcsay Zsigmond,
Funkcionálanalízis
ELTE, Egyetemi jegyzet (2018)

[8] M. G. Krein,
The theory of self-adjoint extensions of semi-bounded Hermitian transformations and its applications.
I, Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. 20 (62) (1947), 431–495.

[9] C. Foias and A. Tannenbaum,
A strong Parrott theorem.
Proc. Amer. Math. Soc. 106 (1989), 777-784

[10] A. Yamada,
Parrott's theorem and bounded solutions of a system of operator equations.
Complex Anal. Oper. Theory 11 (2017), 961-976

Tartalomjegyzék