Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Nagy Kartal Dávid
Matematikus MSc

Extremális problémák véges metsző halmazrendszereken

Szakdolgozat

Témavezető: Katona Gyula egyetemi tanár
Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2021

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Katona Gyulának a téma ajánlását és a rengeteg tanácsot és támogatást, amivel segítette a szakdolgozat elkészülését.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Az extremális halmazelmélet számos problémája szól arról, hogy egy halmazrendszerből szeretnénk valamilyen feltétel mellett minél több halmazt kiválasztani. Szakdolgozatomban ezek a feltételek a kiválasztott halmazok metszeteiről szólnak, vagyis egy olyan maximális méretű halmazrendszert keresünk, melyben a halmazpárok vagy halmaz k-asok metszetei teljesítenek valamilyen feltételt.

A következő fejezetben olyan tételek szerepelnek, melyben a halmazpárok metszeteire kell teljesülnie egy adott feltételnek. Ezek közül is először a témakör leghíresebb és legfontosabb tételét, az Erdős-Ko-Rado tételt mutatom be, ahol a feltétel az, hogy bármely két halmaz metszetének a mérete legalább 1 legyen, azaz ne tartalmazzon a kiválasztott halmazrendszer két diszjunkt halmazt. A fejezet további részében ennek a tételnek különböző általánosításai kerülnek felsorolásra.

A harmadik fejezetben Kleitman egy tételének bizonyítása szerepel. Ebben a tételben az Erdős-Ko-Rado tétel feltételét gyengítjük, mégpedig úgy, hogy ezúttal szerepelhet a halmazrendszerben két diszjunkt halmaz, viszont bármely k kiválasztott halmaz közt továbbra is kell szerepelnie 2-nek úgy, hogy azok nem lehetnek diszjunktak.

A negyedik és ötödik fejezet saját kutatásom eredménye. Ha nézzük Kleitman tételét $k = 3$ esetben, akkor a feltételt fel tudjuk írni úgy is, hogy bármely három kiválasztott A, B, C halmazra $|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A| \geq 1$. Én ennek arra az általánosítására kerestem a választ, hogy legfeljebb hány halmaz választható ki úgy, hogy a kiválasztott halmazokra teljesüljön a $|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A| \geq \ell$ feltétel.

A negyedik fejezetben ezt a kérdést uniform esetben vizsgálom meg, és $\ell = 2$ esetén adok egy alsó és egy felső becslést, valamint kellően nagy n esetén, ahol n a halmazrendszer alaphalmazának mérete, meghatározom a pontos értéket. Az ebből kapott tétel az Erdős-Ko-Rado tételnek az élesítése nagy n-ekre, mert gyengébb feltétel mellett érvényes az Erdős-Ko-Rado tétel állítása.

Az ötödik fejezetben ugyanezt a kérdést nem uniform esetben vizsgálom meg. Itt abban az esetben adom meg a pontos értéket, ha $\ell = 3n - 6p$, ahol p egy természetes szám és az n értéke pedig p-hez képest kellően nagy.

2. Halmazrendszer páronként metsző halmazokkal

Jelölés. *Jelöljük az* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *halmazt* $[n]$*-nel, az* n *elemű halmaz részhalmazinak családját* $2^{[n]}$*-nel, az* n *elemű halmaz* i *elemű részhalmazainak halmazát* $\binom{[n]}{i}$*-vel.*

2.0.1. Definíció. *Egy halmazrendszert* k*-uniformnak hívunk, ha csak az* n *elemű alaphalmaz* k *elemű részhalmazai vannak benne, és nem-uniformnak, ha az* n *elemű alaphalmaz tetszőleges részhalmaza szerepelhet benne.*

2.0.2. Megjegyzés. *Ez alapján egy uniform problémánál csak az* $\binom{[n]}{i}$ *halmazrendszer halmazaiból választunk ki néhányat, míg egy nem-uniform problémánál a* $2^{[n]}$ *halmazrendszer halmazaiból.*

2.0.3. Definíció. *Egy* $\mathcal{F}$ *halmazrendszert metsző halmazrendszernek hívunk, ha tetszőleges* $A \in \mathcal{F}$ *és* $B \in \mathcal{F}$ *halmazokra* $A \cap B \neq \emptyset$*.*

2.1. Erdős-Ko-Rado tétel nem uniform változata

2.1.1. Tétel (Nem uniform változat)**.** [5] *Legyen* n *pozitív egész szám, és legyen* $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ *egy metsző halmazrendszer. Ekkor* $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$*.*

Bizonyítás. Tetszőleges F halmaz esetén az $F \cap \overline{F} = \emptyset$, vagyis bármely ilyen párból legfeljebb az egyik halmaz szerepelhet $\mathcal{F}$-ben. Mivel a 2^n halmazt fel tudjuk bontani 2^{n-1} ilyen párra, ezért $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$.

Az egyenlőség esetére több konstrukció is létezik. Ezek közül sorolok fel néhányat:

- Válasszunk ki egy $a \in [n]$ elemet, és legyenek $\mathcal{F}$-ben azok a halmazok, amik tartalmazzák az a elemet.
- Legyenek $\mathcal{F}$-ben azok a halmazok, amiknek az elemszáma több, mint $\frac{n}{2}$, illetve ha n páros, akkor vegyük még hozzá azokat az $\frac{n}{2}$ méretű halmazokat, amikben szerepel egy adott $a \in [n]$ elem.
- Az n elem mindegyikéhez rendeljünk egy pozitív egész számot úgy, hogy ezen pozitív egészek összege $2k - 1$ legyen. Ekkor azokat a halmazok válasszuk ki, amelyekre a benne szereplő elemekhez rendelt számok összege legalább k.

Könnyen látható, hogy az utolsó konstrukció megfelelő súlyozás mellett magába foglalja az első kettőt. □

Mint a fenti példák is mutatják, számos példa létezik egy 2^{n-1} elemű páronkénti metsző halmazrendszer megadására. A következő tétel megmutatja azt, hogy egy ilyen példát mohó algoritmussal is tudunk gyártani, vagyis ha az üres halmaztól indulunk, és mindig olyan halmazt veszünk bele, ami egyik korábbi kiválasztott halmazzal se diszjunkt, akkor végül egy 2^{n-1} elemű, a feltételnek megfelelő halmazrendszert kapunk.

2.1.2. Tétel. *Legyen $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ egy metsző halmazrendszer. Ekkor létezik olyan G metsző halmazrendszer, melyre $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \subset 2^{[n]}$, és $\mathcal{G} = 2^{n-1}$.*

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy az alábbi állításból következik a tétel, mivel tudjuk addig venni az újabb halmazokat, amíg el nem érjük, hogy a halmazrendszerben 2^{n-1} halmaz legyen.

2.1.3. Állítás. *Ha van egy $|\mathcal{F}| < 2^{n-1}$ metsző halmazrendszer, akkor hozzá lehet venni egy $H \in 2^{[n]}$ halmazt úgy, hogy $H \notin \mathcal{F}$ és az $\mathcal{F} \cup H$ is egy metsző halmazrendszer legyen.*

Mivel $|\mathcal{F}| < 2^{n-1}$, ezért létezik olyan F halmaz, hogy $F \notin \mathcal{F}$ és $\overline{F} \notin \mathcal{F}$. Ekkor F és $\overline{F}$ közül az egyik halmaz hozzávehető $\mathcal{F}$-hez.

Ezt az állítást indirekten fogjuk bizonyítani. Tegyük fel, hogy egyik halmazt se lehet hozzávenni. Ekkor létezik olyan $G \in \mathcal{F}$, hogy $F \cap G = \emptyset$. Ez ekvivalens azzal, hogy $G \subset \overline{F}$. Hasonló módon kell lennie egy olyan $H \in \mathcal{F}$, amire $\overline{F} \cap H = \emptyset$. Erre a H halmazra pedig azt tudjuk, hogy $H \subset F$.

Mivel az $\mathcal{F}$-ben nincs két diszjunkt halmaz, ezért létezik $x \in [n]$, amire $x \in G \subset \overline{F}$ és $x \in H \subset F$, ami nem lehetséges, mivel $F \cap \overline{F} = \emptyset$.

Vagyis nem igaz az indirekt feltevés, azaz igaz a fenti állítás, amiből pedig következik a tétel bizonyítása. □

2.2. Erdős-Ko-Rado tétel uniform változata

2.2.1. Tétel (Uniform változat)**.** [2] *Legyen k és n pozitív egész számok, és $k \leq n$. Legyen $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ olyan halmazrendszer, hogy bármely $A \in \mathcal{F}$, és $B \in \mathcal{F}$ esetén az $A \cap B \neq \emptyset$. Ekkor*

- *ha $k < \frac{n}{2}$, akkor az $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$.*

- *ha $k = \frac{n}{2}$, akkor az $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1} = \frac{\binom{n}{k}}{2}$. Az egyenlőség pedig pontosan akkor teljesül, ha minden $F \in \mathcal{F}$ halmazra az $|\{F, \overline{F}\} \cap \mathcal{F}| = 1$.*

- *ha $k > \frac{n}{2}$, akkor az $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{k}$.*

2.2.2. Megjegyzés. *Nem fogjuk belátni, de a $k < \frac{n}{2}$ esetben akkor teljesül az egyenlőség esete, ha létezik olyan $i \in [n]$, hogy $F \in \mathcal{F} \Leftrightarrow i \in F$.*

A tétel második és harmadik pontja könnyen belátható:

Abban az esetben, ha $k > \frac{n}{2}$, akkor skatulya elv alapján semelyik két halmaz metszete nem lehet üres, így az összes k elemű halmazt ki lehet választani.

A $k = \frac{n}{2}$ esetben, ha minden $F \in \mathcal{F}$ halmazra $|\{F, \overline{F}\} \cap \mathcal{F}| = 1$, akkor $|\mathcal{F}| = \frac{\binom{n}{k}}{2}$. Először lássuk be, hogy ez az érték egy felső becslés. Használjuk ki, hogy bármely k elemű F halmaz komplementere is k elemű, viszont $F \cap \overline{F} = \emptyset$, vagyis bármely ilyen halmazpárból legfeljebb az egyik halmaz választható ki.

Most pedig vizsgáljuk meg az egyenlőség esetét. Ehhez először lássuk be, hogy egy ilyen halmazrendszer valóban megfelel a feltételnek, vagyis semelyik két kiválasztott halmaz metszete nem üres. Mivel bármely két halmazra $|A| + |B| = n$, ami alapján csak akkor nem lesz metszete a két halmaznak, ha mind az n elemet pontosan egyszer tartalmazza, ekkor viszont $\overline{A} = B$, ami pedig nem lehetséges.

Ezek után térjünk rá az első esetre, ami ennek a tételnek a fő része. Erre a részre két bizonyítást fogunk mutatni:

Bizonyítás. Katona (1972) [6]

Az n elemet a körre $(n-1)!$-féle sorrendben lehet felírni, ha a forgatással egymásba vihetőeket nem különböztetjük meg egymástól.

Készítsük el ezeket a köröket. Legyenek ez a körök a C_1, C_2, …, $C_{(n-1)!}$, ahol a C_i-k az n elem különböző permutációi.

Jelölés. *Az i. kör j. elemét jelöljük $C_i(j)$-vel.*

Mivel a kör elforgatásával is ugyanazt a permutációt kapjuk, így ez a jelölés nem egyértelmű, ezért azt is feltesszük, hogy minden kör első tagja az 1 legyen, azaz minden i-re $C_i(1) = 1$.

Jelölés. *Jelöljük $C_i^l(j) \in \binom{[n]}{l}$-nel az alábbi halmazt: $C_i^l(j) = C_i(j) \cup C_i(j+1) \cup \cdots \cup C_i(j+l-1)$.*

2.2.3. Definíció. *Legyen* $f(C_i) = |(\bigcup\limits_{j=1}^{n} C_i^k(j)) \cap \mathcal{F}|$.

2.2.4. Állítás. $(n-k)! \cdot k! \cdot |\mathcal{F}| = \sum\limits_{i=1}^{(n-1)!} f(C_i)$

Bizonyítás. Mivel minden $F \in \mathcal{F}$ halmaz pontosan $(n-k)! \cdot k!$ körön szerepel, ezért mindkét oldalon az a kifejezés áll, hogy hányszor szerepelnek $\mathcal{F}$-beli halmazok tagjai egymás mellett az $(n-1)!$ körön összesen. □

Az alábbi lemma segítségével egy felső becslést fogunk tudni adni $f(C_i)$-re.

2.2.5. Lemma. *Ha* $\mathcal{F}$ *egy metsző halmazrendszer, akkor tetszőleges* i *esetén* $f(C_i) \leq k$.

Bizonyítás. Vegyünk egy $C_i^k(j)$ halmazt $\mathcal{F}$-ből. Mivel semelyik két halmaz metszete nem lehet üres, ezért erről a körről csak azok a $C_i^k(j')$ halmazok szerepelhetnek $\mathcal{F}$-ben, amire $j - k + 1 \leq j' \leq j + k - 1$.

Vegyük észre azt, hogy mivel $k < \frac{n}{2}$, ezért $C_i^k(j') \cap C_i^k(j' + k) = \emptyset$, vagyis a két halmaz közül legfeljebb az egyik lehet benne $\mathcal{F}$-ben.

Ezek alapján a $C_i^k(j-l+1)$ és a $C_i^k(j-l+k+1)$ halmazpárból legfeljebb az egyik halmaz lehet $\mathcal{F}$-ben. Ezáltal a lehetséges j' értékek párosíthatóak, így a $C_i^k(j)$ halmazon kívül legfeljebb $\frac{2k-2}{2} = k-1$ halmaz szerepelhet $\mathcal{F}$-ben, ezért a lemma igaz. □

2.2.6. Következmény. $\sum\limits_{i=1}^{(n-1)!} f(C_i) \leq k \cdot (n-1)!$

2.2.7. Következmény. $\mathcal{F} \leq \frac{(n-1)!}{(n-k)! \cdot (k-1)!} = \binom{n-1}{k-1}$.

Ezzel pedig készen vagyunk a bizonyítással □

A második bizonyítás az előzőnél technikásabb, viszont a bizonyítás alapötlete a későbbiekben használva lesz.

Bizonyítás. Erdős-Ko-Rado eredeti bizonyításának (1961) Frankl által módosított változata [3]

Vegyünk egy x és y elemet $[n]$-ből és egy $\mathcal{F}$ halmazrendszert, és definiáljuk a következő halmazrendszereket:

2.2.8. Definíció.

$$\mathcal{F}' = \{F : F \in \mathcal{F}, (x \notin F) \vee (x, y \in F) \vee (x \in F, y \notin F, F \cup \{y\} - \{x\} \in \mathcal{F})\}$$

$$\mathcal{F}'' = \{F : F \in \mathcal{F}, x \in F, y \notin F, F \cup \{y\} - \{x\} \notin \mathcal{F}\}$$

Ezen halmazrendszerek segítségével tudjuk megalkotni az alábbi halmazrendszert:

2.2.9. Definíció. *Legyen egy $\mathcal{F}$ halmazrendszer x-ből y-ba tolása az alábbi halmazrendszer:*

$$\tau_{x,y}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}' \cup \{F \cup \{y\} - \{x\} : F \in \mathcal{F}''\}.$$

2.2.10. Állítás. $|\mathcal{F}| = |\tau_{x,y}(\mathcal{F})|$

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy $|\mathcal{F}'| + |\mathcal{F}''| = |\mathcal{F}|$, mivel az $\mathcal{F}$ halmazrendszer az $\mathcal{F}'$ és az $\mathcal{F}''$ halmazok diszjunkt uniója.

Az $\mathcal{F}''$ halmazrendszer definíciója miatt az $\{F \cup \{y\} - \{x\} : F \in \mathcal{F}''\}$ halmazrendszer elemei különbözni fognak egymástól, valamint az $\mathcal{F}'$ halmazrendszer elemeitől, és ezért az is látható, hogy $|\mathcal{F}'| + |\mathcal{F}''| = |\tau_{x,y}(\mathcal{F})|$. $\square$

2.2.11. Következmény. *Mivel $|\mathcal{F}| = |\tau_{x,y}(\mathcal{F})|$, ezért az $\mathcal{F}$-beli halmazok bijektíven hozzápárosíthatóak a $\tau_{x,y}(\mathcal{F})$-beli halmazokhoz.*

Ez a párosítás többféleképpen is megcsinálható, de mi a következő párosítást fogjuk használni:

Ha egy F halmaz szerepel $\mathcal{F}$-ben és $\tau_{x,y}(\mathcal{F})$-ben is, akkor a halmaz eltoltja önmaga legyen. Ha pedig egy halmaz csak az $\mathcal{F}$-ben szerepel, akkor a $\tau_{x,y}(\mathcal{F})$-beli eltoltja legyen a $F \cup \{y\} - \{x\}$.

Jelölés. *Egy $H \in \mathcal{F}$ halmaz x-ből y-ba vett eltoltját jelöljük $\widehat{H}^{\mathcal{F}}_{x,y}$-nal.*

2.2.12. Megjegyzés. *Mivel ez a jelölés meglehetősen bonyolult, ezért ha az $\mathcal{F}$, az x és az y is egyértelmű, akkor egy H halmaz eltoltját $\widehat{H}$-val fogjuk jelölni.*

A következő lemmában megmutatjuk, hogy a tolás művelet azért lesz hasznos nekünk, mivel nem rontja el egy halmazrendszer metsző tulajdonságát:

2.2.13. Lemma. *Legyen $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ egy metsző halmazrendszer. Ekkor tetszőleges $x \in [n]$ és $y \in [n]$ elemek esetén a $\tau_{x,y}(\mathcal{F})$ is egy metsző halmazrendszer.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy nem igaz az állítás. Ekkor $\mathcal{F}$-ből kiválasztható két olyan F és G halmaz, hogy $F \cap G \neq \emptyset$, de $\widehat{F} \cap \widehat{G} = \emptyset$.

Ez azt is jelenti, hogy létezik olyan $i \in [n]$, amire $i \in F$, $i \in G$, de $i \notin \widehat{F} \cap \widehat{G}$. Az eltolás szabályai alapján egyedül az x lehet ez az elem. Vagyis ez csak akkor lehetséges, ha $F \cap G = \{x\}$, de valamelyik eltoltban már nem szerepel az x.

A szimmetria miatt feltehető, hogy $x \notin \widehat{F}$. Ez pedig az eltolás definíciója szerint csak úgy lehetséges, ha az $x \in F$, de $y \notin F$. Ekkor ugyanis $x \notin \widehat{F}$, de $y \in \widehat{F}$. Mivel az $x \in G$, ezért $\widehat{G}$ az x és az y elemek közül legalább az egyiket tartalmazza. Emiatt és mivel $\widehat{F} \cap \widehat{G} = \emptyset$, ezért az $x \in \widehat{G}$ és $y \notin \widehat{G}$. Ez pedig csak akkor fordulhat elő, ha $G \cap \{y\} - \{x\} \in \mathcal{F}$.

Most vizsgáljuk meg az F és a $G \cap \{y\} - \{x\}$ halmazokat. Mivel $F \cap G = \{x\}$ és $y \notin F$, ezért a két halmaz diszjunkt, viszont tudjuk, hogy mindkét halmaz benne van $\mathcal{F}$-ben, ami egy metsző halmazrendszer, így ellentmondást kaptunk. $\square$

Vagyis egy k elemű metsző halmazrendszert egy eltolás szintén egy k elemű metsző halmazrendszerbe fog vinni, és ez igaz lesz több egymás utáni eltolás esetén is.

A következő célunk az, hogy ezzel a tolás művelettel egy balra tolt halmazrendszert készítsünk.

A következőkben használjuk ki, hogy a $[n]$ halmaz elemei megfeleltethetőek az $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ értékeknek.

2.2.14. Definíció. *Legyen $F \in \binom{[n]}{k}$ és $G \in \binom{[n]}{k}$ halmazrendszerek. Ekkor az $F \geq G$, ha $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ úgy, hogy $f_1 < f_2 < \cdots < f_k$, és $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ úgy, hogy $g_1 < g_2 < \cdots < g_k$, akkor minden $1 \leq i \leq k$-ra $f_i \geq g_i$.*

2.2.15. Definíció. *Egy $\mathcal{F} \in \binom{[n]}{k}$ halmazrendszert balra toltnak hívunk, ha minden $F \in \mathcal{F}$ elemére igaz az, hogy minden $G \leq F$ halmazra $G \in \mathcal{F}$.*

Vegyük a következő algoritmust: vegyük sorban az $x \in [n]$ és $y \in [n]$ párokat, ahol $x > y$, és toljuk el a halmazrendszert x-ből y-ba. Ha végigértünk az összes x, y páron, akkor vegyük újra az összeset. Ezt csináljuk addig, ameddig egyik eltolás se változtat a halmazrendszeren.

2.2.16. Állítás. *Ha $\mathcal{F}$ egy olyan halmazrendszer, hogy bármely $x \in [n]$, $y \in [n]$ és $x > y$-ra $\mathcal{F} = \tau_{x,y}(\mathcal{F})$, akkor $\mathcal{F}$ egy balra tolt halmazrendszer.*

Bizonyítás. Az állítást indirekten fogjuk belátni. Tegyük fel, hogy léteznek olyan $F \geq G$ halmazok, hogy $F \in \mathcal{F}$ és $G \notin \mathcal{F}$. Legyenek az f_i elemek az F halmaz elemei növekvő sorrendben, a g_i elemek pedig a G halmaz elemei növekvő sorrendben. Vegyük a következő halmazokat:

- $\{f_1, f_2, f_3, \dots f_{k-1}, f_k\}$
- $\{g_1, f_2, f_3, \dots f_{k-1}, f_k\}$
- $\{g_1, g_2, f_3, \dots f_{k-1}, f_k\}$

  ...

- $\{g_1, g_2, g_3, \dots g_{k-1}, f_k\}$
- $\{g_1, g_2, g_3, \dots g_{k-1}, g_k\}$

Itt tudjuk, hogy a legfelső halmaz benne van $\mathcal{F}$-ben, viszont a legalsó halmaz nincs benne. Vagyis akkor létezik egy első halmaz, ami nincsen benne $\mathcal{F}$. Legyen ez az $i+1$-edik halmaz. Ekkor $\{g_1, \dots, g_{i-1}, f_i, f_{i+1}, \dots, f_k\} \in \mathcal{F}$, de $\{g_1, \dots, g_{i-1}, g_i, f_{i+1}, \dots, f_k\} \notin \mathcal{F}$. Ezzel viszont ellentmondásra jutunk, mivel $f_i > g_i$ és $\mathcal{F} \neq \tau_{f_i,g_i}(\mathcal{F})$. □

Vagyis amikor az algoritmus leáll, akkor az valóban egy balra tolt halmazrendszer lesz. Még azt kell megmutatnunk, hogy az algoritmus valamikor le fog állni.

Jelölés. *Legyen $S(\mathcal{F})$ az $\mathcal{F}$ halmazrendszer halmazaiban az elemek összege, azaz* $S(\mathcal{F}) = \sum\limits_{F \in \mathcal{F}} \sum\limits_{i \in F} i$.

2.2.17. Következmény. *Tetszőleges $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ halmazrendszer esetén az $S(\mathcal{F})$ egy természetes szám.*

2.2.18. Lemma. *Ha $y < x$, akkor $S(\mathcal{F}) \geq S(\tau_{x,y}(\mathcal{F}))$.*

Bizonyítás. Vegyük a korábbi bijektív párosítást az $\mathcal{F}$ és a $\tau_{x,y}(\mathcal{F}$ halmazrendszerek közt. Azok a $F \in \mathcal{F}$ halmazok, melyekre $F = \widehat{F}$, ugyanannyit adnak hozzá mindkét oldalhoz. A többi pár esetében annyi változás történik, hogy az $F \in \mathcal{F}$ halmazban található x elem y-ra cserélődik, és ez által csökken a halmazban lévő elemek összege. □

2.2.19. Következmény. *Az előző bizonyításból az is kijön, hogy ha $\mathcal{F} \neq \tau_{x,y}(\mathcal{F})$, akkor $S(\mathcal{F}) > S(\tau_{x,y}(\mathcal{F}))$.*

2.2.20. Következmény. *Mivel egy nemnegatív egész számokból álló monoton csökkenő sorozat csak véges sokszor csökkenhet, ezért a 2.2.17 és az 2.2.19 következményekből látható, hogy $x > y$-ra az x-ből y-ba tolás csak véges sok esetben eredményezhet változást.*

Ezzel pedig beláttuk azt, hogy az algoritmus egy idő után le fog állni.

2.2.21. Következmény. *Tetszőleges F halmazrendszerből véges sok eltolással kaphatunk egy balra tolt halmazrendszert.*

Vegyünk egy maximális méretű, metsző $\mathcal{F}$ halmazrendszert. Mivel egy metsző halmazrendszer az eltolás után is ugyanolyan méretű metsző halmazrendszer lesz, ezért az $\mathcal{F}$ halmazrendszerből tudunk készíteni egy olyan balra tolt halmazrendszert, ami szintén maximális méretű. Ezek alapján elég megvizsgálni, hogy a balra tolt halmazrendszerek közt mi a maximális méretű, mivel az az összes halmazrendszer közt is maximális méretű lesz.

2.2.22. Állítás. *Legyen $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ egy balra tolt metsző halmazrendszer és legyenek $F \in \mathcal{F}$ és $G \in \mathcal{F}$ halmazok. Ekkor az $F' = F \cap [2k-1]$ és $G' = G \cap [2k-1]$ halmazok esetén $F' \cap G' \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Indirekten látjuk be az állítást. Tegyük fel, hogy léteznek olyan $F \in \mathcal{F}$ és $G \in \mathcal{F}$ halmazok, melyekre $F' \cap G' = \emptyset$. Mivel $F \cap G \neq \emptyset$, ezért létezik olyan $x \in [n]$, mely nagyobb $2k-1$-nél, és $x \in F \cap G$. Rögzítsük az F halmazban az x elemet. Most vegyünk F és G helyett olyan H és I halmazt, melyben F és G $2k-1$-nél nagyobb elemeit (az F-beli x-et leszámítva) olyan különböző elemekre cseréljük, amik kisebbek $2k$-nál, és nincsenek benne az $F \cap G$-ben. Ez megtehető, mivel $2k-1$ darab $2k$-nál kisebb elem van, és az $|F - \{x\}| + |G| = 2k-1$. Az így kapott halmaz H és I halmaz szintén benne lesz $\mathcal{F}$-ben, mivel $H \leq F$, $I \leq G$ és $\mathcal{F}$ egy balra tolt halmazrendszer. Ekkor viszont a $H \cap I = \emptyset$, ami ellentmond a feltételeknek. $\square$

Vagyis a továbbiakban elég azokat az $\mathcal{F}$ halmazrendszereket vizsgálni, ahol bármely két $\mathcal{F}$-beli halmaznak van metszete az $\{1, 2, \ldots, 2k-1\}$ elemek közt.

Most pedig forduljunk rá az Erdős-Ko-Rado tétel bizonyítására, vagyis azt akarjuk belátni, hogy ha $k \leq \frac{n}{2}$, akkor $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$.

Használjunk k szerinti indukciót. A $k = 1$ esetén triviálisan igaz az állítás.

Most lássuk be tetszőleges k-ra. Használjuk fel, hogy minden k-nál kisebb értékre már tudjuk az eredményt.

Jelölés. *Legyen* a_i $(1 \leq i \leq k)$ *azon* i *elemű halmazok száma, melyek előállnak az* $F \cap \{1, 2, \ldots, 2k\}$ *metszeteként, ahol* $F \in \mathcal{F}$.

2.2.23. Állítás. *Az* $a_i \leq \binom{2k-1}{i-1}$, *ha* $(1 \leq i \leq k)$.

Bizonyítás. A korábbi tételekből tudjuk, hogy ezen halmazok metszik egymást az első $2k-1$ elemben, így az $i < k$ esetben az indukció miatt igaz lesz az állítás.

Az $i = k$ esetben pedig azt kell belátni, hogy $a_k \leq \binom{2k-1}{i-1} = \frac{1}{2} \cdot \binom{2k}{k}$, vagyis azt, hogy a halmazoknak legfeljebb a felét lehet kiválasztani, ami pedig azért lesz igaz, mert egy k elemű F halmaz esetén a $[2k] \setminus F$ halmaz is egy k elemű halmaz lesz, és mivel ezek egymás komplementerei, ezért a két halmaz közül legfeljebb az egyik szerepel ebben a halmazrendszerben. □

Jelölés. *Legyen* b_j *azon* j *elemű halmazok száma, melyek előállnak az* $F \cap \{2k+1, \ldots, n\}$ *metszeteként, ahol* $F \in \mathcal{F}$.

2.2.24. Következmény. $b_j \leq \binom{n-2k}{j}$

Innen pedig az

$$|F| \leq \sum_{i=1}^{k} a_i b_{k-i} \leq \sum_{i=1}^{k} \binom{2k-1}{i-1}\binom{n-2k}{k-i} = \binom{n-1}{k-1}$$

egyenlőtlenségből megkapjuk a kívánt felső becslést. □

2.2.25. Megjegyzés. *Az Erdős-Ko-Rado tételre Frankl és Füredi* [4] *adott egy másik, rövidebb bizonyítást is, mely algebrai módszereket használ.*

2.3. Nagyobb metszetű halmazpárok

Ebben a fejezetben megemlítünk néhány eredményt, ahol a halmazrendszer feltételében nem csak annyit kívánunk meg, hogy páronként metsszék egymást, hanem azt, hogy ez a metszet legalább t méretű legyen.

2.3.1. Definíció. *Egy* $\mathcal{F}$ *halmazrendszert* t*-metsző halmazrendszernek hívunk, ha tetszőleges* $A \in \mathcal{F}$ *és* $B \in \mathcal{F}$ *halmazokra* $|A \cap B| \geq t$.

2.3.2. Definíció. *Egy* $\mathcal{F}$ *halmazrendszert triviálisan* t*-metsző halmazrendszernek hívunk, ha létezik olyan* $G \in \binom{[n]}{t}$, *hogy minden* $F \in \mathcal{F}$*-re* $G \subset F$.

2.3.3. Definíció. *Egy $\mathcal{F}$ halmazrendszert nemtriviálisan t-metsző halmazrendszernek hívunk, ha* $|\bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} F| \leq t$.

Először az uniform eset eredményeit mutatjuk be:

2.3.4. Tétel (Erdős, Ko, Rado)**.** [2] *Legyen* $1 \leq t < k$ *és* $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ *egy maximális méretű t-metsző halmazrendszer. Ekkor kellően nagy n esetén ez a halmazrendszer a maximális méretű triviálisan t-metsző halmazrendszer lesz, vagyis* $\mathcal{F} \leq \binom{n-t}{k-t}$.

A tételben szereplő kellően nagy n értékre a küszöbfüggvényt Wilson [8] és Frankl [3] határozta meg:

2.3.5. Tétel. *Adott k és t számok esetén az előző tétel állítása akkor teljesül, ha* $n \geq (t+1)(k-t+1)$.

Ezek után felmerül a kérdés, hogy mi a helyzet kisebb n-ek esetén? Erre a kérdésre Franklnak további eredményei vannak. Ennek bemutatásához szükségünk van az alábbi definícióra:

2.3.6. Definíció.

$$\mathcal{A}(n,k,t,i) = \{A \in \binom{[n]}{k} : |A \cap [2i+t]| \geq i+t\}$$

2.3.7. Állítás. $\mathcal{A}(n,k,t,0) \geq \mathcal{A}(n,k,t,1)$ *pontosan akkor, ha* $n \geq (t+1)(k-t+1)$.

Frankl ezen állítása bebizonyítása mellett, azt is megsejtette, hogy adott n, k és t számok esetén mindig egy $\mathcal{A}(n,k,t,i)$-hez izomorf halmazrendszer lesz az optimális. Ezt a sejtés később Ahlswede és Khachatrian [1] látta be az alábbi tétel bizonyításával:

2.3.8. Tétel. *Legyen* $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ *egy t-metsző halmazrendszer, ahol* $t \geq 2$. *Ekkor*

- *ha egy természetes i számra* $(k-t+1)(2+\frac{t-1}{i+1}) < n < (k-t+1)(2+\frac{t-1}{i})$, *akkor* $|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{A}(n,k,t,i)|$ *és az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\mathcal{F}$ izomorf a $\mathcal{A}(n,k,t,i)$-vel.*

- *ha egy természetes i számra* $(k-t+1)(2+\frac{t-1}{i+1}) = n$, *akkor* $|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{A}(n,k,t,i)| = |\mathcal{A}(n,k,t,i+1)|$ *és az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\mathcal{F}$ izomorf a $\mathcal{A}(n,k,t,i)$-vel vagy $\mathcal{A}(n,k,t,i+1)$-gyel.*

A nem uniform esetre Katonának [5] egy tétele ad választ:

2.3.9. Tétel. *Legyen* $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ *egy* t*-metsző halmazrendszer úgy, hogy* $n+t$ *páros. Ekkor* $\mathcal{F} \leq \sum\limits_{i=\frac{n+l}{2}}^{n} \binom{n}{i}$ *és az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a legalább* $\frac{n+l}{2}$ *elemű halmazokat választjuk ki.*

3. Kleitman tétele k diszjunkt halmazt nem tartalmazó halmazrendszerekről

3.1. Előzmények

Ebben a fejezetben, arra a kérdésre keressük a választ, hogy legfeljebb hány halmazt lehet kiválasztani $2^{[n]}$-ből úgy, hogy bármely k kiválasztott halmaz közt legyen 2, melyek nem diszjunktak egymással.

3.1.1. Megjegyzés. *Ez lényegében a nem uniform Erdős-Ko-Rado problémakör egyik tagja, ahol a feltételt úgy gyengítettük, hogy most nem azt követeljük meg, hogy bármely 2 halmaz metszete ne legyen üres, hanem csak azt, hogy bármely k halmaz közt létezzen 2 melynek metszete nem üres.*

Jelölés. *Legyen $\mathcal{F}_{k,n} \subset 2^{[n]}$ egy olyan halmazrendszer, melyben nincs k darab páronként diszjunkt halmaz.*

Jelölés. *Az $\mathcal{F}_{k,n}$ halmazrendszer elemszámát $f(k,n)$-nel fogom jelölni.*

Az alábbi tételt Erdőst sejtette meg, majd Sárközi és Szemerédi [9] bizonyított be:

3.1.2. Tétel. $f(3, 3m+2) \leq \sum\limits_{j=m+1}^{3m+2} \binom{3m+2}{j}$

Később aztán Kleitman [7] az alábbi két tételt bizonyította be:

3.1.3. Tétel. *Legyen $\mathcal{F}_{k,mk}$ egy maximális méretű halmazrendszer. Ekkor*

$$f(k, mk) = \sum_{j=m+1}^{mk} \binom{mk}{j} + \binom{mk}{m} \frac{k-1}{k}.$$

3.1.4. Tétel. *Legyen $\mathcal{F}_{k,mk-1}$ egy maximális méretű halmazrendszer. Ekkor*

$$f(k, mk-1) = \sum_{j=m}^{mk-1} \binom{mk-1}{j}.$$

Könnyen látható, hogy ez utóbbi tétel Sárközi és Szemerédi tételének egy általánosítása. A következő részben a 3.1.3-as és a 3.1.4-es tétel bizonyítását fogjuk megmutatni.

3.2. Bizonyítás

Első lépésként lássuk be, hogy a 3.1.3-as tételből következik a 3.1.4-es tétel. Az alábbi állítás könnyen igazolható:

3.2.1. Állítás. $2 \cdot \sum_{j=m}^{mk-1} \binom{mk-1}{j} = \sum_{j=m+1}^{mk} \binom{mk}{j} + \binom{mk}{m} \frac{k-1}{k}$

Ha a 3.1.4-es tétel nem lenne igaz, akkor létezne egy olyan $\mathcal{F}$ halmazrendszer amiben több, mint $\sum_{j=m}^{mk-1} \binom{mk-1}{j}$ halmaz lenne úgy, hogy nincsen benne k darab páronként diszjunkt halmazt.

Most nézzük azt az esetet, amikor mk elemünk van. Vegyük az előző bekezdésben írt $\mathcal{F}$ halmazrendszert az $mk-1$ elemen, és vegyük hozzá még egyszer az $\mathcal{F}$ halmazrendszert úgy, hogy minden halmazba belerakjuk még az mk-adik elemet is. Ekkor a két halmazrendszer uniója meg fog felelni a 3.1.3-as tétel feltételeinek, viszont az előző állításból következik, hogy ennek a halmazrendszernek a mérete nagyobb, mint $\sum_{j=m+1}^{mk} \binom{mk}{j} + \binom{mk}{m} \frac{k-1}{k}$, ami ellentmond a 3.1.3-as tételnek.

Vagyis nekünk elég az $n = mk$ esetet belátnunk. Ehhez első lépésként vegyük a következő jelöléseket:

Jelölés. *Legyen π az n elem összes partíciója k vagy több megkülönböztetett részre. Legyen P_j a j-edik rész mérete egy partíción belül, és legyen*

$$n(\pi) = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{n} P_j!},$$

ahol ez az érték megegyezik az n elemű halmaz P_j méretű halmazokra való partíciójának számával.

A további jelöléseknél az $[n]$ partícióit fogjuk nézni.

Jelölés. *Az $[n]$ partíciója akkor tartozik egy π partícióhoz, ha minden j-re teljesül, hogy a j-edik halmaz P_j méretű. Legyen C_j a partíciók egy olyan osztálya, hogy egy partíció pontosan akkor kerül bele, ha a partíció halmazai közül pontosan j darab nincs benne $\mathcal{F}_{k,n}$-ben. Legyen $n_j(\pi)$ azon partíciók száma a π partícióiból, melyek a C_j osztályban vannak. Legyen $X_j(\pi) =$*

$\frac{n_j(\pi)}{n(\pi)}$, vagyis azon partíciók aránya az összes partícióban amikben pontosan j halmaz nincsen benne $\mathcal{F}_{k,n}$-ben. Végezetül legyen $y(j)$ az $[n]$ azon j elemű részhalmazainak száma, melyek nincsenek benne $\mathcal{F}_{k,n}$-ben.

3.2.2. Lemma. *A fenti jelöléseket használva a következőket tudjuk állítani:*

(a) $n_0(\pi) = X_0(\pi) = 0$

(b) $\sum_{j=0}^{n} X_j(\pi) = \sum_{j=1}^{n} X_j(\pi) = 1$

(c) $\sum_{j=1}^{n} j \cdot X_j(\pi) = \sum_{j=1}^{n} \frac{y(P_j)}{\binom{n}{P_j}}$, $P_j \neq 0$

(d) Ha a π az $[n]$-et $k + r$ részre particionálja, akkor $X_j(\pi) = 0$, minden $j \leq r$ érték esetén.

Bizonyítás. Az első és az utolsó állítás közvetlenül következik abból, hogy $\mathcal{F}_{k,n}$-ban nincs k darab páronként diszjunkt halmaz.

A második állítás következik az elsőből, mivel csak arra van szükségünk, hogy $X_0(\pi) = 0$.

A harmadik egyenlőségben megfigyelhető, hogy a bal oldal értéke megegyezik az $\mathcal{F}_{k,n}$-ben nem szereplő halmazok átlagos számával a π partícióira nézve. A jobb oldalon szintén ez az átlag fog megjelenni, csak itt a partíció halmazainak elemszáma szerint nézve végig. Könnyen látható, hogy ezek az állítások akkor is működni fognak, ha a partíciók száma $k < n$. $\square$

A továbbiakban használjuk ki, hogy $n = mk$. Az előző lemmának a harmadik pontját használva azon π_e partíciókra, ahol az n elemet k egyforma méretű részre bontja tudjuk, hogy

$$k \cdot \frac{y(m)}{\binom{mk}{m}} = \sum_{j=1}^{k} j \cdot X_j(\pi_e) = 1 + \sum_{j=1}^{k} (j-1) \cdot X_j(\pi_e),$$

ami felírható úgy is, hogy

$$y(m) = \frac{1}{k}\binom{mk}{m} + \frac{1}{k}\binom{mk}{m} \sum_{j=1}^{k} (j-1) \cdot X_j(\pi_e).$$

Hasonló alkalmazást tudunk csinálni más π partíciók esetében is. Most azokat a partíciók írjuk fel, mely számunkra fontos lesz a továbbiakban:

- A **partíció:** $(m+1,\dots,m+1,m-(k-1))$

$$y(m-k+1)+(k-1)y(m+1)\frac{\binom{mk}{m-k+1}}{\binom{mk}{m+1}} \geq \binom{mk}{m-k+1}$$

- B_j **partíció:** $(m+1,\dots,m+1,m-k+1-j,j)$ első k része

$$y(m-k+1-j)+(k-1)y(m+1)\frac{\binom{mk}{m-k+1-j}}{\binom{mk}{m+1}} \geq \binom{mk}{m-k+1-j}$$

Következő lépésként azt fogjuk belátni, hogy a maximális $\mathcal{F}_{k,n}$ halmazrendszert keresve, elég a felfele zárt halmazrendszereket vizsgálni.

3.2.3. Definíció. *Egy $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ halmazrendszer felfele zárt, ha minden $F \in \mathcal{F}$ esetén, ha $F \subset G$, akkor $G \in \mathcal{F}$.*

3.2.4. Állítás. *Legyen $\mathcal{F}_{k,n}$ egy lehető legtöbb halmazt tartalmazó halmazrendszer. Ekkor $\mathcal{F}_{k,n}$ választható úgy, hogy egy felfele zárt halmazrendszer legyen.*

Bizonyítás. Válasszuk ki azokat a halmazrendszereket, melyek a legtöbb halmazt tartalmazzák. Vegyünk ezek közül egy olyan halmazrendszert, melyben a halmazok elemszámainak össze a lehető legnagyobb. Ezeket a kiválasztásokat meg tudjuk csinálni, mivel csak véges sok halmazrendszer létezik.

Tegyük fel, hogy az így kiválasztott halmazrendszer nem felfele zárt. Ekkor léteznie kell egy $F \in \mathcal{F}_{k,n}$-nek és egy $G \notin \mathcal{F}_{k,n}$-nek, hogy $F \subset G$. Vegyük akkor a $\mathcal{F}_{k,n} - \{F\} \cap \{G\}$ halmazrendszert. Ekkor erre a halmazrendszerre is kell, hogy teljesüljön az állítás, mivel ha ebből ki lehetne választani k diszjunkt halmazt, akkor azt az $\mathcal{F}_{k,n}$ halmazrendszerből is ki lehetne választani.

Vagyis találtunk egy olyan halmazrendszert, ami szintén a lehető legtöbb halmazt tartalmazza, viszont a halmazok elemszámainak összege nagyobb, mint $\mathcal{F}_{k,n}$-ben. Ez pedig ellentmond a kiválasztásnak, azaz nem lehetséges, hogy a fent kiválasztott halmazunk nem felfele zárt. Ezzel pedig beláttuk az állítást. □

Emiatt a továbbiakban feltesszük, hogy $\mathcal{F}_{k,n}$ felfele zárt.

Jelölés. *Legyen π_j az mk elemű halmaz $\{m-j,j,m,\dots,m\}$ elemű halmazokra való partíciói, és legyen σ_j az aránya azon partícióknak a π_j partíciói közül, melyekben az első, nevezetesen az $m-j$ elemű halmaz nincs benne $\mathcal{F}_{k,n}$-ben.*

3.2.5. Lemma. *A fenti definíciókat használva azt állíthatjuk, hogy*

$$\sigma_j = \frac{y(m-j)}{\binom{mk}{m-j}} \geq \sum_{r=j+1}^{k} \frac{r}{k} X_r(\pi_e) + \sum_{r=1}^{j} X_r(\pi_e) - (k-1)\frac{y(m+1)}{\binom{mk}{m+1}},$$

vagy másképpen

$$\frac{y(m-j)}{\binom{mk}{m-j}} + (k-1)\frac{y(m+1)}{\binom{mk}{m+1}} \geq 1 - \sum_{r=j+1}^{k} (1-\frac{r}{k})X_r(\pi_e).$$

Bizonyítás. Az $[n]$ bármely π_j partíciójához tudunk társítani egy π_e partíciót úgy, hogy a partíció első két halmazát egyesítjük. Az így kapott partíciók $X_r(\pi_e)$ része fog C_r-hez tartozni. Azon π_j-hez tartozó partícióknak, melyekhez társított π_e partíciók C_r-ben vannak, legalább az $\frac{r}{k}$ részében az $m-j$ elemű halmaz nem lesz benne $\mathcal{F}_{k,n}$-ben. Ez abból következik, hogy $\mathcal{F}_{k,n}$ felfele zárt, valamint a π_e-hez tartozó és egy C_r osztályban lévő partíciók $\frac{r}{k}$ részének első halmaza nincs benne $\mathcal{F}_{k,n}$-ben.

Ezt az eredményt csak az $r > j$ esetben fogjuk használni. Vegyük azokat a π_j partíciókat, melyekben az $(m-j)$ elemű halmaz nincsen $\mathcal{F}_{k,n}$-ben. Ezek közül a partíciók közül azoknak az aránya, mely olyan π_e-hez vannak társítva, mely valamelyik C_r $(r > j)$ csoporthoz tartozik, legalább

$$\sum_{r=j+1}^{k} \frac{r}{k} X_r(\pi_e).$$

Abban az esetben, ha $r \leq j$, akkor egy jobb becslést tudunk csinálni. Megállapítható, hogy minden $m-j$ elemű halmaza a partícióknak, mely hozzá vannak társítva egy C_r-beli π_e partícióhoz, nem lesz benne $\mathcal{F}_{k,n}$-ben, kivétel ha a hozzá tartozó π_j partíció teljesíti a következő feltételt:

- Az $(m-j)$ elemű halmazai a partíciónak $\mathcal{F}_{k,n}$-ben kell lennie.
- A partíció második halmazát, azaz a j elemű halmazt, bárhogy is vesszük hozzá ahhoz az r darab m elemű halmazhoz a partíciókban, ami nincsen benne $\mathcal{F}_{k,n}$-ben, úgy hogy minden ilyen halmaz kap legalább 1 elemet, akkor az így kapott legalább $m+1$ elemű halmazok közül legalább az egyik benne lesz $\mathcal{F}_{k,n}$-ben.

Vagyis bármely π_j partíciónak megfelelően tudunk készíteni legalább j darab $m+1$ elemű halmazt, ami nincsen benne $\mathcal{F}_{k,n}$-ben, és amelyek úgy állnak elő, hogy 1 elemet tartalmaznak a partíció j elemű halmazából, a többi m elem pedig a partíció egyik halmaza.

Ez az állítás pedig a következik a Kőnig-Hall tételből. Ha nem lenne igaz, akkor tudnánk találni egy hozzárendelését a partíciónak a $\mathcal{F}_{k,n}$-en kívüli r darab m elemű halmazból a partíció j elemű halmazába úgy, hogyha az m elemű halmazhoz hozzávesszük a hozzápárosított elemet a j halmazból, akkor egy olyan $m+1$ elemű halmazt kapunk, ami benne van $\mathcal{F}_{k,n}$-ben, ami ellentmondás.

Ekkor bármely C_r osztályban ($r \leq j$) lévő $P \in \pi_j$ partícióra, amelynek az első halmaza $\mathcal{F}_{k,n}$-ben van, tudunk készíteni legalább j partíciót úgy, hogy minden rész esetén a P-beli j elemű halmaz egyik eleméhez hozzáveszünk egy P-beli m elemű halmazt, akkor így egy olyan $m+1$ elemű halmazt kapunk, amely nincsen $\mathcal{F}_{k,n}$-ben. Az így kapott $m+1$ elemű halmazok száma, amelyek nincsenek $\mathcal{F}_{k,n}$-ben az $y(m+1)$, és minden ilyen halmaz legfeljebb

$$\frac{(k-1)(m+1)(mk-m-1)!}{(m!)^{k-2}(m-j)!(j-1)!}$$

partícióban fog szerepelni. Ebből kiszámolható, hogy legfeljebb

$$\frac{(k-1)n(\pi_j)y(m+1)}{\binom{mk}{m+1}}$$

π_j-beli partícióban lehet egy ilyen $m-j$ elemű halmaz. Azaz az olyan π_j-hez tartozó partíciók aránya, melyben az $m-j$ elemű halmaz nincs $\mathcal{F}_{k,n}$-ben, viszont C_r-ben van valamely $r \leq j$-re, legalább

$$\sum_{r=0}^{j} X_r(\pi_e) - \frac{(k-1)y(m+1)}{\binom{mk}{m+1}},$$

ami bizonyítja a lemmát. □

Most számoljuk össze, az $[n]$ azon részhalmazait, melyek nincsenek benne $\mathcal{F}_{k,n}$-ben. Ehhez már az elején beláttuk, hogy

$$y(m) \geq \frac{1}{k}\binom{mk}{m} + \frac{1}{k}\binom{mk}{m}\sum_{j=1}^{k}(j-1)\cdot X_j(\pi_e).$$

Az A és B_j partíciók alapján tudjuk az

$$y(m-k+1-j)+(k-1)y(m+1)\frac{\binom{mk}{m-k+1-j}}{\binom{mk}{m+1}} \geq \binom{mk}{m-k+1-j}$$

egyenlőtlenséget minden $j \geq 0$, míg a 3.2.5-ös lemma alapján felírhatjuk az alábbi egyenlőtlenséget:

$$y(m-j)+y(m+1)(k-1)\frac{\binom{mk}{m-j}}{\binom{mk}{m+1}} \geq \binom{mk}{m-j} - \binom{mk}{m-j}\sum_{r=j+1}^{k}(1-\frac{r}{k})X_r(\pi_e).$$

Összevonva ezeket az eredményeket fel tudjuk írni, hogy

$$\sum_{l=0}^{m+1} y(l) \geq \sum_{l=0}^{m} y(l) + y(m+1)\left(\sum_{l=0}^{m-1}\binom{mk}{l}\right)\frac{k-1}{\binom{mk}{m+1}}$$

$$\geq \sum_{l=0}^{m-1}\binom{mk}{l} + \frac{1}{k}\binom{mk}{m} + \sum_{s=1}^{k}\left(\frac{s-1}{k}\binom{mk}{m} - \sum_{j=1}^{s-1}(1-\frac{s}{k})\binom{mk}{m-j}\right)X_s(\pi_e)$$

$$\geq \sum_{l=0}^{m-1}\binom{mk}{l} + \frac{1}{k}\binom{mk}{m},$$

ami $k \geq 3$ esetén igazak az egyenlőtlenségek, ami bizonyítja a 3.1.3-as tételt.

Ez a tétel által megadott felső becslés a lehető legjobb, mivel tudjuk venni azt az $\mathcal{F}_{k,mk}$ halmazrendszert, amiben benne van az összes legalább $m+1$ elemű halmaz, és azokat az m elemű halmazokat, melyek nem tartalmaznak néhány bizonyos elemet.

3.3. További esetek

Az $n = km + j$ $(0 < j < k-1)$ esetben hasonló módon végigvezetve a bizonyítás az alábbi felső becslést kapjuk:

$$f(k, mk+j) \leq \sum_{l=m+1}^{mk+j}\binom{mk+j}{l} + \binom{mk+j}{m}\frac{(k-j-1)}{k}.$$

Az alsó becslés tekintetében pedig a következő konstrukciót tudjuk adni: legyen $\mathcal{F}_{k,mk+j}$ halmazrendszerben az összes legalább $m+1$ elemű halmaz, valamint azok a halmazok, melyek m elemet tartalmaznak, és ebből legalább az egyik elem az első $k-1-j$ elem valamelyike. Ekkor ennek a halmazrendszernek a mérete

$$\sum_{l=m+1}^{mk+j} \binom{mk+j}{l} + \binom{mk+j}{m} - \binom{mk+2j+1-k}{m}.$$

Abban az esetben, ha $k=3$, $j=1$, akkor minden m-re tudjuk, hogy

$$f(3,3m+1) \le \sum_{l=m+1}^{3m+1} \binom{3m+1}{l} + \frac{1}{3}\binom{3m+1}{m},$$

miközben az alsó becslés $f(3,3m+1)$-re is hasonlóan néz ki, annyi különbséggel, hogy a képletben az $\frac{1}{3}$ helyett $\frac{m}{3m+1}$-et tudunk írni.

4. Metszet tétel gyengítése uniform esetben

Kleitman tételének feltétele $k = 3$ esetén, hogy a kiválasztott $\mathcal{H}$ halmazrendszerben nem létezik három páronként diszjunkt halmaz, felírható úgy is, hogy bármely A, B, $C \in \mathcal{H}$ halmazokra $|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A| \geq 1$. A továbbiakban azt fogjuk megvizsgálni, hogy mi történik akkor, ha az egyenlőtlenség jobb oldalán található 1-est lecseréljük egy tetszőleges l értékre.

4.1. A páronkénti metszetek összegei

Ebben a fejezetben az n elemű halmaz k elemű részhalmazaiból fogunk válogatni, vagyis úgy akarunk megadni minél több halmazt $\mathcal{H} \subset \binom{[n]}{k}$-ból, hogy minden A, B, $C \in \mathcal{H}$ halmazokra $|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A| \geq l$.

4.1.1. Megjegyzés. *A fejezet elején olyan definíciókat fogunk kimondani, illetve olyan állításokat fogunk belátni, amik nem csak az $\binom{[n]}{k}$-beli halmazrendszerek esetén érvényesek, hanem tetszőleges $\mathcal{H}$ halmazrendszerre, ahol $\mathcal{H} \subset 2^{[n]}$. Ezeket a definíciókat és állításokat erre a bővebb halmazrendszerre fogjuk leírni és bizonyítani, mivel a nem-uniform esetben is ezeket fogjuk használni.*

Jelölés. *Legyen $d(A, B, C) = |A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|$.*

4.1.2. Definíció. *Legyen $f : {2^{[n]}}^3 \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan függvény, amely minden A, B, $C \in 2^{[n]}$-re és minden $m \in \mathbb{N}$-re $f(A, B, C, m)$ azon elemek száma az n elemű alaphalmazból, amely az A, B és C halmazokból pontosan m-ben szerepel.*

Ezekkel a definíciókkal kapjuk ezt a könnyen igazolható állítást:

4.1.3. Állítás. *Minden A, B, $C \in 2^{[n]}$-ra $d(A, B, C) = 3 \cdot f(A, B, C, 3) + f(A, B, C, 2)$.*

Ezt kihasználva tudunk a $d(A, B, C)$-re egy alsó becslést adni.

4.1.4. Állítás. *Legyen A, B, $C \in 2^{[n]}$ és $|A| + |B| + |C| = j$. Ekkor ha*

- *$n \leq j \leq 2n$, akkor $d(A, B, C) \geq j - n$.*
- *$2n \leq j \leq 3n$, akkor $d(A, B, C) \geq n + 2 \cdot (j - 2n)$.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $j = |A| + |B| + |C| = 3 \cdot f(A, B, C, 3) + 2 \cdot f(A, B, C, 2) + 1 \cdot f(A, B, C, 1)$, valamint $d(A, B, C) = 3 \cdot f(A, B, C, 3) + f(A, B, C, 2)$. Azaz a kérdés megfogalmazható úgy is, hogy a $3 \cdot f(A, B, C, 3) + 2 \cdot f(A, B, C, 2) + 1 \cdot f(A, B, C, 1)$ összeg lefixálása mellett, mennyi a $3 \cdot f(A, B, C, 3) + f(A, B, C, 2)$ függvény minimuma. Ezt pedig a következő könnyen igazolható állítás segítségével fogjuk belátni:

4.1.5. Állítás. *Ha van olyan x és y, hogy $f(A, B, C, x) > 0$, $f(A, B, C, y) > 0$ és $x \geq y + 2$, akkor egy elem megváltoztatásával el tudjuk azt érni, hogy az $f(A, B, C, x)$ és $f(A, B, C, y)$ értéke is csökkenjen eggyel, az $f(A, B, C, x-1)$ és $f(A, B, C, y + 1)$ értéke pedig eggyel növekedjen, vagy ha $x - 1 = y + 1$, akkor $f(A, B, C, x - 1)$ értéke kettővel növekedjen.*

Vegyünk egy a elemet, ami x-szer szerepelt, és vegyünk egy b elemet, ami y-szor szerepelt. Ekkor van olyan halmaz, amiben szerepel a, viszont b nem. Ha ebben a halmazban lecseréljük a-t b-re, akkor megkapjuk az állításban írt változtatást.

Az könnyen igazolható, hogy ezzel a változtatással a $3 \cdot f(A, B, C, 3) + 2 \cdot f(A, B, C, 2) + 1 \cdot f(A, B, C, 1)$ összeg nem változik, viszont a $3 \cdot f(A, B, C, 3) + f(A, B, C, 2)$ összeg értéke csökkenni fog. Mivel ennek az összegnek az értéke egy természetes szám, ezért csak véges sokszor tudjuk csökkenteni ilyen változtatásokkal, vagyis el fogunk jutni egy olyan állapotba, amikor már nem lehet csökkenteni. Ez pedig akkor lehetséges, amikor nem található két olyan elem, amire nézve azon halmazok számát, amiben a két elem valamelyike szerepel, a különbség legalább 2. Vagyis csak akkor veheti fel ez az összeg a minimumot, ha létezik olyan x, hogy minden elem x-szer, vagy $x + 1$-szer szerepel a halmazokban. Ebből pedig következik a következő állítás:

4.1.6. Állítás. *Ha A, B, $C \in 2^{[n]}$, $|A| + |B| + |C| = j$ és $cn \leq j < (c+1)n$ akkor a $d(A, B, C)$ a minimumát akkor veszi fel, ha $f(A, B, C, c) = (c+1)n - j$, $f(A, B, C, c + 1) = j - cn$, minden más d érték esetben pedig $f(A, B, C, d) = 0$.*

Ebből pedig már könnyen kiszámolható a fenti állítás. □

4.2. Halmazrendszer balra tolása

Egy halmazrendszer balra tolása már szerepelt a 2.2.9-es definícióban. A következő részben használni fogjuk azt ott szereplő definíciókat és jelöléseket.

4.2.1. Állítás. *Legyen $\mathcal{F} \in 2^{[n]}$ egy halmazrendszer, és minden A, B, $C \in \mathcal{F}$ halmazokra $d(A, B, C) \geq l$, ekkor minden A', B', $C' \in \tau_{x,y}(\mathcal{F})$ halmazok esetén is igaz lesz, hogy $d(A', B', C') \geq l$.*

Bizonyítás. Indirekten bizonyítsuk az állítást, vagyis tegyük fel, hogy léteznek olyan $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ és $\widehat{C} \in \tau_{x,y}(\mathcal{F})$ halmazok, melyre $d(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}) < l$, viszont minden A, B, $C \in \mathcal{F}$ halmazokra $d(A, B, C) \geq l$.

A $d(A, B, C) = 3 \cdot f(A, B, C, 3) + f(A, B, C, 2)$ egyenlőséget használva látható, hogy elég elemenként külön számolni azt, hogy hány metszés van a három halmaz között.

Most vegyük az $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ és $\widehat{C}$ halmazok bijektív képeit, azaz azokat az A, B és C halmazokat, melynek az eltoltjaik. Az x és y elemeket leszámítva ezek a halmazpárok ugyanúgy fognak viselkedni, vagyis azokon az elemeken vett páronkénti metszetek száma azonos lesz.

Vizsgáljuk meg, hogy ez a két elem hogyan fog szerepelni az eltolásban. Ha se x, se y nem szerepel egy halmazban, akkor az eltoltjában sem fog. Ha mindkettő szerepel benne, akkor az eltoltjában is fog mindkettő szerepelni. Ha csak y szerepel benne, akkor az eltoltban is csak az y fog szerepelni. Ha pedig csak az x szerepel egy halmazban, akkor az eltolt halmazban kétféle dolog történhet:

- ha $H - \{x\} \cup \{y\} \in \mathcal{F}$, akkor az eltolt halmazban is csak x fog szerepelni,
- ha $H - \{x\} \cup \{y\} \notin \mathcal{F}$, akkor az eltolt halmazban csak y fog szerepelni.

Mivel tudjuk, hogy $d(A, B, C) < d(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})$, ezért az eltolás közben legalább az egyik halmaznak meg kell változnia. Ez pedig csak úgy lehetséges, ha valamelyik csak x-et tartalmazó halmaz eltoltuk úgy, hogy csak y-t tartalmazzon.

Szerepeljen az A, B és C halmazokban az x elem p-szer, az y elem q-szor. Ekkor az $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ halmazokban az x elem $p - r$-szer, az y elem $q + r$-szer fog szerepelni. Azt korábban megállapítottuk, hogy ha adott a három halmaz elemszámainak összege, akkor a páronkénti metszeteinek összege, akkor a legkisebb, ha minél egyenletesebben vannak az elemek benne. Ebből a megállapításból következik, hogy a fenti egyenlőtlenség csak abban az esetben fog tudni teljesülni, ha $p > p - r > q$ (és ekkor a $p > q + r > q$ egyenlőtlenségek is igazak).

Vegyük észre, hogy ekkor kell lennie legalább $p - q - r$ halmaznak, az $\mathcal{F}$-beli halmazok közt, amiben x szerepel, de y nem, és az eltolás után is csak x fog benne szerepelni. Ezekre a halmazokra teljesülni fog az, hogyha x-et kivesszük és y-t betesszük a helyére, akkor is $\mathcal{F}$-beli halmazt kapunk. Cseréljünk le az A, B, C halmazok közül $p-q-r$ darabot úgy, hogy a csak x-et tartalmazás helyett csak y-t tartalmazza. Az így kapott A'', B'', C'' halmazok benne lesznek $\mathcal{F}$-ben, és az x elem $q+r$-szer, az y elem $p-r$-szer fog szerepelni, azaz $d(A'', B'', C'') = d(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})$, ami ellentmondás. $\square$

Ezeket az x-ből y-ba tolásokat, hasonlóan az Erdős-Ko-Rado tétel bizonyításához, alkalmazzuk úgy, hogy minden tolásnál $x \geq y$. Itt is látható, hogy ilyen tolások esetén a halmazokban szereplő elemek összegének összege csökkenni fog. Mivel ez az érték egy pozitív egész szám, ezért ezt a műveletet csak véges sokszor fogjuk tudni alkalmazni úgy, hogy történjen a halmazokban változás.

Azt az állapotot amikor már nem tudunk több tolást végezni kisebb elem felé, azt az eredeti halmazrendszer egy balra eltoltjának hívunk. Az könnyen látható, hogy egy halmazrendszer balra eltolja egy balra tolt halmazrendszer lesz.

A 4.2.1-os állítás miatt egy, a feltételeknek megfelelő maximális méretű halmazrendszer balra eltoltja is maximális méretű, és megfelel a feltételeknek. Vagyis a maximális konstrukció a balra tolt halmazok közül, az összes halmaz közül is maximális lesz, ezért a továbbiakban csak a balra tolt halmazrendszerekkel fogunk foglalkozni.

4.3. Felső becslés az $l = 2$ esetre

Mostantól kezdve térjünk át az $l = 2$ esetre, vagyis olyan $\mathcal{F}$ halmazrendszert keresünk, melyre minden A, B, $C \in \mathcal{F}$ halmazokra $d(A, B, C) \geq 2$.

4.3.1. Állítás. *Legyen $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ egy balra tolt halmazrendszer és legyenek A, B, $C \in \mathcal{F}$ halmazok úgy, hogy $d(A, B, C) \geq 2$. Ekkor ha vesszük a $A' = A \cap [3k-2]$, $B' = B \cap [3k-2]$ és $C' = C \cap [3k-2]$ halmazokat, akkor $d(A', B', C') \geq 2$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy nem igaz az állítás, vagyis $d(A', B', C') < 2$. Ellentmondást úgy fogunk majd kapni, hogy megmutatjuk, hogy léteznek olyan A'', B'', $C'' \in \mathcal{F}$ halmazokat, melyre $d(A'', B'', C'') < 2$.

Azt tudjuk, hogy ha egy balra tolt halmazrendszerben szerepel H, akkor minden olyan halmaz is benne lesz, amit úgy kapunk, hogy H néhány elemét kisebbre cseréljük.

Nézzük meg az $A \cup B \cup C$ halmazt. Az indirekt feltevés miatt ebben maximum 1 metszés van az első $3k-2$ közül. Ebből következik, hogy van egy $3k-2$-nél nagyobb elem, ami nevezzünk el m-nek. Most csökkentsük az $A \cup B \cup C$ halmaz elemeit (az m kivételével) úgy, hogy a $3k-2$-nél nagyobb elemek helyett vegyünk egy olyan elemet, ami még nem szerepel a három halmaz uniójában. Könnyen belátható, hogy amikor megáll ez a folyamat, akkor a három halmaz uniójában benne lesz az első $3k-2$ tag, valamint m is. Ebből pedig már következik, hogy ennek a három halmaznak a metszete legfeljebb 1 lehet, pedig mind a három halmaz benne van $\mathcal{F}$-ben, mivel az elemek csökkentésével nem léphettünk ki belőle. □

4.3.2. Tétel. *Legyen $k > 2$ és legyen $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ halmazrendszer úgy, hogy bármely A, B és $C \in \mathcal{F}$ halmazokra $d(A,B,C) \geq 2$. Ekkor*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n+2}{k-1} - \binom{n}{k-3}.$$

Bizonyítás.

Jelölés. *Legyen $n \geq 3k-2$ és legyen ekkor $A(n,k)$ a kiválasztható halmazok maximális száma az $\binom{[n]}{k}$-ból úgy, hogy bármely három kiválasztott halmaz esetén $d(A,B,C) \geq 2$. Ezenkívül legyen $A(n,k,p)$ azon halmazok maximális száma ugyanezen feltételek mellett, amelyek az első $3k-2$ elemből p elemet tartalmaznak.*

Ezekre az értékekre k szerinti indukció alapján fogunk felső becslést adni. Első lépésben $k=1$ esetén megyünk végig n értékein növekvő sorrendbe, majd minden további lépésben k értékét eggyel növelve határozunk meg a lehetséges n értékre a felső becslést $A(n,k)$-ra.

Egy kezdőértéket minden k esetén pontosan meg tudunk határozni, hiszen $A(3k-2,k) = \binom{3k-2}{k}$. A többi $A(n,k)$-ra a felső becsléseket a következő állítás segítségével ki lehet számolni:

4.3.3. Állítás. *Legyen $n > 3k-2$, ekkor*

$$A(n,k) \leq \sum_{i=1}^{k} A(n,k,i), \tag{1}$$

ahol

$$A(n,k,i) = \binom{n-(3k-2)}{k-i} \cdot A(3k-2,i). \tag{2}$$

Az (1)-es egyenlőtlenség jobb oldalán az alapján adjuk össze a lehetséges halmazok számát, hogy hány elemet tartalmaznak az első $3k-2$ elemből. Ha a jobb oldal kisebb lenne, mint a bal, akkor létezne olyan i érték, ami esetén az $A(n,k)$-ra adott legjobb konstrukcióban több olyan halmaz lenne, ami az első $3k-2$ elemből i elemet tartalmaz, mint $A(n,k,i)$, ami nem lehetséges.

A (2)-es egyenlőségben pedig azt használjuk ki, hogy ha az első $3k-2$ elemből i-t választunk ki, akkor a maradék $n-(3k-2)$ elemből $k-i$-t fog tartalmazni a halmaz.

Ezzel a rekurziókkal pedig kaphatunk egy felső becslést $A(n,k)$ értékeire.

Jelölés. *A fenti rekurziókkal kapott értékek legyenek $B(n,k)$, vagyis minden n és k esetén $A(n,k) \leq B(n,k)$.*

Most pedig határozzuk meg, hogy milyen $B(n,k)$ értékek jönnek ki a fenti rekurzióból.

4.3.4. Állítás.

- *Ha $k=1$, akkor $B(n,k)=1$,*
- *Ha $k=2$, akkor $B(n,k)=n+2$,*
- *Ha $k \geq 3$, akkor $B(n,k) \leq \binom{n+2}{k-1} - \binom{n}{k-3}$.*

Bizonyítás. Ha $k \leq 3$, akkor az állítás könnyen ellenőrizhető. Most nézzük meg mi a helyzet, ha $k>3$.

Először is vegyük észre, hogy $B(n,k) \leq B(n-1,k)+B(n-1,k-1)$, mivel $n-1$-re ketté tudjuk bontani az eseteket az alapján, hogy az n-edik elem benne van-e a halmazban vagy sem.

Ezzel az észrevétellel pedig be is látható a rekurzió, hiszen $B(n,k) \leq B(n-1,k)+B(n-1,k-1) = \binom{n+1}{k} - \binom{n-1}{k-2} + \binom{n+1}{k-1} - \binom{n-1}{k-3} = \binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k-1} + \binom{n-1}{k-2} - \binom{n-1}{k-3} = \binom{n+2}{k-1} - \binom{n}{k-3}$.

Már csak annyit kell belátni, hogy a kezdőértékek esetén is teljesül a képlet, azaz $B(3k-2,k) = \binom{3k}{k-1} - \binom{3k-2}{k-3}$. Ehhez azt kéne belátni, hogy

$$\frac{(3k-2)!}{k!(2k-2)!} + \frac{(3k-2)!}{(k-3)!(2k+1)!} = \frac{(3k)!}{(k-1)!(2k+1)!}$$

Felszorozva a törteket $\frac{k!(2k+1)!}{(3k)!}$-ral, azt kapjuk, hogy $(2k-1)2k(2k+1)+k(k-1)(k-2) = 3k(3k-1)k$, amiről pedig könnyen belátható, hogy igaz. □

□

4.4. Alsó becslés az $l = 2$ esetre

Most térjünk át az alsó becslésre. Ha $3k - 2 \geq n$, akkor tudjuk venni az összes k elemű halmazt, mivel a skatulya-elv miatt vagy lesz olyan elem, amit mindhárom halmaz tartalmaz, vagy lesz két elem, amit legalább két halmaz tartalmaz.

Innentől kezdve már csak azokat az eseteket nézzük, amikor $3k - 2 < n$. Legyen $1 \leq l \leq k$ egész szám. Ekkor vegyük azokat a halmazokat, amelyek az első $3l - 2$ elemből legalább l-et tartalmaz. Ezt a halmazrendszert nevezzük $\mathcal{H}(n, k, l)$-nek. Skatulya-elv miatt ezekben a halmazrendszerekben legalább 2 metszés lesz a három halmaz közt, méghozzá az első $3l - 2$ elem közt.

Első körben határozzuk meg azt, hogy hány halmazt fog adni ez a konstrukció, ami egyben egy alsó becslés is lesz a maximális halmazrendszer elemszámára:

4.4.1. Tétel. *Legyen $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ a lehetséges legnagyobb halmazrendszer úgy, hogy bármely A, B és $C \in \mathcal{F}$ halmazokra $d(A, B, C) \geq 2$. Ekkor*

$$|\mathcal{F}| \geq max_l\{\mathcal{H}(n, k, l)\} = max_l \left\{ \sum_{i=l}^{k} \binom{3l-2}{i} \binom{n-3l+2}{k-i} \right\} \tag{3}$$

Ha valamelyik binomiális együttható nem értelmezhető, akkor azt a tagot 0-nak vegyük.

Az, hogy a $\mathcal{H}(n, k, l)$ konstrukciók közül melyik l-re kapjuk a legtöbb halmazt, függeni fog n-től és k-tól. Ennek szemléltetésére mutatom a következő példát:

4.4.2. Példa. *Legyen n=20 és vegyük a következő táblázatot:*

$l \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	19	171	969	3876	11628	27132
2	-	6	100	785	3856	13280	34048
3	-	-	35	490	3206	13020	36765
4	-	-	-	210	2352	12180	38760
5	-	-	-	-	1287	10725	40755
6	-	-	-	-	-	8008	43472
7	-	-	-	-	-	-	50388

A példában az oszlopok jelölik a k, a sorok pedig az l értékét. Egy k-ra a legjobb l értéket akkor kapjuk, ha megnézzük, hogy az adott oszlopban melyik a legnagyobb szám. A mostani példában $1 \leq k \leq 5$-re az $l = 1$ az optimális, $k = 6$-ra az $l = 2$, $k = 7$-re pedig az $l = 7$.

Több esetet megvizsgálva arra az észrevételre jutottam, hogy minél nagyobb a $\frac{k}{n}$ arány, annál nagyobb l esetén lesz optimális az $\mathcal{H}(n, k, l)$ halmazrendszer.

Ennek alátámasztásaként a következő két állítást tudjuk kimondani.

4.4.3. Állítás. *Ha egy adott n-re és k-ra $|\mathcal{H}(n, k, l)| < |\mathcal{H}(n, k, l+1)|$, akkor $|\mathcal{H}(n, k+1, l)| < |\mathcal{H}(n, k+1, l+1)|$.*

4.4.4. Állítás. *Ha egy adott n-re és k-ra $|\mathcal{H}(n, k, l)| > |\mathcal{H}(n, k, l+1)|$, akkor $|\mathcal{H}(n+1, k, l)| > |\mathcal{H}(n+1, k, l+1)|$.*

Vagyis egy adott n esetén a k növelésével az optimális l-ek értéke nem fog csökkenni. Ha pedig a k-t rögzítjük le, és az n-et növeljük, akkor az optimális l értéke nem fog növekedni.

Ennek a két állításnak a bizonyítása számolással kihozható a (3)-as képlet segítségével.

4.4.5. Sejtés. *Ha n és k elég nagy, akkor az optimális l értéke csak a $\frac{k}{n}$ értéktől fog függeni, mégpedig úgy, hogy minél nagyobb $\frac{k}{n}$ érték esetén a minél nagyobb l értékre lesz optimális.*

A sejtésből következik, hogy ha $\frac{k}{n}$ értéke kicsi, akkor az $l = 1$ esetén lesz a $\mathcal{H}(n, k, l)$ értéke maximális. Ennek egy példájaként próbáljuk meg meghatározni azt, hogy milyen $\frac{k}{n}$ aránynál fog megváltozni arra, hogy az $l = 2$ konstrukció fog már nagyobb értéket adni, mint az $l = 1$-es.

Az $l = 1$ esetben $\binom{n-1}{k-1}$ halmazt tudunk megadni. Ha $l = 2$, akkor $\binom{4}{2}\binom{n-4}{k-2} + \binom{4}{3}\binom{n-4}{k-3} + \binom{4}{4}\binom{n-4}{k-4} = 6 \cdot \binom{n-4}{k-2} + 4 \cdot \binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k-4}$.

Kibontva a binomiális tagokat, és leosztva $\frac{(n-4!)}{(k-4)!(n-k-2)!}$-val ezt kapjuk:

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(k-3)(k-2)(k-1)(n-k-1)(n-k)} \leq 6 \cdot \frac{1}{(k-3)(k-2)} +$$

$$4 \cdot \frac{1}{(k-3)(n-k-1)} + \frac{1}{(n-k-1)(n-k)}.$$

Ha n-nel (és vele együtt k-val) tartunk a végtelenbe, akkor ezt a közelítést tudjuk adni:

$$\frac{n^3}{k^3(n-k)^2} \leq 6 \cdot \frac{1}{k^2} + 4 \cdot \frac{1}{k(n-k)} + \frac{1}{(n-k)^2}$$

Felszorozva a nevezőkkel megkapjuk, hogy $n^3 \leq 6 \cdot k \cdot n^2 - 8 \cdot k^2 \cdot n + 3 \cdot k^3$. Vagyis $3(\frac{k}{n})^3 - 8(\frac{k}{n})^2 + 6(\frac{k}{n}) - 1 \geq 0$. Ezt pedig akkor fog bekövetkezni, ha $1 \geq \frac{k}{n} \geq \frac{5-\sqrt{13}}{6}$. Vagyis ha növeljük n-et, akkor határértékben az $l = 2$ konstrukció, akkor lesz jobb az $l = 1$-es konstrukciónál, ha $\frac{k}{n}$ nagyobb, mint $\frac{5-\sqrt{13}}{6}$.

A fenti sejtésem alapja az, hogy ugyanezt a felírást tetszőleg l és $l+1$ számra fel tudjuk írni, és a végén egy a mostanihoz hasonló polinom fog kijönni. Úgy sejtem, hogy minden ilyen polinomnak lesz egy $\frac{1}{3}$-nál kisebb gyöke, ami a határ lesz az l-es és az $l+1$ konstrukció közt.

4.4.6. Sejtés. *Minden n-re és k-ra a maximális halmazrendszer egy $\mathcal{H}(n,k,l)$ halmazrendszer képében is felvétetik.*

Ennek a sejtésnek azt a részét tudom bizonyítani, hogy amikor $n \geq 10 \cdot k^3$, akkor az $l = 1$ esetben lesz a halmazrendszer maximális.

4.4.7. Tétel. *Legyen $n \geq 10 \cdot k^3$ és legyen $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ a lehetséges legnagyobb halmazrendszer úgy, hogy $d(A,B,C) \geq 2$. Ekkor $|\mathcal{F}| = \binom{n-1}{k-1}$, és ezt az értéket csak akkor fogja felvenni, ha az összes kiválasztott halmaznak van egy közös metszete.*

4.4.8. Megjegyzés. *Ez a bizonyítás nem csak azt mutatja meg, hogy a $\mathcal{H}(n,k,l)$ halmazrendszerek közül ez a legjobb, hanem azt, hogy összes lehetséges halmazrendszer közül.*

Bizonyítás. Ha van olyan elem, ami az összes kiválasztott halmazban benne van, akkor legfeljebb $\binom{n-1}{k-1}$ halmaz adható meg.

Tegyük fel, hogy nincs olyan elem, melyet minden halmaz tartalmaz. Ekkor kétféle eset lehetséges az alapján, hogy van-e két diszjunkt halmaz a kiválasztottak közül.

Először nézzük meg mi van akkor, ha van két olyan A és B halmaz, ami diszjunkt. Ekkor $|A \cup B| = 2k$, és az összes többi kiválasztott halmaznak kell legalább 2 elemet tartalmaznia ezekből. Ekkor a kiválasztható halmazok száma legfeljebb $\binom{2k}{2}\binom{n}{k-2}$. Az állítás bizonyításához azt kell belátni, hogy

$$\binom{n-1}{k-1} > \binom{2k}{2}\binom{n}{k-2}.$$

Átrendezve azt kapjuk, hogy

$$(n-k+2)(n-k+1) > 2k^2 \cdot n \cdot (k-1).$$

A bal oldalra alkalmazva az $n \geq 10 \cdot k^3$ egyenlőtlenséget megkapjuk, hogy azt kell belátni, hogy $\frac{n^2}{2} \geq 2k^3 \cdot n$, ami pedig már következik a fenti feltételből. Vagyis nem lehet bennne két diszjunkt halmaz.

Most nézzük meg azt az esetet, amikor nincs a kiválasztottak közül két diszjunkt halmaz. Vegyünk egy F_1 halmazt a kiválasztott halmazok közül, és vegyük az $|F_1 \cap F_i|$ minimumát, ahol $F_i \in \mathcal{F}$. Ha ez az érték legalább kettő, akkor legfeljebb $\binom{k}{2}\binom{n}{k-2}$ halmaz választható ki, amiről az előzőek alapján könnyen látszik, hogy kisebb, mint $\binom{n-1}{k-1}$.

Vagyis akkor kell lennie egy olyan halmaznak, amire az $|F_1 \cap F_i| = 1$. Legyen ez a halmaz az F_2, és legyen az $F_1 \cap F_2 = x$. Ekkor válasszunk F_3-nak egy olyan halmazt, mely nem tartalmazza x-et.

Most használjuk fel azt, hogy a halmazrendszerben nincsen két diszjunkt halmaz. Mivel az $F_1 \cap F_2 \cap F_3$ halmaz üres, ezért bármely másik halmaznak legalább 2 elemet kell tartalmaznia $F_1 \cup F_2 \cup F_3$-ból. Mivel $|F_1 \cup F_2 \cup F_3| < 3k$, ezért a kiválasztható halmazok maximális száma kevesebb, mint $\binom{3k}{2}\binom{n}{k-2}$. Vagyis ezúttal azt kell belátni, hogy

$$\binom{n-1}{k-1} > \binom{3k}{2}\binom{n}{k-2}.$$

Átrendezve azt kapjuk, hogy

$$(n-k+2)(n-k+1) > \frac{9}{2}k^2 \cdot n \cdot (k-1).$$

Ha itt is alkalmazzuk az $n \geq 10 \cdot k^3$ egyenlőtlenséget, akkor azt kell belátni, hogy $\frac{n^2}{2} \geq \frac{9}{2}k^3 \cdot n$, ami pedig már következik a feltételből. Ezzel pedig beláttuk a tételt. □

5. Nem-uniform eset vizsgálata

Ebben a fejezetben szintén egy maximális méretű $\mathcal{H}$ halmazrendszert akarunk kiválasztani úgy, hogy bármely három kiválasztott halmazra a $d(A, B, C) \geq l$, ám ezúttal nem csak a k elemű halmazok közül, hanem a $2^{[n]}$ halmazai közül akarunk minél többet kiválasztani.

5.1. Általános megfigyelések a maximális l metsző halmazrendszerekre

Ahogyan a 4.1.1-es megjegyzésben szerepelt, az előző fejezet egyes állításait itt is alkalmazni tudjuk, egészen a 4.2.1-es állításig bezárólag.

5.1.1. Definíció. *Legyen $F \in \mathcal{F}$ és legyen $F \subset G$, ahol $G \notin \mathcal{F}$. Ekkor az $\mathcal{F} - \{F\} \cup \{G\}$ az $\mathcal{F}$ halmazrendszernek egy felfele eltolása. Egy halmazrendszer akkor felfele eltoltja egy másiknak, ha megkapható felfele eltolások egymásutánjaként.*

Mivel a $\sum_{F \in \mathcal{F}} |F|$ értéknek van egy felső korlátja, és mivel minden felfele tolásnál legalább 1-gyel növekszik ez az összeg, ezért ezt a felfele tolást csak véges sokszor lehet megcsinálni.

Könnyen látható, hogy pontosan akkor nem tudunk több felfele tolás elvégezni, ha egy felfele zárt halmazrendszerünk van. (A felfele zárt halmazrendszert a 3.2.3-as pontban definiáltuk.)

5.1.2. Állítás. *Legyen $\mathcal{F}'$ a $\mathcal{F}$-nek egy felfele eltoltja. Ekkor ha minden A, B, $C \in \mathcal{F}$-re $d(A, B, C) \geq l$, akkor minden A', B', $C' \in \mathcal{F}'$ halmazra $d(A', B', C') \geq l$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy nem igaz az állítás. Ekkor tudunk venni olyan A', B', $C' \in \mathcal{F}'$ halmazokat venni, hogy $d(A', B', C') < l$. Most cseréljük le ezt a három halmazt $\mathcal{F}$-beli halmazokra. Ha A', B', vagy C' halmaz bármelyike is szerepel $\mathcal{F}$-ben, akkor azt hagyjuk helyben, ha pedig nem szerepel $\mathcal{F}$-ben, akkor tudunk venni egy olyan halmazt, ami tartalmazza azt, és benne van $\mathcal{F}$-ben. Így $\mathcal{F}$-ben is találtunk 3 olyan halmazt, amire $d(A, B, C) < l$. $\square$

5.1.3. Megjegyzés. *Az az állítás már nem igaz, hogy ha egy halmazrendszer esetén $d(A, B, C) \geq l$, akkor ha vesszük a felfele zárt kibővítését, akkor annál is $d(A', B', C') \geq l$. Egy jó ellenpélda az $l = \frac{n}{2}$ esetén, ha vesszük az üres halmazt, valamint a legalább $\frac{3n}{4}$ elemű halmazokat, mivel ennek a felfele* *zárt kibővítésében benne van az összes halmaz $2^{[n]}$-ból, ami nem felel meg a feltételnek.*

A fenti állításból következik, hogy ha veszünk egy olyan halmazrendszert, amiben a páronkénti metszetek összege legalább l és feltoljuk addig, hogy felfele zárt legyen, akkor a páronkénti metszetek összege továbbra is legalább l marad. Vagyis az optimális konstrukciót elég a felfele zárt halmazrendszerek közt keresni.

Ezenkívül az előző fejezetben beláttuk, hogy a balra tolás esetén is megmarad az l-metszés, azaz tudjuk venni a halmazrendszer balra tolást és továbbra is egy jó halmazrendszert kapunk.

A balra tolás után persze előfordulhat, hogy nem egy felfele zárt halmazrendszert kaptunk, így ismét megcsinálhatjuk a felfele tolás, amíg tudjuk. Majd ezután ismét vehetünk egy balra eltoltat és így tovább.

Viszont a $\sum_{F \in \mathcal{F}} |F|$ a balra tolás során nem csökken, így csak véges sok felfele tolást tudunk elvégezni, illetve bármely két felfele tolás közt is csak véges sok balra tolás hajtható végre, így egy idő után biztosan leáll a folyamat, és egy olyan felfele zárt halmazrendszer kapunk, ami szintenként balra zárt.

Vagyis akkor az optimális konstrukciót elég a felfele és balra zárt halmazrendszerek közt keresni.

5.2. Az $l = 3n - 6p$ esetek vizsgálata

Nézzük azokat az eseteket, amikor azt kívánjuk, hogy a páronkénti metszetek összege kellően nagy legyen. Vegyük azokat az eseteket, amikor az $l > 2n$, és az l felírható $3n - 6p$ alakban, ahol p egész érték.

Azt könnyű látni, hogy ha vesszük a legalább $n - p$ elemű halmazokat, akkor bármely három halmaz esetén $d(A, B, C) \geq 3n - 6p$. A sejtésem ezekkel az esetekkel kapcsolatban a következő:

5.2.1. Sejtés. *Legyen $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ úgy, hogy bármely három $\mathcal{F}$-beli halmazra $d(A, B, C) \geq 3n - 6p$. Ekkor a legtöbb halmaz akkor adható meg, ha a legalább $n - p$ elemű halmazokat választjuk ki.*

Ezt a sejtést csak abban az esetben tudom bizonyítani, ha az n elegendően nagy:

5.2.2. Tétel. *Legyen p pozitív egész és legyen $n \geq 2^{3p} \cdot p^2 + p + 1$. Ekkor ha $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ úgy, hogy bármely A, B, $C \in \mathcal{F}$-re $d(A, B, C) \geq 3n - 6p$, akkor*

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=n-p}^{n} \binom{n}{i}.$$

Ráadásul egyenlőség csak abban az esetben van, ha a legalább $n - p$ elemű halmazokat választjuk ki.

Bizonyítás. A bizonyításhoz ismét használni fogjuk az $f(A, B, C, m)$ függvényt, amit 4.1.2-es pontban definiáltunk.

Mivel $f(A, B, C, 3) + f(A, B, C, 2) + f(A, B, C, 1) + f(A, B, C, 0) = n$, és $d(A, B, C) = 3 \cdot f(A, B, C, 3) + f(A, B, C, 2)$, ezért $d(A, B, C) = 3 \cdot n - 2 \cdot f(A, B, C, 2) - 3 \cdot f(A, B, C, 1) - 3 \cdot f(A, B, C, 0)$. Most mi ezzel a második módszerrel fogunk számolni, vagyis azt akarjuk, hogy $2 \cdot f(A, B, C, 2) + 3 \cdot f(A, B, C, 1) + 3 \cdot f(A, B, C, 0) \leq 6p$, mégpedig úgy, hogy vesszük a halmazoknak a komplementerét, vagyis $2 \cdot f(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, 1) + 3 \cdot f(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, 2) + 3 \cdot f(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, 3) \leq 6p$

Látható, hogy a komplementer halmazok esetén azt akarjuk belátni, hogy a legfeljebb p elemű halmazok kiválasztása az optimális. A könnyebb követhetőség kedvéért fogalmazzuk át a kérdést a komplementer halmazokra, vagyis úgy szeretnék megadni minél több halmazt, hogy $2 \cdot f(A, B, C, 1) + 3 \cdot f(A, B, C, 2) + 3 \cdot f(A, B, C, 3) \leq 6p$.

Az látható, hogy a legfeljebb p elemű halmazok megfelelnek a feltételnek. Azt szeretnénk belátni, hogy másképp nem adható meg legalább ennyi halmaz, ha n elég nagy. Sőt ez még akkor is igaz, ha gyengítünk a feltételeken.

Ez a gyengébb feltétel pedig az, hogy $2 \cdot f(A, B, C, 1) + 2 \cdot f(A, B, C, 2) + 2 \cdot f(A, B, C, 3) \leq 6p$, vagyis $|A \cup B \cup C| \leq 3p$.

Lássuk be indirekten az állítást. Ahhoz, hogy megadhassunk legalább ennyi halmazt másképpen, kell legalább egy $p+1$ elemű halmaznak szerepelnie a halmazrendszerben. Legyen egy ilyen az A halmaz, és legyen $|A| = a$. Az könnyen látszik, hogy $p + 1 \leq a \leq 3p$.

Az eseteket bontsuk kétfelé:

1. eset: Nincs olyan halmaz, ami az A komplementeréből legalább p elemet tartalmazzon. Ekkor a maximálisan megadható halmazok száma $2^a \cdot \sum_{i=0}^{p-1} \binom{n-a}{i}$.

Ez felülről becsülhető így: $2^a \cdot \sum_{i=0}^{p-1} \binom{n-a}{i} < 2^{3p} \cdot p \cdot \binom{n}{p-1}$. Ezt összehasonlítva az $\binom{n}{p}$ értékkel, azt kapjuk, hogy ha $n \geq 2^{3p} \cdot p^2 + p + 1$, akkor az utóbbi lesz a nagyobb.

2. eset: Van olyan halmaz, ami az A komplementeréből legalább p elemet tartalmaz. Legyen ez a B halmaz, és legyen b azon elemek száma, ami szerepel B-ben, de A-ban nem. Azt tudjuk, hogy $p \leq b \leq 2p$. Ekkor minden további halmaz legfeljebb $p-1$ olyan elemet tartalmazhat, ami nincs benne $A \cup B$-ben. Ekkor a kiválasztható halmazok számának maximuma $2^{a+b} \cdot \sum_{i=0}^{p-1} \binom{n-a-b}{i}$.

A felső becslést most is használni tudjuk, vagyis $2^{a+b} \cdot \sum_{i=0}^{p-1} \binom{n-a-b}{i} < 2^{3p} \cdot p \cdot \binom{n}{p-1}$. Erről pedig már beláttuk, hogy kellően nagy n esetén kisebb lesz, mint a legfeljebb p elemű halmazok száma. Ezzel pedig beláttuk a tételt. $\square$

Hivatkozások

[1] R. Ahlswede, L. H. Khachatrian: The Complete Intersection Theorem for System of Finite Sets, Europ. J. Combinatorics 18(1997) 125-136.

[2] P. Erdős, Chao Ko, R. Rado, Intersection theorems for systems of finite sets, Quart. J. Math. Oxford (2) 12 (1961) 313-320.

[3] P. Frankl, (1978). The Erdős-Ko-Rado theorem is true for n=ckt, In Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976) (Vol. 1, pp. 365-375).

[4] P. Frankl, Z. Füredi, A new short proof of the EKR theorem, J. Comb. Theory, Ser. A 119(6) (2012) 1388-1390.

[5] G.O.H. Katona, Intersection theorems for systems of finite sets, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 15 (1964) 329-337.

[6] G.O.H. Katona, A simple proof of the Erdős-Chao Ko-Rado theorem, J. Combin. Theory Ser. B 13 (1972) 183-184.

[7] Daniel J. Kleitman, Maximal number of subsets of a finite set no k of which are pairwise disjoint, Journal of Combinatorial Theory 5, 157-163 (1968).

[8] Richard M. Wilson, The exact bound in the Erdős-Ko-Rado theorem, Combinatorica volume 4 (1984) 247–257. theorem

[9] Nem publikált eredmény