Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

A p-adikus Satake-izomorfizmus

Lévai Orsolya

MSc Szakdolgozat

Témavezető:
Zábrádi Gergely, adjunktus

Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2021

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Zábrádi Gergelynek és édesapámnak a hosszas magyarázatokat, a gyors válaszokat és hogy mindig segítő szándékkal fordultak felém.
Köszönet illet továbbá mindenkit, aki bármilyen nemben hozzájárult a dolgozat elkészüléséhez, akár szakmai, akár lelki támogatást nyújtva.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

1.1. A dolgozat témája

Szakdolgozatom célja $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Q}_p)$ p-adikus ábrázolásainak leírása. Ehhez először a lokálisan konstans ábrázolások elméletéről adunk rövid ismertetőt, melynek kiemelt eredményeként karakterizáljuk azokat irreducibilis lokálisan konstans ábrázolásokat, melyeknek van egy $G_0 := \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z}_p)$ által fixen hagyott vektora.

Erre az elméletre támaszkodva értelmezünk ezután olyan reprezentációkat, melyek már nem lokálisan konstansok, így kezelésükhöz valamilyen korlátosságot garantáló tényezőre lesz szükség.

Így jutunk el a Banach-tér reprezentációk fogalmáig, melyekre a lokálisan konstans elmélet példájára felépítjük a p-adikus Satake-izomorfizmus kimondásához szükséges ismereteket.

A dolgozat fő eredménye, a p-adikus Satake-izomorfizmus, amin keresztül $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Q}_p)$ számos új jól paraméterezett reprezentációját lehet konstruálni.

A dolgozatban Peter Schneider *p-adic Banach space representations of p-adic groups* című jegyzetét követem, a precíz elméleti hátteret pedig Peter Schneider és Jeremy Teitelbaum *Banach-Hecke algebras and p-adic Galois representations* című cikkéből merítem. Az első fejezet algebrai csoportkoról szóló állításait James E. Humphreys *Linear Algebraic Groups* című könyvéből sikerült megértenem. Hivatkozom továbbá egy Ryan Vinroot egyetemi tanár honlapján található bizonyításra G_0 kompkatságáról.

1.2. Jelölések

- A nyomtatott nagy K betű $\mathbb{Q}_p$ egy véges bővítését jelöli.
- Nyomtatott nagy G jelöli a $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Q}_p)$ mátrixcsoportot, G_0 pedig ennek $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z}_p)$ részcsoportját.
- Nyomtatott nagy T jelöli a $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Q}_p)$-beli diagonális mátrixok részcsoportját, T_0 pedig a $T \cap G_0$ metszetet.
- $N_G(H)$ jelöli a H részcsoport normalizátorát G-ben, $Z(H)$ pedig a centralizátorát.
- W jelöli $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Q}_p)$ Weyl-csoportját.
- ${}^w t$ jelöli a $t \in T$ elem konjugáltját egy $w \in W$ permutációmátrixszal.
- val jelöli azt az egyértelmű $K^\times \longrightarrow \mathbb{R}$ értékelést, melyre $\mathrm{val}(\mathbb{Q}_p^\times) = \mathbb{Z}$ és $|a|_p = p^{-\mathrm{val(a)}}$.
- $X(G)$ jelöli G karakretcsoportját .
- ξ domináns algebrai karaktert jelöl.
- $\mathrm{ind}_{G_0}^G(1)$ jelöli a konstans 1 G_0-reprezentáció indukáltját G-re.
- ϵ_0 jelöli G_0 karakterisztikus függvényét.
- $\mathcal{H}(G, G_0)$ jelöli az $\mathrm{End}_G(\mathrm{ind}_{G_0}^G(1))$ Satake-Hecke algebrát.
- χ a $\mathcal{H}(G, G_0)$ Satake-Hecke algebra egy karakterét jelöli.
- K_χ jelöli a K-t, mint $\mathcal{H}(G, G_0)$-modulust a χ karakteren keresztül.
- V_χ jelöli a $K_\chi \otimes_{\mathcal{H}(G,G_0)} \mathrm{ind}_{G_0}^G(1)$ reprezentációt.
- Δ jelöli az olyan $\psi : G \longrightarrow K$ függvények halmazát, melyek konstansok a G_0 szerinti kettős mellékosztályokon és véges sok ilyen mellékosztály kivételével eltűnnek.
- $*$ jelöli a $\mathcal{H}(G, G_0)$-beli konvolúciót.
- $X_*(T)$ jelöli a T tórusz kokarakter csoportját.

- Λ jelöli a T/T_0 hányadost.
- λ jelöli a $T \longrightarrow \Lambda$ vetítést.
- ${}^w\lambda$ jelöli a $T \longrightarrow \Lambda$ $w \in W$-vel csavart vetítést: ${}^w\lambda(t) = \lambda({}^w t)$.
- T' jelöli a $\mathrm{Hom}(\Lambda, K^\times)$ duális tóruszt.
- $K[\Lambda]$ jelöli Λ K fölötti csoportgyűrűjét.
- γ azt a $W \times \Lambda \longrightarrow \mathbb{Q}_p^\times$ leképezést jelöli, melyre $\gamma(w, \lambda(t)) := p^{\mathrm{val}(\xi(wtw^{-1}))-\mathrm{val}(\xi(t))}$.
- $G'(K)$ a $\mathrm{GL}_{d+1}(K)$ duális csoportot jelöli.
- N jelöli a G-beli unipotens alsó háromszögmátrixok részcsoportját, P pedig az összes alsó háromszögmátrixot G-ben. N_0 jelöli a $G_0 \cap N$ metszetet.
- γ_ξ jelöli azt a $W \times \Lambda \longrightarrow \mathbb{Q}_p$ kociklust, mellyet a Satake-leképezésben csavarni szeretnénk.
- S_ξ jelöli a γ_ξ-vel csavart Satake-leképezést.
- E_ξ-vel jelöljük a ξ domináns karakterhez tartozó G-reprezentációt
- $\|\cdot\|_\xi$-vel jelöljük az E_ξ G_0-invariáns rácsából származó normát.
- $\mathcal{B}(G, G_0)$-al jelöljük $\mathcal{H}(G, G_0)$ teljessé tételét a sup-normára nézve, $\mathcal{B}_\xi(G, G_0)$-al pedig a $\|\cdot\|_\xi$-re való teljessé tételét
- $\mathrm{ind}_{G_0}^G(E|_{G_0})$ jelöli a $\mathrm{ind}_{G_0}^G(1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ tenzorszorzatot.
- T^{--} jelöli T antidomináns részmonoidját, Λ^{--} pedig az antidomináns kokarakterek halmazát.
- ψ_λ jelöli a $\lambda \in \Lambda^{--}$ által meghatározott G_0 szerinti kettős mellékosztály karakterisztikus függvényét.
- $\|\cdot\|_{\gamma_\xi}$ jelöli a γ_ξ leképezés által meghatározottnormát $K[\Lambda]$-n.
- $K\rangle\Lambda, \xi\langle$ jelöli $K[\Lambda]$ teljessé tételét a $\|\cdot\|_{\gamma_\xi}$ normára nézve

2. $\mathbf{GL_{d+1}}(\mathbb{Q}_\mathbf{p})$

Mivel az egész szakdolgozat központjában $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Q}_p)$ áll, így első lépésként ismertetni fogjuk néhány fontos tulajdonságát, melyekre a későbbiekben szükségünk lesz. Az egyszerűség kedvéért bevezetjük a $\mathbf{G} := \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Q}_p)$ jelölést.

2.1. $\mathbf{GL_{d+1}}(\mathbb{Q}_\mathbf{p})$, mint Lie-csoport

A továbbiakban gyakran használni fogjuk, hogy G Lie-csoport, így speciálisan adott rajta egy topológia is. Ebben a topológiában kitűntetett szereppel bír a $\mathbf{G_0} := \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z}_p)$ részcsoport, mellyel a további fejezetekben is többször találkozni fogunk.

2.1. Állítás. *G_0 nyílt és maximális kompakt részcsoport G-ben*

Bizonyítás. G_0 nyílt és kompakt, mivel felírható, mint $\mathbb{Z}_p^{(d+1)^2}$ nyílt és kompakt halmaz és az $1 \subseteq \mathbb{Q}_p$ nyílt és kompakt halmaz a folytonos determináns leképezésnél vett ősképének a metszete. A maximalitás korántsem triviális, de belátható, hogy egy $H \leq G$ részcsoport pontosan akkor maximális kompakt, ha konjugált G_0-hoz. A bizonyítás [4] □

2.2. Definíció. (**tórusz**) Tórusznak hívunk minden olyan $H \leq G$ részcsoportot, amely izomorf a $\mathrm{GL}_n(K)$-beli diagonális mátrixok alkotta részcsoportal valamely $n \in \mathbb{N}$-re és K testre.

2.3. Megjegyzés. A tórusz kifejezés eredetileg $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-ből jön: $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ diagonális mátrixok alkotta részcsoportja ugyanis természetes módon bijekcióba állítható $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$-al. Felhasználva, hogy $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\} \simeq S^1 \times \mathbb{R}$ azt kapjuk, hogy $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \simeq S^1 \times S^1$.

A legegyszerűbb tórusz, ami eszünkbe juthat, az maga a G-beli diagonális mátrixok alkotta tórusz, melyet el is nevezünk $\mathbf{T}$-nek.

Mivel $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Q}_p)$ Lie-csoport, ezért van Weyl-csoportja, melyet W-vel jelölünk. Mivel T maximális tórusz, ezért $W = N_G(T)/Z(T)$. A centralizátort nem nehéz kiszámolni: Például T maximalitásából azonnal tudhatjuk, hogy $Z(T) = T$.

2.4. Állítás. *$N_G(T)$ pontosan az általánosított permutációmátrixok csoportja, azaz $E_{i,k}$-val jelölve azt a mátrixot, melynek i-edik sorának k-adik oszlopában 1-es van, mindenütt máshol 0:*

$$N_G(T) = \{\sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i E_{i,\sigma(i)} \mid \sigma = \ \{\mathbb{Z}_{d+1} \text{ valamilyen permutációja}\}, \lambda_i \in \mathbb{Q}_p\}$$

Bizonyítás. Legyen $M \in N_G(T)$ és $D \in T$. Mivel a konjugálás megőrzi a sajátértékeket, ezért $L := MDM^{-1}$ olyan diagonális mátrix, aminek sajátértékei megegyeznek D sajátértékeivel, tehát az átlóbeli elemei D átlóbeli elemeinek valamilyen permutációjával kaphatók.

Ha D-t olyan mátrixnak vesszük, amelynek minden főátlóbeli eleme különböző, tehát például $D = E_{1,1} + 2E_{2,2} + \ldots + (d+1)E_{d+1,d+1}$, akkor $L = \sigma(1)E_{1,1} + \sigma(2)E_{2,2} + \ldots + \sigma(d+1)E_{d+1,d+1}$ valamilyen σ permutációra.

Mivel $MD = LM$, ezért

$$M_{i,j}(j - \sigma(i)) = 0$$

ami (felhasználva, hogy M invertálható, tehát teljes rangú) azt jelenti, hogy M pontosan az $(i, \sigma(i))$ koordinátákban nem nulla, tehát általánosított permutációmátrix. □

2.5. Következmény. *G Weyl-csoportja pontosan a permutációmátrixokból áll.*

Ez azt jelenti, hogy W a konjugálással hat a T tóruszon, mégpedig úgy, hogy a főátlóbeli elemeket megfelelően permutálja. A továbbiakban tetszőleges $w \in W$ és $t \in T$ esetén jelöljük a wtw^{-1} elemet ${}^w t$-vel.

2.2. $\mathbf{GL_{d+1}}(\mathbb{Q}_\mathbf{p})$ racionális reprezentációi

Ebben a fejezetben James E. Humphreys Linear Algebraic Groups [3] című könyve alapján rövid áttekintést adunk $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Q}_p)$ úgynevezett *racionális reprezentációiról.* A racionális szó ebben a speciális esetben annyit fog jelenteni, hogy a csoporthatás a mátrixelemektől polinomiálisan fog függeni. Fontos megjegyezni, hogy az elmélet felépíthető lenne tetszőleges hasadó reduktív csoportra, mi csupán az egyszerűség kedvéért szorítkozunk a $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Q}_p)$ esetre.

A racionális reprezentációk bevezetéséhez természetesen szükségünk lesz egy alaptestre, melyet **K**-val fogunk jelölni és $\mathbb{Q}_p$ egy tetszőleges véges bővítését értjük rajta. Legyen továbbá **val** $: K^\times \to \mathbb{R}$ az az egyértelmű értékelés, melyre $\mathrm{val}(\mathbb{Q}_p^\times) = \mathbb{Z}$ és $|a|_p := p^{-\mathrm{val}(a)}$.

2.6. Definíció. (**racionális reprezentáció**) Legyen V egy véges dimenziós K-vektortér. Egy $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Q})_p \to GL_n(V)$ homomorfizmust $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Q}_p)$ egy racionális reprezentációjának nevezünk, ha a mátrixelemek polinomiális függvényeként írható fel.

2.7. Megjegyzés. Teljes általánosságban, tetszőleges algebrai varietásra ez a definíció nem így hangzana, mi itt azt használjuk ki, hogy $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Q}_p)$ egy olyan algebrai varietás, mely az identitás mentén van beágyazva a $\mathbb{Q}_p^{(d+2)^2}$ euklideszi térbe.

2.8. Definíció. (**karaktercsoport**) $X(G)$-vel jelöljük és G karaktercsoportjának hívjuk a $\chi : G \to K^\times$ algebrai karakretek által alkotott csoportot. A csoportművelet a következő: $(\chi_1\chi_2)(g) := \chi_1(g)\chi_2(g)$. Algebrai karakter alatt olyan karaktereket értünk, melyek megadhatók a mátrixelemek racionális törtfüggvényeiként. Olyan racionális törtfüggvényt, melynek pólusa lenne, nem engedünk meg.

Könnyen meggondolható, hogy a T tórusz algebrai karakterei mind a következő alakot öltik:

$$\begin{pmatrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{d+1} \end{pmatrix} \longmapsto \prod_{i=1}^{d+1} t_i^{a_i}$$

ahol $(a_1, \dots, a_{d+1}) \in \mathbb{Z}^{d+1}$. Ez azért van, mert egy algebrai karakternek nem csak racionális törtfüggvénynek, hanem homomorfizmusnak is lennie kell, így meg kell követelnünk a multiplikativitást. A racionális törtfüggvények körében viszont csak a monomok multiplikatívak, ezért minden karakter t_i-k bizonyos hatványainak szorzataként fog előállni. Ez természetes módon ad egy izomorfizmust $X(T)$ és $\mathbb{Z}^{d+1}$ között, ezért a továbbiakban a két csoportot azonoítani fogjuk.

Mivel T Abel-csoport, ezért tudjuk, hogy minden irreducibilis reprezentációja 1-dimenziós, azaz a fent említett karakterek valamelyike. Ezért tetszőleges $G \to \mathrm{GL}(V)$ ábrázolásnál V a következő V_α sajátalterek direkt összegére bomlik, ahol $\alpha \in X(T)$:

$$V_\alpha = \{v \in V \mid t.v = \alpha(t)v \ \ \forall t \in T\}$$

Megmutatható, hogy amennyiben egy $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}(E)$ irreducibilis reprezentációt vizsgálunk, úgy lesz egyetlen úgynevezett domináns karaktere T-nek, ami esetünkben azt fogja jelenteni, hogy a fent említett $\alpha = (a_1, \dots a_{d+1})$ karakterek közül mindig lesz egyetlen, amire $a_1 \leq \dots \leq a_{d+1}$. Ez a domináns súly a következő eredmény miatt lesz kiemelten fontos:

2.9. Tétel. *Minden $GL_{d+1}(\mathbb{Q}_p) \to GL(E)$ irreducibilis racionális reprezentációnak van egyetlen ξ domináns algebrai karaktere és tetszőleges ξ domináns algebrai karakterhez találunk egyetlen olyan $GL_{d+1}(\mathbb{Q}_p) \to GL(E)$ irreducibilis racionális reprezentációt, amiben ő előfordul.*

Emiatt ezentúl E_ξ-vel jelöljük a ξ domináns algebrai karakterhez tartozó irreducibilis racionális reprezentációt.

3. G_0-ábrázolások indukálása G-re

Az eddigiekben klasszifikáltuk a véges dimenziós racionális reprezentációkat. Ebben a fejezetben azt fogjuk megvizsgálni, hogy ha vesszük G_0 egy ilyen reprezentációját, akkor azt hogyan tudjuk kiindukálni G-re. Fontos észrevétel, hogy $|G : G_0| = \infty$, ezért az így kapott reprezentációk már végtelen dimenziósak.

3.1. A triviális ábrázolás indukáltja

3.1. Definíció. (**a triviális ábrázolás indukáltja**)

$$\mathrm{ind}_{G_0}^{G}(1) := \{\ f : G/G_0 \longrightarrow K \mid \text{f véges tartójú}\}$$

Ezen a vektortéren egy $g \in G$ hatása a következő:

$$g(f(x)) := f(gx) \qquad (x \in G/G_0).$$

Mivel G_0 nyílt halmaz, ezért az $\mathrm{ind}_{G_0}^{G}(1)$-beli függvények mind lokálisan konstansok, hiszen G_0 minden mellékosztályán ugyanazt az érteket veszik fel. A továbbiakban az ilyen lokálisan konstans reprezentációkat fogjuk vizsgálni.

Vegyük észre, hogy G_0 karakterisztikus függvényét ϵ_0-al jelölve ϵ_0 egy olyan G_0-invariáns vektor, ami generálja $\mathrm{ind}_{G_0}^{G}(1)$-t, mint G-reprezentációt. Ebből következik, hogy $\mathrm{ind}_{G_0}^{G}(1)$ bármely irreducibilis faktorának kell hogy legyen egy nemnulla G_0 által fixen hagyott vektorának.

Legyen most V egy irreducibilis faktora $\mathrm{ind}_{G_0}^{G}(1)$-nek. A vektorterünknél megkövetelt véges tartójúság garantálja, hogy a megszokott Frobenius-reciprocitás $\mathrm{ind}_{G_0}^{G}(1)$-re is használható:

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_{G_0}^{G}(1), V) = \mathrm{Hom}_{G_0}(1, V) = V^{G_0}$$

ahol V^{G_0} := G_0 által fixen hagyott vektorok V-ben. Ez azt jelenti, hogy minden irreducibilis lokálisan konstans G-reprezentáció, aminek van G_0 által fixen hagyott vektora, faktora $\mathrm{ind}_{G_0}^{G}(1)$-nek: Ha van G_0 által fixált vektor, akkor az egyenlet jobb oldala nem nulla, így kell lennie egy $\mathrm{ind}_{G_0}^{G}(1) \longrightarrow V$ nemnulla homomorfizmusnak is. Ez V irreducibilitása miatt szürjektív kell, hogy legyen, tehát ezen leképezés mentén V valóban faktora $\mathrm{ind}_{G_0}^{G}(1)$-nek.

Következő célunk tehát $\mathrm{ind}_{G_0}^{G}(1)$ irreducibilis faktorainak meghatározása.

3.2. A Satake-Hecke algebra

3.2. Definíció. (**Satake-Hecke algebra**) A Satake-Hecke algebra a következő endomorfizmusgyűrű:

$$\mathcal{H}(G, G_0) := \mathrm{End}_G(\mathrm{ind}_{G_0}^G(1))$$

ellátva a következő szorz

Vegyük észre, hogy bármely $\chi : \mathcal{H}(G, G_0) \longrightarrow K$ karakter meghatározza $\mathrm{ind}_{G_0}^G(1)$ egy V_χ hányadosreprezentációját, ahol:

$$V_\chi := K_\chi \otimes_{\mathcal{H}(G,G_0)} \mathrm{ind}_{G_0}^G(1)$$

Itt K_χ alatt K-t, mint $\mathcal{H}(G, G_0)$-mondulust értjük, ahol a hatás χ-n keresztül értendő. Azt reméljük, hogy ezek a V_χ-k irreducibilisek.

A következő állítás kimondása előtt egy hasznos technikai lemmát látunk be:

3.3. Lemma. *Legyen G topologikus csoport és legyen $H \leq G$ nyílt és kompakt. Ekkor minden H szerinti kettős mellkéosztály véges sok H szerinti baloldali mellékosztály uniójaként áll elő.*

Bizonyítás. Vegyünk egy $g \in G$-t és tekintsük a HgH kettős mellékosztályt. Ekkor H a balszorzásra nézve permutálja G H szerinti baloldali mellékosztályait és nyilván tranzitív azokon a mellékosztályokon, amelyek benne vannak HgH-ban. Ez azt jelenti, hogy azok a H szerinti baloldali mellékosztályok, melyek benne vannak HgH-ban, bijekcióba hozhatók H-nak $S := \mathrm{Stab}_H(gH)$ szerinti baloldali mellékosztályaival. Vegyük észre, hogy $S = H \cap gHg^{-1}$. Mivel H nyílt, ezért a szorzás folytonossága miatt gHg^{-1} is nyílt G-ben, így a metszetük is az. Tehát S nyílt G-ben, így H-ban is. H előáll S szerinti baloldali mellékosztályok diszjunkt uniójaként, melyek a H kompakt halmaz nyílt fedését adják, tehát már véges sok baloldali mellékosztály is fedi H-t. $\square$

3.4. Állítás. *A $\mathcal{H}(G, G_0)$ Satake-Hecke algebra a következő leképezés mentén bijekcióba állítható a*

$$\Delta := \{\psi : G \longrightarrow K \mid \psi \text{ konstans a } G_0 \text{ szerinti kettős mellékosztályokon és} \\ \text{véges sok kettős mellékosztály kivételével eltűnik}\}$$

halmazzal:

$$A \longmapsto \psi_A(g) := A(\epsilon_0)(g^{-1})$$

Bizonyítás. $A(\epsilon_0)$ értelmezhető kettős mellékosztályokon értelmezett függvényként is, hiszen ϵ_0 képe tetszőleges G-endomorfizmusnál egy G_0-invariáns véges tartójú $G/G_0 \longrightarrow K$ függvény lesz. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $g \in G_0$-ra

$$g(A(\epsilon_0)) = A(g\epsilon_0) = A(\epsilon_0)$$

ami azt jelenti, hogy $A(\epsilon_0)$ konstans a kettős mellékosztályokon, tehát értelmezhető $G_0 \setminus G/G_0 \longrightarrow K$ függvényként.

Az injektivitáshoz elég felidéznünk azt az észrevételt, hogy ϵ_0 generálja $\mathrm{ind}_{G_0}^G(1)$-t, tehát az A operátort egyértelműen meghatározza az ϵ_0-on felvett értéke.

A szürjektivitáshoz az előző lemmát fogjuk felhasználni. Vegyük észre, hogy G-re és G_0-ra teljesülnek az előző lemma feltételei, tehát tudjuk, hogy egy kettős mellékosztály véges sok baloldali mellékosztály uniójaként áll elő. Δ-t nyilván generálják a kettős mellékosztályok karakterisztikus függvényei. Elég tehát megmutatnunk, hogy tetszőleges ilyen karakterisztikus függvény előállítható valamely $A \in \mathcal{H}(G, G_0)$ endomorfizmus képeként.

Legyen $g \in G$ tetszőleges. Ekkor a $G_0 g G_0$ kettős mellékosztály karakterisztikus függvénye felírható a

$$B := \sum_{hG_0 \subseteq G_0 g G_0} h\mathrm{Id}$$

endomorfizmus ψ_B képeként. $\square$

3.5. Megjegyzés. Δ nyilvánvalóan K-vektortér. Ha ellátjuk a következő szorzással, akkor az így keletkező K-algebra izomorf lesz $\mathcal{H}(G, G_0)$-al:

$$\psi_1 * \psi_2(h) := \sum_{g \in G/G_0} \psi_1(g)\psi_2(g^{-1}h)$$

A fenti $A \longmapsto \psi_A$ leképezésnek az inverze a $\psi \in \Delta \longmapsto A_\psi(f) := \psi * f$ függvény. A továbbiakban amikor $\mathcal{H}(G, G_0)$-t azonosítjuk a Δ halmazzal, akkor erre a szorzásra gondolunk.

4. Satake-izomorfizmus lokálisan konstans ábrázolásokra

4.1. A kokarakter csoport és a duális tórusz

Ahhoz, hogy ki tudjuk mondani a lokálisan konstans ábrázolásokra vonatkozó Satake-izomotfizmust, szükségünk lesz néhány további definícióra.

4.1. Definíció. (**kokarakter csoport**) G kokarakter csoportjának nevezzük az $X_*(T) := \{f : K^\times \longrightarrow G \mid f$ racionális törtfüggvény és homomorfizmus$\}$ halmazt. Olyan racionális törtfüggvényeket, melyeknek pólusa lenne, nem engedünk meg.

Vezessük be a $T_0 := G_0 \cap T$ jelölést és értelmezzük a $\Lambda := T/T_0$ hányadost. Célunk megmutatni, hogy ez azonosítható T kokarakter csoportjával.

4.2. Állítás. $\Lambda \simeq X_*(T)$

Bizonyítás. Azt fogjuk megmutatni, hogy $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^{d+1} \simeq X_*(T)$. Ehhez vegyük észre, hogy $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^{d+1}$, mivel $T \simeq (\mathbb{Q}_p^\times)^{d+1}$ és $T_0 \simeq (\mathbb{Z}_p^\times)^{d+1}$.

$X_*(T) \simeq \mathbb{Z}^{d+1}$-hez vizsgáljuk meg, hogy hogyan is néz ki egy tetszőleges $\chi \in X_*(T)$: Már pár fejezettel ezelőtt láttuk, hogy a racionális törtfüggvények közül pontosan a monomok multiplikatívak, így tetszőleges $x \in K^\times$ mellett $\chi(x) = (x^{d_1}, x^{d_2}, \ldots, x^{d_{d+1}})$ $(d_i \in \mathbb{Z})$ alakban írható fel. Ezek tudatában azonnal adja magát a $\chi \longleftrightarrow (d_1, d_2, \ldots, d_{d+1})$ megfeleltetés. Egyszerű számolás adja, hogy ez a megfeleltetés művelettartó is. $\square$

Ha λ-val jelöljük a $T \longrightarrow \Lambda$ vetítést, akkor könnyen meggondolható, hogy λ mentén W hatása T-n indukál egy hatást Λ-n. ($z \in \Lambda$ mellett $w(z) := \lambda(wtw^{-1}) := {}^w\lambda(t)$, ahol t a z-nek megfelelő mellékosztály egy tetszőleges T-beli reprezentánsa)

4.3. Definíció. (**duális tórusz**) T'-vel jelöljük és a T-hez duális tórusznak nevezzük a $T' := \mathrm{Hom}(\Lambda, K^\times)$ halmazt.

4.4. Definíció. (**csoportgyűrű**) Ha R kommutatív egységelemes gyűrű és G egy csoport, akkor $R[G]$-vel jelöljük és G R fölötti csoportgyűrűjének nevezzük az $R[G] := \{\alpha : G \longrightarrow R \mid \alpha \text{ véges tartójú}\}$ halmazt ellátva a következő két művelettel:

$$(\alpha + \beta)(x) := \alpha(x) + \beta(x)$$

$$(\alpha\beta)(z) := \sum_{xy=z} \alpha(x)\beta(y)$$

A továbbiakban hasznos lesz a tény, hogy a $K[\Lambda]$ csoportgyűrű természetes módon azonosítható a T' duális tóruszon értelmezett algebrai függvényekkel: Vegyük észre, hogy tetszőleges $K[\Lambda]$-beli elem néhány $\mathbb{Z}^{d+1}$-beli vektor K-együtthatós lineáris kombinációja. Egy ilyen $(a_1, \ldots, a_{d+1}) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ vektorhoz hozzárednelhetjük az $x_1^{a_1} \ldots x_{d+1}^{a_{d+1}} \in K[x_1, x_1^{-1,} \ldots, x_{d+1}, x_{d+1}^{-1}]$ monomot. Másrészt ezek a monomok természetes módon azonosíthatók a T' duális tórusz elemeivel, ezáltal pedig $K[x_1, x_1^{-1,} \ldots, x_{d+1}, x_{d+1}^{-1}]$ T' elemeinek racionális törtfüggvényei, így alkalmas $v \in (K^\times)^{d+1}$ vektort rögzítve $K[\Lambda]$-t valóban azonosíthatjuk a T' duális tóruszon értelmezett algebrai függvényekkel.

4.2. A csavart hatás

A Satake-izomorfizmus kimondása előtt vegyük észre, hogy $K[\Lambda]$-n definiálhatunk egy W-hatást a Weyl-csoport Λ-n vett hatása segítségével. Ezt a hatást fogjuk most megcsavarni egy γ leképezéssel:

Rögzítsünk egy $\xi \in X(T)$ domináns karaktert. Erre definiálhatjuk a γ függvényt a következőképp:

$$\gamma(w, \lambda(t)) := p^{\mathrm{val}(\xi(wtw^{-1})) - \mathrm{val}(\xi(t))}$$

ahol $w \in W$ és $t \in T$, valamint λ jelöli a $T \longrightarrow \Lambda$ vetítést.

Ez azt jelenti, hogy ha $\lambda_i \in \Lambda$ jelöli annak a diagonális mátrixnak a mellékosztályát, melynek átlóján az i-edik helyen p van, mindenhol máshol pedig 1, akkor ha értelmezzük a T' duális tórusz következő beágyazását a $G'(K) = \mathrm{GL}_{d+1}(K)$ duális csoportba:

$$\mathrm{Hom}(\Lambda, K^\times) \longrightarrow \mathrm{GL}_{d+1}(K)$$

$$\zeta \longmapsto \begin{pmatrix} p^0\zeta(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p^d\zeta(\lambda_{d+1}) \end{pmatrix}$$

akkor a bal oldalon vett csavart W-hatás megegyezik a jobb oldalon vett szokásos konjugálással.

4.3. Satake-izomorfizmus lokálisan konstans ábrázolásokra

A tétel kimondása előtt még egy utolsó jelölést be kell vezetnünk. Jelölje $\mathbf{N}$ a G-beli unipotens alsó háromszögmátrixok csoportját, illetve jelölje $\mathbf{P}$ az össes G-beli alsó háromszögmátrix alkotta csoportot. Ekkor fennáll $P = TN$. Ezen kívül bevezetjük még az $\mathbf{N_0} := G_0 \cap N$ jelölést. Így már készen állunk a tétel kimondására.

4.5. Tétel. *(Satake) Ha $K[\Lambda]^{W,\gamma_1}$-el jelöljük a fent definiált hatás invariánsait, akkor a következő S_1 leképezés egy izomorfizmus K-algebrák között:*

$$S_1 : \mathcal{H}(G, G_0) \xrightarrow{\simeq} K[\Lambda]^{W,\gamma_1}$$

$$\psi \longmapsto \sum_{t \in T/T_0} \Big(\sum_{n \in N/N_0} \psi(tn)\Big)\lambda(t)$$

Ebből azonnal kapjuk, hogy $\mathcal{H}(G, G_0)$ kommutatív (hiszen $K[\Lambda]$ maga kommutatív) és hogy a $\mathcal{H}(G, G_0) \longrightarrow K^\times$ karakterek parametrizálhatók a T' duális tórusz pályáival a γ_1-csavart W-hatásra nézve (a karaktertől függő alkalmas véges $\mathbb{Q}_p$-bővítés esetén).

4.6. Következmény. *Alkalmas K véges bővítés esetén $\mathcal{H}(G, G_0)$ $\chi = \chi_{\mathcal{O}}$ karakterei kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők a T' duális csoport féligegyszerű konjugáltosztályainak.*

Emlékezzünk vissza arra az észrevételünkre, hogy $\mathcal{H}(G, G_0)$ χ karakterei meghatározzák bizonyos V_χ hányadosreprezentációit $\mathrm{ind}_{G_0}^G(1)$-nek. A Satake-tétel birtokában már belátható, hogy ezek között valóban előfordul az összes irreducibilis lokálisan konstans G-reprezentáció, ami rendelkezik nemnulla G_0 által fixált vektorral.

Bizonyítás nélkül közöljük a következő eredményt:

4.7. Tétel. *Minden $V_{\chi_{\mathcal{O}}}$ reprezentáció véges kompozíciólánccal rendelkezik és tartalmaz egyetlen $V_{\mathcal{O}}$ irreducibilis faktort. Ezek a $V_{\mathcal{O}}$ reprezentációk páronként nemizomorfak és izomorfizmus erejéig kiadják az összes lokálisan konstans G-reprezentációt, ami rendelkezik nemnulla G_0 által fixált vektorral.*

5. A Satake-izomorfizmus Banach-tér reprezentációkra

Vegyük észre, hogy $\mathrm{ind}_{G_0}^G(1)$ el van látva a függvények sup-normájával, mely G-invariáns. Ha erre a normára nézve teljessé tesszük $\mathrm{ind}_{G_0}^G(1)$-t, akkor egy $B_{G_0}^G(1)$ K-Banach reprezentációját kapjuk G-nek.

Ehhez hasonlóan a $\mathcal{H}(G, G_0)$ Satake-Hecke algebrán is értelmezhetünk a 3.4-es álltás által egy szubmultiplikatív sup-normát, melyre nézve teljessé téve azt a $\mathcal{B}(G, G_0)$ K-Banach algebrát kapjuk.

5.1. Állítás. *Ha $\mathrm{End}_G^{cont}(B_{G_0}^G(1))$-el jelöljük $B_{G_0}^G(1)$ folytonos endomorfizmusait G-re nézve, akkor*

$$\mathrm{End}_G^{cont}(B_{G_0}^G(1)) = \mathcal{B}(G, G_0)$$

Bizonyítás. Aonosítsuk a Hecke-algebrát a 3.4-ben definiált Δ halmazzal és emlékezzünk vissza, hogy ennél az azonosításnál a egy $\psi \in \Delta$ elemhez azt az A_ψ endomorfizmust rendeltül, melyre $A_\psi(f) = \psi * f$ minden $f \in \mathrm{ind}_{G_0}^G(1)$ esetén. Nyilvánvalóan $\|\psi * f\| \leq \|\psi\| \cdot \|f\|$, tehát a fenti izomorfizmus nem növeli a normát.

Tetszőleges $\psi \in \mathcal{H}(G, G_0)$-ra

$$A_\psi(\epsilon_0)(g) = (\psi * \epsilon_0)(g) = \psi(g^{-1}) \qquad \mathbf{(2)}$$

Ha ez az azonosság egy Cauchy-sorozat minden elemére igaz, akkor határátmenettel a teljessé tétel elemeire is teljesülni fog.

Felhasználva, hogy $\|\epsilon_0\| = 1$ illetve az előző megfigyelésünket a normáról kapjuk, hogy

$$\|A_\psi\| \geq \sup_{g \in G} \|\psi(g^{-1})\| = \|\psi\| \geq \|A_\psi\|$$

Tehát a $\psi \longmapsto A_\psi$ a $B_{G_0}^G(1)$ Banach-téren is izometria, speciálisan ebből következik, hogy injektív.

A szürjektivitáshoz vegyünk egy tetszőleges $A_0 \in \mathrm{End}_G^{cont}(B_{G_0}^G(1))$ folytonos endomorfizmust és definiáljunk egy

$$\psi_0 : G \longrightarrow K$$

leképezést az alábbi módon:

$$g \longmapsto A_0(\epsilon_0)(g^{-1})$$

Az inverzképzés folytonossága miatt az így kapott ψ_0 nyilván benne van a $B^G_{G_0}(1)$ Banach-térben.

A 3.4 állítás érvelésének mintájára belátható, hogy $A_{\psi_0} = A_0$. □

Tehát az előzőhöz hasonlóan egy tetszőleges $\chi : \mathcal{B}(G, G_0) \longrightarrow K$ folytonos karaktert véve bevezethetjük a következő hányados Banach-tér reprezentációt:

$$B_{1,\chi} := K_\chi \widehat{\otimes}_{\mathcal{B}(G,G_0)} B^G_{G_0}(1)$$

Ez a reprezentáció azzal a különleges tulajdonsággal bír, hogy "unitér", azaz el van látva egy G-invariáns normával.

Itt azonban alapvető problémába ütközünk: A lokálisan konstans esettől eltérően itt semmi sem garantálja, hogy $B_{1,\chi}$ nem lesz nulla. Meg kell elégednünk tehát a $\mathcal{B}(G, G_0)$ Banach-algebra meghatározásával.

5.1. Egyéb véges dimenzós G_0-ábrázolások indukáltjai

5.2. Definíció. Legyen ξ T egy tetszőleges domináns algebrai karaktere és legyen $E = E_\xi$ az általa meghatározott racionális $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Q}_p)$-reprezentáció. Jelöle továbbá $E|_{G_0}$ E megszorítását G_0-ra. Ekkor $E|_{G_0}$ indukáltja G-re a következő tenzorszorzat:

$$\mathrm{ind}^G_{G_0}(E|_{G_0}) := \mathrm{ind}^G_{G_0}(1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$$

Ez is egy G-reprezentáció, melyen G koordinátánként hat.

Jogosan merül fel a kérdés, hogy $\mathrm{ind}^G_{G_0}(1)$-hez hasonlóan $\mathrm{ind}^G_{G_0}(E|_{G_0})$ is felírható-e valamilyen speciális függvények vektortereként. A válasz igen:

5.3. Állítás. $\mathrm{ind}^G_{G_0}(E|_{G_0})$ *beágyazható a* $\{\ f : G \longrightarrow E \mid f$ *kompakt tartójú* $\}$ *halmazba.*

Bizonyítás. Az $f \otimes v$ elemi tenzorhoz rednefjük a következő $\phi : G \longrightarrow E$ függvényt: $\phi(g) := f(g)v$. Egy ilyen elemi tenzorhoz tartozó függvény tartója tehát kompakt G-ben (hiszen G_0 minden mellékosztálya kompakt és ϕ tartója véges sok ilyen mellékosztály uniója). Hasonlóképp, ha véges sok ilyen elemi tenzor összegét vizsgáljuk, akkor $\sum_{I=1}^n \phi_i$ tartója is véges sok kompkat halmaz uniójaként fog előállni, így kompakt lesz. □

Vegyük észre, hogy noha valóban G-reprezentációról van szó, $\mathrm{ind}^G_{G_0}(E|_{G_0})$ már nem feltétlenül lokálisan konstans (például ha $G_0 \cap \ker(E) = 1$), ezért az eddig elmondottak nem teljesülnek már rá.

Ezért lesz szükségünk egy másfajta reprezentációra, ahol a korlátosságot már nem a loklisan konstans tulajdonság fogja garantálni, hanem egy norma.

5.4. Definíció. Legyen V egy K-Banach-tér és G egy totálisan összefüggéstelen lokálisan kompakt csoport (a mi esetünkben például $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Q}_p)$). Ekkor G V fölötti K-Banach reprezentációján egy olyan folytonos lineáris $G \longrightarrow \{V \text{ folyt. lin. automorfizmusai}\}$ leképezést értünk, melyre teljesül, hogy az a $G \times V \longrightarrow V$ leképezés, amely a hatást leírja, folytonos.

Vegyük észre, hogy E tartalmaz egy racionális $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z}_p)$-invariáns $\mathbb{Z}_p$-rácsot, amihez tartozik egy norma, melyet ezentúl $\|\cdot\|$-al jelölünk. Ha használjuk a fent említett beágyazást, akkor erre a normára nézve bevezethetünk egy G-invariáns sup-normát $\mathrm{ind}_{G_0}^G(E|_{G_0})$-on. Erre a normára nézve teljessé téve $\mathrm{ind}_{G_0}^G(E|_{G_0})$-t egy K-Banach reprezentációját kapjuk G-nek, melyet a továbbiakban $B_{G_0}^G(E)$-vel fogunk jelölni.

5.5. Lemma. *Legyen $v \in E$ egy tetszőleges nemnulla vektor, továbbá legyen $\rho_v : G \longrightarrow E$ az a leképezés, melyre $\rho_v(g) := g^{-1}v$. Ekkor a következő leképezés egy K-algebra izomorfizmus, mely nem függ v választásától:*

$$\mathrm{End}_G(\mathrm{ind}_{G_0}^G(E|_{G_0})) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}(G, G_0)$$

$$A \longmapsto \frac{A(\epsilon_0\rho_v)}{\rho_v}$$

Bizonyítás. Először is értelmezzünk egy G-hatást a ρ_v függvényeken. Legyenek $g, h \in G$ és $0 \neq v \in E$ tetszőlegesek. Ekkor legyen

$$(g\rho_v)(h) := \rho_v(g^{-1}h)$$

Felhasználva ρ_v definícióját kapjuk, hogy

$$(g\rho_v)(h) = \rho_v(g^{-1}h) = h^{-1}gv = \rho_{gv}(h) \qquad \mathbf{(1)}$$

Rögzített $A \in \mathrm{End}_G(\mathrm{ind}_{G_0}^G(E|_{G_0}))$ esetén retszőleges $g \in G$ elemre definiáljuk a következő $\varphi_g : E \longrightarrow E$ automorfizmust:

$$\varphi_g(v) := g(A(\epsilon_0\rho_v)(g))$$

(φ természetesen füg A választásától).

Belátjuk, hogy a φ_g leképezés $G_0 \cap gG_0g^{-1}$-ekvivariáns, azaz

$$\varphi_g(hv) = h\varphi_g(v)$$

minden $h \in G_0 \cap gG_0g^{-1}$ esetén.

Felhasználva az (**1**) azonosságot kapjuk, hogy:

$$\varphi_g(hv) = g(A(\epsilon_0\rho_{hv})(g)) = g(A(h(\epsilon_0\rho_v))(g))$$

Kihasználva, hogy A endomorfizmus:

$$g(A(h(\epsilon_0\rho_v))(g)) = g(hA(\epsilon_0\rho_v)(g))$$

Az $\mathrm{ind}_{G_0}^G(E|_{G_0})$ ábrázolás definiciója szerint

$$g(hA(\epsilon_0\rho_v)(g)) = g(A(\epsilon_0\rho_v)(h^{-1}g)) = g(A(\epsilon_0\rho_v)(gg^{-1}h^{-1}g))$$

h választása miatt $g^{-1}h^{-1}g \in G_0$, ezért

$$g(A(\epsilon_0\rho_v)(gg^{-1}h^{-1}g)) = gg^{-1}hg(A(\epsilon_0\rho_v)(g)) = h\varphi_g(v)$$

Mivel E bármely nyílt részcsoportra megszorítva abszolút irreducibilis marad, ezért gondolhatunk rá úgy, mint abszolút ireducibilis $G_0 \cap gG_0g^{-1}$-ábrázolásra. A Schur-lemma miatt a φ_g leképezésünk csak egy alklamas $\Psi_A(g)$ konstanssal való szorzás lehet, tehát $\Psi_A(g)$ valóban nem függ a v választásától. Ezáltal a fent definiált hányados is értelmet nyert, hiszen egyszerű átrendezéssel kapható, hogy $A(\epsilon_0\rho_v)(g)$ minden $g \in G$-re párhuzamos $\rho_v(g)$-vel.

Tehát minden $A \in \mathrm{End}_G(\mathrm{ind}_{G_0}^G(E|_{G_0}))$-hez hozzá tudunk rednelni egy $\Psi_A : G \longrightarrow K^\times$ leképezést.

Belátjuk, hogy tetszőleges $A \in \mathrm{End}_G(\mathrm{ind}_{G_0}^G(E|_{G_0}))$ esetén Ψ_A konstans a G_0 szerinti kettős mellékosztályokon. Ehhez elég látni, hogy tetszőleges $g \in G$ és $h \in G_0$ esetén $\Psi_A(hg) = \Psi_A(g) = \Psi_A(gh)$.

Tekintsük először $\Psi_A(hg)$-t:

$$\Psi_A(hg)v = hg(A(\epsilon_0\rho_v)(hg)) = hg(h^{-1}A(\epsilon_0\rho_v)(g))$$

Ismét felhsználva az (**1**)-es azonosságot

$$hg(h^{-1}A(\epsilon_0\rho_v)(g)) = hg(A(\epsilon_0\rho_{h^{-1}v})(g)) = h\varphi_g(h^{-1}v)$$

Innen a definíció felhasználásával kapjuk, hogy

$$h\varphi_g(h^{-1}v) = h\Psi_A(g)h^{-1}v = \Psi_A(g)v$$

Tekintsük most $\Psi_A(gh)$-t:

$$\Psi_A(gh)v = gh(A(\epsilon_0\rho_v)(gh)) = ghh^{-1}(A(\epsilon_0\rho_v)(g)) = \varphi_g(v) = \Psi_A(g)v$$

Mivel $A(\epsilon_0\rho_v)$ csak véges sok mellékosztályon nem nulla, így $\Psi_A(g)$ csak véges sok kettős mellékosztályon nem lehet nulla, azaz tekinthető $\mathcal{H}(G, G_0)$ egy elemeként.

A $\Psi : A \longmapsto \Psi_A$ leképezés nyilván homomorfizmus $\mathrm{End}_G(\mathrm{ind}_{G_0}^G(E|_{G_0}))$-ból $\mathcal{H}(G, G_0)$-ba, így már csak azt kell megmutatnunk, hogy invertálható is.

Tekintsük a következő $\Psi^* : G \longrightarrow \mathrm{End}(E)$, melyre

$$\Psi^*(g) := (v \longmapsto \Psi(g^{-1})g^{-1}v)$$

és $A_\Psi : \mathrm{ind}_{G_0}^G(E|_{G_0}) \to \mathrm{ind}_{G_0}^G(E|_{G_0})$, melyre

$$A_\Psi(f)(g) := \Psi^* * f := \sum_{h \in G/G_0} \Psi(h^{-1}g)h^{-1}g(f(h)) \ .$$

Könnyű számolás mutaja, hogy így pont az inverzet kapjuk.
□

Ez a lemma egy érdekes észrevételhez vezet: $\mathcal{H}(G, G_0)$-on többféle norma is értelmezhető, így többféle teljessé tétele is lehet. Egyrészt emlékezzünk vissza a fejezet bevezetőjében említett sup-normára $\mathcal{H}(G, G_0)$-on. Az erre a normára való teljessé tételét $\mathcal{H}(G, G_0)$-nak $\mathcal{B}(G, G_0)$-al jelöltük.

A 5.5-ös lemma szerint azonban tetszőleges E_ξ indukáltjához találunk egy újfajta normát $\mathcal{H}(G, G_0)$-on: Mivel láttuk, hogy $\mathcal{H}(G, G_0) \simeq \mathrm{End}_G(\mathrm{ind}_{G_0}^G(E|_{G_0}))$, ezért egy tetszőleges $\psi \in \mathcal{H}(G, G_0)$-ra értelmezhetjük a $\|\psi\|_\xi$ operátornormát.

5.6. Állítás. $\|\psi\|_\xi = \sup_{g\in G}\{\ |\psi(g)|\ \cdot\ g$ *operátornormája* E_ξ*-n* $\}$

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy

$$\|\psi\|_\xi \leq \sup_{g\in G}\{\ |\psi(g)|\ \cdot\ g \text{ operátornormája } E_\xi\text{-n }\}$$

Ehhez vegyük észre, hogy definíció szerint

$$\|\psi\|_\xi = \|A_\psi\|_\xi = \sup_{\|f\|_\xi=1} \|(A_\psi(f))\|_\xi$$

a felidézve A_ψ definícióját és felhasználva a $\|f\|_\xi = 1$ feltételt a supremumban kapjuk, hogy

$$\sup_{\|f\|_\xi=1} \|(A_\psi(f))\|_\xi \leq \sup_{g\in G}(|\psi(g)| \cdot g \text{ operátornormája } E_\xi\text{-n})$$

ami pont az állítás. $\square$

A továbbiakban jelöljük $\mathcal{B}_\xi(G,G_0)$-al $\mathcal{H}(G,G_0)$ $\|\cdot\|_\xi$-re való teljessé tételét.

5.7. Állítás. $\mathcal{B}_\xi(G,G_0)$ *egy* K*-Banach algebra, melyre*

$$\mathrm{End}_G^{cont}(B_{G_0}^G(E)) = \mathcal{B}_\xi(G,G_0)$$

Bizonyítás. Jelöljük $\alpha_\xi : G \longrightarrow \mathrm{End}_K(E_\xi)$-vel az E_ξ-hez tartozó G-hatást. A korábban már bevezetett Δ halmaz mintájára bevezethető egy

$$\Delta_\xi := \{\psi : G \longrightarrow \mathrm{End}_K(E_\xi|_{G_0}) \mid \text{tetszőleges } h_1,h_2 \in G_0,\ g \in G\text{-re}$$
$$\psi(h_1gh_2) = \alpha_\xi(h_1)\psi(g)\alpha_\xi(h_2)\ \}$$

K-vektortér, melyen bevezetve a

$$\psi_1 * \psi_2(g) := \sum_{h\in G/G_0} \psi_1(h)\psi_2(h^{-1}g)$$

egy egységelemes K-algebrát kapunk, melyben az egységelem a

$$\psi_e(h) := \begin{cases} \alpha_\xi(h) & \text{ha } h \in G_0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény.

Δ_ξ-n is definiálható norma, mégpedig legyen

$$\|\psi\| := \sup_{g\in G}\|\psi(g)\|$$

A 3.4-es állítás bizonyításának mintájára látható be az állítás, Δ helyet Δ_ξ-t használva. $\square$

Ez azt jelenti, hogy az előzőkhöz hasonlóan most is vehetünk egy $\chi : \mathcal{B}_\xi(G, G_0) \longrightarrow K$ folytonos karaktert és ehhez a karakterhez értelmezhetünk egy unitér hányados Banach-tér reprezentációt:

$$\mathcal{B}_{\xi,\chi} := K_\chi \widehat{\otimes}_{\mathcal{B}_\xi(G,G_0)} B^G_{G_0}(E)$$

Célunk most $\|\cdot\|_\xi$ kiszámítása. Ehhez bevezetjük a köverkező "antidomináns" részmoniodját T-nek:

$$T^{--} := \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{d+1} \end{pmatrix} \;\middle|\; |t_1| \le \ldots \le |t_{d+1}| \right\}$$

Ehhez hasonlóan bevezetjük a

$$\Lambda^{--} := \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda \text{ antidomináns kokarakter } \}$$

itt antidomináns kokarakter alatt azokat a $\lambda \in \Lambda \simeq X^*(T)$ kokaraktereket értjük, ahol a λ-nak megfeleltetett $\mathbb{Z}^{d+1}$-beli vektor koordinátái csökkenő sorrendben vannak.

A $G = G_0 T^{--} G_0$ Cartan-felbontásból ekkor az következik, hogy T^{--}/T_0 a $G_0 \setminus G/G_0$ kettős mellékosztályok egy teljes reprezentánsrendszere.

Vegyük észre, hogy $T^{--}/T_0 \simeq \Lambda^{--}$, tehát amennyiben

$$\psi_{\lambda(t)}(g) := \begin{cases} 1 & g \in G_0 t G_0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

jelöli a $G_0 t G_0$ kettős mellékosztály karakterisztikus függvényét, úgy $\{\psi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda^{--}}$ egy bázisát alkotja a $\mathcal{H}(G, G_0)$ Satake-Hecke algebrának.

5.8. Definíció. (**ortogonalitás**) Legyen $\{x_i\}_{i\in I}$ linárisan független 1-normájú vektorok rendszere az N normált téren. Azt mondjuk, hogy $\{x_i\}_{i\in I}$ ortogonális, ha

$$\|\sum_{i\in I} c_i x_i\| = \max_{i\in I}(c_i)$$

minden olyan $\sum_{i\in I} c_i x_i$ vektorra, ahol $\{c_i\}_{i\in I}$ véges sok kivétellel eltűnik.

Később hasznos lesz a következő lemma:

5.9. Lemma. *Legyen $\{x_i\}_{i\in I}$ ortogonális bázisa az N K feletti normált térnek és legyenek $c_{lk} \in K$ $(l,\ k\ \in I,\ l < k)$ olyan konstansok, melyekre $|c_{lk}| \leq 1$. Ekkor az*

$$y_k := x_k + \sum_{l<k} c_{lk} x_l$$

vektorok N egy másik ortonormált bázisát határozzák meg.

Bizonyítás. y_k normáját felírva kapjuk, hogy

$$\|x_k\| = \max(\|x_k\|,\ \max_{l<k} |c_{lk}| \cdot \|x_l\|) = \max(1,\ \max_{l<k} |c_{lk}|)$$

Mivel $|c_{lk}| < 1$, ezért azonnal kapjuk, hogy $\{y_k\}_{k\in I}$ vektorok normája mind 1.

Emellett felírhatjuk a következő azonosságot:

$$x_k = y_k + \sum_{l<k} b_{lk} y_l$$

ahol a (b_{lk}) mátrix a (c_{lk}) mátrix inverze a K test egészei fölött. [5]

Legyen $x = \sum_k c_k x_k$ egy tetszőleges N-beli vektor. Ekkor

$$x = \sum_k c_k x_k = \sum_k c_k(\sum_{l<k} b_{lk} y_l) = \sum_l (\sum_{l<k} c_k b_{lk}) y_l$$

ahonnan

$$\|x\| \leq \sum_l \left| \sum_{l<k} ckb_{lk} \right| \cdot \|y_l\|$$

másfelől

$$\sup_l \left| \sum_{l<k} c_k b_{lk} \right| \cdot \|y_l\| \leq \sup_l \sup_{l<k} |c_k| \cdot \|y_l\| = \sup_l \sup_{l<k} |c_k| \|x_l\|$$

$$\leq \sup_k |c_k| \cdot \|x_k\| = \|x\|$$

tehát x normája velóban a legnagyobb $\sum_{l<k} c_k b_{lk}$ együttható, így y_k ortogonális. □

5.10. Lemma. *Tetszőleges $\psi \in \mathcal{H}(G, G_0)$-ra*

$$\|\psi\|_\xi = \sup_{t \in T^{--}} |\psi(t)\xi(t)|$$

Bizonyítás. Az 5.6-os állítást felhasználva

$$\|\psi\|_\xi = \sup_{g \in G} \{\ |\psi(g)|\ \cdot\ g \text{ operátornormája } E_\xi\text{-n }\}$$

Mivel ψ konstans a G_0 szerinti kettős mellékosztályokon és T^{--}-ban találunk teljes reprezentánsrendszert $G_0 \backslash G / G_0$-hoz, ezért a $\psi(g)$ szorzó szempontjából nem teszünk megszorítást amikor áttérünk T^{--}-ra.

Az operátornormához vegyük észre, hogy tetszőleges $h \in G_0$ esetén $\|h\|_\xi = 1$, hiszen a rács, amiből a normánkat levezettük, G_0-invariáns volt, tehát a G_0-al való szorzás nem növelheti a normát, azaz $\|h\|_\xi \leq 1$. Másfelől viszont minden $h \in G_0$ invertálható is, így a normája csakis 1 lehet. (Hiszen $\|h^{-1}\|_\xi = \|h\|\xi^{-1}$ lenne.) Ez azt jelenti, hogy g operátornormája konstans a kettős mellékosztályokon, így a T^{--}-ra való áttérés itt sem okoz problémát.

Ahhoz, hogy egy $t \in T^{--}$ antidomináns mátrix normája pontosan $\xi(t)$, gondoljuk csak meg ξ és T^{--} definícióját: ξ egy olyan karakter, melyre

$$\xi(t) = \prod_{i=1}^{d+1} t_i^{a_i}$$

ahol az a_i kitevők növekvő sorrendbe vannak rendezve. Mivel t olyan diagonális mátrix, melyben a főátlóbeli elemek növekvő sorrendben vannak, ezért az összes $\chi : T^{--} \longrightarrow K^\times$ karakter közül ξ fogja adni a maximális értéket tetszőleges $t \in T^{--}$ esetén. (Hiszen E_ξ irreducibilitásának köszönhetően az össes többi algebrai karakter úgy kapható ξ-ből, hogy az a_i kitevőket megpermutáljuk.)

Mivel viszont azt is tudjuk, hogy diagonális mátrix esetén minden ábrázolás ilyen karakterek által meghatározott sajátalterek direktösszegére bomlik, ezért egy tetszőleges $t \in T^{--}$ operátornormája pontosan $\xi(t)$ lesz. □

A Banach-tér reprezentációkra vonatkozó Satake-izomorfizmus kimondásához kicsit módosítanunk kell a korábbi $S = S_1$ leképezésen:

$$S_\xi : \mathcal{H}(G, G_0) \longrightarrow K[\Lambda]$$
$$\psi \longmapsto \sum_{t \in T/T_0} p^{\mathrm{val}(\xi(t))} \Big(\sum_{n \in N/N_0} \psi(tn) \Big) \lambda(t)$$

Mivel $p^{\mathrm{val} \circ \xi}$ meghatározza Λ egy karakterét (hiszen $t_0 \in T_0$ esetén $|\xi(t_0)| = 1$, tehát $T_0 \subseteq \ker(\mathrm{val} \circ \xi)$), ezért S_ξ algebrahomomorfizmus lesz.

Banach-tér reprezentációk esetében a csavart hatás is egy kicsit meg fog változni. Ehhez először is definiáljuk azt a γ_ξ leképezést, amellyel csavarni fogunk: Legyen

$$\gamma_\xi : W \times \Lambda \longrightarrow \mathbb{Q}_p^\times$$
$$(w, \lambda(t)) \longmapsto \delta_P^{1/2} \left(\frac{{}^w t}{t} \right) p^{\mathrm{val}(\xi\left(\frac{{}^w t}{t}\right))}$$

ahol

$$\delta_P(t) := t_1^{-d} t_2^{-d+2} \dots t_d^{d-2} t_{d+1}^d$$

tetszőleges

$$t = \begin{pmatrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{d+1} \end{pmatrix} \in T$$

esetén. γ_ξ ekkor egy $T'(\mathbb{Q}_p)$-beli értékeket felvevő kociklus.

Ennek segítségével már fel tudjuk írni magát a γ_ξ-vel csavart W-hatást:

$$W \times K[\Lambda] \longrightarrow K[\Lambda]$$
$$(w, \sum_\lambda c_\lambda \lambda) \longmapsto \sum_\lambda \gamma_\xi(w, \lambda) c_\lambda {}^w \lambda$$

A lokálisan konstans ábrázolásokra vonatkozó Satake-izomorfizmus egyszerű következménye a következő állítás:

5.11. Következmény. *Az $S_\xi : \mathcal{H}(G, G_0) \xrightarrow{\simeq} K[\Lambda]^{W, \gamma_\xi}$ leképezés egy algebraizomorfizmus.*

Ezután vezessük be a következő normát $K[\Lambda]-n$: Legyen

$$\gamma_\xi^{dom} : \Lambda \longrightarrow K^\times$$

$$\lambda \longmapsto \gamma_\xi(w,\lambda) \qquad \text{úgy, hogy } {}^w\lambda \in \Lambda^{--}$$

Ezzel a jelöléssel legyen

$$\|\sum_\lambda c_\lambda \lambda\|_{\gamma_\xi} := \sup_{\lambda\in\Lambda} |\gamma_\xi^{dom}(\lambda) c_\lambda|$$

5.12. Állítás.

- *A $\|\cdot\|_{\gamma_\xi}$ norma szumbultiplikatív*
- *A fent definiált γ_ξ-vel csavart W-hatás $\|\cdot\|_{\gamma_\xi}$-re nézve izometrikus*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy ha $\lambda \in \Lambda^{--}$, akkor γ_ξ definíciója szerint $|\gamma_\xi(w,\lambda)| \leq 1$ minden $w \in W$-re. Ez azt jelenti, hogy ha $\lambda \in \Lambda$ és ${}^w\lambda \in \Lambda^{--}$, akkor

$$\gamma_\xi^{dom}(\lambda) = \gamma_\xi(w,\lambda) = \gamma_\xi(w^{-1}, {}^w\lambda)^{-1}$$

miatt $|\gamma_\xi^{dom}(\lambda)| \geq 1$.

A szubmultiplikativitáshoz vegyük észre, hogy

$$\gamma_\xi^{dom}({}^w\lambda)\gamma_\xi(w,\lambda) = \gamma_\xi^{dom}(\lambda) \tag{3}$$

ezt felhasználva kapjuk, hogy ha ${}^w(\lambda\mu) \in \Lambda^{--}$, akkor

$$\gamma_\xi^{dom}(\lambda\mu) = \gamma_\xi^{dom}({}^w\lambda)^{-1}\gamma_\xi^{dom}({}^w\mu)^{-1}\gamma_\xi^{dom}(\lambda)\gamma_\xi^{dom}(\mu)$$

Ezt az előző számolással kombinálva azonnal kijön, hogy $\|\cdot\|_{\gamma_\xi}$ szubmultiplikatív.

Ahhoz, hogy ez a norma a csavart hatásra invariáns, írjuk fel a definíciót:

$$\sum_\lambda c_\lambda \lambda \stackrel{w}{\longmapsto} \sum_\lambda \gamma_\xi(w,\lambda) c_\lambda {}^w\lambda$$

A bal oldal γ_ξ-normája:

$$\|\sum_\lambda c_\lambda \lambda\|_{\gamma_\xi} = \sup_{\lambda\in\Lambda} |\gamma_\xi^{dom}(\lambda) c_\lambda|$$

A jobb oldalé:

$$\|\sum_{\lambda} \gamma_\xi(w,\lambda)c_\lambda {}^w\lambda\|_{\gamma_\xi} = \sup_{\lambda\in\Lambda} |\gamma_\xi^{dom}({}^w\lambda)\gamma_\xi(w,\lambda)c_\lambda|$$

a (**3**)-as azonosságot alkalmazva kapjuk, hogy

$$\|\sum_{\lambda} \gamma_\xi(w,\lambda)c_\lambda {}^w\lambda\|_{\gamma_\xi} = \sup_{\lambda\in\Lambda} |\gamma_\xi^{dom}(\lambda)c_\lambda| = \|\sum_{\lambda} c_\lambda\lambda\|_{\gamma_\xi}$$

Tehát $\|\cdot\|_{\gamma_\xi}$ invariáns a csavart W-hatásra. □

Ez azt jelenti, hogy amennyiben $K\langle\Lambda,\xi\rangle$ jelöli $K[\Lambda]$ teljessé tételét a $\|\cdot\|_{\gamma_\xi}$ normára nézve, úgy $K\langle\Lambda,\xi\rangle$ egy Banach-algebra K fölött, melyre a γ_ξ-vel csavart W-hatás kiterjeszthető. Emellett a megfelelő $K\langle\Lambda,\xi\rangle^{W,\gamma_\xi}$ invariánsok Banach részalgebrát alkotnak $K\langle\Lambda,\xi\rangle$-ben.

Most már minden rendelkezésünkre áll ahhoz, hogy kimondjuk Satake tételét Banach-tér reprezentációkra is.

5.13. Tétel. ***(p-adikus Satake-izomorfizmus)***
Az S_ξ leképezés kiterjeszthető egy

$$\mathcal{B}_\xi(G,G_0) \xrightarrow{\simeq} K\langle\Lambda,\xi\rangle^{W,\gamma_\xi}$$

izometrikus K-Banach-algebra izomorfizmussá.

Bizonyítás. Célunk belátni, hogy az S_ξ leképezés $\mathcal{H}(G,G_0)$ egy $\|\cdot\|_\xi$-ortonormált bázisát $K[\Lambda]^{W,\gamma_\xi}$ egy $\|\cdot\|_{\gamma_\xi}$-ortonormált bázisába viszi.

Először is értelmeznünk kell egy $\|\cdot\|_\xi$-ortonormált bázist $\mathcal{H}(G,G_0)$-n. Ehhez idézzük fel a $\{\psi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda^{--}}$ sup-normában ortonormált $\mathcal{H}(G,G_0)$-bázist. Vegyük észre, hogy a $\|\cdot\|_\xi$ normáról eddig belátottak alapján $\|\psi_\lambda\|_\xi = |\xi(\lambda)|$, ezért a $\{\psi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda^{--}}$ bázis egyszerű osztással $\|\cdot\|_\xi$-ortonormálttá tehető:

$$\widetilde{\psi}_\lambda := |\xi(\lambda)|^{-1}\psi_\lambda$$

Értelmezzünk egy $\|\cdot\|_{\gamma_\xi}$-ortonormált bázist $K[\Lambda]^{W,\gamma_\xi}$-n:

$$\sigma_\lambda = \sum_{w\in W/W(\lambda)} \gamma_\xi(w,\lambda)^w\lambda$$

Értelmezzük továbbá a lexikografikus rednezést $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^{d+1}$-en.

A 5.9-es lemmát fogjuk most használni a $K[\Lambda]^{W,\gamma_\xi}$ normált térre, a fenti $\{\sigma_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda^{--}}$ bázisra és az

$$S_\xi(\widetilde{\psi_\mu}) = \sigma_\mu + \sum_{\lambda<\mu} \frac{|\xi(\lambda)|}{|\xi(\mu)|} c(\lambda,\mu)\sigma\lambda$$

vektorokra, ahol

$$c(\lambda(t),\lambda(s)) := \sum_{n\in N/N_0} \psi_{\lambda(s)}(tn) = |(NtG_0 \cap G_0sG_0) : G_0|$$

azon kettős mellékosztályok száma, melyekbe tn belekerülhet.

Számunkra az a fontos, hogy minden ilyen $c(\lambda,\mu)$ egész szám, így

$$|c(\lambda,\mu)| \leq 1$$

Ezenkívül mivel ξ domináns és $\lambda<\mu$, ezért $\frac{|\xi(\mu)|}{|\xi(\lambda)|} \leq 1$.

Ezáltal 5.9 feltételei teljesülnek, így $\{S_\xi(\widetilde{\psi_\lambda})\}$ $(K[\Lambda]^{W,\gamma_\xi}, \|\cdot\|_{\gamma_\xi})$ egy ortonormált bázisát adja. □

Célunk most $K\langle\Lambda,\xi\rangle$ kiszámítása. Ehhez segítségünkre lesz a T' duális tórus következő részhalmazára:

$$T'_\xi := \{\ \zeta\in T' \ \big|\ |\zeta(\lambda)| \leq |\gamma_\xi(w,\lambda)|\ \forall\ \lambda\in\Lambda,\ w\in W\ :\ {}^{w}\lambda \in T^{--}\ \}$$

5.14. Állítás.

- *$T'_\xi(K)$ egy $T'_\xi \subseteq T'$ nyílt $\mathbb{Q}_p$-affinoid K-értékű pontjainak halmaza.*
- *$K\langle\Lambda,\xi\rangle$ természetes módon izomorf a $T'_\xi \longrightarrow K$ analitikus függvényekkel*

Jelölje $(a_1,\ldots,a_{d+1}) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ azt a növekvő számsorozatot, amely meghatározza a ξ domináns karaktert. Definiáljuk a következő beágyazást:

$$\begin{aligned}\iota_\xi : T' = \mathrm{Hom}(\Lambda, K^\times) &\longrightarrow G'(K)\\ \zeta &\longmapsto \begin{pmatrix}\zeta_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \zeta_{d+1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ahol $\zeta_i := p^{i-1+a_i}\zeta(\lambda_i)$. Ezekben a koordinátákban nézve T'_ξ az olyan $(\zeta_1, \dots, \zeta_{d+1})$ vektorok halmaza, melyekre

$$\prod_{i\in I} |\zeta_i| \le |p|^{|I|(|I|-1)/2+\sum_{i=1}^{|I|} a_i}$$

ahol $I \subseteq \{1, \dots, d+1\}$ nemüres halmaz és

$$\prod_{i=1}^{d+1} |\zeta_i| = |p|^{(d+1)d/2+\sum_{i=1}^{d+1} a_i}$$

A lokálisan konstans esethez hasonlóan ezek a koordináták azért hasznosak, mert a γ_ξ-vel csavart W-hatás ζ-n megfelel a megszokott permutáció hatásnak a ζ_i-ken.

Hivatkozások

[1] Peter Schneider, p-adic Banach space representations of p-qdic groups

[2] Peter Schneider és Jeremy Teitelbaum, Banach-Hecke algebras and p-adic Galois representations

[3] James E. Humphreys, Linear Algebraic Groups

[4] Ryan Vinroot honlapja, p-adic groups kurzus segédanyagai

[5] Nicolas Bouraki, Groupes et algèbres de Lie (4. fejezet)