Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematikai Intézet

Hirzebruch-Jung szingularitások

Szakdolgozat

Készítette:

Schefler Gergő
Matematikus Mesterszak

Témavezető:

Némethi András, egyetemi tanár
Geometria Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Budapest
2021

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni Némethi András tanár úrnak a segítségét és türelmét, amivel eme szakdolgozat megírásakor felém fordult. Köszönöm neki a lelkesedését, amivel már a második félévtől kezdve tanított és a tanulásra ösztönzött minket. Köszönöm a rengeteg különórát, amit nekünk, nekem tartott, azt, hogy bármikor, bármilyen kérdéssel fordulhattunk felé, mindig jó kedéllyel válaszolt. Köszönöm neki a téma felvetését, hogy bevezetett a szingularitás elmélet világába és hogy végig támogatta előrehaladásomat.

A szakdolgozat elkészítéséhez szakmai és pénzügyi segítséget nyújtott a Márton Áron Szakkollégiumi Program, ezúton is köszönöm a támogatást.

Szeretném megköszönni a Kedvesemnek, családomnak és barátaimnak, hogy mellettem álltak eddigi tanulmányaim során, lelkileg és testileg támogattak, és szurkoltak, hogy elkészüljön ez a szakdolgozat.

Előszó

A szingularitáselmélet célja az algebrai vagy analitikus varietások szinguláris pontjainak vizsgálata, osztályozása. Egyszerre született a klasszikus algebrai geometriával, de idővel függetlenné vált tőle és az algebrai és komplex geometria egy külön ágazatává vált.

A kétdimenziós normál felület szingularitások egyik fontos osztályát képezik a Hirzebruch-Jung szingularitások. Ezek többféleképpen is megjelenhetnek, több ekvivalens definíciójuk is van, mint például: az $\{xy^{n-q} = z^n\} \subset \mathbb{C}^3$ alakú algebrai varietások normalizáltjai; az $\{uv = 0\}$ elágazási helyű $\mathbb{C}^2$ feletti analitikus fedésekhez tartozó fedőterek; vagy a lánc alakú rezolúciós gráffal rendelkező normál felület szingularitások. Ciklikus hányados szingularitásoknak is hívják őket, ugyanis a $\mathbb{C}^2$ komplex sík $\mathbb{Z}_n$ ciklikus csoportok szerinti algebrai faktoraiként is előállnak. Emellett a tórikus varietások elméletében is centrális szerepet töltenek be, minthogy pontosan ők a kétdimenziós szinguláris kúpokhoz tartozó tórikus szingularitások.

Jelen szakdolgozat ezen ekvivalens definíciók közötti átjárásokat mutatja be. Ennek megfelelően a szingularitás elmélet alapvető fogalmai (mint például a rezolúció vagy a csővezetés szerkesztés) is definiálásra kerülnek. Ezek főleg Némethi András "Normal surface singularities" című, még kiadás előtt álló, könyvének felépítését követik. A Hirzebruch-Jung szingularitások tulajdonságainak vizsgálatához kiemelt hangsúllyal foglalkozunk a tórikus varietások elméletével. Ez utóbbi részhez főleg Tadao Oda "Convex Bodies and Algebraic Geometry: An introduction to the theory of toric varieties" című könyve nyújtott támpontot. Emellett teljes részletességgel tárgyaljuk a szingularitás beágyazását a minimális jó rezolúciójához tartozó Lipman kúp által definiált tórikus varietásba.

Az első fejezet a normál felület szingularitások vizsgálatának alapvető eszközeit mutatja be. Itt kerül definiálásra a rezolúció és a rezolúciós gráf fogalma, a rezolúcióhoz tartozó rács és a Lipman kúp, valamint a szingularitás csomója.

A második fejezet a Hirzebruch-Jung szingularitások néhány ekvivalens definícióját mutatja be. Megtalálható benne a Hirzubruch-Jung lánctörtek definíciója és alapvető tulajdonságai, melyek segítségével az egész elmélet felépül. A fejezet végén röviden a lencse terekkel való szoros kapcsolat is bemutatásra kerül.

A harmadik fejezet a tórikus varietások elméletének bevezetése, és ezen keresztül a Hirzebruch-Jung szingularitások további tulajdonságainak feltárása. Ez a leghosszabb fejezet, ugyanis itt teljes általánosságban írjuk le a tórikus varietások analitikus struktúráját, a T_N algebrai hatás szerinti orbit felbontásukat, a nemszingularitás és kompaktság feltételeit stb. A fejezet elején rövid konvex geometriai bevezető szerepel, amelyben fel vannak sorolva a később szükséges állítások, tulajdonságok.

A negyedik fejezetben a Lipman kúp és az analitikus változatának kapcsolatát írjuk le Hirzebruch-Jung szingularitások esetében. A bevezető ismeretek tárgyalása után egy érdekes beágyazási tulajdonságot kapunk maga a ciklikus hányados és a Lipman kúpjához tartozó tórikus varietás között.

Az Appendixben a dolgozat folyamán számtalanszor használt tulajdonságait gyűjtöttük össze a normális algebrai varietásoknak és a normális analitikus halmazoknak.

A dolgozat olvasásához szükséges némi algebrai geometria, komplex sokaságok és kéveelméleti ismeret. A Cartier és Weil divizorok és a hozzájuk tartozó vonalnyalábok elmélete, valamint a kéve kohomológia elmélet alapvető tulajdonságai részletesebb bevezetés nélkül szerepelnek az állításokban és bizonyításokban.

1. Felület szingularitások rezolúciója

1.1. Alapvető definíciók

Először definiáljuk ezen szakdolgozat alapvető témáját jelentő komplex analitikus szingularitások csíráit.

1.1.1. Definíció. ***(Csírák).*** *Legyen X egy topologikus tér és o egy pontja. Legyen S és T két tetszőleges o-t tartalmazó részhalmaza az X-nek. Ők ugyanazt a csírát definiálják az o-ban, ha létezik az o-nak olyan U környezete, amelyre*

$$S \cap U = T \cap U \neq \emptyset.$$

*Nyilvánvaló, hogy az "ugyanazt a csírát definiálják o-ban" reláció egy ekvivalencia-reláció, az ekvivalenciaosztályokat hívjuk **halmazcsírá**knak (germ). Jelölése: (S, o).*

*Legyen most f és g két függvény az X-en úgy, hogy az f értelmezési tartománya egy S részhalmaz, a g értelmezési tartománya pedig egy T részhalmaz. Ők ugyanazt a csírát definiálják o-ban, ha S és T o-ban ekvivalens halmazcsírák (például $S \cap U = T \cap U \neq \emptyset$ valami $U \ni o$ környezetre) és $f|_{S\cap V} = g|_{T\cap V}$ valamely $o \in V \subset U$ kisebb környezetre. Ez továbbra is egy ekvivalenciareláció, melynek ekvivalenciaosztályait **függvénycsírá**knak nevezzük. Jelölése: f_o.*

Ha $f : X \to Y$ egy $o \in X$-beli függvénycsíra, mely o-t $y \in Y$-ba képezi, akkor őt így jelöljük:

$$f : (X, o) \to (Y, y)\,.$$

Ilyenkor az f alatt az egész ekvivalenciaosztályt értjük, ugyanazzal az f-el jelöljük az osztály bármely reprezentánsát.

1.1.2. Definíció. *Legyen M egy n-dimenziós komplex sokaság. Az $X \subset M$ részhalmazt **analitikus halmaz**nak nevezzük, ha minden $p \in M$ pont esetén létezik olyan $U \ni p$ környezet és olyan $f_1, ..., f_m \in \mathcal{O}(U)$ holomorf függvények, melyekre $X \cap U = \bigcap_{j=1}^m \{f_j = 0\} = \{x \in U \mid f_1(x) = ... = f_m(x) = 0\}$, ahol az m függhet a p-től. A konkrét $f_1, ..., f_m$ holomorf függvények helyett tekinthetjük az általuk generált $I \lhd \mathcal{O}(U)$ ideált, ekkor ugyanis minden $f \in I$-re $f\big|_{X\cap U} \equiv 0$, azaz az I ideál U-beli eltűnési helye megegyezik a függvények közös eltűnési helyével.*

Ekvivalens definíciót kapunk, ha az X-ről feltesszük, hogy zárt és az előbbi feltételt csak X pontjaiban követeljük meg.

1.1.3. Definíció. *Az előző definíció csírák nyelvére való átfogalmazása a következő: az $X \subset M$ analitikus halmaz, ha ő zárt és minden $p \in X$-re léteznek olyan $f_1, ..., f_m \in \mathcal{O}_p$ holomorf függvénycsírák, melyekre $(X, p) = \left(\bigcap_{j=1}^m \{f_j = 0\}, p\right) =$*

$(\{f_1 = ... = f_m = 0\}, p)$ csíra értelemben, ahol az m függhet a p-től. A konkrét $f_1, ...$ $..., f_m$ holomorf függvénycsírák helyett tekinthetjük az általuk generált $I \lhd \mathcal{O}_p$ ideált a lokális gyűrűben, ekkor ugyanis minden $f \in I$-re $f\big|_X \equiv 0$, tehát

$$(X, p) = (\{x \mid \ \forall f \in I : \ f(x) = 0\}, p) =^{jel} (V(I), p).$$

Mivel az $\mathcal{O}_p$ egy lokális Noether gyűrű, kapjuk, hogy minden ideál végesen generált, így minden $I \lhd \mathcal{O}_p$-re $(V(I), p)$ lehet analitikus halmaz csírája a p-ben.

1.1.4. Definíció. *Az X analitikus halmazon a holomorf függvények $\mathcal{O}_X$ kévéjét úgy kapjuk, hogy minden $p \in X$-re az $\mathcal{O}_p/I$ hányadosokat, mint csírákat összeragasztjuk. Ezzel adott U nyílt halmaz esetén $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}(U)/(f_1, ..., f_m)$-et kapunk, ahol az f_j-kre $X \cap U = \{x \in U \mid f_1(x) = ... = f_m(x) = 0\}$ teljesül.*

1.1.5. Definíció. *Az X analitikus halmazt* ***irreducibilis****nek nevezzük, ha nem állítható elő analitikus halmazok nemtriviális uniójaként.*

Az X analitikus halmazt ***redukált****nak (reduced) hívjuk, ha az őt lokálisan definiáló ideálok radikál ideálok.*

1.1.6. Definíció. *Legyen $X \subset M$ egy analitikus halmaz, ekkor az $o \in X$ pont*

- ***sima*** *vagy* ***reguláris****, ha létezik olyan $U \ni o$ nyílt halmaz az M-ben, amelyre $X \cap U$ komplex részsokaság (lásd a Jacobi kritériumot);*
- ***szinguláris****, ha nem sima.*

A szinguláris pontok halmazát $\Sigma(X)$-el jelöljük. Az X analitikus halmaz ***dimenzió****ja az $X \setminus \Sigma(X)$ komplex sokaság dimenziója.*

Ismeretesek a szinguláris halmaz alábbi tulajdonságai (lásd (Huybrechts, 2005)):

1.1.7. Tétel. *Ha $X \subset M$ egy analitikus halmaz, akkor a $\Sigma(X)$ sehol sem sűrű zárt halmaz az X-ben. Sőt, a $\Sigma(X)$ szintén analitikus halmaz az M-ben.*

1.1.8. Megjegyzés. ***(Jacobi kritérium).*** *Az Implicit Függvény Tétel segítségével a sima és szinguláris pontokat lokálisan a következőképpen is definiálhatnánk: ha az X egy analitikus halmaz és $U \subset M$ egy olyan nyílt halmaz, melyre*

$$X \cap U = \{x \in U \mid f_1(x) = ... = f_m(x) = 0\},$$

valamilyen $f_j \in \mathcal{O}(U)$ holomorf függvényekre, akkor tekinthetjük $\forall x \in X \cap U$-ra a $\partial_i f_j(x)$ parciális deriváltakból álló mátrixot. Ennek a rangja egy analitikus halmaz kivételével mindenhol a maximumát veszi fel, a maximális rangú pontokban ő valóban egy $(n - rang)$-dimenziós komplex részsokaságot határoz meg, a többi pontban pedig *szinguláris. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a definíció nem függ a konkrét f_i polinomoktól, csak az általuk generált I ideáltól. Mivel a $\Sigma(X)$ is analitikus halmaz, így dimenzióját és kodimenzióját is tudjuk definiálni. Ez utóbbi megegyezik azzal, amennyit generikusan esik a rang a szinguláris pontok felett.*

1.1.9. Definíció. *Ha az X egy analitikus halmaz és $o \in X$ pedig egy szinguláris pontja, akkor azt mondjuk, hogy az o egy **izolált szingularitás**a az X-nek, ha létezik olyan $U \ni o$ környezete, melyben nincsen más szinguláris pont, azaz a szinguláris pontok halmazával vett metszet $U \cap \Sigma(X) = \{o\}$.*

A szingularitás rezolúciójának definíciójához szükség van a következő fogalomra:

1.1.10. Definíció. *Legyenek A és B topologikus terek, $f : A \to B$ folytonos leképezés. Az f-et akkor nevezzük **valódi**nak (propernek), ha minden B-beli kompakt halmaz f szerinti őse kompakt.*

1.1.11. Definíció. *Tekintsük egy komplex analitikus halmaz (X, o) csíráját; a szinguláris pontok csírája legyen $(\Sigma(X), o)$.*

Legyen $\phi : \tilde{X} \to X$ egy valódi analitikus leképezés, amelyre $\tilde{X}$ normális (lásd Appendix) és X egy megfelelően kicsi reprezentánsa az (X, o)-nak. Jelöljük E-vel a $\phi^{-1}(\Sigma(X))$ őshalmazt.

*Azt mondjuk, hogy ϕ egy **lokális parciális rezolúció**ja az (X, o)-nak, ha $\tilde{X} \setminus E$ sűrű az $\tilde{X}$-ban és $\phi\big|_{\phi^{-1}(X \setminus A)}$ izomorfizmus egy $A \subset X$ analitikus halmaz komplementere felett, melyre $\Sigma(X) \subset A$, de A nem tartalmazza X egyetlen irreducibilis komponensét sem.*

*Ha most $\phi_i : \tilde{X}_i \to X$, $i = 1, 2$ két lokális parciális rezolúciója az (X, o)-nak, azt mondjuk, hogy a ϕ_1 **dominál**ja a ϕ_2-t, ha megfelelő reprezentánsokat választva létezik egy $\psi : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ analitikus leképezés, melyre $\phi_2 \circ \psi = \phi_1$.*

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\phi_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "\phi_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

*Egy lokális parciális rezolúciót **lokális rezolúció**nak nevezünk, ha $\tilde{X}$ sima analitikus halmaz.*

*A ϕ rezolúció **erős**, ha a $\phi\big|_{\phi^{-1}(X \setminus \Sigma(X))} : \phi^{-1}(X \setminus \Sigma(X)) \to X \setminus \Sigma(X)$ izomorfizmus (azaz az előző A analitikus halmaz választható $\Sigma(X)$-nek) és $\phi^{-1}(\Sigma(X))$ normál metszet divizor $\tilde{X}$-ban.*

*Egy erős rezolúciót **jó**nak nevezünk, ha a $\phi^{-1}(\Sigma(X))$ minden irreducubilis komponense sima (azaz nincsenek önmetszései).*

*Egy rezolúció akkor **minimális**, ha ő nem dominál (ψ nem izomorfizmussal) semmilyen más rezolúciót. Hasonlóan definiálható a minimális erős és a minimális jó rezolúció is.*

1.1.12. Definíció. *Legyen X egy komplex analitikus halmaz $\Sigma(X)$ szinguláris pontokkal. Egy $\phi : \tilde{X} \to X$ valódi analitikus leképezés egy **rezolúció**, hogyha minden $o \in \Sigma(X)$ pontban egy megfelelő megszorítás az (X, o) csíra lokális rezolúciója.*

1.1.13. Példa. *Az $n : \hat{X} \to X$ normalizálás egy parciális rezolúció. Ebben az esetben az n véges leképezés, speciálisan, $n^{-1}(0)$ egy véges halmaz: $\{\hat{o}_i\}_i$. Ha az (X, o) egydimenziós, akkor a normalizáció egy jó rezolúció. Ha az (X, o) kétdimenziós, akkor minden $(\hat{X}, \hat{o}_i)$ normális, így irreducibilis izolált szingularitás.*

A normalizálás univerzális tulajdonsága miatt minden rezolúció dominálja a normalizáltat, így minden rezolúciós eljárás kezdődhet a normalizálással, ami után már csak normál szingularitások csíráival kell foglalkozni. (A normalizálás tulajdonságai megtalálhatóak az Appendixben)

1.1.14. Megjegyzés. *(Grauert & Remmert, 1955). Ha a $\phi : \tilde{X} \to X$ egy parciális rezolúció és az X normális, akkor a minimális $A \subset X$ analitikus halmazra, melyre a ϕ izomorfizmus az $X \setminus A$ felett, teljesül, hogy $codim(A) \geq 2$.*

1.1.15. Példa. ***(Egy pont felfújása).*** *Legyen $(X, o) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ egy izolált szingularitás csírája: $\Sigma(X) = \{o\}$. Jelölje $\mathbb{CP}^{n-1}$ a szokásos módon a 0-t tartalmazó $l \subset \mathbb{C}^n$ egyenesek paraméterterét. Legyen*

$$B := \{(x, l) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{CP}^{n-1} \mid x \in l\}$$

egy incidencia sokaság és $\phi' : B \to \mathbb{C}^n$, $\phi'(x, l) = x$ holomorf leképezés. Ekkor őt nevezzük a $\mathbb{C}^n$ tér 0 pontbeli felfújásának (blow up), mivel ő egy rezolúciója a $\mathbb{C}^n$-nek és izomorfizmus a $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$-n.

Tekintsük most az $\{(x, l) \in X \times \mathbb{CP}^{n-1} \mid x \in l,\ x \neq o\}$ halmazt és legyen $\tilde{X}$ az ő lezártja a B-ben. Ezt az $\tilde{X}$-ot nevezzük az X szigorú transzformáltjának (strict transform-jának) a ϕ' mentén. A ϕ' által indukált $\phi : \tilde{X} \to X$ leképezést hívjuk az X analitikus halmaz o-beli felfújásának. Ha az (X, o) sima, akkor $\phi^{-1}(o)$ izomorf $\mathbb{CP}^{dim(X)-1}$-el, általában pedig $\phi^{-1}(o)$ az X redukált projektivizált érintőtere az $o \in X$-ben. (lásd például a (Shafarevich, 2013) könyvben)

1.1.16. Állítás. *Tegyük fel, hogy (X, o) egy normál felület szingularitás csírája és rögzítsünk egy $\phi : \tilde{X} \to X$ lokális parciális rezolúciót, mely nem egy izomorfizmus. Ekkor ϕ izomorfizmus az $X \setminus \{o\}$ fölött.*

Bizonyítás. A normalitás tulajdonságaiból (lásd Appendix) következik, hogy a $\Sigma(X)$ kodimenziója legalább 2, így felület szingularitás esetben (azaz $dim_{\mathbb{C}}(X \setminus \Sigma(X)) = 2$ esetben) az $o \in X$ izolált szingularitás. A 1.1.14 megjegyzés alapján következik az állítás. $\square$

1.1.17. Tétel. ***(Zariski Fő Tétele).****(Az algebrai esetet lásd (Hartshorne, 1997), az analitikus esethez (Grauert & Remmert, 2012).) Ekkor az $E = \phi^{-1}(o)$ összefüggő, kompakt és komplex dimenziója* 1.

1.1.18. Definíció. *Legyen (X, o) egy normál felület szingularitás és ϕ egy parciális rezolúció.*

1. *Az E redukált analitikus görbét a ϕ* ***kivételes halmaz****ának (****görbé****jének - exceptional curve) nevezzük. Az E irreducibilis komponenseit E_v-kel jelöljük ($1 \leq v \leq s$), $g_v = g(E_v)$ jelöli a génuszukat (a normalizáltjuk génuszát, lásd Appendix).*

2. *Amennyiben ϕ egy lokális rezolúció, az I metszési mátrix az $\tilde{X}$-beli (E_v, E_w) metszési számokból áll ($I_{v,w} = (E_v, E_w)$). A homologikus metszési szám tulajdonságaiból és a komplex irányításokból kapjuk, hogy az I mátrix szimmetrikus. Továbbá, ha az $f : (X, o) \to (\mathbb{C}, 0)$ egy holomorf függvénycsíra, a $div(f \circ \phi)$ divizor felbomlik a $div_E(f \circ \phi) + S(f \circ \phi)$ összegre az $\tilde{X}$-on (rövidítve $div_E(f) + S(f)$), ahol $div_E(f)$ tartója az E, míg $S(f)$ az f divizorának a szigorú transzformáltja. (Ez azt jelenti, hogy az $S(f)$ tartója a $\phi^{-1}(\{f = 0\} \setminus \{o\})$ lezártja. Az $S(f)$ irreducibilis komponensei nem kompaktak.)*

1.1.19. Megjegyzés.

1. *Legyen az $\tilde{f} : \tilde{X} \to \mathbb{C}$ holomorf függvény úgy, hogy $\tilde{f}\big|_E$ konstans; ekkor létezik egy $f : X \to \mathbb{C}$ folytonos és korlátos leképezés, amely holomorf az $X \setminus \{o\}$-n és $\tilde{f} = f \circ \phi$. Ha most az (X, o) normális, akkor ez az f automatikusan holomorf (lásd Appendix).*

2. *Ha az (X, o) normális, akkor az $X \setminus \{o\}$ sima. Bár a rezolúció definíciójában az X egy nyílt reprezentáns, a topologikus érvelésekben feltehető, hogy az X kicsi környezete az o-nak, mely kontrahálható az $o \in X$ pontra és zárt, kompakt, C^∞ határral (lásd az 1.3.1 Tételt). Ennek következtében az $\tilde{X}$ homotóp ekvivalens az E-vel és szintén C^∞ határral rendelkezik.*

1.1.20. Tétel. ***(Du Val Tétel).*** *Legyen (X, o) egy normál felület szingularitás és ϕ egy lokális rezolúciója. Ekkor a ϕ-hez tartozó I metszési mátrix negatív definit.*

Bizonyítás. Vegyünk egy $f : (X, o) \to (\mathbb{C}, 0)$ holomorf függvényt. Az 1.1.26 Lemma szerint a $D := div_E(f)$ divizorra teljesül, hogy $(D, E_v) \leq 0$ minden v-re és legalább egyre $(D, E_v) < 0$. Mivel az E_v irreducibilis görbék multiplicitása a D-ben az $f \circ \phi$ eltűnési rendjei, így a D effektív divizor és a tartója $|D| = E$.

Azt szeretnénk belátni, hogy ha $Z = \sum_v r_v E_v$, $(r_v \in \mathbb{Z})$ és $Z^2 \geq 0$, akkor a Z automatikusan a 0 divizor kell legyen. Mivel $\forall v: \ r_v \in \mathbb{Q}$ esetben is tudunk metszési számot számolni, így foglalkozhatunk ezzel az általánosabb esettel. Ehhez írjuk fel a Z-t diszjunkt tartójú effektív divizorok $Z_1 - Z_2$ különbségeként. Ekkor $0 \leq Z^2 = Z_1^2 + Z_2^2 - 2(Z_1, Z_2) \leq Z_1^2 + Z_2^2$. Tehát elég belátni az állítást a Z_v-kre külön-külön, azaz feltehető, hogy a Z effektív. Ha most a $|Z|$ tartó kisebb az E-nél, akkor szorítsuk meg erre a D-t. Vegyük észre, hogy a megszorított D'-re és az $E_v \subset |Z|$ görbékre továbbra is teljesül, hogy $(D, E_v) \leq 0$ és van köztük olyan, amire $(D, E_v) < 0$, ugyanis a megszorítás során az ezen E_v-kel vett metszési szám csak csökkent. Legyen most $a \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ a legnagyobb olyan szám, amire $aD' \leq Z$ divizor értelemben. Ekkor $Z' := Z - aD'$ effektív és a tartója szigorúan kisebb, mint $|Z|$. Sőt, $Z'^2 = (Z - aD', Z') \geq (Z, Z') = (Z, Z - aD') \geq Z^2 \geq 0$. A tartó mérete szerinti indukcióból kapjuk, hogy $Z' = 0$, így $Z = aD'$. De a D'-re vonatkozó tulajdonságokból következik, hogy $D'^2 < 0$, így $a = 0$ és $Z = 0$. $\square$

1.1.1. Egy rezolúcióhoz tartozó rács

Legyen (X, o) egy komplex normál felület szingularitás és $\phi : \tilde{X} \to X$ egy jó lokális rezolúciója. Most feltesszük, hogy az X megfelelően kicsi és pontrahúzható. Az 1.1.19 Megjegyzés *2.* pontja alapján $\tilde{X}$ homotóp ekvivalens az E-vel.

1.1.21. Definíció. *Legyen $L := H_2(\tilde{X}, \mathbb{Z}) = H_2(E, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\langle E_v \rangle_v$ szabad Abel-csoport, ahol az E_v-k fundamentális homológia osztályát is egyszerűen E_v-vel jelöljük. Ekkor az L egy rács az I metszési formával. Hasonlóan $L' := H_2(\tilde{X}, \partial\tilde{X}, \mathbb{Z})$, ami a kompakt peremes sokaságokra vonatkozó Poincaré dualitás miatt pont az L duálisa. Ez a dualitás pont a metszési formán keresztül valósul meg. Ezen metszési forma segítségével könnyen láthatjuk, hogy L'-nek egy bázisát kapjuk, ha minden v-re vesszük egy olyan D_v körlap relatív homológia osztályát, mely az E_v-t egy generikus pontjában metszi és transzverzális rá. Vegyük észre, hogy ekkor az $(\tilde{X} \hookrightarrow (\tilde{X}, \partial\tilde{X}))$ beágyazás által a homológiákon indukált $L \to L'$ leképezés mátrixa az $\{E_v\}$ és $\{D_v\}$ bázisokban pont az I metszési mátrix:*

$$(-, E_v) = \left(-, \sum_w (E_v, E_w)\, D_w\right), \ \textit{mert} \ (E_v, D_w) = \delta_{v,w} \ \textit{minden} \ v, w\textit{-re},$$

ugyanis az X reprezentáns megfelelően kicsi választása esetén a D_w-k is választhatóak az E_v-től $(v \neq w)$ diszjunktaknak. Mivel az I mátrix a Du Val Tétel alapján nemdegenerált, az $L \to L'$ leképezés injektív. Jelölje H az L'/L faktorcsoportot. Ekkor nyilván ezen csoport elemszáma: $|H| = |coker\,(I)\,| = |det\,(I)\,|$.

1.1.22. Megjegyzés. *Láttuk, hogy $L' = Hom\,(L,\mathbb{Z})$. Terjesszük most ki az I metszési formát az $L\otimes\mathbb{Q}$ tenzorszorzatra. Ekkor a $Hom\,(L,\mathbb{Z})$ elemei azonosíthatók olyan $l'\in L\otimes\mathbb{Q}$ elemekkel, melyekre $(l,l')\in\mathbb{Z}$ minden $l\in L$-re. A továbbiakban így gondolunk az L'-re, mint az $L\otimes\mathbb{Q}$ részrácsára, mely nyilván tartalmazza az L-et és el van látva az I metszési formával.*

1.1.23. Definíció.

- *Az $l'=\sum_v r_vE_v\in L'$, $r_v\in\mathbb{Q}$ osztályt* ***effektív osztály****nak nevezzük, ha $r_v\geq 0$ minden v-re. Az effektív osztályok halmazát jelölje*

$$L'_{\geq 0}=\{l'\in L' \mid l'=\sum_v r_vE_v,\ r_v\in\mathbb{Q}_{\geq 0}\}.$$

- *Az L-beli effektív osztályokat jelölje $L_{\geq 0}=L'_{\geq 0}\cap L$.*
- *Az $L\otimes\mathbb{Q}$-n megadhatunk egy, az $\{E_v\}_v$ bázishoz rendelt természetes részben rendezést: $l_1\geq l_2$, ha l_1-l_2 effektív.*
- *$l_1>l_2$, ha $l_1\geq l_2$ és $l_1\neq l_2$.*
- *$min\{l_1,l_2\}$ jelölje azon legnagyobb l ciklust, melyre $l\leq l_1,l_2$. Azaz, ha $i=1,2$-re $l_i=\sum_v r_{i,v}E_v$, akkor $min\{l_1,l_2\}=\sum_v min\{r_{1,v},r_{2,v}\}E_v$.*
- *Ha $l'=\sum_v r_vE_v$ egy racionális ciklus, a tartója $|l'|=\cup_{v:\ r_v\neq 0}E_v$.*

Elnevezés. *A továbbiakban lecseréljük a $[D_v]\in H_2(\tilde{X},\partial\tilde{X},\mathbb{Z})$ osztályokat az ellentetteikre, melyeket az L' duális rácsként való értelmezése mentén E_v^*-al jelölünk. Tehát $E_v^*\in L'\otimes\mathbb{Q}$, melyre $(E_v^*,E_w)=-\delta_{v,w}$ minden v,w-re.*

1.1.24. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy az $(E_v,E_w^*)=-\delta_{v,w}$ azonosságok mátrixos formában is leírhatóak az $\{E_v\}_v$ bázisban a következőképpen:*

$$(Id)\,(I)\,(I')=-Id,$$

ahol I a metszési mátrix és I' az E_w^* vektorok $\{E_v\}_v$ bázisbeli koordinátáiból, mint oszlopokból álló mátrix. Így nyilván $I'=-I^{-1}$ és $(I^{-1})_{v,w}=(E_v^*,E_w^*)$.

1.1.25. Definíció. ***(A rezolúcióhoz tartozó Lipman kúp).*** *Jelölje $\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}$ a következő racionális kúpot: $\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}:=\{l'\in L\otimes\mathbb{Q} : (l',E_v)\leq 0$ minden v-re $\}$. $\mathcal{S}':=\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}\cap L'$ és $\mathcal{S}:=\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}\cap L$.*

Ekkor $\mathcal{S}'$-t a $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ fölött nyilván az E_v^*-ok generálják.

1.1.26. Lemma. *Legyen $f:(X,o)\to(\mathbb{C},0)$ egy holomorf függvénycsíra, $\phi:\tilde{X}\to X$ pedig egy jó rezolúciója az (X,o)-nak. Ekkor $div_E(f)\in\mathcal{S}\setminus\{O\}$.*

Bizonyítás. Jelölje $D := div_E(f)$. Ekkor a $D + S(f)$ totális divizor egy principális divizor (avagy az ő homológia osztálya nulla a $H_2(\tilde{X}, \partial\tilde{X}, \mathbb{Z})$-ben, ugyanis homológ az $f - \varepsilon$ divizorával elég kicsi $\varepsilon \in \mathbb{C}$-re), így $(D + S(f), E_v) = 0$ minden v-re. A komplex irányítások miatt az $S(f)$ és az E_v-k a metszési száma nemnegatív, így $(S(f), E_v) \geq 0$ minden v-re és legalább egy v esetén az egyenlőtlenség szigorú (mivel az $S(f)$ metszi az E-t). Így kapjuk, hogy $(D, E_v) \leq 0$ minden v-re és $(D, E_v) < 0$ legalább egy v-re. □

Vegyük észre, hogy a $div_E(f) = \sum_v m_v E_v$ divizor esetében az m_v koordináta automatikusan pozitív. A következő állítás alapján ez minden $\mathcal{S}'$-beli elemre is igaz (lényegében ez motiválja a D_v-ről az E_v^*-okra való áttérést).

1.1.27. Állítás. *Legyen $l' = \sum_v r_v E_v$, $r_v \in \mathbb{Q}$, $l' \neq O$ és $l' \in \mathcal{S}'$. Ekkor $r_v > 0$ minden v-re. Speciálisan az E_v^* koordinátái is szigorúan pozitívak az $\{E_v\}_v$ bázisban.*

Bizonyítás. Az l' felírható $l'_1 - l'_2$ alakban, ahol l'_1 és l'_2 effektívek és az $|l'_1|$ és $|l'_2|$ tartóikban nincsen közös E_v komponens. Legyen $l'_2 = \sum_v q_v E_v$, $q_v \geq 0$, és rögzítsünk egy $E_v \in |l'_2|$-t. Ekkor

$$(l'_1, E_v) - (l'_2, E_v) = (l', E_v) \leq 0 \;\Rightarrow (l'_2, E_v) \geq (l'_1, E_v)$$

és $(l'_1, E_v) \geq 0$, mert $E_v \notin |l'_1|$, így kapjuk, hogy $(l'_2, E_v) \geq 0$. Ez minden $E_v \in |l'_2|$-re igaz, mivel $\forall v:\; q_v \geq 0$, ezért kapjuk: $(l'_2, l'_2) = (l'_2, \sum_v q_v E_v) = \sum_v r_v\, (l'_2, E_v) \geq 0$. De az I negatív definit, így $l'_2 = 0$, tehát $l' \geq 0$.

A Zariski Tétel értelmében az E összefüggő, így $|l'| = E$ kell teljesüljön, különben lenne olyan v szomszédja $|l'|$-nek, amire $(l', E_v) > 0$. □

1.1.28. Következmény. ***(Gordan Lemma).*** *$\mathcal{S}$ és $\mathcal{S}'$ végesen generált monoidok.*

Bizonyítás. Teljesen hasonlóan, mint a 3.2.9 Tétel *2.* részénél. □

1.2. Rezolúciós gráf

1.2.1. Tétel. *Legyen (X, o) egy normál felület szingularitás csírája. Ekkor a következők teljesülnek.*

1. *Létezik jó lokális rezolúció.*
2. *Létezik egy egyértelmű minimális lokális rezolúció és egy egyértelmű minimális jó (vagy minimális erős) lokális rezolúció.*
3. *Egy lokális rezolúció minimális akkor és csakis akkor, ha egyik E_v görbe sem egy (-1)-es görbe (azaz egyik E_v sem lehet (-1)-es önmetszésű $\mathbb{CP}^1$).*

4. Egy jó lokális rezolúció minimális jó akkor és csakis akkor, ha egyik E_v görbe sem (-1)-es úgy, hogy $(E - E_v, E_v) \leq 2$ (azaz minden (-1)-es görbe legalább három másik komponenst metsz).

Bizonyítás. Lásd a (Némethi, 202?) könyv 2.4-es fejezetét, vagy a (Laufer, 1971) könyvet. □

1.2.2. Definíció. ***(Beágyazott rezolúció).*** *Rögzítsünk egy (X, o) csírát és rajta egy $(D, o) \subset (X, o)$ lokális Weil divizort.*

A $\phi : \tilde{X} \to X$ erős rezolúciót az $(\mathbf{X}, \mathbf{D})$ ***pár beágyazott rezolúciójának*** *hívjuk, ha a $\phi^{-1}(D)$ redukált őskép egy normál metszet divizor az $\tilde{X}$-ban.*

A beágyazott rezolúció ***jó****, ha $\phi^{-1}(D)$ minden irreducibilis komponense (a redukált struktúrával ellátva) sima.*

1.2.3. Tétel. *Ha $(X, o) \approx (\mathbb{C}^2, 0)$ egy sima csíra, azaz a $(D, o) \subset (X, o)$ egy* ***síkgörbe szingularitás****, akkor létezik a $\phi : \tilde{X} \to X$ beágyazott rezolúciója az (X, D) párnak.*

Bizonyítás. A beágyazott rezolúció felfújások (1.1.15 Példa) iterációjával érhető el, lásd (Hartshorne, 1997). □

1.2.4. Következmény. *Ha (X, o) egy kétdimenziós analitikus halmazcsíra és (D, o) egy lokális Weil divizor, akkor létezik az (X, D) pár beágyazott rezolúciója.*

Bizonyítás. Az 1.2.1 Tétel szerint az X feloldható egy $\phi : \tilde{X} \to X$ rezolúcióval. Az $(\tilde{X}, \phi^{-1}(D))$ párban tehát az $\tilde{X}$ már sima, így a $\phi^{-1}(D)$ síkgörbe szingularitásaira alkalmazható az 1.2.3 Tétel. □

1.2.5. Megjegyzés. *Az 1.2.1 Tétel szerint megszerkeszthető az (X, D) pár minimális jó beágyazott rezolúciója is. Ebben az esetben a ϕ akkor és csakis akkor minimális jó beágyazott rezolúció, ha nincs olyan E_v sima irreducibilis kivételes görbe, melyre $g(E_v) = 0$, $E_v^2 = -1$ és $(\phi^{-1}(D) - E_v, E_v) \leq 2$, ahol $\phi^{-1}(D)$ a redukált halmazelméleti őskép (azaz a visszahúzott divizorban az E_v-nek legfeljebb két szomszédja van).*

1.2.1. A beágyazott rezolúciós gráf

Legyen (X, o) egy normál felület szingularitás és $f : (X, o) \to (\mathbb{C}, 0)$ egy holomorf függvénycsíra. $(V(f), o)$ jelöli az $(\{f = 0\}, o)$ csírát (redukált struktúrával). Legyen $\phi : \tilde{X} \to X$ egy jó beágyazott rezolúciója az $(X, V(f))$ párnak. Jelölje E a kivételes görbét, irreducibilis komponenseit $\{E_w\}_{w \in \mathcal{W}}$. Legyenek a redukált $S(f)$ szigorú transzformált irreducibilis komponensei az $\{S_a\}_{a \in \mathcal{A}}$-k.

1.2.6. Definíció. ***(A ϕ rezolúcióhoz rendelt $\Gamma(X,f)$ duális beágyazott rezolúciós gráf).*** *A $\Gamma(X,f)$ gráf csúcsainak halmaza a $\mathcal{V} = \mathcal{W} \sqcup \mathcal{A}$, ahol a $\mathcal{W}$ elemei a* ***nem nyílhegy csúcsok*** *(nonarrowhead), amik az irreducibilis kivételes komponensekhez tartoznak, míg $\mathcal{A}$ elemei a* ***nyílhegy csúcsok*** *(arrowhead), melyek a szigorú transzformált tartójának irreducibilis komponenseihez tartoznak. Ha a $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ csúcsokhoz tartozó irreducibilis divizoroknak k darab metszéspontjuk van, akkor a v_1 és v_2 csúcsokat k darab éllel kötjük össze $\Gamma(X,f)$-ben.*

A gráf csúcsait a következőképpen dekoráljuk. Minden $w \in \mathcal{W}$ csúcsra ráírjuk az $e_w = E_w^2$ önmetszési számot (Euler számot) és a g_w génuszát az E_w irreducibilis komponensnek (a génuszt szögletes zárójelbe téve). Emellett minden $v \in \mathcal{V}$ esetén, további dekorációként (díszítésként), az f függvény m_v multiplicitását is odaírjuk (kerek zárójelben), ahol m_v az $f \circ \phi$ függvény a v csúcshoz tartozó irreducibilis komponens menti eltűnésének rendje.

Az így kapott $\Gamma(X,f)$ gráfot nevezzük az (X,f) pár (duális) beágyazott rezolúciós gráfjának.

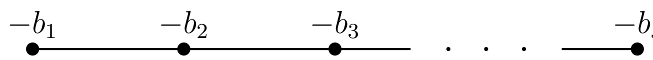
Jelölés. *Ha a $g_w = 0$, a $[g_w]$-t jellemzően elhagyjuk a dekorációból.*

Egy $w \in \mathcal{W}$ csúcs esetén jelölje $\mathcal{V}_w$ azon $v \in \mathcal{V}$ csúcsok halmazát, melyek éllel vannak a w-hez kötve, azaz w szomszédait. A szomszédok $|\mathcal{V}_w|$ számát jelölje κ_w.

1.2.7. Definíció. ***(Az (X,o) felület szingularitás Γ_X rezolúciós gráfja).*** *Az (X,o) csírából kiindulva, anélkül, hogy bármilyen függvényt vennénk fel rajta, tetszőleges ϕ jó rezolúció hasonló módon megadja az (X,o)-hoz rendelt Γ_X duális rezolúciós gráfot. Ebben az esetben nyilván $\mathcal{A} = \emptyset$ és minden $w \in \mathcal{W}$-nek két dekorációja van: e_w és $[g_w]$.*

A $\Gamma(X,f)$ beágyazott rezolúciós gráfból úgy kaphatjuk meg a Γ_X gráfot, hogy letöröljük a nyílhegy csúcsokat és a hozzájuk kapcsolódó éleket, és minden multiplicitást.

Elnevezés. *A gráf egy olyan csúcsát, melynek pozitív a génusz dekorációja vagy legalább három él indul belőle* ***csomópont****nak vagy* ***elágazási pont****nak (node) nevezzük. Egy "lineáris" (rész)gráfot:*



,

melynek génusz-dekorációi mind 0-k, ***lánc****nak nevezünk.*

Vegyük észre, hogy az I metszési mátrix leolvasható a dekorált gráfból, és vissza: az I mátrixból rekonstruálható a Γ_X rezolúciós gráf a g_w génuszok kivételével.

1.2.8. Definíció. *Ha Γ egy olyan gráf, melynek I metszési mátrixa negatív definit, akkor a Γ determinánsát* $\det(\Gamma) := det(-I)$*-ként definiáljuk. Konvenció szerint az üres gráf determinánsa* 1.

1.2.2. A rezolúciós gráf egyszerű tulajdonságai

1. A Γ_X és $\Gamma(X, f)$ gráfok összefüggőek Zariski Fő Tétele miatt.

2. Lévén, hogy a rezolúció nem egyértelmű, a Γ_X és $\Gamma(X, f)$ gráfok is függnek a ϕ választásától. Az 1.2.1 Tétel alapján belátható, hogy a különböző rezolúciókhoz tartozó duális gráfok (-1)-es görbék fel- és lefújásával köthetőek össze. (Lásd: csővezeték kalkulus (Neumann, 1981))

3. Legyen I a ϕ rezolúcióhoz rendelt metszési mátrix. Mivel a

$$div(f \circ \phi) = \sum_{v \in \mathcal{W}} m_v E_v + \sum_{a \in \mathcal{A}} m_a S_a$$

egy principális divizor, ezért a metszete bármely E_w-vel 0. Azaz

$$\sum_{v \in \mathcal{W}} m_v I_{v,w} + \sum_{a \in \mathcal{A} \cap \mathcal{V}_w} m_a = 0, \ \forall w \in \mathcal{W}.$$

Mivel az I metszési mátrix nemdegenerált, így az $\{m_v\}_{v \in \mathcal{W}}$ multiplicitások visszaszámolhatóak az I-ből és az $\{m_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ multiplicitásokból. Sőt, mivel minden $w \in \mathcal{W}$-re $m_w > 0$, az $\{m_v\}_{v \in \mathcal{V}}$ multiplicitások meghatározzák az $\{e_w\}_{w \in \mathcal{W}}$ Euler számokat. Ez azért hasznos, mert a multiplicitások mindig meghatározhatóak lokális számolással ellentétben az Euler számmal, ami egy globális karakterisztikus osztály.

4. Az 1.1.24 Megjegyzés és az 1.1.27 Állítás következményeként kapjuk, hogy az I^{-1} inverz mátrix elemei szigorúan negatívak. Ebből rögtön következik, hogy ha egy $D = \sum_{v \in \mathcal{W}} m_v E_v + \sum_{a \in \mathcal{A}} m_a S_a$ (racionális) divizorra $(D, E_w) = 0$ minden $w \in \mathcal{W}$-re, és $m_a > 0$ minden $a \in \mathcal{A} \neq \emptyset$-ra, akkor $m_v > 0$ is teljesül minden $v \in \mathcal{W}$-re:

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_v \\ \dots \end{pmatrix} = \left(I^{-1}\right)(I) \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_v \\ \dots \end{pmatrix} = \left(I^{-1}\right) \begin{pmatrix} -\sum_{a \in \mathcal{A} \cap \mathcal{V}_1} m_a \\ -\sum_{a \in \mathcal{A} \cap \mathcal{V}_2} m_a \\ \dots \\ -\sum_{a \in \mathcal{A} \cap \mathcal{V}_v} m_a \\ \dots \end{pmatrix}.$$

5. Legyen most a Γ_X egy fa. Ekkor bármely $v, w \in \mathcal{W}$ pár esetén jelölje $\Gamma_{v,w}$ azt a részgráfot, amit úgy kapunk a Γ_X-ből, hogy kitöröljük belőle a v-t w-vel

összekötő "legrövidebb utat". Ekkor a $\Gamma_{v,w}$ determinánsát megkaphatjuk úgy, hogy a $det\,(\Gamma_X)$-et megszorozzuk a $(-I^{-1})_{v,w}$ elemmel.

Ennek belátásához feltehető, hogy a v-t w-vel összekötő "legrövidebb út" a $v, v+1, ..., w-1, w$. Mivel a Γ_X egy fa, minden $u \in \mathcal{W}$ csúcs legfeljebb egy $\mathcal{U}_{v,w} := \{v, v+1, ..., w-1, w\}$-beli csúccsal köthető össze csak a "legrövidebb úton" kívüli éleket felhasználva. Jelölje minden $u \in \mathcal{U}_{v,w}$ esetén $\mathcal{W}_u$ az u-hoz a "legrövidebb úton" kívüli éleket felhasználva köthető, u-tól különböző csúcsok halmazát és $\Gamma_{\mathcal{W}_u}$ az általuk feszített részgráfot. Ekkor ezek a $\{\mathcal{W}_u\}_{u\in\mathcal{U}_{v,w}}$ csúcshalmazok egy partícióját alkotják a $\Gamma_{v,w}$ gráf csúcsainak. Ezért a csúcsok jó sorrendbe rendezésével (a $\mathcal{W}_v, \mathcal{W}_{v+1}, ...\mathcal{W}_{w-1}$ csúcsait előre, $\mathcal{W}_w$ csúcsait pedig hátra rendezve) elérhető, hogy az I metszési mátrix (-1)-szerese a következőképpen nézzen ki:

$$-I = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & -e_v & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & -1 & -e_{v+1} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & 0 & -1 & . & -1 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & 0 & 0 & -1 & -e_{w-1} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -e_w & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \end{pmatrix}$$

Ismeretes, hogy a $(-I^{-1})_{v,w}$ elemet úgy számolhatjuk ki a $(-I)$ mátrix ismeretében, hogy elhagyjuk a v-hez tartozó sort és a w-hez tartozó oszlopot és az így kapott minor determinánsának $(-1)^{v+w}$-szeresét osztjuk az egész $(-I)$ mátrix determinánsával. Jelölje ezt a minort

$$M\,(\Gamma_X)_{v,w} = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & -1 & -e_{v+1} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & 0 & -1 & . & -1 & 0 & 0 \\ . & . & 0 & 0 & -1 & -e_{w-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \end{pmatrix}.$$

Ennek determinánsát a $(w-1)$-edik oszlop szerint kifejtve kapjuk, hogy

$$det\left(M\,(\Gamma_X)_{v,w}\right) = . \cdot 0 - 1 \cdot 0 + e_{w-1} \cdot 0 -$$

$$-1 \cdot det \begin{pmatrix} . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & -1 & -e_{v+1} & -1 & 0 & 0 \\ . & . & 0 & -1 & -e_{w-2} & 0 & 0 \\ . & . & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{w-(w-1)} det\left(\Gamma_{\mathcal{W}_w}\right) \cdot det\left(M\left(\Gamma_w\right)_{v,w-1}\right),$$

ahol Γ_w-vel azt a részgráfot jelöli, melyet úgy kapunk a Γ_X-ből, hogy elhagyjuk a $\{w\} \cup \mathcal{W}_w$ csúcsokat és a belőlük induló éleket. Indukciózva a gráf mérete szerint és kihasználva a blokkmátrixok determinánsára vonatkozó tételt, amely értelmében $det\left(\Gamma_{v,w}\right) = \prod_{u \in \mathcal{U}_{v,w}} det\left(\Gamma_{\mathcal{W}_u}\right)$, kapjuk a kívánt eredményt:

$$\left(-I^{-1}\right)_{v,w} = det\left(\Gamma_{v,w}\right) / det(\Gamma_X).$$

1.2.9. Megjegyzés. *Az 1.1.24 Megjegyzés értelmében ezzel a számolással azt is megkaptuk, hogy* $(E_v^*, E_w^*) = \left(I^{-1}\right)_{v,w} = -det\left(\Gamma_{v,w}\right)/det(\Gamma_X)$. *Ez összhangban áll az 1.1.27 Állítás azon megjegyzésével, mely szerint az* E_v^* *koordinátái szigorúan pozitívak az* $\{E_w\}_{w \in \mathcal{W}}$ *bázisban, sőt, ha a* Γ_X *fa, akkor konkrét képletet is kaptunk rájuk.*

1.3. Csővezeték szerkesztés

1.3.1. A szingularitás csomója

Legyen X egy komplex analitikus halmaz, $o \in X$ egy izolált szinguláris pont, U pedig egy olyan környezete az o-nak, amire $U \setminus \{o\}$ sima. Rögzítsünk egy valós analitikus $\rho : U \to [0, \infty)$ függvényt, melyre $\rho^{-1}(0) = \{o\}$. Ilyen függvény mindig létezik, vegyünk például egy tetszőleges $(X, o) \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ beágyazást és ρ legyen a $z \mapsto |z|^2$ távolságfüggvény megszorítottja. Jelöljük X_S-sel $\rho^{-1}(S)$-et a $[0, \infty)$ különböző S részhalmazaira.

1.3.1. Tétel. *(lásd (Milnor, 1968)).*

1. *Létezik olyan elég kicsi* $\varepsilon_0 > 0$ *azzal a tulajdonsággal, hogy minden* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *esetén az* $X_\varepsilon = \rho^{-1}(\varepsilon)$ *őskép egy sima sokaság, sőt, ennek* C^∞ *típusa nem függ sem az* ε*-tól sem a* ρ*-tól.*

2. *Az* $\left(X_{[0,\varepsilon]}, X_{\{\varepsilon\}}\right)$ *homeomorfizmus típusa független az* ε *választásától és megegyezik az* $\left(X_{\{\varepsilon\}} \text{ fölötti valós kúp}, X_{\{\varepsilon\}}\right)$ *homeomorfizmus típusával, ahol a kúp csúcsa az* o*-nak felel meg.*

3. *Az* $\left(X_{[0,\varepsilon]}, X_{\{\varepsilon\}}\right)$ *homeomorfizmus típusa független az* ρ *választásától is, így ő csak az analitikus halmaz* (X, o) *csírájától függ.*

Mivel az $X_{[0,\varepsilon]} \setminus \{o\}$ egy C^∞ sokaság egy kanonikus irányítással, így az ő $X_{\{\varepsilon\}}$ határa is örököl egy kanonikus irányítást. Ha az $X \setminus \{o\}$ komplex dimenziója d, akkor az $X_{\{\varepsilon\}}$ valós dimenziója $2d-1$.

1.3.2. Definíció. *Az* $X_{\{\varepsilon\}}$ *irányított diffeomorfizmus típusát nevezzük* ***az*** X ***halmaz*** o***-beli csomójá****nak (link). Jelölése:* $L(X, o)$.

1.3.3. Példa. *1. Ha* (X, o) *egy* d*-dimenziós sima csíra, akkor* $L(X, o) = S^{2d-1}$.

2. *Legyen* $C \subset \mathbb{CP}^{n-1}$ *egy irreducibilis sima projektív varietás és legyen* $X \subset \mathbb{C}^n$ *az affin kúp fölötte. Ekkor az* $L(X, o)$ *egy irányított* S^1*-nyaláb a* C *fölött.*

A fenti tétel értelmében a csomó topologikus értelemben teljesen meghatározza a szingularitást.

1.3.4. Lemma. *Ha az* (X, o) *lokálisan irreducibilis, akkor a hozzá tartozó* $L(X, o)$ *csomó összefüggő.*

1.3.2. Gráf 3-sokaságok

Minden (X, o) normál felület szingularitáshoz hozzárendeltük az $L(X, o)$ csomóját és a Γ_X rezolúciós gráfját (ami jóldefiniált modulo (-1)-es görbék fel- és lefújása). Ezek egyértelműen meghatározzák egymást.

Először belátjuk, hogy az $L(X, o)$ csomó reprodukálható a Γ_X gráfból a csővezeték szerkesztés segítségével, amennyiben a Γ_X gráfra mint csővezeték gráf gondolunk.

1.3.5. Definíció. *A* ***csővezeték gráf*** *(plumbing graph) egy olyan* $\Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ *gráf, melynek a csúcsai két egész dekorációval bírnak, az egyik az* e_v *Euler szám, a másik pedig a* g_v *génusz.*

A ***csővezeték szerkesztés*** *(plumbing) a következő ragasztásokból áll: egy adott* $\Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ *gráf esetén minden* $v \in \mathcal{V}$ *csúcsra legyen* B_v *a* g_v *génuszú* S_v *felület feletti* e_v *Euler számú* S^1*-nyaláb. Ezeket a nyalábokat a* Γ *élei mentén ragasztjuk a következőképpen: minden* v*-hez tartozó élhez veszünk egy* p *pontot az* S_v*-n, ennek egy kicsi* D_p *környezetének őse a* $\pi_v : B_v \mapsto S_v$ *nyalábleképezésnél* $D_p \times S^1$ *alakú, melynek határa egy* $S^1 \times S^1$ *tórusz. Minden* $(v, w) \in \mathcal{E}$ *él esetén a* B_v*-ben és* B_w*-ben kapott tóruszokat összeragasztjuk az* $(x, y) \mapsto (y, x)$ *leképezéssel.*

Összefüggő Γ *esetén az így kapott 3-sokaságot* $M(\Gamma)$*-val jelöljük, melynek megadhatjuk egy irányítását a* B_v*-k és* S_v*-k irányításainak megválasztásával. Ha a* Γ *nem összefüggő, akkor* $M(\Gamma)$*-t az összefüggő komponensekhez tartozó 3-sokaságok* *összefüggő uniójaként definiáljuk. Az üres gráfnak S^3-at feleltetjük meg. A csővezeték szerkesztéssel kapott sokaságokat nevezzük **gráf 3-sokaság**oknak.*

Ha a csővezeték konstrukciót a megfelelő S^1-nyalábok helyett D^2-nyalábokkal végezzük el (és a sarkokat kisimítjuk), akkor egy $P(\Gamma)$ irányított 4-sokaságokat kapunk, melyre $\partial P(\Gamma) = M(\Gamma)$.

Legyen most az (X, o) egy normál felület szingularitás és $\rho : (X, o) \to [0, \infty)$ egy valós analitikus függvény, melyre $\rho^{-1}(0) = \{o\}$. Rögzítsünk egy $\phi : \tilde{X} \to X$ jó rezolúciót, amely meghatározza a Γ_X rezolúciós gráfot. Ekkor, mivel az $E_w \subset \tilde{X}$ sima beágyazott görbe C^∞ tubuláris környezetét egyértelműen meghatározza a felület génusza és a normálnyalábjának Euler száma, így kapjuk a következőt:

1.3.6. Állítás. *$0 < \varepsilon << 1$ esetén $\phi^{-1}(X_{[0,\varepsilon]}) \simeq P(\Gamma_X)$ és $L(X, o) \simeq M(\Gamma_X)$ diffeomorfak. Az első diffeomorfizmus azonosítja az E_w kivételes görbéket a nekik megfelelő D^2-nyalábok zéró szelésével, ez megadja az irányítások egy kanonikus választását a bázistéren és a fibrumon a csővezeték konstrukcióban (és így a megfelelő csomó komponensben is).*

A csővezeték szerkesztés minden Γ csővezeték gráfhoz hozzárendel egy $M(\Gamma)$ sokaságot. A különböző csővezeték gráfoknak megfelelő 3-sokaságok lehetnek megegyezőek. Az irányított diffeomorfizmus típust megőrző, csővezeték gráfon elvégzett megengedett változtatásokat a csővezeték kalkulus írja le. A teljes tárgyalás megtalálható például a (Neumann, 1981) cikkben.

A csővezeték gráfhoz rendelhetünk egy I mátrixot, melynek $I_{i,j}$ eleme a v_i és v_j csúcsok közti élek száma, ha $i \neq j$, míg $I_{i,i} = e_{v_i}$ Euler szám. Az ilyen mátrixú szimmetrikus bilineáris formát a gráf metszetformájának nevezzük. Láttuk, hogy a szingularitás elméletben felmerülő gráfok összefüggőek és negatív definit metszetformával rendelkeznek, ebben az esetben a csővezeték kalkulus csak a gráfon a felfújásnak (lásd 1.1.15 Példa) megfelelő operációból, és annak inverzéből, a lefújásból áll:

1.3.7. Tétel. *Az összefüggő és negatív definit metszetformával rendelkező gráfok körében a felfújás és a lefújás operációkra teljesül, hogy őket alkalmazva egy Γ csővezeték gráfra, az $M(\Gamma)$ sokaság irányított diffeomorfizmus típusa nem változik; míg ha Γ_1 és Γ_2 olyan csővezeték gráfok, melyekre $M(\Gamma_1)$ és $M(\Gamma_2)$ irányítástartóan diffeomorfak, akkor a Γ_1 és Γ_2 gráfok elérhetőek egymásból ezen operációk ismételgetésével.*

Az első tulajdonság bizonyítása azt használja ki, hogy egy sima felületen fekvő pont felfújása izomorfizmus a pont komplementerén, míg a gráf negatív definitsége megmarad. A második tulajdonság a 3-sokaságok elméletén, a gráf 3-sokaságok osztályozásán alapszik és Waldhausen nevéhez fűződik. A csővezeték gráfokra való átfogalmazása megtalálható a (Neumann, 1981) cikkben.

Így valóban teljesül, hogy a szingularitás csomója és a rezolúciós gráfja (modulo fel- és lefújás) meghatározzák egymást és az (X, o) szingularitás topológiáját és irányított sima struktúráját.

2. Hirzebruch-Jung szingularitások

2.1. Hirzebruch-Jung lánctörtek

2.1.1. Definíció. *Az $\frac{n}{q}$-hoz tartozó Hirzebruch-Jung lánctört ($(n,q)=1$):*

$$\frac{n}{q}=[b_1,b_2,...,b_s]:=b_1-\cfrac{1}{b_2-\cfrac{1}{b_3-...-\cfrac{1}{b_s}}},\qquad b_1\geq 1, b_2,...,b_s\geq 2,\ \forall i: b_i\in\mathbb{Z}$$

Tekinthetjük a parciális lánctörteket is:

2.1.2. Definíció.

$$\frac{n_{i,j}}{q_{i,j}}=[b_i,b_2,...,b_j]:=b_i-\cfrac{1}{b_{i+1}-\cfrac{1}{b_{i+2}-...-\cfrac{1}{b_j}}},\qquad i\leq j,\ (n_{i,j},q_{i,j})=1,$$

$$n_{i,i-1}=1,\qquad\qquad n_{i,j}=0,\ \textit{ha}\ j<i-1.$$

Vegyük észre, hogy $n_{1,s}=n$, $q_{1,s}=q$ és

$$\frac{n_{i,j}}{q_{i,j}}=b_i-\frac{q_{i+1,j}}{n_{i+1,j}}\quad\Rightarrow\quad q_{i,j}=n_{i+1,j},$$

így $q=n_{2,s}$

2.1.3. Állítás. *Indukcióval könnyen beláthatóak a következők $i\leq j$ esetén:*

$$n_{i,j}=b_in_{i+1,j}-n_{i+2,j}\ ,$$

$$n_{i,j}=b_jn_{i,j-1}-n_{i,j-2}\ ,$$

$$nn_{i+1,j-1}=n_{i+1,s}n_{1,j-1}-n_{j+1,s}n_{1,i-1}\ .$$

Az utolsó egyenletbe $i=1$-et helyettesítve:

$$nn_{2,j-1}=n_{2,s}n_{1,j-1}-n_{j+1,s}\ .$$

$j=s$ esetén: $nn_{2,s-1}=n_{2,s}n_{1,s-1}-1$. Legyen $q'=n_{1,s-1}$ és $\tau=n_{2,s-1}$ ekkor kapjuk, hogy $n\tau=qq'-1$.

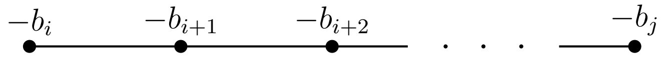
2.1.4. Megjegyzés. *Tekintsük a következő mátrixot:*

$$B_{i,j}=\begin{pmatrix}-b_i & 1 & 0 & . & 0 & 0\\ 1 & -b_{i+1} & 1 & . & 0 & 0\\ 0 & 1 & -b_{i+2} & . & 0 & 0\\ . & . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & . & -b_{j-1} & 1\\ 0 & 0 & 0 & . & 1 & -b_j\end{pmatrix}.$$

A sorok és oszlopok szerinti kifejtés tételéből kapjuk, hogy a $-B_{i,j}$ mátrixok determinánsaira is a 2.1.3 Állításban szereplő rekurzív képletek adódnak, így kapjuk, hogy

$$det(-B_{i,j}) = n_{i,j} \ .$$

Vegyük észre, hogy a $B_{i,j}$ mátrix pont az 1.2.1 Definícóban szereplő lánc $\{i, i+1, ..., j\}$ indexű csúcsait tartalmazó részgráf metszési mátrixa , így ha $\Gamma^{i,j}$-vel jelöljük ezt a



részgráfot, akkor pont azt kapjuk, hogy

$$det\left(\Gamma^{i,j}\right) = n_{i,j}.$$

2.2. Ciklikus hányados szingularitások

2.2.1. Tétel. *Egy normál felület szingularitásra a következő feltételek ekvivalensek. Ha az (X, o) bármelyiket teljesíti Hirzebruch-Jung vagy ciklikus hányados szingularitásnak nevezzük.*

1. *(X, o) izomorf valamely $\{X_{n,q}\}_{n,q}$ modell térrel, ahol $X_{n,q}$ az $(\{xy^{n-q} = z^n\}, 0)$ normalizáltja, ahol $0 < q < n$, $(n, q) = 1$.*
2. *Létezik egy olyan $p : (X, o) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ analitikus fedés, amelyre a p redukált elágazási helye $\{uv = 0\}$ alakú a $(\mathbb{C}^2, 0)$ valamely (u, v) lokális koordinátáiban.*
3. *A Γ_X rezolúciós gráf egy lánc, melyre $g_w = 0$ minden $w \in \mathcal{W}$-re.*
4. *(X, o) a $\mathbb{Z}_n = \{\xi \in \mathbb{C} : \xi^n = 1\}$ n-edrendű ciklikus csoport szerinti $(\mathbb{C}^2, 0)/\mathbb{Z}_n$ hányados szingularitás, ahol a hatás $\xi * (z_1, z_2) = (\xi z_1, \xi^q z_2)$ (ahol továbbra is q, n egészek és $0 < q < n$, $(n, q) = 1$).*

Bizonyítás. (*1.* $\Leftrightarrow$ *2.*) Az analitikus fedés (analytic covering), elágazási hely (branch locus), fokszám (degree) és monodrómia (monodromy representation) definíciói és alapvető tulajdonságai megtalálhatóak például a (Grauert, Peternell, & Remmert, 1994) és a (Kaup & Kaup, 2011) könyvekben.

Tekintsük az $(X_{n,q}, o) \to (\{xy^{n-q} = z^n\}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ kompozíciót, ahol a második leképezés az $(x, y, z) \mapsto (u, v) = (x, y)$ vetítés a $\Delta := \{uv = 0\}$ elágazási hellyel. Így ő egy n-rétegű fedőleképezés $\mathbb{C}^2 \setminus \Delta$ felett. Mivel $\mathbb{C}^2 \setminus \Delta$ homotóp ekvivalens $S^3 \setminus \Delta = (D^2 \times S^1 \cup_{S^1 \times S^1} S^1 \times D^2) \setminus (\{0\} \times S^1 \sqcup S^1 \times \{0\})$-val, ami pedig $S^1 \times S^1$-gyel, így $\prod := \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \Delta) = \mathbb{Z}^2$. Az $(1, 0)$ és $(0, 1)$ generátorokat reprezentálhatjuk a v és az u tengelyeket megkerülő egyszerű irányított hurkok osztályaival. Ha $\xi := e^{2\pi i/n}$, akkor a definiáló egyenlet alakjából látszik, hogy a fedés $\rho : \prod \to \mathfrak{S}_n$ monodrómia leképezésére teljesül, hogy $\rho : \prod \to \mathbb{Z}_n$ és $(1,0) \mapsto \xi$ és $(0,1) \mapsto \xi^{-q}$. Így $ker(\rho) = \mathbb{Z}\langle (n,0),(q,1)\rangle \leqslant \prod$ a $\mathbb{C}^2 \setminus \Delta$ fölötti fedőtér fundamentális csoportja.

Most tekintsünk egy általános p analitikus fedést, ahogy az a *2*. alpontban szerepel. Belátjuk, hogy ekkor ennek a p-nek létezik egy $p_2 \circ p_1 : (X,o) \to (\mathbb{C}^2,0) \to (\mathbb{C}^2,0)$ faktorizációja, ahol p_1 izomorf az előző bekezdésben tárgyalt $(X_{n,q},o) \to (\mathbb{C}^2,0)$ leképezéssel, p_2 pedig $(u,v) \mapsto (u^{m_1}, v^{m_2})$ típusú.

Mivel $p\big|_{X \setminus p^{-1}(\Delta)} : X \setminus p^{-1}(\Delta) \to \mathbb{C}^2 \setminus \Delta$ egy topologikus fedőleképezés, legyen $K := \pi_1(X \setminus p^{-1}(\Delta)) \leqslant \prod$ a fedőtér fundamentális csoportja. Vegyük észre, hogy a $\mathbb{Z}^2$ minden véges indexű K részcsoportjára létezik egy $K = \mathbb{Z}\langle (nm_1,0),(qm_1,m_2)\rangle \leqslant \mathbb{Z}m_1 \oplus \mathbb{Z}m_2 \leqslant \prod$ alakú felbontás, ahol m_1, m_2, n, q pozitív egészek, $q < n$ és $(n,q) = 1$. Valóban, ha K véges indexű, akkor őt egy kettő rangú részrácsként is felfoghatom $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$-ben. Ekkor K egy bázisát a következőképpen kaphatom meg: ha találok olyan egy OV_1V_2 háromszöget, melyre $V_1, V_2 \in K$, de a háromszög belsejében egyetlen K-rácspont sincs, akkor az OV_1 és OV_2 vektorok generálják a rácsot. Ha most $(nm_1,0)$ az első nemnulla rácspont az első tengelyen, akkor hozzá tudok találni egy (qm_1,m_2) rácspontot, mellyel együtt az O-val egy ilyen fundamentális háromszöget alkotnak, $(nm_1,0)$ megfelelő többszörösének hozzáadásával elérhető, hogy $0 \leq q < n$ fennáljon.

Az így kapott csoportok közötti beágyazások megfelelnek $p_2 \circ p_1$-nek: mind a p_1, mind a p_2 azonosíthatóak a Stein Tétel segítségével, amint meghatároztuk az elágazási helyüket és a reguláris fedésük monodrómiáját.

2.2.2. Tétel. ***(Stein Tétel, (Stein, 1956)).*** *Tegyük fel, hogy az X és az Y normális terek. Ismeretes, hogy ebben az esetben, ha a $p : X \to Y$ egy analitikus fedés, akkor mind az elágazási hely, mind a kritikus elágazási halmaz (ramification locus) divizorok. A továbbiakban csak a lokális szituációval foglalkozunk, azaz tegyük fel, hogy $p : (X,x) \to (Y,y)$ analitikus függvénycsíra, ahol mind az (X,x), mind az (Y,y) normális. Ebben az esetben a p fokszáma jóldefiniált.*

Azt mondjuk, hogy a $p : (X,x) \to (Y,y)$ és a $p' : (X',x') \to (Y,y)$ fedések ekvivalensek, ha létezik olyan $\iota : (X,x) \to (X',x')$ analitikus izomorfizmus, melyre $p' \circ \iota = p$.

Rögzítsünk most egy $(B,y) \subset (Y,y)$ lehetséges elágazási helyet. Az $Y \setminus B$ topologikus fedései és a $\pi_1(Y \setminus B)$ fundamentális csoport részcsoportjai közötti dualitásból és a Stein által megadott analitikus realizációkból kapjuk, hogy a következő halmazok bijekcióban állnak egymással:

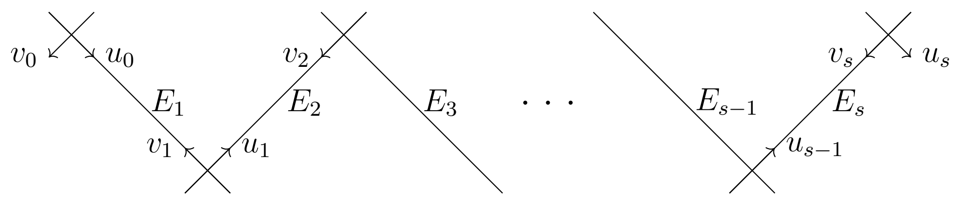
1. a B fölött elágazó $p : (X,x) \to (Y,y)$ analitikus fedések, modulo ekvivalencia, *2. $\pi_1(Y \setminus B)$ véges indexű K részcsoportjai, modulo konjugálás.*

Ezen megfeleltetésnél a K részcsoport $[\pi_1(Y \setminus B) : K]$ indexe megegyezik a p fokszámával. Sőt, ez a megfeleltetés funktoriális: a részcsoportok $K_1 \leqslant K_2$ beágyazása egy $\iota : (X_{K_1}, x_1) \to (X_{K_2}, x_2)$ fedést indukál, melyre $p_{K_2} \circ \iota = p_{K_1}$; és fordítva.

(*1.* $\Rightarrow$ *3.*) A bizonyításhoz megkonstruáljuk az $X_{n,q}$ minimális jó rezolúcióját. Legyen n/q lánctörtbe fejtése $[b_1, ..., b_s]$, mivel $n > q$, így $\forall i : \;\; b_i \geq 2$. Ekkor a $\Gamma_{X_{n,q}}$ rezolúciós gráf egy lánc s csúccsal és a $-b_1, ..., -b_s$ Euler számokkal. Valóban, vegyünk $s+1$ darab $U_0, ..., U_s$ példányát a $\mathbb{C}^2$-nek, (u_i, v_i) affin koordinátákkal. Minden $1 \leq i \leq s$-re összeragasztjuk $U_{i-1} \setminus \{u_{i-1} = 0\}$-t $U_i \setminus \{v_i = 0\}$-val a következő ragasztóleképezésekkel:

$$v_i = u_{i-1}^{-1}, \; u_i = u_{i-1}^{b_i} v_{i-1}$$

Jelölje az így kapott teret $\tilde{X}$, ő nyilván sima analitikus sokaság.



Tekintsük az $n_{i,j}$ $(1 \leq i, j \leq s)$ parciális lánctörteket. A 2.1.3 Állítás harmadik rekurzív képletébe $i = 1$-et helyettesítve kapjuk, hogy $n_{j+1,s} + (n-q)n_{1,j-1}$ minden j-re osztható az n-nel, így egyenlő nm_j-vel valami pozitív egész m_j-re (konkrétan $m_j = n_{1,j-1} - n_{2,j-1}$).

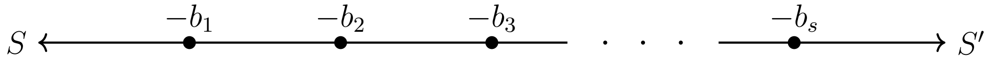
Ekkor definiáljuk az f, g és h függvényeket az $\tilde{X}$-on az U_i nyílt halmazokra való megszorításaik megadásával:

$$f = u_0^n v_0^q = ... = u_i^{n_{i+1,s}} v_i^{n_{i+2,s}} = ... = u_{s-1}^{b_s} v_{s-1} = u_s v_s^0,$$

$$g = u_0^0 v_0 = u_1 v_1^{b_1} = ... = u_i^{n_{1,i-1}} v_i^{n_{1,i}} = ... = u_s^{n_{1,s-1}} v_s^n,$$

$$h = u_0 v_0 = u_1 v_1^{b_1 - 1} = ... = u_i^{m_i} v_i^{m_{i+1}} = ...$$

Az m_i-k megválasztása alapján teljesül, hogy $fg^{n-q} = h^n$, tehát az (f, g, h) hármas megad egy $\tilde{X} \to \{xy^{n-q} = z^n\}$ leképezést, mely, mivel az $\tilde{X}$ normális, keresztülvezethető az $X_{n,q}$ normalizálton (lásd Appendix). Az f, g és h függvények nyilvánvalóan összeroppantják az $E_i := \{u_i = 0\} \cup \{v_{i-1} = 0\}$, $i = 1, ..., s$, görbéket, viszont ezeken kívül izomorfizmust határoznak meg az U_i térképeken. Az E_i-k sima $\mathbb{CP}^1$-ek, transzverzálisan metszik egymást, tehát az így kapott $\tilde{X} \to X_{n,q}$ leképezés jó rezolúciója az $X_{n,q}$-nak az $E = \cup_{i=1}^s E_i$ kivételes görbével. Az f és a g divizorának E-n kívüli része az $S := \{u_0 = 0\}$ és az $S' := \{v_s = 0\}$. Így az f, g és h függvények duális beágyazott rezolúciós gráfja a következő:



ahol az f, g és h multiplicitásai rendre $n, 0, 1$ az S mentén; $0, n, n-q$ az S' mentén és $n_{i+1,s}, n_{1,i-1}, m_i$ az E_i-k mentén. Az Euler számok leolvashatóak az f és g multiplicitásaiból a lánctörtekre vonatkozó rekurziók segítségével, lásd a rezolúciós gráf *3*. egyszerű tulajdonságát. Az így kapott $E_i^2 = -b_i$ Euler számok nem egyenlőek (-1)-el, tehát az $\tilde{X} \to X_{n,q}$ leképezés minimális rezolúciója az $X_{n,q}$-nak.

2.2.3. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy az 1.2.9 és a 2.1.4 Megjegyzések alapján a bizonyításhoz definiált f és g függvények divizoraira teljesül, hogy $div_E(f) = nE_1^*$ és $div_E(g) = nE_s^*$.*

(*3.* $\Rightarrow$ *1.*) Tegyük most fel, hogy az (X, o) szingularitás $\phi : \tilde{X} \to X$ rezolúciójához tartozó rezolúciós gráf egy lánc a $-b_1, ..., -b_s$ dekorációkkal.

Ekkor ő egy racionális szingularitás a 4.1.11 Következmény szerint és így a 4.1.12 Következményből tudjuk, hogy az E kivételes görbének létezik olyan $\tilde{X}$ kicsi környezete, melyre $Pic^0(\tilde{X}) = 0$. Ekkor vegyünk fel egy S és egy S' (nem kompakt) E-re transzverzális görbét úgy, hogy a fenti ábrán levő duális gráfot kapjuk vissza. Tekintsük ekkor a következő divizorokat: $F = nS + \sum_{i=1}^s n_{i+1,s}E_i$, $G = nS' + \sum_{i=1}^s n_{1,i-1}E_i$ és $H = S + (n-q)S' + \sum_{i=1}^s m_iE_i$, ahol az $n_{i,j}$ és m_i együtthatók ugyanazok mint az $(1 \Rightarrow 3)$ irány bizonyításában. A megválasztásuk alapján bármelyikőjüket elmetszve egy tetszőleges E_i-vel nullát kapunk. Tehát ezen divizorokhoz rendelt vonalnyalábok topologikusan triviálisak, de mivel $Pic^0(\tilde{X}) = 0$, akkor ők analitikusan is triviálisak. Ez azt jelenti, hogy ők meromorf függvények divizorai, de mivel ők effektívek is egyben, így ezen meromorf függvények kénytelenek holomorfak lenni. Jelölje őket f, g és h. Sőt, mivel a $k := fg^{n-q}/h^n$ függvény divizora triviális, ezért a k egy invertálható holomorf függvény. Ha most az f-et lecseréljük az f/k-ra, az így kapott (f, g, h) hármas meghatároz egy $\tilde{X} \to \{xy^{n-q} = z^n\}$ holomorf függvényt, mely $\tilde{X}$ simasága miatt keresztülvezethető a normalizálton. Tehát kapunk egy $\psi : \tilde{X} \to X_{n,q}$ holomorf függvényt.

Mivel az f, g és h függvények E_i-együtthatói pozitívak, a ψ összeroppantja az E-t. Ezért a ψ felírható $\alpha \circ \phi$ alakban valami $\alpha : X \to X_{n,q}$ folytonos föggvényre. Az X normalitása miatt kapjuk (lásd Appendix), hogy ez az α függvény holomorf.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & X \arrow[dl, "\alpha"] \\
& X_{n,q} &
\end{tikzcd}$$

Be akarjuk látni, hogy az α fokszáma 1. Valóban, vegyük a

$$c : X_{n,q} \to \{xy^{n-q} = z^n\} \to \mathbb{C}^2$$

projekciót az (x, y) koordinátákra, és legyen $r := (f, g) : \tilde{X} \to \mathbb{C}^2$. Ekkor $r = c \circ \psi$. A c foka nyilván n. De ez igaz az $r' := r\big|_{\tilde{X}\setminus E}$ megszorításra is: az $S \cap E_1$ metszéspont körül jól megválasztott (u_0, v_0) koordinátákban $S = \{u_0 = 0\}$, $E_1 = \{v_0 = 0\}$, míg $f = u_0^n v_0^q$ és $g = v_0$. Ekkor az S-et a leképezés izomorfan képezi a $V(x) = \{x = 0\}$ divizorra. Így $deg(r') \cdot V(x) = r_*(r^*(V(x))) = r_*(V(f)) = r_*(F) = r_*(nS) = nV(x)$, ahol r^* a Cartier divizorok szintjén vett visszahúzást, r_* pedig a homologiákon indukált leképezést jelöli. Tehát c és r' foka is n, így a megszorított $\psi : \tilde{X}\setminus E \to X_{n,q}\setminus 0$ biholomorfizmus. Ekkor az $\alpha : X\setminus o \to X_{n,q}\setminus 0$ egy izomorfizmus, ami a szinguláris pontokra is izomorfizmusként terjed ki, mert a terek normálisak (lásd Appendix).

(*1.* $\Leftrightarrow$ *4.*) Vegyük észre, hogy a $\mathbb{Z}_n$ lineáris izomorfizmusokkal hat a $\mathbb{C}^2$-n. Így alkalmazható Cartan tétele:

2.2.4. Tétel. ***(Cartan Tétel).*** *Legyen $G \leqslant GL(n, \mathbb{C})$ véges részcsoport. Jelölje $\mathbb{C}[z_1, ..., z_n]^G \leqslant \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ a G invariáns polinomok részgyűrűjét. Ekkor ez a gyűrű végesen generált, jelölje $Q_1, ..., Q_q$ a homogén generátorokat. Tekintsük most a $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^q$, $\phi = (Q_1, ..., Q_q)$ leképezést. Ő keresztülvezethető a $\mathbb{C}^n/G$ topologikus téren, sőt bijekciót ad meg $\mathbb{C}^n/G$ és a $V \subset \mathbb{C}^q$ algebrai varietás között, mely az*

$$I(V) = \{R(z_1, ..., z_q) \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_q] \,|\, R(Q_1, ..., Q_q) = 0\} \lhd \mathbb{C}[z_1, ..., z_q]$$

ideál nullhelye. Így a $\mathbb{C}[V]$ koordináta gyűrűje izomorf $\mathbb{C}[z_1, ..., z_n]^G$-vel.

Tehát $\mathbb{C}^n/G$ ellátható egy komplex algebrai affin varietás struktúrával:

$$\mathbb{C}^n/G = Spec\left(\mathbb{C}[z_1, ..., z_n]^G\right).$$

Bizonyítás. Lásd (Cartan, 2015). □

Tekintsük most a megadott $\mathbb{Z}_n$ hatásra invariáns $x := z_2^n$, $y := z_1^n$ és $z := z_1^{n-q} z_2$ polinomokat. Ekkor $xy^{n-q} = z^n$. Ha most $\mathbb{C}[z_1, z_2]^{\mathbb{Z}_n}$ jelöli a $\mathbb{Z}_n$ hatásra invariáns polinomok gyűrűjét, akkor természetes módon kapjuk a következő beágyazásokat:

$$\frac{\mathbb{C}[x, y, z]}{(xy^{n-q} - z^n)} \leqslant \mathbb{C}[z_1, z_2]^{\mathbb{Z}_n} \leqslant \mathbb{C}[z_1, z_2],$$

amelyekből rögtön adódnak a következő algebrai leképezések:

$$\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_n \to \{xy^{n-q} = z^n\}.$$

Mivel a $\mathbb{C}[z_1, z_2]^{\mathbb{Z}_n}$ algebra integrálisan zárt, így a második leképezés keresztülvezethető a normalizálton (lásd Appendix), így kapjuk:

$$\mathbb{C}^2 \xrightarrow{q} \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_n \xrightarrow{p} X_{n,q}.$$

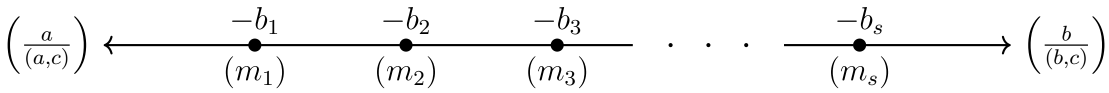
Vegyük észre, hogy mind a q, mind a $q \circ p$ leképezés foka n, tehát p foka 1. Mivel azonban $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_n$ és $X_{n,q}$ is normális, p egy izomorfizmus (lásd Appendix).

$\square$

2.2.5. Megjegyzés. ***(Adalék a 2. részhez).*** *A (2. $\Rightarrow$ 1.) irány bizonyításából a következők is látszanak. Ha az (X, o) normál szingularitásra $p : (X, o) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ egy analitikus fedés, melynek a redukált elágazási helye sima, akkor az (X, o) is sima. Ha az elágazási hely a két tengely uniója, általában egy "nemkanonikus" esetben vagyunk és pont ez a bizonyítás mutatja meg, hogy hogyan tudunk áttérni a kanonikus formára. Nézzük például azt az esetet, amikor (X, o) az $(\{x^a y^b = z^c\}, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ normalizáltja, ahol a, b, c pozitív egészek, p pedig legyen az (x, y)-síkra való vetítés. Ekkor az (X, o) pontosan akkor lokálisan irreducibilis, ha az a, b és c legnagyobb közös osztója az 1. Ebben az esetben az (X, o) csíra és a z-koordinátára való vetítés által indukált $z : (X, o) \to (\mathbb{C}, 0)$ függvény beágyazott minimális rezolúciós gráfját a következőképpen kaphatjuk meg. Először vegyük azt az egyértelmű $0 \leq \lambda < c/(a, c)$ és $m_1 > 0$ egészeket, melyekre*

$$b + \lambda \frac{a}{(a, c)} = m_1 \frac{c}{(a, c)}.$$

Ha $\lambda \neq 0$, tekintsük a $\frac{c/(a,c)}{\lambda} = [b_1, ..., b_s]$ lánctörtet, ahol $b_1, ..., b_s \geq 2$ egészek. Ekkor a z-hez tartozó beágyazott rezolúciós gráf a következő:



Az első nem nyílhely csúcs multiplicitása az előbb meghatározott m_1, a többit a rezolúciós gráf 3. egyszerű tulajdonságának segítségével lehet kiszámolni. Így azt kapjuk, hogy $X = X_{n,q}$, ahol $n = \dfrac{c}{(a, c)(b, c)}$ míg $q = \frac{\lambda}{(b,c)}$.

Ha $\lambda = 0$, akkor az (X, o) sima és a z függvény beágyazott rezolúciós gráfja egy dupla nyíl (nem nyílhegy csúcsok nélkül) a fenti dekorációkkal.

2.2.6. Megjegyzés. ***(Adalék a 4. részhez).***

1. *Az előző megjegyzéssel párhuzamosan a 4. résznek is megadható egy hasonló általánosítása. Tekintsük most egy tetszőleges $\mathbb{Z}_c$ ciklikus csoport lineáris hatását a $\mathbb{C}^2$-n. Mivel a véges Abel-csoportok reprezentációi teljesen reducibilisek*

és az irreducibilis reprezentációk 1-dimenziósak, kapjuk, hogy ez a hatás jó koordinátákban a következő formájú: $\xi * (z_1, z_2) := (\xi^b z_1, \xi^{-a} z_2)$*, ahol* a *és* b *pozitív egészek. Ha az* a, b *és* c *legnagyobb közös osztója* $d > 1$*, akkor a hatás keresztülvezethető a* $\mathbb{Z}_{c/d}$ *csoport egy hatásán, így feltehető, hogy* $d = 1$*. Véve az* $x = z_1^c$*,* $y = z_2^c$ *és a* $z = z_1^a z_2^b$ *invariáns polinomokat, ők egy izomorfizmust határoznak meg* $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_c$ *és az* $\{x^a y^b = z^c\}$ *varietás normalizáltja között. Így az előző megjegyzés alapján* $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_c$ *egy Hirzebruch-Jung szingularitás.*

2. *Továbbá, tekinthetjük tetszőleges* G *véges Abel-csoport lineáris hatását a* $\mathbb{C}^2$*-n. Azt állítjuk, hogy ekkor* $\mathbb{C}^2/G$ *szintén ciklikus hányados.*

2.2.7. Definíció. *Egy* $g \in GL(n, \mathbb{C})$ *véges rendű elemet* ***pszeudotükrözés****nek (pseudo reflection) hívunk, ha a sajátértékei az* 1*,* $n-1$ *multiplicitással, és valami* $\xi \neq 1$ *egységgyök (vagy ami ezzel ekvivalens: a fixpontjainak halmaza egy hipersík). Egy tetszőleges* $G \leqslant GL(n, \mathbb{C})$ *csoportot* ***tükrözéscsoport****nak hívunk, ha pszeudotükrözésekkel generálható. Ezzel szemben pedig egy* $G \leqslant GL(n, \mathbb{C})$ *csoportot* ***kicsi****nek hívunk, ha egyáltalán nem tartalmaz pszeudotükrözéseket.*

A Chevalley–Shephard–Todd tétel (lásd (Chevalley, 1955), (Shephard & Todd, 1954)) értelmében, ha $G \leqslant GL(n, \mathbb{C})$ *egy véges tükrözéscsoport, akkor az invariáns gyűrű (jelölése:* $\mathbb{C}[z_1, ..., z_n]^G$*) egy* n*-dimenziós szabad polinomalgebra. A Cartan tétel következményeként kapjuk, hogy* $\mathbb{C}^n/G = \mathbb{C}^n$ *az ilyen* G *csoportokra. Ha a* $G \leqslant GL(n, \mathbb{C})$ *egy tetszőleges véges csoport, akkor jelölje* $G_r \leqslant G$ *a pszeudotükrözések által generált részcsoportját. Ő nyilvánvalóan egy normálosztó, míg a* $\tilde{G} := G/G_r$ *egy kicsi csoport. Mivel*

$$\mathbb{C}^n/G = (\mathbb{C}^n/G_r)/(G/G_r) = \mathbb{C}^n/\tilde{G},$$

így minden $\mathbb{C}^n/G$ *szingularitás felírható* $\mathbb{C}^n/\tilde{G}$*-ként is, ahol a* $\tilde{G}$ *kicsi.*

Visszatérve a $\mathbb{C}^2$*-n lineárisan ható* G *Abel-csoportunkra, a teljes reducibilitás és az előbbiek miatt feltehető, hogy a* G *diagonálisan hat, azaz valamilyen* n *pozitív egészre* $G \leqslant \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$*, és a* G *egy kicsi csoport. Ha a* G*-ben lenne* $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ *alakú részcsoport, akkor lennének benne olyan* p*-rendű elemek, melyek nem egymás hatványai, azaz*

$$A := \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i l_1}{p}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i k_1}{p}} \end{pmatrix}, \ B := \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i l_2}{p}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i k_2}{p}} \end{pmatrix} \in G,$$

ahol $0 \leq l_1, l_2, k_1, k_2 \leq p$ *olyan egészek, melyekre* $l_1 k_2 \not\equiv l_2 k_1 \ (mod\ p)$*. De ekkor*

$$A^{k_2} B^{-k_1} = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i (l_1 k_2 - l_2 k_1)}{p}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G,$$

ami ellentmond a G kicsiségének. Tehát G-nek nem lehet $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ alakú részcsoportja, így ő ciklikus $\Rightarrow$ $\mathbb{C}^2/G$ valóban ciklikus hányados és így egy Hirzebruch-Jung szingularitás.

3. *Sőt, ha egy tetszőleges véges Abel-csoport (nem feltétlenül lineárisan) hat a $(\mathbb{C}^2, 0)$ sima csírán (a 0 fixpontja a hatásnak), akkor a $(\mathbb{C}^2/G, o)$ is egy ciklikus hányados szingularitás csírája. Az előzőek fényében ehhez csak annyit kell belátni, hogy megfelelő koordinátarendszert választva a hatás lineárissá tehető.*

   Jelölje ehhez $A := \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ a reguláris függvények lokális gyűrűjét a 0-ban és $\mathfrak{m}$ a maximális ideált. Vegyük észre, hogy az A algebrán, mint komplex vektortéren az indukált G-hatás lineáris, az $\mathfrak{m}$ maximális ideál pedig invariáns (mivel a 0 fixpont) $\Rightarrow$ az $\mathfrak{m}^2$ ideál is invariáns $\Rightarrow$ $\mathfrak{m}$ egy komplex vektortér, melyen lineárisan hat egy G véges Abel-csoport és $\mathfrak{m}^2$ egy invariáns altér $\Rightarrow$ a véges Abel-csoportok lineáris reprezentációinak teljes reducibilitása miatt kapjuk, hogy $\mathfrak{m}^2$-nek létezik egy $\mathfrak{m}'$ G-invariáns kiegészítő altere $\Rightarrow$ a következő egzakt sor G-ekvivariánsan szakad:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{m}^2 \arrow[r] & \mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2 \times \mathfrak{m}' \arrow[l, bend left] \arrow[r] & \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = T_0^*\mathbb{C}^2 \arrow[l, bend left] \arrow[r] & 0\,. \end{tikzcd}$$

   Tehát, ha az $\mathfrak{m}' \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ vektortérnek kiválasztom egy $\{x_1, x_2\}$ bázisát, akkor ez egy bázisa lesz az A-nak is, mint algebrának, és ezen a bázison a G lineárisan hat, így az ennek a bázisnak megfelelő reprezentáción a G hatása lineáris. Tehát megkaptuk, hogy tetszőleges G véges Abel-csoport esetén a $(\mathbb{C}^2/G, o)$ csíra egy Hirzebruch-Jung szingularitás.

   Vegyük észre, hogy ez a linearizálás tetszőleges (X, o) sima csíra esetén működik, sehol nem használtuk ki, hogy a $\mathbb{C}^2$-n vagyunk.

2.2.8. Megjegyzés. ***(Adalék az** 1.**, a** 3. **és a** 4. **részekhez).*** *Vegyük észre, hogy a 3. definícióban a gráf egy lánc $-b_1, ..., -b_s$ dekorációkkal. Mivel a gráf megegyezik a tükörképével, a $-b_s, ..., -b_1$ dekorációkkal ellátott lánc ugyanazt a szingularitást kellene visszaadja. Ez a szimmetria a lánctörtek szintjén is megjelenik:*

$$n/q = [b_1, ..., b_s],\, míg\ n/q' = [b_s, ..., b_1],$$

ahol $0 < q' < n,\ qq' \equiv 1\ (mod\, n)$. Ennek bizonyítása induktívan megy a 2.1.3 Állítás rekurzív képleteinek segítségével. Mivel a gráfok szintjén ez az egyetlen ambiguitás, így kapjuk, hogy

$$X_{n,q} \text{ és } X_{m,p} \text{ pontosan akkor izomorfak, ha } m = n \text{ és } p \in \{q, q'\}.$$

Ez az izomorfizmus a $\mathbb{Z}_n$-hatás szintjén is tetten érhető: ha a ξ primitív egységgyök helyett az $\eta := \xi^{q'}$ primitív egységgyököt választjuk a $\mathbb{Z}_n$ új generátorának, akkor $(\eta, \eta^q) = (\xi^{q'}, \xi^{q'q}) = (\xi^{q'}, \xi)$, a koordináták cseréje pedig nyilvánvalóan izomorfizmus.

Sőt, az (1. $\Rightarrow$ 3.) irány bizonyítása azt is mutatja, hogy ha egy ciklikus szingularitás rezolúciós gráfját lerögzítjük, akkor a szingularitás analitikus típusa is egyértelműen meghatározott.

2.3. Lencse terek

Tekintsük a Hirzebruch-Jung szingularitások definíciójának *4.* formáját: az n-edrendű $\mathbb{Z}_n = \{\xi \in \mathbb{C} : \xi^n = 1\}$ ciklikus csoport hat a $\mathbb{C}^2$ téren a következőképpen: $\xi * (z_1, z_2) = (\xi z_1, \xi^q z_2)$, ahol $0 < q < n$, $(n, q) = 1$. Az ezen hatás szerinti faktortér izomorf az $X_{n,q}$ ciklikus hányados szingularitással.

Vegyük észre, hogy erre a hatásra nézve az $S^3 = \{|z_1|^2 + |z_2|^2 = \varepsilon\}$ gömbök invariánsak bármely $\varepsilon > 0$ esetben, sőt, rajtuk a $\mathbb{Z}_n$ hatása szabad.

2.3.1. Definíció. *Az ezen hatás szerinti $S^3/\mathbb{Z}_n$ sima faktorteret nevezzük az $L(n, q)$* ***lencse tér****nek (lens space).*

2.3.2. Megjegyzés. *Az 1.3.1 Tétel alapján az $L(n, q)$ lencse tér izomorf az $(X_{n,q}, o)$ Hirzebruch-Jung szingularitás $L(X_{n,q}, o)$ csomójával. Ekkor az 1.3.6 Állítás szerint az $L(n, q)$ egy gráf 3-sokaság, méghozzá egy lánc alakú gráfhoz tartozó gráf 3-sokaság.*

2.3.3. Megjegyzés. *A 2.2.8 Megjegyzés szerint az $L(n, q)$ és $L(m, p)$ lencse terek pontosan akkor irányítástartóan diffeomorfak, ha $m = n$ és $p \in \{q, q'\}$.*

A csővezeték kalkulus segítségével belátható, hogy ha $-L(n, q)$-val jelöljük az $L(n, q)$ sokaságot ellentétes irányítással, akkor a $-L(n, q)$ is egy lencse tér, méghozzá ő megegyezik $L(n, n - q)$-val. Ekkor a hozzájuk tartozó csővezeték gráfok dekorációi közötti kapcsolatot a 3.7.7 Lemma írja le.

A lencse terek az alacsony dimenziós topológia fontos elemei, ennek egyik fontos oka, hogy egyszerű CW-struktúrával rendelkeznek. Ennek konkrét leírása megtalálható például a (Hatcher, 2002) könyvben.

3. Tórikus varietások

3.1. Konvex kúpok alapvető tulajdonságai

Legyen V egy véges dimenziós valós vektortér, V^* a duális tere.

3.1.1. Definíció. *$\mathcal{C} \subset V$ **konvex kúp**, ha minden $v, v' \in \mathcal{C}$-re, $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$-ra $av \in \mathcal{C}$ és $v + v' \in \mathcal{C}$. Nyilván ekkor $\mathcal{C}$ a szokásos értelemben is konvex halmaz.*

*$\mathcal{C}$-t konvex **poliéderkúp**nak (röviden CPC-nek: convex polyhedral cone) nevezzük, ha*

$$\mathcal{C} = \mathbb{R}_{\geq 0}v_1 + ... + \mathbb{R}_{\geq 0}v_s,$$

*valamilyen s pozitív egész számra. Ez megegyezik az operációkutatásban definiált **generált kúp** fogalmával. Abban a terminológiában a generált kúp leírásához bevezettük a v_i-k, mint oszlopvektorok koordinátáiból álló A mátrixot és így*

$$\mathcal{C} = \{v = xA \mid x \in \mathbb{R}^s_{\geq 0},\ v \in V\} =: G_A.$$

*A $v_1, ..., v_s$ vektorokat a $\mathcal{C}$ kúp **generátorai**nak nevezzük.*

*$\mathcal{C}$-t **szimpliciális** CPC-nek nevezzük, ha a $v_1, ..., v_s$ vektorok $\mathbb{R}$-lineárisan függetlenek.*

3.1.2. Definíció. *A $\mathcal{C} \subset V$ konvex kúp **duális kúp**ja:*

$$\mathcal{C}^\vee := \{u \in V^* \mid \langle u, v\rangle \geq 0\ \forall v \in \mathcal{C}\text{-re}\},$$

ahol az $\langle u, v\rangle$ az u duális vektor értékét jelöli a v vektoron.

Operációkutatásból a generált kúp mellett definiáltuk a **metszetkúpot** is. Ez lényegében egy k egyenlőtlenségből álló homogén egyenletrendszer megoldásainak halmaza, azaz ha $dim(V) = r$ és Q egy $k \times r$-es mátrix, akkor az

$$M_Q := \{v \in V \mid Qv \geq 0\}$$

egy metszetkúp, ahol $Qv \geq 0$ azt jelöli, hogy a Qv vektor minden koordinátája ≥ 0, azaz $Qv \in \mathbb{R}^k_{\geq 0}$. Vegyük észre, hogy ha a V vektortéren bevezetjük a standard skalárszorzatot, akkor a $V^* \cong V$ azonosításon keresztül a $\mathcal{C}^\vee$ definíció szerint egy metszetkúp, melynek mátrixát pont a v_i-k, mint sorvektorok koordinátái adják.

3.1.3. Megjegyzés. *Ha $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ konvex kúpok, akkor a $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$ Minkowski összeg is egy konvex kúp a V-ben és a duálisára teljesül a következő összefüggés:*

$$(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)^\vee = \mathcal{C}_1^\vee \cap \mathcal{C}_1^\vee.$$

3.1.4. Definíció. *A $\mathcal{C}$ konvex kúp* ***dimenzió****ja, definíció szerint, az általa generált valós altér dimenziója: $dim\,(\mathcal{C}) := dim\,(\mathbb{R}\mathcal{C}) = dim\,(\mathcal{C} + (-\mathcal{C}))$.*

A $\mathcal{C}$ konvex kúp $relint(\mathcal{C})$ ***relatív belseje*** *a $\mathcal{C}$ — mint $\mathbb{R}\mathcal{C}$ vektortérbeli halmaz — belseje. A $\mathcal{C}$* ***relatív határ****át a következőképpen definiáljuk:*

$$\partial\mathcal{C} = \mathcal{C} \setminus relint(\mathcal{C}).$$

3.1.5. Megjegyzés. *A szokásos $V \xrightarrow{\simeq} V^{**}$, $V \ni v \mapsto (V^* \ni u \mapsto \langle u, v\rangle) \in V^{**}$ azonosítással rögtön adódik, hogy $\mathcal{C}^{\vee\vee} \subset V$, sőt $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}^{\vee\vee}$.*

3.1.6. Tétel.

1. *Ha $\mathcal{C} \subset V$ zárt konvex kúp, akkor $\mathcal{C}^{\vee\vee} = \mathcal{C}$. Speciálisan, ha $\mathcal{C}$ egy CPC, akkor ő nyilvánvalóan zárt, így $\mathcal{C}^{\vee\vee} = \mathcal{C}$.*

2. *A $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ zárt konvex kúpokra $(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^\vee = \mathcal{C}_1^\vee + \mathcal{C}_2^\vee$.*

3. ***(Elválasztási tétel).*** *Legyenek $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ konvex kúpok V-ben. Pontosan akkor lesz $relint(\mathcal{C}_1) \cap relint(\mathcal{C}_2) = \emptyset$, ha létezik olyan $0 \neq u \in V^*$ kovektor, amelyre $\mathcal{C}_1 \subset H^+(u, 0) = \{v \in V \mid \langle u, v\rangle \geq 0\}$, $\mathcal{C}_2 \subset H^+(-u, 0)$ és legalább az egyik nincsen benne a $H(u, 0) = \{v \in V \mid \langle u, v\rangle = 0\}$ hipersíkban.*

Bizonyítás. Csak a bizonyítás ötleteit világítjuk meg. Az *1*. rész bizonyításához, feltéve, hogy a $\mathcal{C}$ egy CPC, azt kell kihasználni, hogy minden generált kúp előáll metszetkúpként. Ez egyszerűen annyin múlik, hogy egy $G_A := \{yA \mid y \geq 0\}$ generált kúpból elkészíthető a $\{(z, y) \mid A^T y^T - Iz \geq 0,\ Iz - A^T y^T \geq 0,\ y \geq 0\}$ metszetkúp (ahol I a megfelelő dimenziós identikus mátrix), melynek az y-koordinátákra való vetülete a G_A, viszont a Fourier-Motzkin elimináció segítségével belátható, hogy metszetkúp vetülete is metszetkúp (lásd (Frank & Király, 2013)). Fontos megemlíteni, hogy az így kapott metszetkúp mátrixának együtthatói a négy alapművelet segítségével kaphatóak meg a generált kúp felíráshoz tartozó mátrixéiból. Ezek szerint a $\mathcal{C}$ CPC egyben metszetkúp is, a hozzá tartozó mátrix sorai így automatikusan benne vannak a $\mathcal{C}^\vee$-ban, és innen már kapjuk, hogy $\mathcal{C}^{\vee\vee} \subset \mathcal{C}$.

A *2*. rész könnyen következik az *1*.-ből. A *3*. részt ahhoz hasonló módon kell belátni, mint ami a 3.3.10 Tétel bizonyításában történik. Részletes bizonyítás található például a (Rockafellar, 1970) könyvben. □

3.1.7. Lemma. ***(Farkas lemma).*** *Ha $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^p (= V)$ egy generált kúp (CPC) és $v \in \mathbb{R}^n$ olyan vektor, mely nincs benne $\mathcal{C}$-ben, akkor létezik olyan zárt homogén féltér, ami tartalmazza a $\mathcal{C}$-t, de a v-t nem. Avagy, a mi megfogalmazásunkban, létezik olyan $u \in \mathcal{C}^\vee \subset V^*$, amelyre $\langle u, v\rangle < 0$.*

Bizonyítás. Mivel a $\mathcal{C}$ egy generált kúp, az előző érvelés szerint ő egyben metszetkúp is, azaz véges sok féltér metszete. Így, ha $b \notin \mathcal{C}$, akkor b nem része valamely definiáló féltérnek. □

3.1.8. Tétel. ***(Farkas Tétel).*** *Konvex poliéderkúp duálisa is konvex poliéderkúp. (Operációkutatási terminológiában: generált kúp duálisa is generált kúp.)*

Bizonyítás. A Farkas Lemma segítségével belátható, hogy az A és B mátrixokhoz tartozó G_A és G_B generált kúpokra és az M_A és M_B metszetkúpokra teljesül, hogy $G_A = M_B \Leftrightarrow M_A = G_B$. Így, ha a $\mathcal{C}^\vee$ duális kúp egy A mátrixhoz tartozó M_A metszetkúp, akkor tekinthetjük az ezen mátrixhoz tartozó G_A generált kúpot, viszont ekkor az előzőek szerint létezik olyan B mátrix, melyre $G_A = M_B$. Tehát $M_A = G_B$, ezért a $\mathcal{C}^\vee$ valóban generált kúp, tehát CPC. Valójában ezzel az érveléssel azt is beláttuk, hogy minden metszetkúp előáll generált kúpként, tehát ez a két fogalom igazából megegyezik. A konkrét átváltás részletes vizsgálatával az is megkapható, hogy a generált kúp és a metszetkúp formáknak megfelelő mátrixok együtthatói kifejezhetőek egymásból csak a négy alapművelet segítségével. □

Tehát, ha $\mathcal{C}$ egy CPC, akkor őt kétféleképpen is le tudjuk írni:

$$\mathcal{C} = \mathbb{R}_{\geq 0}v_1 + ... + \mathbb{R}_{\geq 0}v_s = \{v \in V \mid \langle u_j, v\rangle \geq 0,\ j = 1, ..., t\}$$

valami $v_1, ..., v_s \in V$ vektorokra és $u_1, ..., u_t \in V^*$ kovektorokra. Ez utóbbi kifejezés a $\mathcal{C}$-t a $H^+(u_1, 0), ..., H^+(u_t, 0)$ félterek metszeteként írja le. Így $\mathcal{C}$ egy t homogén lineáris egyenlőtlenségből álló rendszer megoldáshalmaza.

3.1.9. Tétel. ***(Carathéodory Tétel).*** *Ha $\mathcal{C} = \mathbb{R}_{\geq 0}v_1 + ... + \mathbb{R}_{\geq 0}v_s \subset V$ egy d-dimenziós CPC, akkor minden $v \in \mathcal{C}$ kifejezhető a $\{v_1, ..., v_s\}$ halmaz legfeljebb d elemének nemnegatív együtthatós lineáris kombinációjaként. Speciálisan, egy d-dimenziós $\mathcal{C}$ CPC felbontható d-dimenziós szimpliciális CPC-k véges uniójára.*

Bizonyítás. Hasonló érvelés működik, mint a konvex geometriában alapvető Carathéodory Tétel esetében. □

A továbbiakban bizonyítás nélkül felsoroljuk a CPC-k néhány alapvető tulajdonságát. Bizonyítások találhatóak például az (Oda, 1985) könyv Appendixében.

3.1.10. Lemma. *Legyen $\mathcal{C} \subset V$ egy CPC és $v \in \mathcal{C}$ egy vektor. Ekkor a következők ekvivalensek:*

1. *$v \in relint(\mathcal{C})$;*

2. *$\langle u, v\rangle > 0\ \forall u \in \mathcal{C}^\vee \setminus \mathcal{C}^\perp$-re;*

3. *$\mathcal{C}^\vee \cap \{v\}^\perp = \mathcal{C}^\perp$;*

4. *$\mathcal{C} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-v) = \mathbb{R}\mathcal{C} = \mathcal{C} + (-\mathcal{C})$.*

3.1.11. Definíció. *Legyen $\mathcal{C} \subset V$ egy CPC, ekkor $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$* **oldal***a (face) a $\mathcal{C}$-nek, ha létezik olyan $u \in \mathcal{C}^\vee$, amelyre $\mathcal{F} = \mathcal{C} \cap \{u\}^\perp$. Jelölése: $\mathcal{F} < \mathcal{C}$. Így*

$$\mathcal{F} = \mathcal{C} \cap H(u,0) = \mathcal{C} \cap H^+(u,0) \cap H^-(u,0) = \mathcal{C} \cap \partial H^+(u,0),$$

ahol $H^\pm(u,0)$ félterek, $H^+(u,0) \supset \mathcal{C}$. Ezek szerint az $\mathcal{F}$ maga is metszetkúp, tehát egy CPC.

Vegyük észre, hogy a $\mathcal{C}$ maga is egy oldal: ha u-nak a nullvektort választjuk, kapjuk, hogy $\mathcal{C} \cap \{O\}^\perp = \mathcal{C}$. A $\mathcal{C}$ valódi oldalai az előző lemma alapján mind a $\partial\mathcal{C}$-ben vannak. Nyilván teljesül a következő felbontás:

$$\mathcal{C} = \bigsqcup_{\mathcal{F}<\mathcal{C}} relint(\mathcal{F}).$$

3.1.12. Állítás. *Jelölje $\mathfrak{F}(\mathcal{C})$ a $\mathcal{C}$ CPC oldalainak halmazát. Ekkor ő véges, részben rendezett halmaz a $<$ relációra nézve. Nyilván $\mathcal{C}$ a legnagyobb eleme, a legkisebb pedig $\mathcal{C} \cap (-\mathcal{C})$, a legnagyobb $\mathbb{R}$-altér $\mathcal{C}$-ben. Sőt, $\mathfrak{F}(\mathcal{C})$ egy absztrakt komplexus a következő értelemben:*

$$\mathcal{F} \in \mathfrak{F}(\mathcal{C}),\ \mathcal{F}' < F \Rightarrow \mathcal{F}' \in \mathfrak{F}(\mathcal{C});$$

$$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathfrak{F}(\mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 < \mathcal{F}_1,\ \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 < \mathcal{F}_2.$$

Ha $\mathcal{C} = \sum_{i=1}^s \mathbb{R}_{\geq 0} v_i$, $v_i \in V$, akkor az oldalai $\sum_{i \in I} \mathbb{R}_{\geq 0} v_i$ alakúak, ahol $I \subset \{1, ..., s\}$.

3.1.13. Állítás. *Ha $\mathcal{F}$ a $\mathcal{C}$ CPC egy oldala, legyen $\mathcal{F}^* := \mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{F}^\perp$ egy oldala a $\mathcal{C}^\vee$ duális kúpnak. Ez a megfeleltetés egy $^* : \mathfrak{F}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{F}(\mathcal{C}^\vee)$ bijekciót határoz meg, amely egy Galois típusú megfeleltetés a következő értelemben:*

1. $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathfrak{F}(\mathcal{C}):\ \mathcal{F}_1 > \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow \mathcal{F}_1^* < \mathcal{F}_2^*$;
2. *az $\mathfrak{F}(\mathcal{C})$ legnagyobb eleme $\mathcal{C}$, melyre $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}^\perp = \mathcal{C}^\vee \cap (-\mathcal{C}^\vee)$;*
3. *az $\mathfrak{F}(\mathcal{C})$ legkisebb eleme $\mathcal{C} \cap (-\mathcal{C})$, melyre $(\mathcal{C} \cap (-\mathcal{C}))^* = \mathcal{C}^\vee$;*
4. $dim(\mathcal{F}) + dim(\mathcal{F}^*) = dim(V)$ *minden $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}(\mathcal{C})$ oldalra.*

3.1.14. Következmény. *Ha $\mathcal{F}$ a V-beli $\mathcal{C}$ CPC egy oldala, akkor $\mathcal{F}^\vee = \mathcal{C}^\vee + \mathcal{F}^\perp$ teljesül a V^*-ban. Sőt, minden $u \in relint(\mathcal{C}^\vee \cap \mathcal{F}^\perp) = relint(\mathcal{F}^*)$-ra*

$$\mathcal{C}^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0}(-u) = \mathcal{F}^\vee.$$

3.1.15. Állítás. *Ha $\mathcal{F}$ oldala a $\mathcal{C} \subset V$ CPC-nek, tekintsük a $\pi : V \to V/\mathbb{R}\mathcal{F}$ kanonikus projekciót az $\mathcal{F}$ által generált altér szerinti faktortérre. Ekkor a $\mathcal{C} + \mathbb{R}\mathcal{F}$ egy CPC a V-ben, míg a $\pi(\mathcal{C}) = (\mathcal{C} + \mathbb{R}\mathcal{F})/\mathbb{R}\mathcal{F}$ egy CPC a $V/\mathbb{R}\mathcal{F}$-ben. Sőt, az*

$$\mathcal{F}' \mapsto \mathcal{F}' + \mathbb{R}\mathcal{F} \mapsto \pi(\mathcal{F}') = (\mathcal{F}' + \mathbb{R}\mathcal{F})/\mathbb{R}\mathcal{F}$$

leképezéseknél az $\{\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}(\mathcal{C}), \mathcal{F}' > \mathcal{F}\}$, az $\mathfrak{F}(\mathcal{C} + \mathbb{R}\mathcal{F})$ és az $\mathfrak{F}(\pi(\mathcal{C}))$ halmazok egy-egyértelműen képződnek egymásba.

3.1.16. Állítás. *Legyen $\mathcal{C}$ egy CPC a V-ben. Ekkor egy $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ részhalmaz pontosan akkor oldala a $\mathcal{C}$ kúpnak, ha teljesíti a következőket:*

1. *$\mathcal{S}$ konvex kúp;*

2. *$v + v' \notin \mathcal{S}$ bármely $v \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{S}$ és $v' \in \mathcal{C}$ esetén, azaz $\mathcal{C} \setminus \mathcal{S}$ ideál a $\mathcal{C}$ additív monoidban.*

3.2. Szigorúan konvex racionális poliéderkúpok és legyezők

Rögzítsünk egy r-rangú szabad $\mathbb{Z}$-modulust (rácsot): $N \cong \mathbb{Z}^r$. A duális $\mathbb{Z}$-modulust (duális rácsot) jelölje $M := Hom_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ és legyen

$$\langle\ ,\ \rangle : M \times N \to \mathbb{Z}$$

a kanonikus $\mathbb{Z}$-bilineáris párosítás. Az alapgyűrűt az $\mathbb{R}$ testre cserélve kapjuk:

$$N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R},\ M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R},\ \langle\ ,\ \rangle : M_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}.$$

3.2.1. Definíció. *Egy $n \in N \subset N_{\mathbb{R}}$ vektort primitívnek hívunk, ha nem létezik olyan $\alpha \in (0,1)$ valós szám, amire $\alpha n \in N$, azaz az O-ból induló, n-en átmenő félegyenesen ő az első rácspont.*

3.2.2. Definíció. *Egy $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ halmazt* ***szigorúan konvex racionális poliéderkúp****nak (SCRPC-nek) hívunk, ha létezik olyan $n_1, n_2, ..., n_s$ véges sok eleme az N-nek, hogy*

$$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} n_1 + ... + \mathbb{R}_{\geq 0} n_s = \{a_1 n_1 + ... + a_s n_s \mid a_i \in \mathbb{R}, a_i \geq 0\ \forall i\}$$

és $\sigma \cap (-\sigma) = \{O\}$.

Ekkor a σ nyilván egy CPC, melyben a $\sigma \cap (-\sigma) = \{O\}$ szigorú konvexitás miatt nincsen nemtriviális lineáris altér. Azt is megköveteljük, hogy a σ racionális legyen, azaz az N rács felett egész (vagy ami ezzel ekvivalens: racionális) vektorok feszítsék.

A konvex kúpokhoz hasonlóan $dim(\sigma) = dim(\sigma + (-\sigma)) = dim(\mathbb{R}\sigma)$.

3.2.3. Definíció. $\sigma^{\vee} := \{x \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle x, y\rangle \geq 0\ \forall y \in \sigma\text{-}ra\}$.

3.2.4. Megjegyzés. *A Farkas Tétel alapján a $\sigma^{\vee}$ szintén egy CPC, sőt a 3.3.9 Tétel alapján ő egy konvex racionális poliéderkúp (CRPC).*

Mivel a σ szigorúan konvex, így $\sigma^{\vee} + (-\sigma^{\vee}) = M_{\mathbb{R}}$, azaz $dim(\sigma^{\vee}) = r = dim(M_{\mathbb{R}})$, ugyanis a 3.1.6 Tétel 2. része szerint $\sigma^{\vee} + (-\sigma^{\vee}) = (\sigma \cap (-\sigma))^{\vee} = \{O\}^{\vee} = M_{\mathbb{R}}$.

3.2.5. Definíció. *A $\tau \subset \sigma$ részhalmaz **oldal**a (face) a σ-nak, ha létezik olyan $m_0 \in \sigma^\vee$, amelyre*

$$\tau = \sigma \cap \{m_0\}^\perp := \{y \in \sigma \mid \langle m_0, y\rangle = 0\}.$$

Jelölése: $\tau < \sigma$.

3.2.6. Megjegyzés. *Ismét csak a 3.3.9 Tétel alapján kapjuk majd, hogy m_0 választható $\sigma^\vee \cap M$-belinek, így az oldalak is CRPC-k.*

3.2.7. Megjegyzés. *A szigorú konvexitási feltétel miatt az $\{O\}$ is egy oldala a σ-nak: a 3.1.12 Állításban ugyanis szerepelt, hogy a σ legkisebb oldala $\sigma \cap (-\sigma)$.*

3.2.8. Definíció. *Egy **legyező** (fan) N-ben olyan $N_\mathbb{R}$-beli SCRPC-k (nem feltétlenül véges) $\triangle$ halmaza, melyre teljesülnek a következők:*

1. *ha $\sigma \in \triangle$, akkor minden $\tau < \sigma$ oldalra is $\tau \in \triangle$;*
2. *Bármely $\sigma, \sigma' \in \triangle$ kúpokra $\sigma \cap \sigma'$ oldala σ-nak és σ'-nek is, azaz a kúpok csak oldalaikban metszhetik egymást.*

*A $\mid \triangle \mid := \cup_{\sigma\in\triangle}\sigma \subset N_\mathbb{R}$ halmazt a $\triangle$ **tartó**jának (support) nevezzük.*

Elnevezés. *Olykor az $(N, \triangle)$ párra használjuk a legyező kifejezést.*

3.2.9. Tétel. *Legyen σ egy szigorúan konvex racionális poliéderkúp. Ekkor:*

1. *$\mathcal{S}_\sigma := M \cap \sigma^\vee = \{m \in M \mid \langle m, y\rangle \geq 0 \ \forall y \in \sigma\text{-ra}\}$ egy additív részmonoid, azaz*
$$O \in \mathcal{S}_\sigma,\ \forall m, m' \in \mathcal{S}_\sigma : m + m' \in \mathcal{S}_\sigma\ ;$$
2. ***(Gordan Lemma).** $\mathcal{S}_\sigma$ végesen generált, azaz létezik véges sok $m_1, ..., m_p \in \mathcal{S}_\sigma$ úgy, hogy*
$$\mathcal{S}_\sigma = \mathbb{Z}_{\geq 0} m_1 + ... + \mathbb{Z}_{\geq 0} m_p\ ;$$
3. *$\mathcal{S}_\sigma$ generálja az M additív csoportot, azaz $\mathcal{S}_\sigma + (-\mathcal{S}_\sigma) = M$;*
4. *$\mathcal{S}_\sigma$ szaturált (telített), azaz, ha valami $c \in \mathbb{Z}_{>0}$ egészre és $m \in M$ rácspontra teljesül, hogy $cm \in \mathcal{S}_\sigma$, akkor $m \in \mathcal{S}_\sigma$.*

Fordítva, ha $\mathcal{S}$ egy részmonoidja az M-nek, melyre teljesülnek ezek a tulajdonságok, akkor létezik olyan $\sigma \subset N_\mathbb{R}$ SCRPC, melyre $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\sigma$.

Bizonyítás. Legyen σ egy SCRPC az $N_{\mathbb{R}}$-ben. Ekkor az *1.* és a *4.* tulajdonságok triviálisan teljesülnek.

A *3.* tulajdonsághoz felhasználjuk, hogy $\sigma^{\vee}+(-\sigma^{\vee}) = M_{\mathbb{R}}$. A 3.3.9 Tétel alapján $\sigma^{\vee}$ egy CRPC, tehát az M rács fölött racionálisan generálható, azaz a generátor-félegyeneseiből kiválaszthatóak olyan $m_1, ..., m_r \in M \cap \sigma^{\vee} = \mathcal{S}_{\sigma}$ rácspontok, melyek $\mathbb{R}$-lineárisan függetlenek (különben $dim(\sigma^{\vee}) < r$ lenne). Ekkor legyen

$$\rho := R_{\geq 0}m_1 + ... + \mathbb{R}_{\geq 0}m_r \subset \sigma^{\vee}$$

egy szimpliciális kúp $\sigma^{\vee}$-ban. Mivel $\{m_1, ..., m_r\}$ bázisa az $M_{\mathbb{R}}$-nek, ezért minden $m \in M$-re $\exists m' \in M \cap \rho$ úgy, hogy $m + m' \in \rho$. De ekkor $m + m' \in M \cap \rho \subset M \cap \sigma^{\vee} = \mathcal{S}_{\sigma} \Rightarrow m \in \mathcal{S}_{\sigma} + (-\mathcal{S}_{\sigma})$ teljesül minden $m \in M$-re.

A Gordan Lemma belátásához alkalmazzuk először a Carathéodory Tételt: mivel $\sigma^{\vee}$ pontosan r-dimenziós, ezért ő felbontható véges sok szimpliciális kúp uniójára. Sőt, mivel $\sigma^{\vee}$ racionális, ezért az egész generátorrendszerből kiindulva azt is kapjuk, hogy ezek a szimpliciális kúpok racionálisak is. Mivel véges sok végesen generált monoid összege is végesen generált, elég csak ebben az esetben belátni az állítást, azaz feltehető, hogy a $\sigma^{\vee}$ egy szimpliciális CRPC:

$$\sigma^{\vee} = \mathbb{R}_{\geq 0}m_1 + ... + \mathbb{R}_{\geq 0}m_r,$$

valami $m_1, ..., m_r \in \mathcal{S}_{\sigma}$ valós lineárisan független rácspontokra.

Legyen $M' := \mathbb{Z}m_1 + ... + \mathbb{Z}m_r$ egy véges indexű additív részcsoportja az M-nek. Ekkor $M' \cap \sigma^{\vee} = \mathbb{Z}_{\geq 0}m_1 + ... + \mathbb{Z}_{\geq 0}m_r$ és minden $m \in \mathcal{S}_{\sigma}$ esetén létezik olyan $m' \in M' \cap \sigma^{\vee}$, melyre az $m - m'$ koordinátái az $m_1, ..., m_r$ valós bázisban a $[0, 1)$ intervallumban vannak $\Rightarrow$ tehát $m - m'$ az M egy pontja az $M_{\mathbb{R}}$ azon fundamentális parallelepipedonjában, melyet az $m_1, ..., m_r$ vektorok feszítenek. Mivel ennek a térfogata véges $\Rightarrow$ ebben csak véges sok M-beli pont lehet $\Rightarrow$ így kapjuk, hogy ez a véges sok rácspont és az $m_1, ..., m_r$ rácspontok együtt generálják az $\mathcal{S}_{\sigma}$-t, mint monoidot.

A fordított irány bizonyításához legyen $\mathcal{S}$ egy M-beli részmonoid, melyre teljesülnek az *1.* $-$ *4.* tulajdonságok. A *2.* tulajdonság alapján ő végesen generált, jelöljük a generátorait $m_1, ..., m_p$-vel. Ekkor definiálhatjuk a következő CRPC-t:

$$\rho := R_{\geq 0}m_1 + ... + \mathbb{R}_{\geq 0}m_p$$

és legyen $\sigma := \rho^{\vee}$. A 3.3.9 Tétel alapján a σ egy CRPC, azt fogjuk belátni, hogy ő szigorúan konvex is és $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\sigma}$.

A *3.* tulajdonságból tudjuk, hogy $\mathcal{S} + (-\mathcal{S}) = M \Rightarrow \rho + (-\rho) = M_{\mathbb{R}} \Rightarrow$

$$\{O\} = (\rho + (-\rho))^{\vee} = \rho^{\vee} \cap (-\rho)^{\vee} = \sigma \cap (-\sigma),$$

ahol a középső egyenlőség a 3.1.3 Megjegyzésből következik. Kapjuk, hogy a σ szigorúan konvex, tehát egy SCRPC.

Nyilván $\mathcal{S} \subset M \cap \sigma^\vee = M \cap \rho$, mivel a 3.1.6 Tétel szerint $\rho^{\vee\vee} = \rho$. Az fordított irányú $M \cap \rho \subset \mathcal{S}$ tartalmazást a Carathéodory Tétel értelmében elég csak a $p = r = dim(M_\mathbb{R})$ szimpliciális esetben belátni. Ekkor $\rho = R_{\geq 0}m_1 + ... + \mathbb{R}_{\geq 0}m_r$, ahol az $m_1, ..., m_r$ vektorok valós lineárisan függetlenek, tehát egy valós bázist alkotnak és az eredeti bázisban egész együtthatójúak (mivel M-beliek). Így az eredeti és az $\{m_1, ..., m_r\}$ bázis közötti áttérési mátrix és inverze is racionális együtthatós, amiből következik, hogy minden $m \in M \cap \rho$ rácspont az $\{m_1, ..., m_r\}$ bázisban is nemnegatív racionális koordinátákkal bír, de ekkor létezik olyan $c \in \mathbb{Z}_{>0}$, hogy $cm \in \mathcal{S} \Rightarrow$ mivel az S szaturált, kapjuk, hogy $m \in \mathcal{S}$ minden $m \in M \cap \rho = M \cap \sigma^\vee$-re $\Rightarrow$ $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\sigma$. $\square$

3.3. Tórikus varietások

3.3.1. Definíció. *Az $N \cong \mathbb{Z}^r$ rácshoz definiálunk egy $T_N = \mathbb{C}^* \times ... \times \mathbb{C}^*$* ***algebrai tóruszt*** *a következőképpen:*

$$T_N := Hom_\mathbb{Z}(M, \mathbb{C}^*) = N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}^*.$$

A definícióban szereplő két leírás megegyezését a konkrét izomorfizmusok megadásával látjuk be: legyen $\{n_1, ..., n_r\}$ az N rács egy bázisa és legyen $\{m_1, ..., m_r\}$ a duális bázis M-ben. Ekkor minden $t : M \to \mathbb{C}^*$ additív homomorfizmust meghatároznak az m_i-ken felvett $t(m_i)$ értékei, így a következő leképezés jóldefiniált:

$$Hom_\mathbb{Z}(M, \mathbb{C}^*) \to N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}^*, \; t \mapsto \sum_{i=1}^{r} n_i \otimes t(m_i).$$

Könnyen látható, hogy ennek az inverz leképezése a következő lesz:

$$N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}^* \to Hom_\mathbb{Z}(M, \mathbb{C}^*), \; n \otimes \lambda \mapsto \left(t : m \mapsto \lambda^{\langle m,n \rangle}\right).$$

3.3.2. Lemma. *A $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ algebrai csoportmorfizmusok csakis a $z \mapsto z^k$ alakúak, $k \in \mathbb{Z}$-re. Azaz $Hom_\mathbb{Z}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}$.*

Bizonyítás. A $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ reguláris leképezések felírhatók $f/g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ racionális fügvényekként, melyeknek gyöke és pólusa is csak a 0-ban lehet, tehát $f, g \in \mathbb{C}[z]$ és $f(z) \neq 0 \neq g(z)$, ha $z \neq 0$. De ekkor $f(z) = c_1 z^{k_1}$, $g(z) = c_2 z^{k_2}$ és $\frac{f}{g}(1) = 1$ kell legyen, így $\frac{f}{g}(z) = z^k$, valamilyen $k \in \mathbb{Z}$-re. Ezek pedig nyilván algebrai csoporthomomorfizmusok. $\square$

3.3.3. Definíció. *A T_N tóruszon a csoportstruktúrát a következőképpen adhatjuk meg:*

$$Hom_\mathbb{Z}(M, \mathbb{C}^*) \times Hom_\mathbb{Z}(M, \mathbb{C}^*) \dot{\to} Hom_\mathbb{Z}(M, \mathbb{C}^*)$$

$$(t,t') \mapsto (t \cdot t' : m \mapsto t(m)t'(m)).$$

A T_N ekvivalens jellemzéseiben ez a következőknek felel meg:

$$N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \times N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \dot{\to} N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*,\ (\sum_i n_i \otimes z_i, \sum_i n_i \otimes z_i') \mapsto \sum_i n_i \otimes z_i z_i';$$

$$(\mathbb{C}^*)^r \times (\mathbb{C}^*)^r \dot{\to} (\mathbb{C}^*)^r,\ ((z_1, ..., z_r), (z_1', ..., z_r')) \mapsto (z_1 z_1', ..., z_r z_r').$$

A $T_N = \mathbb{C}^* \times ... \times \mathbb{C}^*$ tórusz természetes módon ellátható affin varietás struktúrával, mely kompatibilis a csoportműveletettel, így ő egy kommutatív algebrai csoport.

3.3.4. Definíció. *Minden $m \in M$ meghatároz egy $e(m) : T_N \to \mathbb{C}^*$, $t \mapsto t(m)$ karaktert, melyre $e(O) = 1$ és $e(m+m') = e(m)e(m')$ minden $m, m' \in M$ esetén. Speciálisan, ha $m = \sum_j a_j m_j \in M, a_j \in \mathbb{Z}$ $\forall j$-re, akkor $e(m)(t) = \prod_j t(m_j)^{a_j}$. Az előző lemma segítségével belátható, hogy az algebrai tórusz összes karaktere ilyen alakú, így az M-et azonosíthatjuk a T_N karaktercsoportjával.*

3.3.5. Definíció. *Minden $n \in N$ meghatároz egy $\gamma_n : \mathbb{C}^* \to T_N$, $\lambda \mapsto \big(m \mapsto \lambda^{\langle m,n \rangle}\big)$ egyparaméteres részcsoportot, melyre $\gamma_{n+n'} = \gamma_n \gamma_{n'}$ $\forall n, n' \in N$-re. Speciálisan, ha $n = \sum_i b_i n_i \in N$, $b_i \in \mathbb{Z}$ $\forall i$-re, akkor $\gamma_n(\lambda) = \big(t : m_i \mapsto \lambda^{b_i}\big)$. Az előző lemma segítségével belátható, hogy az algebrai tórusz összes egyparaméteres részcsoportja ilyen alakú, így N-et azonosíthatjuk a T_N egyparaméteres részcsoportjainak csoportjával.*

Jelölje továbbra is $\{n_1, ..., n_r\}$ az N egy bázisát és $\{m_1, ..., m_r\}$ az M duális bázisát. Legyen $u_j := e(m_j)$, ekkor kapunk egy $T_N \to (\mathbb{C}^*)^r$, $t \mapsto (u_1(t), ..., u_r(t))$ azonosítást. Tehát az $(u_1, ..., u_r)$ egy koordináta rendszer a T_N-en $\Rightarrow$ ekkor minden $m = \sum_j a_j m_j \in M$-re az $e(m) = u_1^{a_1} u_2^{a_2} ... u_r^{a_r}$ egy Laurent-monom a T_N-en. Ha pedig $n = \sum_i b_i n_i \in N$, akkor a hozzá tartozó $\gamma_n : \mathbb{C}^* \to T_N$ egyparaméteres részcsoport alakja ebben a koordináta rendszerben: $\lambda \mapsto (\lambda^{b_1}, \lambda^{b_2}, ..., \lambda^{b_r}) \in \mathbb{C}^r$.

3.3.6. Állítás. *Legyen σ egy SCRPC az $N_{\mathbb{R}}$-ben és legyen*

$$\mathcal{S}_\sigma = M \cap \sigma^\vee = \mathbb{Z}_{\geq 0} m_1 + ... + \mathbb{Z}_{\geq 0} m_p,$$

az általa meghatározott monoid. Ekkor legyen

$$U_\sigma := \{u : \mathcal{S}_\sigma \to \mathbb{C} \mid u(O) = 1, u(m+m') = u(m)u(m')\ \forall m, m' \in \mathcal{S}_\sigma\text{-ra}\}$$

és legyen $e(m) : U_\sigma \to \mathbb{C}$ az a leképezés, melyre $e(m)(u) = u(m)$. Ekkor a $\sigma^\vee$ generátorai indukálnak egy $(e(m_1), ..., e(m_p)) : U_\sigma \to \mathbb{C}^p$ egy injektív beágyazást. A képpel való azonosításon keresztül az U_σ egy analitikus (algebrai) halmaz $\mathbb{C}^p$-ben, melyet "monom = monom" alakú egyenletek vágnak ki. Az így kapott r-dimenziós *irreducibilis normális komplex analitikus struktúra az U_σ-n független az $m_1, ..., m_p$ generátorok választásától. Sőt, minden $m \in \mathcal{S}_\sigma$-re az $e(m)$ leképezés egy polinomfüggvény az U_σ-n, ami holomorf erre a komplex struktúrára nézve.*

3.3.7. Megjegyzés. *Az U_σ igazából egy r-dimenziós irreducibilis affin algebrai varietás is a $\mathbb{C}$ felett. Valóban, induljunk ki először az M Abel-csoport komplex csoportalgebrájából:*

$$\mathbb{C}[M] = \bigoplus_{m \in M} \mathbb{C}e(m),$$

ahol az $e(m)$-mek most csak szimbólumként funkcionálnak a megfelelő generátorokra. Ő egy (gyűrű értelemben) végesen generált és redukált $\mathbb{C}$-algebra, így tekinthetjük a $Spec(\mathbb{C}[M])$ hozzá tartozó affin algebrai halmazt. Mivel a $\mathbb{C}[M]$ nullosztómentes, ezért ő irreducibilis algebrai halmaz lesz, tehát egy algebrai varietás. Bármely $\mathbb{C}$ feletti realizációjának pontjai azonosíthatóak a $\mathbb{C}[M] \to \mathbb{C}$ algebra homomorfizmusokkal. Mivel minden $m \in M$-re $(-m) \in M$ is teljesül, így ezek képe invertálható kell legyen a $\mathbb{C}$-ben, ezért kapjuk, hogy

$$Spec(\mathbb{C}[M]) = Hom_{\mathbb{C}-alg}(\mathbb{C}[M], \mathbb{C}) = Hom_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*) = T_N.$$

Mivel az $\mathcal{S}_\sigma$ részmonoidja az M-nek, ezért a $\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma]$ monoidalgebra (a 4.2.3 Definíció értelmében) részalgebrája a $\mathbb{C}[M]$-nek. Vektortérként $\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma] = \bigoplus_{m \in \mathcal{S}_\sigma} \mathbb{C}e(m)$. Vegyük észre, hogy az U_σ definíciójából már könnyen adódik, hogy

$$U_\sigma = Hom_{\mathbb{C}-alg}(\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma], \mathbb{C}) = Spec(\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma]).$$

Az, hogy az U_σ egy affin algebrai varietás is, azt eredményezi, hogy a bizonyításainkban használhatunk algebrai geometriai eszközöket.

Bizonyítás. (A 3.3.6 Állítás bizonyítása). Mivel a feltevés szerint $m_1, ..., m_p$ generálják az $\mathcal{S}_\sigma$ monoidot $\Rightarrow$ minden $u \in U_\sigma$-t meghatározzák az m_j-ken felvett $u(m_j) = e(m_j)(u) \in \mathbb{C}$ értékei $\Rightarrow$ az $((e(m_1), e(m_2), ..., e(m_p))$ tényleg egy injektív leképezés.

Vizsgáljuk meg, hogy egy $(a_1, ..., a_p) \in \mathbb{C}^p$ pont mikor van rajta az U_σ képén! Tehát olyan $u \in U_\sigma$-t keresünk, melyre $u(m_j) = a_j$ $\forall j$-re.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I := (f_1, ..., f_q) \arrow[r] & \mathbb{C}[x_1, ..., x_p] \arrow[rr] \arrow[ddr] & & \mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma] = \mathbb{C}[e(m_1), ..., e(m_p)] \arrow[r] \arrow[ddl, dashed] & 0 \\
 & & x_j \arrow[rr] \arrow[ddr] & & e(m_j) \arrow[ddl, dashed] & \\
 & & & \mathbb{C} & & \\
 & & & a_j & &
\end{tikzcd}$$

Tekintsük a fenti diagramot, amelyben $\mathbb{C}[x_1, ..., x_p]$ a p-változós polinomgyűrű és I az $(x_j \mapsto e(m_j))_j$ leképezés magja (azaz I az $U_\sigma \subset \mathbb{C}^p$ varietáson eltűnő polinomok ideálja). Könnyen látható, hogy pontosan akkor terjed ki a szaggatott nyíl irányába a $\mathbb{C}[x_1, ..., x_p] \to \mathbb{C},\ x_j \mapsto a_j$ leképezés, ha az I-n eltűnik, azaz

$$f_1(a_1, ..., a_p) = ... = f_q(a_1, ..., a_p) = 0.$$

Minden $f \in I$ felírható a következő alakban:

$$f(x_1, ..., x_p) = \sum b(\nu_1, ..., \nu_p) x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} ... x_p^{\nu_p}, \text{ ahol } b(\nu_1, ..., \nu_p) \in \mathbb{C}.$$

$$\Rightarrow 0 = f(e(m_1), ..., e(m_p)) = \sum b(\nu_1, ..., \nu_p) e\left(\sum_j \nu_j m_j\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = \sum_m{}' \left(\sum{}'' b(\nu_1, ..., \nu_p)\right) e(m),$$

ahol $\sum_m'$ az $m \in \mathcal{S}_\sigma$-kra való összegzést, $\sum''$ pedig minden adott $m \in \mathcal{S}_\sigma$ esetén a $\sum_j \nu_j m_j = m$-et teljesítő $(\nu_1, ..., \nu_p)$ nemnegatív egészekből álló p-esekre való összegzést jelöli. Így kapjuk, hogy minden $m \in \mathcal{S}_\sigma$-ra $\sum'' b(\nu_1, ..., \nu_p) = 0$-nak kell teljesülnie. Ha most minden ilyen m-re rögzítünk egy $m = \sum_j \mu_j m_j,\ \mu_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\ \forall j$-re kanonikus előállítást, kapjuk, hogy

$$\Rightarrow \sum_{\exists j:\ \nu_j \neq \mu_j}{}'' b(\nu_1, ..., \nu_p) = -b(\mu_1, ..., \mu_p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1, ..., x_p) = \sum_m{}' \left(\sum_{\exists j:\ \nu_j \neq \mu_j}{}'' b(\nu_1, ..., \nu_p) x_1^{\nu_1} ... x_p^{\nu_p} + b(\mu_1, ..., \mu_p) x_1^{\mu_1} ... x_p^{\mu_p} \right) =$$

$$= \sum_m{}' \left(\sum_{\exists j:\ \nu_j \neq \mu_j}{}'' b(\nu_1, ..., \nu_p) \left(x_1^{\nu_1} ... x_p^{\nu_p} - x_1^{\mu_1} ... x_p^{\mu_p}\right) \right),\ \forall f \in I\text{-re}.$$

Innen látjuk, hogy az I-t generálják az

$$x_1^{\nu_1} ... x_p^{\nu_p} - x_1^{\mu_1} ... x_p^{\mu_p},\ \sum_j \nu_j m_j = \sum_j \mu_j m_j$$

alakú polinomok (és ők nyilván benne is vannak az I-ben) $\Rightarrow$ a Hilbert Bázis Tétel alapján ebből a generátorrendszerből véges is kiválasztható $\Rightarrow$ kapunk egy olyan véges $\{f_1', ..., f_{q'}'\}$ generátorrendszert, melyre teljesül, hogy $(a_1, ..., a_p) \in U_\sigma \Leftrightarrow f_1'(a_1, ..., a_p) = ... = f_{q'}'(a_1, ..., a_p) = 0$, ahol $\forall f_j'$ "monom - monom" alakú.

Ahhoz, hogy a dimezióra, a normalitásra és a monoid generátorok választásától való függetlenségre vonatkozó állítást belássuk, elég bebizonyítani, hogy az U_σ varietás $\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma]$ koordináta gyűrűje egy r-dimenziós integrálisan zárt tartomány (ekkor az algebrai geometriai tulajdonságok öröklődnek a komplex struktúrára is, lásd Appendix).

Azt már az előző megjegyzésben is láttuk, hogy a $\mathbb{C}[M]$ nullosztómentes, így a $\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma]$ részalgebrája is az. A dimenzió megállapításához a hányadostest transzcendencia fokát számoljuk ki. Mivel a $T_N = Spec(\mathbb{C}[M]) = (\mathbb{C}^*)^r$ algebrai tórusz egy r-dimenziós sima algebrai varietás $\Rightarrow trdeg(Frac(\mathbb{C}[M])) = r$. Tehát elég, ha belátjuk, hogy $Frac(\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma]) = Frac(\mathbb{C}[M])$, ez pedig onnan következik, hogy a 3.2.9 Tétel szerint $\mathcal{S}_\sigma + (-\mathcal{S}_\sigma) = M$, így minden $m \in M$-re létezik $m', m'' \in \mathcal{S}_\sigma$, hogy $m = m' - m''$, de ekkor $e(m) = e(m')/e(m'')$, így $\mathbb{C}[M] \leq Frac(\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma]) \leq Frac(\mathbb{C}[M])$. A hányadostest ekvivalens definíciója alapján

$$\Rightarrow dim(\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma]) = trdeg(Frac(\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma])) = trdeg(Frac(\mathbb{C}[M])) = r.$$

A $\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma]$ integrális zártságához először vizsgáljuk meg a $\mathbb{C}[M]$ gyűrűt. Legyen $\{n'_1, ..., n'_r\}$ egy bázisa az N-nek és $\{m'_1, ..., m'_r\}$ az M duális bázisa, akkor az M, mint monoid, szabadon generált a $\pm m'_1, ..., \pm m'_r$ elemek által, így

$$\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}\left[e(m'_1), e(m'_1)^{-1}, ..., e(m'_r), e(m'_r)^{-1}\right] = \mathbb{C}\left[x_1, x_1^{-1}, ..., x_r, x_r^{-1}\right]$$

az r-változós Laurent polinomok gyűrűje. Ő pedig integrálisan zárt, ez könnyen visszavezethető a polinomgyűrű integrális zártságára.

Legyen most a ρ_k az $n'_1, ..., n'_k$ bázisvektorok által generált SCRPC, $1 \leq k \leq r$. Ekkor nyilván

$$\mathcal{S}_{\rho_k} = \mathbb{Z}_{\geq 0} m'_1 + ... + \mathbb{Z}_{\geq 0} m'_k + \mathbb{Z} m'_{k+1} + ... + \mathbb{Z} m'_r$$

$$\Rightarrow \mathbb{C}[\mathcal{S}_{\rho_k}] = \mathbb{C}\left[x_1, ..., x_k, x_{k+1}, x_{k+1}^{-1}, ..., x_r, x_r^{-1}\right],$$

ami szintén könnyen láthatóan integrálisan zárt tetszőleges k esetén.

A tételben szereplő általános σ SCRPC legyen

$$\sigma := \mathbb{R}_{\geq 0} n_1 + ... + \mathbb{R}_{\geq 0} n_q, \text{ valami } n_i \in N \text{ rácspontokra.}$$

Jelöljük τ_i-vel az $\mathbb{R}_{\geq 0} n_i$ egydimenziós SCRPC-ket. Ekkor automatikusan adódik, hogy $\sigma^\vee = \cap_i \tau_i^\vee$, így $\mathcal{S}_\sigma = \bigcap_i \mathcal{S}_{\tau_i}$, tehát $\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma] = \bigcap_i \mathbb{C}[\mathcal{S}_{\tau_i}]$.

Vegyük észre, hogy mivel minden N-beli primitív vektor kiegészíthető bázissá, így ezen τ_i-k pont az előző ρ_1 speciális esetnek felelnek meg, így a $\mathbb{C}[\mathcal{S}_{\tau_i}]$ algebrák integrálisan zártak. De ekkor a $\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma]$ is integrálisan zárt, ugyanis a hányadostestekre teljesül, hogy $Frac(\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma]) \leqslant Frac(\mathbb{C}[\mathcal{S}_{\tau_i}])$, így $\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma] \leqslant \overline{\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma]} \leqslant \overline{\mathbb{C}[\mathcal{S}_{\tau_i}]} = \mathbb{C}[\mathcal{S}_{\tau_i}]$ minden i-re.

Tehát valóban megkaptuk, hogy a $\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma]$ egy r-dimenziós integrálisan zárt tartomány, így U_σ valóban egy r-dimenziós, irreducibilis, normális komplex analitikus halmaz. $\square$

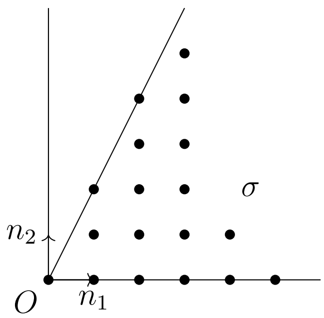
3.3.8. Példa. *Az egyszerűség kedvéért legyen $r = 2$ és $\{n_1, n_2\}$ egy egész bázisa az N-nek, míg $\{m_1, m_2\}$ az M duális bázisa.*

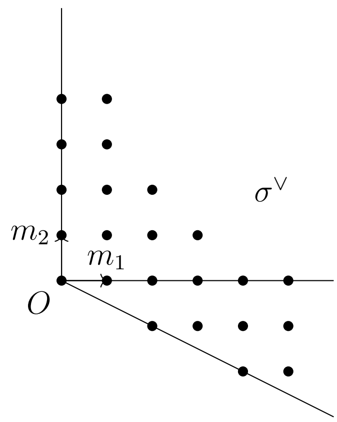
1. *Ha $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} n_1 + \mathbb{R}_{\geq 0} n_2$, akkor $\sigma^\vee = \mathbb{R}_{\geq 0} m_1 + \mathbb{R}_{\geq 0} m_2$, így $\mathcal{S}_\sigma = \mathbb{Z}_{\geq 0} m_1 + \mathbb{Z}_{\geq 0} m_2$ és ezért az $(e(m_1), e(m_2)) : U_\sigma \to \mathbb{C}^2$ holomorf beágyazás egy izomorfizmus.*

2. *Ha $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} n_1$, akkor $\sigma^\vee = \mathbb{R}_{\geq 0} m_1 + \mathbb{R} m_2$, így $U_\sigma = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.*

3. *Ha pedig $\sigma = \{O\} \Rightarrow \sigma^\vee = M$ és így nyilván $U_\sigma = T_N = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$.*

4. *Ha $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} n_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}(n_1 + 2n_2)$, akkor $\sigma^\vee = \mathbb{R}_{\geq 0}(2m_1 - m_2) + \mathbb{R}_{\geq 0} m_2$, így kapjuk, hogy $\mathcal{S}_\sigma = \mathbb{Z}_{\geq 0}(2m_1 - m_2) + \mathbb{Z}_{\geq 0} m_2 + \mathbb{Z}_{\geq 0} m_1$.*



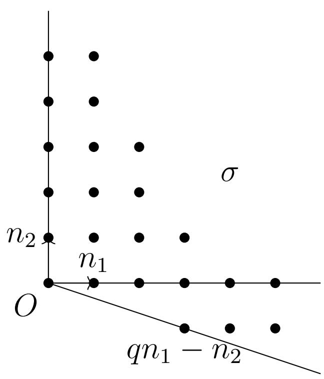


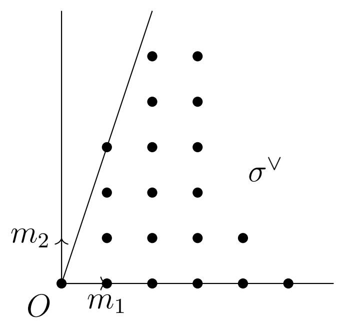
Ekkor az $(e(m_1), e(m_2), e(2m_1 - m_2)) : U_\sigma \to \mathbb{C}^3$ beágyazásnál az U_σ azonosul az $\{(u_1, u_2, u_3) \mid u_1^2 = u_2 u_3\}$ algebrai varietással.

5. *Ha $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}(\lambda n_1 - n_2) + \mathbb{R}_{\geq 0} n_2$ egy λ irracionális pozitív számra, akkor σ csak egy szigorúan konvex poliéderkúp, de nem racionális. Ekkor belátható, hogy $\sigma^\vee \cap M$ nem generálható végesen és így $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$ nem Noether.*

6. *Ha $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}(qn_1 - n_2) + \mathbb{R}_{\geq 0} n_2$ valami $q > 0$ egészre, akkor $\mathcal{S}_\sigma$-t generálják az $m_1, m_1 + m_2, ..., m_1 + qm_2$ rácspontok, így*

$$A_\sigma := \mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma] = \mathbb{C}[e(m_1), e(m_1)e(m_2), ..., e(m_1)e(m_2)^q] = \mathbb{C}[x_1, x_1x_2, ..., x_1x_2^q].$$





Ha $x_1 = U^q$ és $x_2 = V/U$, akkor

$$A_\sigma = \mathbb{C}[U^q, U^{q-1}V, ..., UV^{q-1}, V^q] \leqslant \mathbb{C}[U, V],$$

így $U_\sigma = Spec(A_\sigma)$ az q-adfokú racionális normális görbe fölötti kúp $\mathbb{C}^{q+1}$-ben. Az $A_\sigma \hookrightarrow \mathbb{C}[U, V]$ beágyazás a $\mathbb{C}^2 \to U_\sigma$ q-adfokú Veronese leképezés feletti kúpnak felel meg.

Ismeretes, hogy a $\mathbb{Z}_q$ csoport hat a $\mathbb{C}^2$-n a következőképpen: $\xi * (u, v) = (\xi u, \xi v)$, és U_σ a $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_q$ ciklikus hányados szingularitás. Algebrailag a $\mathbb{Z}_q$ hat a $\mathbb{C}[U, V]$ koordináta gyűrűn ($\xi : F(U, V) \mapsto F(\xi U, \xi V)$) és kapjuk, hogy ezen hatásra nézve $A_\sigma = \mathbb{C}[U, V]^{\mathbb{Z}_q}$ az invariáns polinomok gyűrűje.

3.3.9. Tétel. *Ha σ egy SCRPC N-ben, akkor a $\sigma^\vee$ is racionális kúp az $M_\mathbb{R}$-ben (azaz egy CRPC). Ha $\tau < \sigma$ egy oldal, akkor létezik olyan $m_0 \in M \cap \sigma^\vee$ is, amelyre $\tau = \sigma \cap \{m_0\}^\perp = \{y \in \sigma \mid \langle m_0, y\rangle = 0\}$, így τ is egy SCRPC. Ekkor*

$$\mathcal{S}_\tau = \mathcal{S}_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m_0)$$

és így $U_\tau = \{u \in U_\sigma \mid u(m_0) \neq 0\}$, ami egy nyílt halmaz U_σ-ban (Zariski és a szokásos értelemben is).

Bizonyítás. A generált kúpok és metszetkúpok azonosításánál hangsúlyoztuk, hogy a generált kúp forma mátrixából csak az elemi műveleteket használva megkapjuk a metszetkúp forma mátrixának együtthatóit. Tehát, ha A a σ generált kúp mátrixa, azaz $G_A = \sigma$, akkor tudjuk, hogy $M_A = \sigma^\vee$ és létezik olyan B racionális mátrix, amire $G_A = M_B \Rightarrow G_B = M_A = \sigma^\vee$, tehát a duális kúp racionálisan (a megfelelő nevezővel felszorozva egészen) generált.

Definíció szerint $\tau < \sigma \Leftrightarrow \exists m_0' \in \sigma^\vee : \tau = \sigma \cap \{m_0'\}^\perp$. Ha most $\sigma = \sum_{i=1}^p \mathbb{R}_{\geq 0} n_i$, valami $n_i \in N$-ekre, akkor a 3.1.12 Állítás alapján az oldalai $\sum_{i \in I} \mathbb{R}_{\geq 0} n_i$ alakúak, ahol $I \subset \{1, ..., p\}$. Ekkor nyilván a $\tau < \sigma$ oldal is egy racionális kúp.

Legyen most ζ a $\sigma^\vee$ azon oldala, mely az m_0'-t a belsejében tartalmazza. Ha $\sigma^\vee = \mathbb{R}_{\geq 0} m_1 + ... + \mathbb{R}_{\geq 0} m_q$, $m_j \in M$, akkor $\sigma^\vee$ oldalai is $\sum_{j \in J} \mathbb{R}_{\geq 0} m_j$, $J \subset \{1, ..., q\}$ alakúak. Ezért feltehető, hogy létezik olyan k egész, melyre $1 \leq k \leq q$, hogy $\zeta = \sum_{j=1}^k \mathbb{R}_{\geq 0} m_j$. Mivel $m_0' \in relint(\zeta) \Rightarrow m_0' = \sum_{j=1}^k a_j m_j$, $\forall j : a_j > 0$. Ekkor

$$\langle m_0', y\rangle = 0,\ \forall y \in \tau \Leftrightarrow \sum_{j=1}^k a_j \langle m_j, y\rangle = 0,\ \forall y \in \tau \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \langle m_j, y\rangle = 0,\ \forall j = 1, ..., k,\ \forall y \in \tau \Rightarrow \forall m \in \zeta,\ \forall y \in \tau :\ \langle m, y\rangle = 0.$$

A ζ racionális kúp belsejéből választva egy M-beli m_0 rácspontot, amire még $m_0 - m_0' \in \zeta$ is teljesül, kapjuk, hogy $\forall y \in \tau :\ \langle m_0, y\rangle = 0$ és ha $y \in \sigma \backslash \tau \Rightarrow \langle m_0, y\rangle = \langle m_0', y\rangle + \langle m_0 - m_0', y\rangle > 0$ az m_0' válaszása miatt. Tehát $\tau = \sigma \cap \{m_0\}^\perp$, $m_0 \in \mathcal{S}_\sigma$.

A Tétel utolsó részének belátásához használjuk a 3.1.14 Következményt, mely szerint $\tau^\vee = \sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0}(-m_0) \Rightarrow \mathcal{S}_\tau = M \cap \tau^\vee \supset M \cap \sigma^\vee + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m_0) = \mathcal{S}_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m_0)$.

A másik irányú tartalmazáshoz annyit kell észrevenni, hogy minden $m \in \mathcal{S}_\sigma$-ra létezik $a \in \mathbb{Z}_{>0}$ elég nagy, amelyre $m + am_0 \in \sigma^\vee \Rightarrow m + am_0 \in \mathcal{S}_\sigma \Rightarrow$

$$\Rightarrow m \in \mathcal{S}_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m_0) \Rightarrow \mathcal{S}_\tau \subset \mathcal{S}_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m_0) \Rightarrow \mathcal{S}_\tau = \mathcal{S}_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m_0).$$

□

3.3.10. Tétel. *Legyen $\triangle$ egy legyező az N-ben, ekkor az $\{U_\sigma\}_{\sigma \in \triangle}$ analitikus halmazokat össze tudjuk ragasztani egy*

$$T_N emb(\triangle) := \bigcup_{\sigma \in \triangle} U_\sigma$$

Hausdorff komplex analitikus halmazzá, amely irreducibilis, normális és r-dimenziós. Ezt nevezzük ***az*** *$(N, \triangle)$* ***legyezőhöz tartozó tórikus varietás****nak.*

Bizonyítás. A 3.3.6 Állítás alapján az U_σ-k irreducibilis normális r-dimenziós algebrai (analitikus) halmazok a $\mathbb{C}^{p_\sigma}$ affin terekben. Sőt, ha $\sigma, \tau \in \triangle \Rightarrow \sigma \cap \tau \in \triangle$ és mindkettőnek oldala $\Rightarrow$ a 3.3.9 Tétel szerint $U_{\sigma\cap\tau}$ nyílt halmaz U_σ-ban és U_τ-ban, így ezeket természetes módon összeragaszthatjuk a közös nyílt halmaz mentén: így kapjuk meg az $X = T_N emb(\triangle)$ irreducibilis r-dimenziós normális (lásd Appendix) komplex analitikus halmazt.

A Hausdorffság belátásához a következő tulajdonságot használjuk fel: X teljesíti a T_2 axiómát $\Leftrightarrow$ az $X \times X$ szorzattérben az átló zárt. Mivel az U_σ-k definíciójuk szerint automatikusan Hausdorffak, így elég csak annyit belátni, hogy $\sigma, \tau \in \triangle$ esetén az

$$U_{\sigma\cap\tau} \to U_\sigma \times U_\tau,\ u \mapsto (u|_{\mathcal{S}_\sigma}, u|_{\mathcal{S}_\tau})$$

leképezés zárt.

Először annyit látunk be, hogy $\mathcal{S}_{\sigma\cap\tau} = \mathcal{S}_\sigma + \mathcal{S}_\tau$. A $\sigma = \tau$ eset triviális, a továbbiakban feltesszük, hogy $\sigma \neq \tau$. A 3.1.6 Tétel szerint $(\sigma \cap \tau)^\vee = \sigma^\vee + \tau^\vee \Rightarrow \mathcal{S}_\sigma + \mathcal{S}_\tau \subset \mathcal{S}_{\sigma\cap\tau}$.

A másik irányban, mivel $\sigma \neq \tau$, így a legyező definíciója alapján ezek a kúpok csak a $\sigma \cap \tau$ közös oldalban metszik egymást, így $relint(\sigma) \cap relint(\tau) = \emptyset$. Tekintsük most a

$$\gamma := \sigma - \tau = \sigma + (-\tau)$$

CRPC-t $\Rightarrow$ A 3.1.3 Megjegyzés szerint $\gamma^\vee = \sigma^\vee \cap (-\tau)^\vee$. Ha most $m_0 \in M$ olyan, hogy $m_0 \in relint(\gamma^\vee) \Rightarrow$ A 3.1.10 Lemma és a 3.1.13 Állítás alapján

$$(\gamma^\vee)^\perp = \gamma \cap \{m_0\}^\perp = \gamma \cap (-\gamma) = (\sigma - \tau) \cap (\tau - \sigma).$$

Ekkor erre az m_0-ra teljesül, hogy mivel $\sigma \subset \gamma \Rightarrow m_0 \in \sigma^\vee$ és $\sigma \cap \tau \subset \gamma \cap (-\gamma) = \gamma \cap \{m_0\}^\perp \Rightarrow \sigma \cap \tau \subset \sigma \cap \{m_0\}^\perp$. A másik irányba, ha $v \in \sigma \cap \{m_0\}^\perp \Rightarrow v \in \tau - \sigma \Rightarrow v = w' - w$, ahol $w' \in \tau$ és $w \in \sigma$, akkor $v + w \in \sigma \cap \tau \Rightarrow$ a 3.1.16 Állítás szerint $v \in \sigma \cap \tau \Rightarrow \sigma \cap \{m_0\}^\perp = \sigma \cap \tau$. Ugyanezt a gondolatmenetet alkalmazva a $(-\tau)$-ra, kapjuk, hogy ez az $m_0 \in M$ olyan, hogy a σ és a τ az $\{m_0\}^\perp$ hipersík két oldalán helyezkednek el, azaz $m_0 \in \sigma^\vee$ és $(-m_0) \in \tau^\vee$ és $\sigma \cap \tau = \sigma \cap \{m_0\}^\perp = \tau \cap \{m_0\}^\perp$.

Ekkor a 3.3.9 Tétel alapján

$$\mathcal{S}_{\sigma\cap\tau} = \mathcal{S}_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m_o) \subset \mathcal{S}_\sigma + \mathcal{S}_\tau \Rightarrow \mathcal{S}_{\sigma\cap\tau} = \mathcal{S}_\sigma + \mathcal{S}_\tau.$$

Tudjuk, hogy $\mathcal{S}_\sigma$ és $\mathcal{S}_\tau$ végesen generáltak, mint monoidok; jelölje $\{m_1, ..., m_p\}$ és $\{m'_1, ..., m'_q\}$ a generátorrendszereiket. Korábban láttuk, hogy ezek meghatároznak egy $U_\sigma \to \mathbb{C}^p$ és egy $U_\tau \to \mathbb{C}^q$ beágyazást.

Vegyük észre, hogy ekkor az$\{m_1, ..., m_p, m'_1, ..., m'_q\}$ egy generátorrendszere az $\mathcal{S}_{\sigma\cap\tau}$-nak, sőt, az így kapott

$$(e(m_1), ..., e(m_p), e(m'_1), ..., e(m'_q)) : U_{\sigma\cap\tau} \to \mathbb{C}^{p+q}$$

beágyazás keresztülvezethető az

$$(e(m_1), ..., e(m_p)) \times (e(m'_1), ..., e(m'_q)) : U_\sigma \times U_\tau \to \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$$

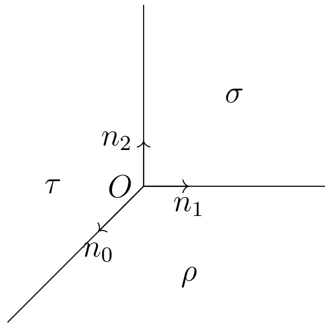
leképezésen. Így azt kapjuk, hogy az $U_{\sigma\cap\tau}$ és az $U_\sigma \times U_\tau$ zárt részhalmazai a $\mathbb{C}^{p+q}$-nak, tehát a fenti $U_{\sigma\cap\tau} \to U_\sigma \times U_\tau$ leképezés valóban zárt. Eszerint a $T_N emb(\triangle)$ tórikus varietás Hausdorff. $\square$

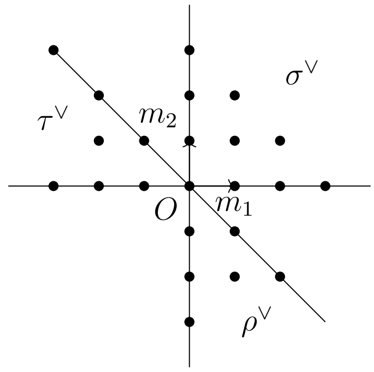
3.3.11. Megjegyzés. *A 3.3.6 Állítás után megjegyeztük, hogy az U_σ-k affin algebrai varietások, az előző bizonyításból pedig az is látszik, hogy ezen U_σ-k közti ragasztások algebraiak $\Rightarrow T_N emb(\triangle)$ rendelkezik egy természetes lokálisan véges típusú komplex algebrai varietás struktúrájával.*

3.3.12. Példa.
1. *Ha $N \cong \mathbb{Z}$, $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} \subset N_\mathbb{R}$ konvex kúp és $\triangle = \{\{O\}, \sigma, -\sigma\}$ legyező, akkor a $T_N emb(\triangle)$-t úgy kapjuk, hogy az $U_\sigma = Spec\,(\mathbb{C}[x]) = \mathbb{C}$-t és az $U_{-\sigma} = Spec\,(\mathbb{C}[x^{-1}]) = \mathbb{C}$-t az $U_{\{O\}} = Spec\,(\mathbb{C}[x, x^{-1}]) = \mathbb{C}^*$ mentén összeragasztjuk $\Rightarrow T_N emb(\triangle) = \mathbb{CP}^1$.*

2. *A következő példákban legyen $N \cong \mathbb{Z}^2$ és $\{n_1, n_2\}$ egy bázisa. Jelölje $\{m_1, m_2\}$ az M duális bázisát. Ha a $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} n_1$, $\tau = \mathbb{R}_{\geq 0} n_2$ és $\triangle = \{\{O\}, \sigma, \tau\}$, akkor $U_\sigma = Spec\left(\mathbb{C}[x_1, x_2, x_2^{-1}]\right) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, $U_\tau = Spec\left(\mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, x_2]\right) = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ és $U_{\{O\}} = Spec\left(\mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}]\right) = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, így $T_N emb(\triangle) = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$.*

3. *Ha n_0 jelöli a $(-n_1-n_2)$ rácspontot és $\sigma=\mathbb{R}_{\geq 0}n_1+\mathbb{R}_{\geq 0}n_2$, $\tau=\mathbb{R}_{\geq 0}n_2+\mathbb{R}_{\geq 0}n_0$ és $\rho=\mathbb{R}_{\geq 0}n_0+\mathbb{R}_{\geq 0}n_1$, akkor legyen $\triangle$ ezen kúpok oldalaiból álló legyező. A duális kúpok a következők:*





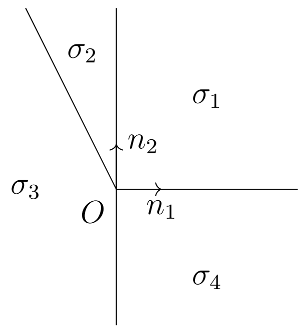
Így $U_\sigma=Spec\,(\mathbb{C}[x_1,x_2])=\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, $U_\tau=Spec\left(\mathbb{C}[x_1^{-1},x_1^{-1}x_2]\right)=\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ és $U_\rho=Spec\left(\mathbb{C}[x_2^{-1},x_1x_2^{-1}]\right)=\mathbb{C}\times\mathbb{C}$. Mivel

$$T_N=\{(x:y:z)\in\mathbb{CP}^2\mid xyz\neq 0\}\subset\mathbb{CP}^2-ben$$

$$[x_1:x_2:1]=\left[1:\frac{x_2}{x_1}:\frac{1}{x_1}\right]=\left[\frac{x_1}{x_2}:1:\frac{1}{x_2}\right],$$

így könnyen látható, hogy a ragasztások után $T_Nemb(\triangle)=\mathbb{CP}^2$-t kapunk.

4. *Legyen most a $\triangle$ legyező a lenti kúpok oldalaiból álló halmaz, ahol a ferde félegyenes a $(-1,a)$ rácsponton $(a\in\mathbb{Z})$ megy keresztül:*



Ekkor a négy kúphoz tartozó affin varietás a következő: $U_{\sigma_1}=Spec\,(\mathbb{C}[x_1,x_2])$, $U_{\sigma_2}=Spec\left(\mathbb{C}[x_1^{-1},x_1^ax_2]\right)$, $U_{\sigma_3}=Spec\left(\mathbb{C}[x_1^{-1},x_1^{-a}x_2^{-1}]\right)$ és végül az $U_{\sigma_4}=Spec\left(\mathbb{C}[x_1,x_2^{-1}]\right)$. A ragasztásokat a következő diagram szemlélteti:

$$\begin{array}{cccc}
U_{\sigma_2} & (x_1^{-1},x_1^ax_2)\longleftrightarrow(x_1,x_2) & & U_{\sigma_1}\\
 & \updownarrow \qquad\qquad \updownarrow & & \\
U_{\sigma_3} & (x_1^{-1},x_1^{-a}x_2^{-1})\longleftrightarrow(x_1,x_2^{-1}) & & U_{\sigma_4}.
\end{array}$$

*Az U_{σ_1} és U_{σ_4} ragasztásából, és ugyanígy az U_{σ_2} és U_{σ_3} ragasztásából is egy-egy $\mathbb{C} \times \mathbb{CP}^1$-et kapunk, melyeket az $x_1^{-1} \leftrightarrow x_1$ azonosítás mentén ragasztunk. Az így kapott $T_N emb(\triangle)$ tórikus varietás tehát egy $\mathbb{CP}^1$ feletti $\mathbb{CP}^1$-nyaláb, melyet $\mathbb{F}_a$-val jelölünk és **Hirzebruch felület**nek hívunk.*

A megfelelő térképek és közöttük levő ragasztó leképezések felírásával belátható, hogy az $\mathbb{F}_a \to \mathbb{CP}^1$ nyaláb izomorf a $\mathbb{P}\left(\mathcal{O}(a) \oplus \mathbb{1}\right)$ nyalábbal, azaz a $\mathbb{CP}^1$ fölötti $\mathcal{O}(a)$ és az $\mathbb{1}$ triviális nyaláb Whitney összegében levő egyenesek nyalábjával.

Vegyük észre, hogy mind a négy τ félegyenes meghatároz egy D_τ görbét a felületen (a következő alfejezetben látni fogjuk, hogy ez a görbe az $\overline{orb(\tau)}$). Ez a görbe azon két nyílt U_{σ_i} metszetében van benne, amely σ_i kúpoknak oldala a τ. Mindkét ilyen nyílt halmazt egy $\mathbb{C}$-ben metszi, melyek a szokásos módon egy $\mathbb{CP}^1$-ként ragadnak össze: a $D_\tau \cap U_{\sigma_i}$ egyenlete $U_{\sigma_i} = \mathbb{C}^2$-ben $e(m) = 0$, ahol m az a generátora az $\mathcal{S}_{\sigma_i}$-nek, amely nem tűnik el a τ-n. Például ha $\tau = \mathbb{R}_{\geq 0} n_2$, akkor a D_τ görbét az $x_2 = 0$ egyenlet definiálja az $U_{\sigma_1} = Spec\left(\mathbb{C}[x_1, x_2]\right)$-ben, és $x_1^a x_2 = 0$ az $U_{\sigma_2} = Spec\left(\mathbb{C}[x_1^a x_2, x_1^{-1}]\right)$-ben. Vegyük észre, hogy ekkor a D_τ normálnyalábja a Hirzebruch felületben pont az $\mathcal{O}(-a)$, ugyanis az U_{σ_1} térképen az $x_2 \equiv 1$ alakú szelés az U_{σ_2} térképen $x_1^a x_2 = (x_1^{-1})^{-a}$ alakú, így a-rendű pólusa van $x_1^{-1} = 0$-ban. Tehát a D_τ^2 önmetszési szám $(-a)$.

5. *$\mathbb{CP}^2$ általánosításaként az összes komplex projektív teret megkaphatjuk: legyenek $n_0, n_1, ..., n_r$ olyan vektorok az $N \cong \mathbb{Z}^r$-ben, melyek generálják a rácsot és melyekre $n_0 + n_1 + ... + n_r = 0$. Ha $\triangle$ az a legyező, amely az $\{n_0, n_1, ..., n_r\}$ halmaz valódi részhalmazai által generált kúpokból áll, akkor a hozzá tartozó $T_N emb(\triangle)$ tórikus varietás a $\mathbb{CP}^r$. Ennek belátásához elég az $\{n_0, n_1, ..., n_r\}$ halmazból egy bázist kiválasztani, például legyel $\{n_1, ..., n_r\}$ az, így ebben a bázisban $n_0 = -n_1 - ... - n_r$, ekkor a konkrét térképekből és ragasztásaikból már leolvasható az állítás.*

   Egy szimmetrikusabb leírást kapunk, ha az N-et $\mathbb{Z}^{n+1}/\mathbb{Z}(1,1,...,1)$-ként vesszük fel, az n_i vektorok pedig a $\mathbb{Z}^{n+1}$ standard bázisvektorainak megfelelő mellékosztályok. Ebben a konstrukcióban a $\mathbb{CP}^r = (\mathbb{C}^{r+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$ alakú felírás ismerhető fel, ugyanis a $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} n_0 + ... + \mathbb{R}_{\geq 0} n_r \subset \mathbb{Z}^{r+1}$ kúpra az $U_\sigma = \mathbb{C}^{r+1}$ és ezt a $\mathbb{C}^* \cong \gamma_{(1,1,...,1)} \leqslant T_{\mathbb{Z}^{r+1}}$ egyparaméteres részcsoport hatása szerint faktorizálva pont a $\mathbb{CP}^r$-et kapjuk. Speciálisan, ezzel a leírással megkapjuk a $T_N = (\mathbb{C}^*)^{r+1}/\mathbb{C}^*$ természetes beágyazását a $\mathbb{CP}^r$-be.

3.3.13. Megjegyzés. *A $T_N emb(\triangle)$-t azért nevezzük tórikus varietásnak, mert automatikusan tartalmazza a T_N algebrai tóruszt: minden legyező tartalmazza a $\{O\}$*

kúpot, mivel ő minden $\sigma \in \triangle$ SCRPC-nek oldala. Mivel $\{O\}^\vee = M_\mathbb{R}$, ezért $\mathcal{S}_{\{O\}} = M \Rightarrow U_{\{O\}} = T_N \Rightarrow$ a T_N algebrai tórusz nyílt részhalmaza a $T_N emb(\triangle)$-nak.

Másfelől azt is fontos megjegyezni az elnevezés megértéséhez, hogy a T_N algebrailag (és így analitikusan) hat a $T_N emb(\triangle)$-on a fentebb bevezetett algebrai struktúrára nézve: ha $t \in T_N$ ($\Rightarrow t : M \to \mathbb{C}^*$, $t(m+m') = t(m)t(m')\ \forall m, m' \in M$-re) és $u \in U_\sigma$ ($\Rightarrow u : \mathcal{S}_\sigma \to \mathbb{C}$, $u(O) = 1$, $u(m+m') = u(m)u(m')\ \forall m, m' \in \mathcal{S}_\sigma$-ra), akkor $tu : \mathcal{S}_\sigma \to \mathbb{C}$, $tu(m) := t(m)u(m)\ \forall m \in \mathcal{S}_\sigma \Rightarrow tu \in U_\sigma$. Ez a hatás tényleg algebrai, ugyanis bármely $m = \sum_j a_j m_j$, $a_j \in \mathbb{Z}$ esetén $t(m) = e(m)(t) = \prod_j ((e(m_j)(t))^{a_j}$, míg $u(m_j) = e(m_j)(u) = u_j \Rightarrow tu(m_j) = e(m_j)(t)u_j \Rightarrow$ ez tényleg a megfelelő komponenseken a t megfelelő koordinátájával való szorzás $\Rightarrow$ az $U_{\{O\}}$-ra a $T_N = (\mathbb{C}^*)^r$-beli szorzásra szorul meg.

3.4. Orbit felbontás

Rögzített $N \cong \mathbb{Z}^r$ rács és $\triangle$ legyező esetén definiáltuk a $T_N emb(\triangle)$ tórikus varietást és megadtuk rajta a T_N természetes hatását: ha $t \in T_N = Hom_\mathbb{Z}(M, \mathbb{C}^*)$ és $u \in U_\sigma = \{v : \mathcal{S}_\sigma \to \mathbb{C} \mid v(O) = 1,\ v(m+m') = v(m)v(m')\ \forall m, m' \in \mathcal{S}_\sigma\}$, akkor $tu \in U_\sigma$, mert $tu : \mathcal{S}_\sigma \to \mathbb{C}$, $tu(m) = t(m)u(m)$. Ebből automatikusan látszik, hogy minden $\sigma \in \triangle$-ra U_σ nyílt, T_N-invariáns halmaz a $T_N emb(\triangle)$-ban.

3.4.1. Állítás. *Ha $\sigma \in \triangle$ egy SCRPC, legyen*

$$orb(\sigma) := \{u : M \cap \sigma^\perp \to \mathbb{C}^* \mid u(m+m') = u(m)u(m')\ \forall m, m' \in M \cap \sigma^\perp\} \subset T_N$$

egy T_N-orbit $T_N emb(\triangle)$-ban. Mivel $\sigma^\perp$ egy racionális lineáris altér, így az $orb(\sigma)$ egy legfeljebb r-dimenziós algebrai tórusz. Azt állítjuk, hogy minden T_N-orbit ilyen formájú, így a $\triangle$ azonosítható a $T_N emb(\triangle)$ orbitjaival. Sőt, a következők is teljesülnek:

1. *$orb(\{O\}) = U_{\{O\}} = T_N$;*
2. *$\sigma \in \triangle \Rightarrow$ Az $orb(\sigma)$ komplex analitikus halmaz dimenziója a $dim(\sigma^\perp) = r - dim(\sigma)$ kodimenzió;*
3. *$\sigma, \tau \in \triangle$, $\tau < \sigma \Leftrightarrow orb(\sigma) \subset \overline{orb(\tau)}$;*
4. *ha $\sigma \in \triangle$, akkor $orb(\sigma)$ az egyetlen zárt T_N-orbit U_σ-ban és $U_\sigma = \bigsqcup_{\tau < \sigma} orb(\tau)$;*
5. *$n \in N$-re és $\sigma \in \triangle$-ra $n \in \sigma$ akkor és csakis akkor, ha a γ_n egyparaméteres részcsoportra teljesül, hogy létezik a $lim_{\lambda \to 0}\gamma_n(\lambda)$ és eleme az U_σ-nak. Ekkor a limesz megegyezik az $orb(\tau)$ egységelemével ($orb(\tau)$-ra algebrai tóruszcsoportként gondolva), ahol τ az az oldala a σ-nak, mely a belsejében tartalmazza az n-et.*

Bizonyítás. Az *1.* és *2.* tulajdonságok automatikusan következnek a definíciókból.

Az *5.* tulajdonsághoz tekintsük a $\gamma_n : \mathbb{C}^* \to T_N$ egyparaméteres részcsoportot: $\gamma_n(\lambda)(m) = \lambda^{\langle m,n \rangle}$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$, $\forall m \in M$-re. A $lim_{\lambda \to 0}\gamma_n(\lambda)(m)$ létezik minden $m \in \mathcal{S}_\sigma$-ra (azaz az U_σ-ban) akkor és csakis akkor, ha $\forall m \in \mathcal{S}_\sigma : \ \langle m,n \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \forall m \in \sigma^\vee : \ \langle m,n \rangle \geq 0$ (mivel az $\mathcal{S}_\sigma$ generálja a σ-t az $\mathbb{R}_{\geq 0}$ felett) $\Leftrightarrow n \in \sigma^{\vee\vee} = \sigma$. Ekkor $lim_{\lambda \to 0}\gamma_n(\lambda)(m) = 1$, ha $\langle m,n \rangle = 0$, azaz $m \in M \cap \tau^\perp \cap \sigma^\vee$ és $lim_{\lambda \to 0}\gamma_n(\lambda)(m) = 0$ egyébként az $\mathcal{S}_\sigma$-n $\Rightarrow$ ő tényleg az $orb(\tau)$ egységeleme, jelölje őt x_σ.

Most belátjuk, hogy az $orb(\sigma)$ tényleg egy T_N-orbit. Valóban, ha $\sigma \in \triangle$, akkor a 3.1.13 Állítás alapján $\sigma^\perp$ a legnagyobb lineáris altér $\sigma^\vee$-ban $\Rightarrow M \cap \sigma^\perp$ a legnagyobb részcsoport az $\mathcal{S}_\sigma$-ban. Ha most $u : M \cap \sigma^\perp \to \mathbb{C}^*$ egy csoporthomomorfizmus, akkor őt kiterjeszthetjük egy $u : \mathcal{S}_\sigma \to \mathbb{C}$ leképezéssé úgy, hogy minden $m \notin M \cap \sigma^\perp$-ra $u(m) = 0$ legyen. Ezt a 3.1.16 Állítás alapján tehetjük meg, mivel $\sigma^\perp$ oldala a $\sigma^\vee$-nek $\Rightarrow$ így kiterjesztve az u-kat $orb(\sigma)$ nyilván része U_σ-nak és nyilván egy T_N-orbit U_σ-ban.

A *4.* tulajdonság második részéhez általánosítsuk az előző érvelést. Ha $u \in U_\sigma \Rightarrow u : \mathcal{S}_\sigma \to \mathbb{C}, \ u(O) = 1, \ u(m + m') = u(m)u(m') \ \forall m, m' \in \mathcal{S}_\sigma$-ra, akkor a 3.1.16 Állítás szerint az $\{m \in \mathcal{S}_\sigma \mid u(m) \neq 0\} = M \cap \rho$ egy $\rho < \sigma^\vee$ oldalra. De a 3.1.13 Állítás szerint $\sigma^\vee$ minden oldala $\sigma^\vee \cap \tau^\perp, \ \tau < \sigma$ alakú $\Rightarrow$ az $u \in U_\sigma$ meghatározza ezt a $\tau < \sigma$ oldalt:

$$\{m \in \mathcal{S}_\sigma \mid u(m) \neq 0\} = M \cap \sigma^\vee \cap \tau^\perp = \mathcal{S}_\sigma \cap \tau^\perp.$$

De mivel σ SCRPC, így $\mathcal{S}_\sigma + (-\mathcal{S}_\sigma) = M \Rightarrow$ belátható, hogy $\mathcal{S}_\sigma \cap \tau^\perp + (-\mathcal{S}_\sigma \cap \tau^\perp) = M \cap \tau^\perp$, azaz $\mathcal{S}_\sigma \cap \tau^\perp$ generálja $M \cap \tau^\perp$-t. De ekkor, ha ismerem az u értékeit az $\mathcal{S}_\sigma \cap \tau^\perp$-on, akkor onnan egyértelműen tudom kiterjeszteni az egész $M \cap \tau^\perp$-ra. Ebből következik, hogy az

$$\{u \in U_\sigma \mid u\left(\mathcal{S}_\sigma \cap \tau^\perp\right) \subset \mathbb{C}^*, \ u\left(\mathcal{S}_\sigma \setminus \tau^\perp\right) \equiv 0\}$$

halmaz azonosítható $orb(\tau) = Hom_{\mathbb{Z}}(M \cap \tau^\perp, \mathbb{C}^*)$-al. Ezek szerint $U_\sigma = \bigsqcup_{\tau < \sigma} orb(\tau)$ teljesül és így azt is megkaptuk, hogy minden orbit ilyen alakú.

A *3.* tulajdonsághoz vegyük észre, hogy ha $orb(\sigma) \subset \overline{orb(\tau)} \Rightarrow$ minden $orb(\sigma)$-t tartalmazó nyílt halmaz elmetszi az $orb(\tau)$-t $\Rightarrow$ az U_σ invariáns nyílt halmaz metszi, tehát tartalmazza is az $orb(\tau)$-t $\Rightarrow$ a *4.* tulajdonság előbb belátott része alapján $\tau < \sigma$.

A vissza irányhoz tegyük fel, hogy $\tau < \sigma$. Ebből következik, hogy $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$ oldala a $\sigma^\vee$-nak. Legyen $u \in orb(\tau) = Hom_{\mathbb{Z}}(M \cap \tau^\perp, \mathbb{C}^*), \ u \equiv 1$ és legyen $n \in relint(\sigma) \Rightarrow$ a 3.1.10 Lemma alapján $\langle m,n \rangle > 0 \ \forall m \in M \cap \sigma^\vee \cap \tau^\perp \setminus \sigma^\perp$-ra. Másfelől, mivel $\gamma_n(\lambda) \in T_N \ \forall \lambda \in \mathbb{C}^*$-ra, kapjuk, hogy $\gamma_n(\lambda)u \in orb(\tau)$ és $\left(\gamma_n(\lambda)u\right)(m) = \lambda^{\langle m,n \rangle}$, minden $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\forall m \in M \cap \sigma^\vee \cap \tau^\perp$ esetén. Ekkor a $lim_{\lambda\to 0}\gamma_n(\lambda)u$ létezik az U_σ-n az n rácspont választása alapján: jelölje a limeszt u_0, ekkor $u_0(m) = 1$, ha $m \in M \cap \sigma^\perp$ és $u_0(m) = 0$, ha $m \in M \cap \sigma^\vee \cap \tau^\perp \setminus \sigma^\perp$. Ekkor $u_0 \in orb(\sigma) \Rightarrow orb(\sigma) \cap \overline{orb(\tau)} \neq \emptyset$, ahol a T_N-hatás folytonossága miatt mindkét halmaz invariáns $\Rightarrow orb(\sigma) \subset \overline{(orb(\tau)}$.

A *4*. tulajdonság első fele, azaz, hogy $orb(\sigma)$ az egyetlen zárt orbit U_σ-ban, természetesen adódik onnan, hogy $U_\sigma = \bigsqcup_{\tau<\sigma} orb(\tau)$ és a *3*. tulajdonság alapján $\overline{orb(\tau)} \supset orb(\sigma) \Rightarrow$ tehát az $orb(\tau)$ nem zárt az U_σ-ban minden $\tau < \sigma$ valódi oldal esetén. □

3.4.2. Következmény. *Legyen $\tau \in \triangle$ egy SCRPC, jelölje $\mathbb{Z}(\tau \cap N)$ a $(\tau \cap N)$ által generált részcsoportot az N-ben és legyen $\overline{N}(\tau) := N/\mathbb{Z}(\tau \cap N)$ a mellékosztályok csoportja. Ha $\sigma \in \triangle$ és $\tau < \sigma$, jelölje $\overline{\sigma} := (\sigma + \mathbb{R}\tau)/\mathbb{R}\tau$ a σ képét az $\overline{N}(\tau)_\mathbb{R} = N_\mathbb{R}/\mathbb{R}\tau$ hányados vektortéren. Ekkor $\overline{\triangle}(\tau) := \{\overline{\sigma} \mid \sigma \in \triangle,\ \tau < \sigma\}$ egy legyező $\overline{N}(\tau)$-ban és $T_{\overline{N}(\tau)}emb(\overline{\triangle}(\tau))$ megegyezik a $V(\tau) := \overline{orb(\tau)} \subset T_N emb(\triangle)$ lezárttal. Speciálisan, a $V(\tau)$ mindig normális, sőt nemszinguláris, ha $T_N emb(\triangle)$ az.*

Bizonyítás. A könnyebb olvashatóság céljából jelölje $\overline{N} := \overline{N}(\tau)$-t és $\overline{\triangle} := \overline{\triangle}(\tau)$-t. A 3.1.15 Állítás alapján a $\overline{\sigma}$ egy SCRPC az $\overline{N}_\mathbb{R}$-ben minden $\sigma > \tau$-ra és a $\overline{\triangle}$ egy legyező az $\overline{N}$-ben. Az előző állítás *3*. alpontja szerint $V(\tau) = \bigcup_{\sigma\in\triangle,\ \sigma>\tau} orb(\sigma)$ és $V(\tau) \subset \bigcup_{\sigma\in\triangle,\ \sigma>\tau} U_\sigma$.

Vegyük észre, hogy az $\overline{N}$ duálisa az $M \cap \tau^\perp$ tér, sőt, ha $\sigma > \tau \Rightarrow (\overline{\sigma})^\vee = \sigma^\vee \cap \tau^\perp$ és így $\overline{\mathcal{S}}_{\overline{\sigma}} := (M \cap \tau^\perp) \cap (\overline{\sigma})^\vee = \mathcal{S}_\sigma \cap \tau^\perp$. Elég tehát azt belátni, hogy az

$$\overline{U}_{\overline{\sigma}} := \{\overline{u} : \overline{\mathcal{S}}_{\overline{\sigma}} \to \mathbb{C} \mid \overline{u}(O) = 1,\ \overline{u}(m + m') = \overline{u}(m)\overline{u}(m'),\ \text{ha } m, m' \in \overline{\mathcal{S}}_{\overline{\sigma}}\}$$

megegyezik a $V(\tau) \cap U_\sigma$-val. Vegyük észre, hogy az előző állítás bizonyítása alapján $u \in V(\tau) \cap U_\sigma$ pontosan akkor, ha $u \in U_\sigma$ és $u\big|_{\mathcal{S}_\sigma\setminus\tau^\perp} \equiv 0$. Az

$$U_\sigma \ni u \mapsto u\big|_{\tau^\perp} = u\big|_{\overline{\mathcal{S}}_{\overline{\sigma}}} \in \overline{U}_{\overline{\sigma}}$$

nyilván egy jól definiált leképezés U_σ-ból $\overline{U}_{\overline{\sigma}}$-ba. A másik irányba minden $\overline{u} \in \overline{U}_{\overline{\sigma}}$ a 3.1.16 Állítás szerint kiterjeszthető egy $u : \mathcal{S}_\sigma \to \mathbb{C}$ leképezéssé a következőképpen: $u(m) = \overline{u}(m)$, ha $m \in \mathcal{S}_\sigma \cap \tau^\perp$ és $u(m) = 0$, ha $m \in \mathcal{S}_\sigma \setminus \tau^\perp$. Ekkor ez a két leképezés nyilván egymás inverze, tehát minden $\sigma \in \overline{\triangle}$-ra $\overline{U}_{\overline{\sigma}} = V(\tau) \cap U_\sigma$ és így $V(\tau) = T_{\overline{N}}emb(\overline{\triangle})$.

A normalitás lokális tulajdonság (lásd Appendix), így elég ha pontonként teljesül, a nemszingularitáshoz pedig lásd a 3.5.1 Tételt.

□

3.4.1. A tórikus varietáshoz rendelt szögletes sokaság

Ismeretes, hogy a $\mathbb{C}^*$, mint valós Lie-csoport, szorzatra bontható a következőképpen: $\mathbb{C}^* = U(1) \times \mathbb{R}_{>0}$, ahol $U(1) = S^1$ az egységhosszú komplex számok csoportja. Ezen felbontást alkalmazva kapjuk, hogy

$$T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* = Hom_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*) = CT_N \times (N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}_{>0}),$$

$$ahol\ CT_N := N \otimes_{\mathbb{Z}} U(1) = N \otimes_{\mathbb{Z}} S^1 = Hom_{\mathbb{Z}}(M, U(1)).$$

Ezt a CT_N-et nevezzük az N-hez rendelt **kompakt tórusz**nak, ő a valós T^r tórusszal izomorf.

Tekintsük most a $\mathbb{C}^* \xrightarrow{|.|} \mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{-log(.)} \mathbb{R}$ szürjektív homomorfizmust, ő indukál egy $-log\,(|.|) : T_N \to N_{\mathbb{R}}$ szürjektív homomorfizmust, melynek magja pont a CT_N kompakt tórusz. Sőt,

$$-log\,(|.|)\Big|_{N\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}_{>0}} : N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\simeq} N_{\mathbb{R}}$$

egy izomorfizmus, így ez megadja a $-log\,(|.|) : T_N \to N_{\mathbb{R}}$ egy szelését.

Ha $\triangle$ egy legyező és $\sigma \in \triangle$ egy SCRPC, akkor legyen

$$(U_\sigma)_{\geq 0} := \{w : \mathcal{S}_\sigma \to \mathbb{R}_{\geq 0} \mid w(O) = 1, w(m + m') = w(m)w(m'),\ \forall m, m' \in \mathcal{S}_\sigma\}.$$

$(U_\sigma)_{\geq 0}$-ra gondolhatunk U_σ topolgikus altereként is, amennyiben $\mathbb{R}_{\geq 0}$-t $\mathbb{C}$ topologikus alterének tekintjük. Vegyük észre, hogy ekkor minden $u \in U_\sigma$-t be tudunk ebbe az altérbe mozgatni a $CT_N \leqslant T_N$ hatása szerint, ugyanis a 3.1.16 Állítás szerint az $\{m \in \mathcal{S}_\sigma \mid w(m) \neq 0\}$ rácspontok által feszített kúp a $\sigma^\vee$ egy oldala.

A 3.3.6 Állításhoz hasonlóan, ha $\mathcal{S}_\sigma = \mathbb{Z}_{\geq 0}m_1 + ... + \mathbb{Z}_{\geq 0}m_p$

$$\Rightarrow (U_\sigma)_{\geq 0} \to (\mathbb{R}_{\geq 0})^p,\ w \mapsto (w(m_1), ..., w(m_p))$$

zárt immerzió (az $(U_\sigma)_{\geq 0} \subset U_\sigma$-n az altértopológiát használva).

Ezen $(U_\sigma)_{\geq 0}$ tereket összeragasztva kapjuk a

$$T_N emb(\triangle)_{\geq 0} := \bigcup_{\sigma \in \triangle} (U_\sigma)_{\geq 0} \subset T_N emb(\triangle)$$

topologikus teret. Ha $N \cong \mathbb{Z}^r$ és a $\triangle$ nemszinguláris, akkor a $T_N emb(\triangle)_{\geq 0}$ egy r-dimenziós valós szögletes sokaság.

3.4.3. Definíció. *Az X topologikus tér egy r-**dimenziós szögletes sokaság** (manifold with corners), ha teljesíti a T_2 és M_2 axiómákat és minden $x \in X$-re létezik $U \ni x$ nyílt környezet és $f_U : U \to H_{k,r}$ homeomorfizmus, ahol $H_{k,r} = (\mathbb{R}_{\geq 0})^k \times \mathbb{R}^{r-k}$. A $k = 0, 1, ..., r$ értéke pontonként változhat. A térképek közötti*

$$h = f_V \circ f_U^{-1}\big|_{H_{k,r}\cap f_U^{-1}(U\cap V)} : H_{k,r} \cap f_U^{-1}(U \cap V) \to H_{k,r}$$

áttérési leképezések megőrzik a szögleteket, azaz $h\left(\{O\} \times \mathbb{R}^{r-k}\right) \subset \{O\} \times \mathbb{R}^{r-k}$.

Vegyük észre, hogy az $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}_{>0} = Hom_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{R}_{>0})$ csoport hat a $T_N emb(\triangle)_{\geq 0}$-n, az ezen hatás szerinti orbitok:

$$orb(\tau)_{\geq 0} := Hom_{\mathbb{Z}}(M \cap \tau^{\perp}, \mathbb{R}_{>0}).$$

Ha $\tau < \sigma$ oldal, akkor az $orb(\tau)_{\geq 0}$-ra gondolhatunk az $(U_\sigma)_{\geq 0}$ altereként, mint az általános esetben a 3.4.1 Állításban, azaz a $w : M \cap \tau^{\perp} \to \mathbb{R}_{>0}$ homomorfizmust kiterjeszthetjük egy $\tilde{w} : \mathcal{S}_\sigma \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\tilde{w}\big|_{\tau^\perp} = w$, $\tilde{w}\big|_{\mathcal{S}_\sigma \setminus \tau^\perp} \equiv 0$ leképezéssé.

3.4.4. Állítás. *Legyen $\triangle$ egy legyező N-ben. Jelölje az*

$$ord : T_N emb(\triangle) \to Mc(N, \triangle) = T_N emb(\triangle)/CT_N$$

a kompakt tórusz menti projekciót. A $Mc(N, \triangle)$ faktorteret nevezzük ***az*** $(N, \triangle)$ ***legyezőhöz rendelt szögletes sokaság****nak. Az $N_{\mathbb{R}}$ hat az $Mc(N, \triangle)$-on úgy, hogy az ord projekció ekvivariáns a $-log\,(|.|) : T_N \to N_{\mathbb{R}}$ leképezésre nézve:*

$$\begin{tikzcd}
T_N emb(\triangle) \arrow[r, "\cdot t"] \arrow[d, "ord"'] \arrow[dr, phantom, "\downarrow -log(|.|)"] & T_N emb(\triangle) \arrow[d, "ord"] \\
Mc(N, \triangle) \arrow[r, "\cdot(-log(|t|))"'] & Mc(N, \triangle)
\end{tikzcd}$$

$Mc(N, \triangle)$ orbitjai ezen $N_{\mathbb{R}}$ hatásra nézve:

$$ord(orb(\tau)) = orb(\tau)/CT_N = N_{\mathbb{R}}/\mathbb{R}\tau, \ \tau \in \triangle \ \text{alakúak.}$$

Speciálisan, $ord\,(orb\,(\{O\})) = T_N/CT_N = N_{\mathbb{R}}$ az egyetlen nyílt $N_{\mathbb{R}}$-orbit $Mc(N, \triangle)$-ban. Mivel az ord projekció megtartja az orbitokat, így

$$Mc(N, \triangle) = ord(T_N emb(\triangle)) = ord\left(\bigcup_{\tau \in \triangle} orb(\tau)\right) = \bigcup_{\tau \in \triangle} N_{\mathbb{R}}/\mathbb{R}\tau.$$

Az

$$ord\big|_{T_N emb(\triangle)_{\geq 0}} : T_N emb(\triangle)_{\geq 0} \xrightarrow{\simeq} Mc(N, \triangle)$$

leképezés egy homeomorfizmus, ami ekvivariáns a $-log : N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\simeq} N_{\mathbb{R}}$ csoport-izomorfizmusra nézve.

Bizonyítás. Az $Mc(N, \triangle) = T_N emb(\triangle)_{\geq 0}$ azonosításhoz azt kell megvizsgálni, hogy minden CT_N-orbitban pontosan egy $T_N emb(\triangle)_{\geq 0}$-beli elem van. Mivel az U_σ-k invariánsok a T_N hatására nézve minden $\sigma \in \triangle$ SCRPC esetén, ezért elég annyit belátni, hogy $U_\sigma/CT_N = (U_\sigma)_{\geq 0}$. Nyilván az

$$|.| : U_\sigma \to (U_\sigma)_{\geq 0}, (u : m \mapsto u(m) \in \mathbb{C}^*) \mapsto (|u| : m \mapsto |u(m)| \in \mathbb{R}_{\geq 0})$$

egy CT_N-hatásra invariáns leképezés $\Rightarrow$ kiterjed egy $U_\sigma/CT_N \to (U_\sigma)_{\geq 0}$ leképezéssé. Ha most $u \in U_\sigma \Rightarrow$ a 3.1.16 Állítás értelmében az $\{m \in \mathcal{S}_\sigma \mid u(m) \neq 0\}$ egy $\tau < \sigma^\vee$ oldalt feszít, melyre $\mathcal{S}_\sigma \cap \tau + (-\mathcal{S}_\sigma \cap \tau) = \mathbb{R}\tau \cap M \Rightarrow$ az u kiterjed egy egyértelmű $\tilde{u} : \mathbb{R}\tau \cap M \to \mathbb{C}^*$, $\tilde{u}\big|_{\mathcal{S}_\sigma \cap \tau} \equiv u\big|_{\mathcal{S}_\sigma \cap \tau}$ leképezéssé. Ha most $\{m_1, ..., m_k\}$ az $\mathbb{R}\tau \cap M$ Abel-csoport egy bázisa, akkor ő kiegészíthető valami $m'_{k+1}, ..., m'_r \in M$ elemekkel az M egy bázisává. Ekkor azonban értelmezhető az $arg(u) \in CT_N = Hom_{\mathbb{Z}}(M, U(1))$ leképezés a következőképpen:

- $arg(u)(m) = \tilde{u}(m)/|\tilde{u}(m)|$, ha $m \in \mathbb{R}\tau \cap M$;
- $\arg(u)(m'_j) = 1$, ha $j \in \{k+1, ..., r\}$;
- $arg(u)(m + m') = arg(u)(m)arg(u)(m')$ minden $m, m' \in M$-re.

De ekkor $|u| = u(arg(u))^{-1}$ teljesül az $\mathcal{S}_\sigma$-n. Ez tetszőleges $u \in U_\sigma$ esetén igaz, így az $|.| : T_Nemb(\triangle)/CT_N \to T_Nemb(\triangle)_{\geq 0}$ egy homeomorfizmus, tehát az $Mc(N, \triangle)$ valóban egy szögletes sokaság

Ismeretes, hogy a $-log(.) : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ csoport izomorfizmus, így az

$$id \otimes (-log(.)) : N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}_{>0} \to N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

is az. Ekkor az $N_{\mathbb{R}}$ hatását az $Mc(N, \triangle)$ szögletes sokaságra ezen az izomorfizmuson és a fenti homeomorfizmuson keresztül húzzuk vissza a $T_Nemb(\triangle)_{\geq 0}$-ről. Így nyilván teljesül az *ord* projekcióra az ekvivariencia. Az állítás többi része ezen azonosításokból már könnyen következik. $\square$

Halmazelméletileg $Mc(N, \triangle)$ az $N_{\mathbb{R}} = ord(T_N)$ és az $N_{\mathbb{R}}/\mathbb{R}\tau$ a "∞-ben τ-ra merőleges" vektorterek uniója.

3.5. Nemszingularitás és kompaktság

3.5.1. Tétel. *Egy $(N, \triangle)$ legyező esetén a $T_Nemb(\triangle)$ tórikus varietás nemszinguláris (azaz ő egy sima komplex sokaság) akkor és csakis akkor, ha minden $\sigma \in \triangle$ kúp nemszinguláris a következő értelemben: $\exists$ olyan $\{n_1, ..., n_r\}$ bázisa N-nek és létezik olyan s egész, $0 \leq s \leq r$, hogy $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}n_1 + ... + \mathbb{R}_{\geq 0}n_s$. Ekkor a $\triangle$ legyezőt* ***nemszinguláris****nak vagy* ***reguláris****nak (nonsingular) nevezzük.*

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy a nemszinguláris σ SCRPC-khez tartozó U_σ affin varietások simák. Valóban, ha $\{n_1, ..., n_r\}$ egy bázisa az N-nek, akkor legyen $\{m_1, ..., m_r\}$ az M duális bázisa. Ha $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}n_1 + ... + \mathbb{R}_{\geq 0}n_s$ valamilyen s-re, kapjuk, hogy $\sigma^\vee = \sum_{j=1}^{s} \mathbb{R}_{\geq 0}m_j + \sum_{j=s+1}^{r} \mathbb{R}m_j \Rightarrow \mathcal{S}_\sigma = \sum_{j=1}^{s} \mathbb{Z}_{\geq 0}m_j + \sum_{j=s+1}^{r} \mathbb{Z}m_j \Rightarrow$ Az

$$U_\sigma \to \{(z_1, ..., z_r) \in \mathbb{C}^r \mid\ j \in \{s+1, ..., r\} :\ z_j \neq 0\} = \mathbb{C}^s \times (\mathbb{C}^*)^{r-s},$$

$$U_\sigma \ni u \mapsto (u(m_1), ..., u(m_r)) \in \mathbb{C}^r$$

leképezés egy izomorfizmus, így az U_σ nemszinguláris. Valóban, mivel $\{m_1, ..., m_r\}$ bázisa az M-nek, így minden $m \in M$ egyértelműen fejezhető ki ebben a bázisban, ebből könnyen következik, hogy a leképezés injektív és szürjektív. Mivel a komplex struktúrát is lényegében ezen a leképezésen keresztül definiáltuk, így ő valójában holomorf izomorofizmus.

Ha most a $\triangle$ legyező minden σ kúpja nemszinguláris, akkor minden pont körül, egy őt tartalmazó U_σ-ban tudunk $\mathbb{C}^r$-rel biholomorf sima környezetet találni, tehát a $T_N emb(\triangle)$ valóban nemszinguláris.

A vissza irányhoz tegyük fel, hogy $T_N emb(\triangle)$ sima, azaz minden $\sigma \in \triangle$-ra az U_σ nemszinguláris és lássuk be, hogy ekkor a σ kúpot feszíti az N valamely bázisának egy kezdő része.

Feltehető, hogy $dim(\sigma) = r \Leftrightarrow \sigma + (-\sigma) = N_\mathbb{R} \Rightarrow \sigma^\vee \cap (-\sigma)^\vee = \sigma^\perp = \{O\}$. Ezt valóban megtehetjük: jelölje N' az $N \cap \sigma$ által generált részcsoportot és M' a duálisát, ekkor $M'_\mathbb{R} = M_\mathbb{R}/\sigma^\perp$. A $\sigma^\vee$ képe $M'_\mathbb{R}$-ben legyen σ^*, ő a $\sigma \subset N'_\mathbb{R}$ duális kúpja. Mivel $\sigma^\perp$ racionális altér az M-ben $\Rightarrow \exists M'' \leqslant M$, hogy $M = \left(M \cap \sigma^\perp\right) \oplus M''$, így $M'' \cong M'$. Legyenek $m_1, ..., m_q \in M''$ olyanok, hogy M'-beli képeik generálják az $M' \cap \sigma^*$-ot a $\mathbb{Z}$ felett és $\mathcal{S}' := \sum_{j=1}^q \mathbb{Z}_{\geq 0} m_j$. Ekkor az M felbontásának egyértelműségéből kapjuk, hogy $\mathcal{S}_\sigma = M \cap \sigma^\vee = \mathcal{S}' \oplus \left(M \cap \sigma^\perp\right) \Rightarrow U_\sigma = U' \times \mathbb{C}^* \times ... \times \mathbb{C}^*$, ahol $U' = \{u : \mathcal{S}' \to \mathbb{C} \mid u(O) = 1,\ u(m + m') = u(m)u(m'),\ \forall m, m' \in \mathcal{S}'\}$. Ez az U' nyilván a $\sigma \subset N'_\mathbb{R}$ kúphoz tartozó tórikus varietás és pontosan akkor nemszinguláris, ha az U_σ az, míg σ generátorrendszere pontosan akkor egészíthető ki N' bázisává, ha kiegészíthető az N-évé.

Visszatérve tehát az r-dimenziós σ SCRPC-hez, vegyük az $\mathcal{S}_\sigma$ monoidnak egy $m_1, ..., m_p$ minimális generátorrendszerét a $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ fölött és nézzük az

$$(e(m_1), ..., e(m_p)) : U_\sigma \to \mathbb{C}^p$$

zárt beágyazást. Azt kell belássuk, hogy $p = r$ és az $\{m_1, ..., m_r\}$ egész bázisa M-nek tudva, hogy az U_σ nemszinguláris. Tekintsük ehhez a 3.3.6 Állítás bizonyításában szereplő egzakt sort:

$$\begin{array}{c} 0 \longrightarrow I := (f_1, ..., f_q) \longrightarrow \mathbb{C}[x_1, ..., x_p] \longrightarrow \mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma] = \mathbb{C}[e(m_1), ..., e(m_p)] =: R \longrightarrow 0. \\ x_j \longrightarrow e(m_j) \end{array}$$

Mivel $\sigma^\vee \cap (-\sigma^\vee) = \{O\} \Rightarrow \mathcal{S}_\sigma \cap (-\mathcal{S}_\sigma) = \{O\} \Rightarrow o := (0, 0, ..., 0) \in U_\sigma \Rightarrow$ az ideálokra $I = I(U_\sigma) \leqslant I(\{o\}) = (x_1, ..., x_p) =: J$ teljesül és J/I maximális ideálja az R-nek.

Mivel az U_σ nemszinguláris $\Rightarrow$ az o-ban is sima, azaz a koérintőtér

$$T_o^* U_\sigma = J/\left(I + J^2\right) = \frac{(J/I)}{(J/I)^2}$$

egy r-dimenziós komplex vektortér. A 3.3.6 Állítás alapján T_N hat az R algebrán, sőt, $R = \oplus_{m\in\mathcal{S}_\sigma}\mathbb{C}e(m)$ a sajátalterekre való felbontás. Ekkor $J/I = \oplus_{O\neq m\in\mathcal{S}_\sigma}\mathbb{C}e(m)$, azaz $\{e(m) \mid m \in \mathcal{S}_\sigma,\ m \neq O\}$ bázisa a J/I-nek $\mathbb{C}$ felett

$$\Rightarrow \{e(m' + m'') \mid m', m'' \in \mathcal{S}_\sigma,\ m' \neq O,\ m'' \neq O\}$$

bázisa $(I + J^2)/I$-nek $\mathbb{C}$ felett $\Rightarrow$ pontosan r darab olyan $O \neq m \in \mathcal{S}_\sigma$ létezik, melyre $m \neq m' + m''$ bármely $m', m'' \in \mathcal{S}_\sigma \setminus \{O\}$ esetén. Mivel $m_1, ..., m_p$ az $\mathcal{S}_\sigma$ egy generátorrendszere volt, ezért velük minden más rácspont kifejezhető, viszont mivel ők minimális generátorrendszert alkotnak $\Rightarrow$ saját maguk már nem fejezhetőek ki egymásból $\Rightarrow$ ők pont a $J/(I + J^2)$ bázisa a $\mathbb{C}$ felett $\Rightarrow p = r$ és ők valóban M-nek egy egész bázisát adják, mert $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ fölött generálják az $\mathcal{S}_\sigma$-t (és $\mathcal{S}_\sigma + (-\mathcal{S}_\sigma) = M$). Tehát ha $\{n_1, ..., n_r\}$ az $\{m_1, ..., m_r\}$ duális bázisa $\Rightarrow \sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}n_1 + ... + \mathbb{R}_{\geq 0}n_r$. □

3.5.2. Tétel. *A $T_N emb(\triangle)$ tórikus varietás pontosan akkor kompakt, ha a $\triangle$ legyező véges és teljes, azaz $\triangle$ egy véges halmaz és a $|\triangle| = \bigcup_{\sigma\in\triangle}\sigma$ tartója az egész $N_\mathbb{R}$.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy a $T_N emb(\triangle)$ kompakt. Ekkor az $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\triangle}$ halmazrendszer nyílt fedése a $T_N emb(\triangle)$-nak. Legyen $\triangle'$ a $\triangle$ maximális (a $<$ relációra nézve) elemeiből álló halmaz, azaz a maximális kúpok részhalmaza. Ekkor a 3.4.1 Állítás *4.* része alapján az $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\triangle'}$ halmazrendszer még mindig nyílt fedése a $T_N emb(\triangle)$-nak, de minden $\triangle'' \subsetneq \triangle'$ valódi részhalmazra $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\triangle''}$ már nem az, mert a maximális σ kúpok orbitjai csak a nekik megfelelő U_σ-ban vannak benne. A $T_N emb(\triangle)$ kompaktsága miatt a $\triangle'$ halmaz mindenképpen véges kell legyen és mivel a $\triangle = \mathfrak{F}(\triangle')$, azaz a $\triangle$ a maximális kúpok oldalaiból áll, így a 3.1.12 Állítás szerint ő is véges.

A teljesség belátásához tekintsük a $\gamma_n : \mathbb{C}^* \to T_N,\ n \in N$ egyparaméteres részcsoportokat. Korábban már láttuk, hogy

$$lim_{\lambda\to 0}\gamma_n(\lambda)(m) = \begin{cases} 1 & ,\text{ha } \langle m, n\rangle = 0 \\ 0 & ,\text{ha } \langle m, n\rangle > 0 \\ \infty & ,\text{ha } \langle m, n\rangle < 0 \end{cases}$$

Mivel $\gamma_n : \mathbb{C}^* \to T_N \subset T_N emb(\triangle)$ egy algebrai (így folytonos) leképezés egy kompakt halmazba $\Rightarrow lim_{\lambda\to 0}\gamma_n(\lambda)$ létezik a $T_N emb(\triangle)$-ban és valamely $\sigma \in \triangle$ kúpra a limeszpont az U_σ-ban van $\Rightarrow$ A 3.4.1 Állítás alapján ekkor $n \in \sigma \subset |\triangle|$. Ez minden $n \in N$-re elmondható, a $\triangle$ legyező pedig racionális kúpokból áll $\Rightarrow |\triangle| = N_\mathbb{R}$, tehát kompakt $T_N emb(\triangle)$ esetén a $\triangle$ legyező véges és teljes.

A vissza irány bizonyításához elég belátni, hogy véges és teljes $\triangle$ legyező esetén az $Mc(N,\triangle) = T_N emb(\triangle)/CT_N$ szögletes sokaság kompakt, mert ő a kompakt CT_N csoport hatása szerinti faktortér.

Az $(N,\triangle)$ véges és teljes akkor és csakis akkor, ha az $(\overline{N}(\tau), \overline{\triangle}(\tau))$ szintén véges és teljes minden $\tau \in \triangle$-ra (a definícióhoz lásd a 3.4.2 Következményt). A teljesség miatt

$$N_{\mathbb{R}}/\mathbb{R}\tau = \overline{N}(\tau)_{\mathbb{R}} = \bigcup_{\sigma\in\triangle,\tau<\sigma} (\sigma + \mathbb{R}\tau)/\mathbb{R}\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Mc(N,\triangle) = \bigcup_{\tau\in\triangle} N_{\mathbb{R}}/\mathbb{R}\tau = \bigcup_{\tau\in\triangle}\left(\bigcup_{\sigma\in\triangle,\tau<\sigma}(\sigma+\mathbb{R}\tau)/\mathbb{R}\tau\right) = \bigcup_{\sigma\in\triangle} W'(\sigma),$$

ahol $W'(\sigma) = \cup_{\tau<\sigma}(\sigma + \mathbb{R}\tau)/\mathbb{R}\tau$. A végesség miatt az $Mc(N,\triangle)$ véges uniója a $W'(\sigma)$-knak, így elég annyit belátni, hogy minden $W'(\sigma)$ kompakt, bármely $\sigma \in \triangle$ esetén.

Legyen tehát $\sigma \in \triangle$ egy SCRPC és legyenek $m_1, ..., m_p \in M$ olyan rácspontok, hogy $\mathcal{S}_\sigma = \mathbb{Z}_{\geq 0}m_1 + ... + \mathbb{Z}_{\geq 0}m_p$. Vegyük észre, hogy $W'(\sigma)$ egy topologikus altere az $U_\sigma/CT_N = \cup_{\tau<\sigma}N_{\mathbb{R}}/\mathbb{R}\tau$-nak. A 3.4.4 Állítás szerint

$$ord\big|_{(U_\sigma)_{\geq 0}} : (U_\sigma)_{\geq 0} \xrightarrow{\simeq} U_\sigma/CT_N$$

egy homeomerfizmus. Ugyanezen állításban szereplő azonosítások és egy hosszasabb számolás segítségével beláthatjuk, hogy $W'(\sigma)$ őse ennél a homeomorfizmusnál a

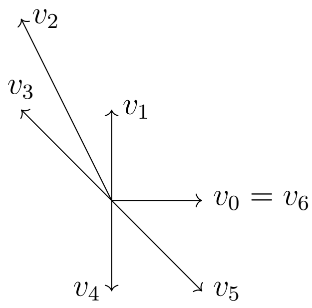
$$W(\sigma) := \{w : \mathcal{S}_\sigma \to \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \ w(O) = 1,\ w(m+m') = w(m)w(m'),\ w(m_j) \leq 1\}$$

halmaz. Ekkor az $(U_\sigma)_{\geq 0} \to (\mathbb{R}_{\geq 0})^p,\ w \mapsto (w(m_1), ..., w(m_p))$ zárt beágyazásnál $W(\sigma)$ pont a $[0,1]^p$ kompakt kocka ősképe, így $W(\sigma)$ kompakt, de ekkor a vele homeomorf $W'(\sigma)$ is kompakt. □

A fentiek alapján nézzük meg, hogy mik lehetnek a kétdimenziós nemszinguláris kompakt tórikus varietások. Ők egyértelműen meghatározhatók az $N \cong \mathbb{Z}^2$-beli rácspontok egy véges sorozatával:

$$n_0, n_1, ..., n_{d-1}, n_d = n_0,$$

amelyek a pozitív trigonometrikus irány szerint forognak körbe és bármely kettő egymást követő generálja a rácsot. Az általuk generált SCRPC-k oldalaiból álló $\triangle$ legyezőre ekkor az előzőek szerint teljesül, hogy $T_N emb(\triangle)$ reguláris és kompakt.



Egyszerű kombinatorikával belátható a következő osztályozási tétel (lásd például a (Fulton, 1993) könyvben):

3.5.3. Tétel. *Minden nemszinguláris kompakt tórikus felület előáll a $\mathbb{CP}^2$ vagy az $\mathbb{F}_a$ Hirzebruch felületből T_N-fixpontok menti felfújások (lásd a 3.6.10 Megjegyzést) sorozatával.*

Magasabb dimenzióban a sima projektív varietások osztályozása továbbra is nyitott kérdés.

3.6. Ekvivariáns holomorf leképezések

Legyenek az $(N, \triangle)$ és az $(N', \triangle')$ legyezők, ahol $N \cong \mathbb{Z}^r$ és $N' \cong \mathbb{Z}^{r'}$.

3.6.1. Definíció. *A $\varphi : (N', \triangle') \to (N, \triangle)$-t* ***legyező leképezés****nek (fan map) nevezzük, ha $\varphi : N' \to N$ egy $\mathbb{Z}$-lineáris homomorfizmus, melynek $\varphi : N'_{\mathbb{R}} \to N_{\mathbb{R}}$ kiterjesztettjére teljesül, hogy minden $\sigma' \in \triangle'$-re létezik olyan $\sigma \in \triangle$, hogy $\varphi(\sigma') \subset \sigma$.*

3.6.2. Tétel. *Minden $\varphi : (N', \triangle') \to (N, \triangle)$ legyező leképezés indukál egy holomorf $\varphi_* : T_{N'}emb(\triangle') \to T_N emb(\triangle)$ függvényt, melynek a $T_{N'}$ nyílt halmazra való megszorítása megegyezik a $\varphi \otimes id : T_{N'} = N' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \to N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* = T_N$ algebrai tóruszok közti leképezéssel. Ezen keresztül a φ_* ekvivariáns a $T_{N'}$ és a T_N hatásaira nézve:*

$$\begin{tikzcd} T_{N'}emb(\triangle') \arrow[rr, "\varphi_*"] \arrow[dd, "\cdot t' \in T_{N'}"'] & & T_N emb(\triangle) \arrow[dd, "\cdot t \in T_N"] \\ & \arrow[r, phantom, ""] & \\ T_{N'}emb(\triangle') \arrow[rr, "\varphi_*"] & & T_N emb(\triangle). \end{tikzcd}$$

$$\cdot t' \in T_{N'} \xrightarrow{\varphi \otimes id} \cdot t \in T_N$$

Visszafelé, ha $f' : T_{N'} \to T_N$ egy morfizmus és $f : T_{N'}emb(\triangle') \to T_N emb(\triangle)$ egy holomorf függvény, mely ekvivariáns az f'-re nézve, akkor egyértelműen létezik olyan $\varphi : N' \to N$ Abel-csoport homomorfizmus, mely kiterjesztettje egy legyező leképezés és melyre $\varphi_* = f$.

Bizonyítás. Ha a $\varphi : N' \to N$ leképezés $\mathbb{Z}$-lineáris $\Rightarrow$ a duálizáltja

$$\varphi^* : M \to M',\ \varphi^* : \langle m, . \rangle \mapsto \langle m, \varphi(.) \rangle$$

is $\mathbb{Z}$-lineáris és kiterjed egy $\varphi^* : M_{\mathbb{R}} \to M'_{\mathbb{R}}$ leképezéssé. Ő ekkor indukál egy

$$\varphi^{**} : T_{N'} = Hom_{\mathbb{Z}}(M', \mathbb{C}^*) \to Hom_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*) = T_N,$$

$$\varphi^{**} : (t' : M' \to \mathbb{C}^*) \mapsto (t' \circ \varphi^* : M \to \mathbb{C}^*)$$

algebrai homomorfizmust. Konkrét bázisokban felírva a leképezést láthatjuk, hogy ez megegyezik a $\varphi \otimes id : T_{N'} \to T_N$ leképezéssel.

Tegyük most fel, hogy $\varphi(\sigma') \subset \sigma$ valami $\sigma' \in \triangle'$, $\sigma \in \triangle$ kúpokra. Ekkor minden $m \in \sigma^\vee \cap M$-re $\varphi^*(m)(n') = m(\varphi(n')) \geq 0$, ha $n' \in \sigma'$, ugyanis ekkor $\varphi(n') \in \sigma$. Ebből következik, hogy $\varphi^*(m) \in (\sigma')^\vee \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi^*(\sigma^\vee) \subset (\sigma')^\vee \Rightarrow \varphi^*(\mathcal{S}_\sigma) \subset \mathcal{S'}_{\sigma'} := M' \cap (\sigma')^\vee.$$

Legyen $U'_{\sigma'} := \{u' : \mathcal{S'}_{\sigma'} \to \mathbb{C} \mid u'(O) = 1,\ u'(m' + m'') = u'(m')u'(m'')\}$. Ekkor a fenti $\varphi^* : \mathcal{S}_\sigma \to \mathcal{S'}_{\sigma'}$ leképezés indukál egy $\varphi_* : U'_{\sigma'} \to U_\sigma$ duális leképezést: $\varphi_*(u')(m) := u'(\varphi^*(m))$, ha $m \in \mathcal{S}_\sigma$.

Ahhoz, hogy ezen leképezés holomorfitását ellenőrizzük, legyen $\{m'_1, ..., m'_{p'}\}$ az $\mathcal{S'}_{\sigma'}$, míg $\{m_1, ..., m_p\}$ az $\mathcal{S}_\sigma$ egy generátorrendszere, tehát $\mathcal{S'}_{\sigma'} = \sum_j \mathbb{Z}_{\geq 0} m'_j$ és $\mathcal{S}_\sigma = \sum_j \mathbb{Z}_{\geq 0} m_j$. Legyenek $\phi_i^j \geq 0,\ 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq p'$ azok a (nem feltétlenül egyértelmű) egészek, melyekre:

$$\varphi^* : \mathcal{S}_\sigma \to \mathcal{S'}_{\sigma'},\ m_i \mapsto \varphi^*(m_i) = \sum_j \phi_i^j m'_j.$$

Ha most $u' \in U'_{\sigma'}$, akkor

$$(e(m'_1), ..., e(m'_{p'}))(u') = (u'(m'_1), ..., u'(m'_{p'})) \in \mathbb{C}^{p'}.$$

Tudjuk, hogy $\varphi_*(u') \in U_\sigma$, sőt,

$$\varphi_*(u')(m_i) = u'(\varphi^*(m_i)) = u'\left(\sum_j \phi_i^j m'_j\right) = \prod_j u'(m'_j)^{\phi_i^j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (e(m_1), ..., e(m_p))(\varphi_*(u')) = \left(\prod_j u'(m'_j)^{\phi_1^j}, \prod_j u'(m'_j)^{\phi_2^j}, ..., \prod_j u'(m'_j)^{\phi_p^j}\right) \in \mathbb{C}^p.$$

Könnyen látható, hogy ezek a koordináta függvények már egyértelműek és nyilván holomorf leképezést írnak le, tehát a $\varphi_* : U'_{\sigma'} \to U_\sigma$ egy analitikus függvény.

Az ekvivarianciához annyit kell ellenőrizni, hogy minden $t' \in T_{N'}$-re és $u' \in U'_{\sigma'}$-re $\varphi_*(t'u') = (\varphi \otimes id)(t')\varphi_*(u')$. Ha tehát $m \in \mathcal{S}_\sigma \Rightarrow \varphi_*(t'u')(m) = (t'u')(\varphi^*(m)) =$

$t'(\varphi^*(m))u'(\varphi^*(m)) = \varphi^{**}(t')(m)\varphi_*(u')(m) = (\varphi \otimes id)(t')(m)\varphi_*(u')(m)$, így az ekvivariancia teljesül.

Az affin részeken megadott, a metszeteken megegyező leképezések összeragasztásával kapjuk a $\varphi_* : T_{N'}emb(\triangle') \to T_N emb(\triangle)$ indukált ekvivariáns holomorf függvényt.

A vissza irányhoz legyen $f' : T_{N'} \to T_N$ egy $\mathbb{Z}$-lineáris homomorfizmus. A 3.3.4 Definícióban megemlítettük, hogy az M' azonosítható $T_{N'} = Hom_{\mathbb{Z}}(M', \mathbb{C}^*)$ karaktercsoportjával: minden $m' \in M'$-höz hozzárendelhetjük az

$$e(m') : T_{N'} \to \mathbb{C}^*,\ u' \mapsto e(m')(u') = u'(m)$$

karaktert. Ugyanígy, az M is azonosítható a T_N karaktercsoportjával $\Rightarrow$ f' indukál közöttük egy $M \to M'$ leképezést:

$$e(m) \mapsto (e(m) \circ f' : t' \mapsto e(m) \circ f'(t') = (f'(t'))(m))\,.$$

Ennek duálizálásával kapjuk a $\varphi : N' \to N$ Abel-csoport homomorfizmust: $n' \in N'$ és $m \in M$ esetén $\varphi(n')(m) = n'(\varphi^*(m)) = n'(e(m) \circ f') = \langle e(m) \circ f', n' \rangle$. Egyszerű számolással belátható, hogy ezen φ függvényhez tartozó $\varphi^{**} = (\varphi \otimes id) : T_{N'} \to T_N$ leképezés megegyezik az f'-vel.

Ha most az $f : T_{N'}emb(\triangle') \to T_N emb(\triangle)$ ekvivariáns az f'-re nézve $\Rightarrow$ az f a $T_{N'}$-orbitokat T_N-orbitokba viszi $\Rightarrow \forall \sigma' \in \triangle' :\ \exists \sigma \in \triangle$, amire $f(orb(\sigma')) \subset orb(\sigma)$. Ha most $\tau' < \sigma' \in \triangle'$, akkor a 3.4.1 Állítás *3*. része szerint $orb(\sigma') \subset \overline{orb(\tau')} \Rightarrow$ így ha $\tau, \sigma \in \triangle$ olyanok, hogy $f(orb(\sigma')) \subset orb(\sigma)$ és $f(orb(\tau')) \subset orb(\tau)$, akkor az f folytonossága miatt $orb(\sigma) \cap \overline{orb(\tau)} \neq \emptyset$. De $\overline{orb(\tau)}$ teljes orbitokból áll $\Rightarrow$ $orb(\sigma) \subset \overline{orb(\tau)} \Rightarrow$ a 3.4.1 Állítás *3*. része szerint ekkor $\tau < \sigma$. Ebből következik, hogy $f\left(U'_{\sigma'}\right) = f\left(\cup_{\tau'<\sigma'} orb(\tau')\right) \subset \cup_{\tau<\sigma} orb(\tau) = U_\sigma$.

A 3.4.1 Állítás *5*. részéből következik, hogy minden $n' \in \sigma' \cap N'$-re létezik a $lim_{\lambda\to 0}\gamma_{n'}(\lambda) \in U'_{\sigma'}$. Abból, hogy az f leképezés ekvivariáns az f'-re nézve, könnyen belátható, hogy $f\big|_{T_{N'}} \equiv f' \Rightarrow f \circ \gamma_{n'} = f' \circ \gamma_{n'}$. Mivel $f' = \varphi^{**}$, így megfelelő $m \in M$-re $\left(f' \circ \gamma_{n'}(\lambda)\right)(m) = \gamma_{n'}(\lambda)(\varphi^*(m)) = \lambda^{\langle \varphi^*(m), n' \rangle} = \lambda^{\langle m, \varphi(n') \rangle} = \gamma_{\varphi(n')}(\lambda)(m) \Rightarrow$ tehát $f \circ \gamma_{n'} = \gamma_{\varphi(n')}$ és mivel a $\gamma_{n'}$ kiterjeszthető a 0-ba, az f pedig folytonos $\Rightarrow \exists\ lim_{\lambda\to 0}\gamma_{\varphi(n')}(\lambda) = f\left(lim_{\lambda\to 0}\gamma_{n'}(\lambda)\right) \in f(U'_{\sigma'}) \subset U_\sigma \Rightarrow$ ismét csak a 3.4.1 Állítás *5*. része szerint $\varphi(n') \in \sigma \Rightarrow$ a φ tényleg egy legyező leképezés, melyre $f = \varphi_*$.

□

3.6.3. Tétel. *Legyen $\varphi : (N', \triangle') \to (N, \triangle)$ egy legyező leképezés. Ekkor az indukált $f = \varphi_* : T_{N'}emb(\triangle') \to T_N emb(\triangle)$ holomorf függvény valódi, pontosan akkor, ha minden $\sigma \in \triangle$-ra a $\triangle'_\sigma := \{\sigma' \in \triangle' \mid \varphi(\sigma') \subset \sigma\}$ halmaz véges és még az is teljesül, hogy $\varphi^{-1}(\sigma) = \mid \triangle'_\sigma \mid := \cup_{\sigma' \in \triangle'_\sigma} \sigma'$, tehát nincsen N'-ben olyan rácspont, amely a σ-ba képződik, de nincsen $\mid \triangle'_\sigma \mid$-ban.*

Bizonyítás. Csak a szükségességet látjuk be. Legyen $\sigma \in \triangle$ egy SCRPC. Ekkor az $f^{-1}(U_\sigma)$ le van fedve $U'_{\sigma'}$-kel, ahol a σ' végigfut a $\triangle'_\sigma$ maximális elemein. A 3.4.1 Állítás alapján ezekből egyet sem hagyhatunk el. Ha $p \in orb(\sigma) \Rightarrow f^{-1}(p)$ a valódiság miatt kompakt és része $f^{-1}(U_\sigma)$-nak, így $f^{-1}(p) \subset \bigcup_{\sigma' \in \triangle'_\sigma, \sigma' \max} U'_{\sigma'}$. Ha ő kevesebben is benne lenne, akkor az orbitja is $\Rightarrow$ az f ekvivarianciája miatt $f^{-1}(orb(\sigma))$ is benne lenne kevesebben, ami ellentmondás $\Rightarrow$ az $f^{-1}(p)$ kompakt halmaznak $\{U'_{\sigma'} \mid \sigma' \in \triangle'_\sigma,\ \sigma' \text{ maximális}\}$ egy minimális fedése $\Rightarrow$ ő egy véges halmaz és így a 3.1.12 Állítás alapján a $\triangle'_\sigma$ is véges.

Ha $n' \in N' \cap \varphi^{-1}(\sigma) \Rightarrow \varphi(n') \in \sigma \Rightarrow lim_{\lambda \to 0} f(\gamma_{n'}(\lambda)) = lim_{\lambda \to 0} \gamma_{\varphi(n')}(\lambda)$ létezik és benne van U_σ-ban. Mivel az f valódi és a $\{\gamma_{\varphi(n')}(\lambda) \mid |\lambda| \leq 1\}$ halmaz kompakt $\Rightarrow$ az f szerinti őse kompakt $\Rightarrow \gamma_{n'}(\lambda)$ ebben a kompakt ősben van $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$, $|\lambda| \leq 1$ esetén $\Rightarrow$ mivel a $\gamma_{n'}$ folytonos algebrai függvény, így kiterjed a 0-ba $\Rightarrow \exists\ lim_{\lambda \to 0} \gamma_{n'}(\lambda) \in U'_{\sigma'}$ valamely $\sigma' \in \triangle'$-re, így $n' \in relint(\sigma') \Rightarrow \varphi(\sigma') \subset \sigma$ és minden ilyen n'-re alkalmazva $\varphi^{-1}(\sigma) = |\ \triangle'_\sigma\ |$ teljesül.

Az elégségesség bizonyítása megtalálható például a (Fulton, 1993) könyvben. $\square$

Vizsgáljuk meg a legyező leképezések egy speciális típusát. Legyen $N' \leqslant N$ egy véges indexű $\mathbb{Z}$-részmodulus, ekkor minden N-beli elem elég nagy egész többszöröse már benne van N'-ben is, így az egész irányok ugyanazok. Nyilván $N'_\mathbb{R} = N_\mathbb{R}$ és ha $\triangle$ egy legyező az N-ben, akkor az N'-ben is. Legyen $\varphi : (N', \triangle) \to (N, \triangle)$ a beágyazás és $f = \varphi_* : T_{N'}emb(\triangle) \to T_N emb(\triangle)$ az általa indukált leképezés a tórikus varietásokon.

3.6.4. Megjegyzés. *Belátjuk, hogy ekkor*

$$ker\,(T_{N'} \to T_N) = Hom_\mathbb{Z}(M'/M, \mathbb{C}^*) = N/N',$$

ahol M' az N' duálisa, így $M \leqslant M'$ ugyanolyan véges indexszel.

Valóban, vizsgáljuk meg a $\varphi^{**} = \varphi \otimes id : T_{N'} \to T_N$ leképezést. Először is, minden $n' \in N'$-re $\varphi(n') = n' \in N$. Így minden adott $m \in M$-re a dualizáltnál vett képe $\varphi^*(m) \in M' :\ \forall n' \in N' :\ \varphi^*(m)(n') = \langle m, \varphi(n') \rangle = \langle m, n' \rangle$, tehát a φ^* leképezés lényegében az $M \hookrightarrow M'$ beágyazás. Ha most $t' \in T_{N'} = Hom_\mathbb{Z}(M', \mathbb{C}^*)$, akkor bármely $m \in M$-re $\varphi^{**}(t')(m) = t'(\varphi^*(m)) = t'(m) \Rightarrow \varphi^{**}(t') = t'\big|_M$ minden $t' \in T_{N'}$-re. Tehát $t' \in ker(\varphi^{**}) \Leftrightarrow t'\big|_M \equiv 1$, de ekkor a $t' : M' \to \mathbb{C}^*$ homomorfizmus keresztülvezethető az M'/M-en, azaz $\exists\ t'_M : M'/M \to \mathbb{C}^*$ indukált leképezés, mely egyértelműen meghatározza a t'-t $\Rightarrow$ tehát $ker\,(T_{N'} \to T_N) = Hom_\mathbb{Z}(M'/M, \mathbb{C}^*)$.

Vegyük észre, hogy létezik egy egyértelmű $\langle , \rangle : M' \times N \to \mathbb{Q}$ bilineáris kiterjesztése az $\langle , \rangle : M' \times N' \to \mathbb{Z}$ és az $\langle , \rangle : M \times N \to \mathbb{Z}$ párosításoknak. Sőt, ez egyértelműen meghatároz egy $\langle , \rangle : (M'/M) \times (N/N') \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ bilineáris párosítást az M'/M és az

N/N' véges Abel-csoportokon, mely definíciója szerint automatikusan nemdegenerált (minden $M'\setminus M$-beli elemhez tudok választani olyan $N\setminus N'$-belit, melyen nem egészet vesz fel, különben mégiscsak M-beli lenne). Ha most a $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ csoportot a $q \mapsto e^{2\pi iq}$ leképezéssel injektíven beleképezem a $\mathbb{C}^*$-ba, akkor a következő lemma biztosítja a kívánt $N/N' \cong Hom_{\mathbb{Z}}(M'/M, \mathbb{C}^*)$ izomorfizmust:

3.6.5. Lemma. *Ha G_1 és G_2 véges Abel-csoportok és $\langle , \rangle : G_1 \times G_2 \to \mathbb{C}^*$ egy nemdegenerált $\mathbb{Z}$-bilineáris párosítás, akkor $G_2 \cong Hom_{\mathbb{Z}}(G_1, \mathbb{C}^*)$.*

Bizonyítás. Legyen p egy olyan prím, melyre $p\big||G_1|$ és legyen $a \in G_1$ olyan elem, melynek a lehető legnagyobb p-hatvány a rendje: $ord(a) = p^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Ekkor minden $b \in G_2$-re, ha $ord(b) = p^\beta q$, ahol $\beta, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ p \nmid q$, teljesül, hogy

$$\langle p^\beta a, b\rangle = \langle a, b\rangle^{p^\beta} = \langle qq'a, b\rangle^{p^\beta} = \langle q'a, b\rangle^{p^\beta q} = \langle q'a, p^\beta qb\rangle = \langle q'a, 0\rangle = 1,$$

ahol $q' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}:\ qq' \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$. Ilyen q' létezik, mivel a p és a q definíció szerint relatív prímek. Tehát, mivel a párosítás nemdegenerált, így léteznie kell olyan $b \in G_2$-nek, amire $\langle p^{\alpha-1}a, b\rangle \neq 1$, azaz $ord(b) = p^\beta q,\ p \nmid q$, esetén $\beta \geq \alpha$ kell legyen $\Rightarrow$ létezik olyan $b \in G_2$, amire $ord(b) = p^\beta,\ \beta \geq \alpha$, de szimmetria okokból belátható, hogy az α maximalitása miatt $\beta = \alpha$ áll fenn. Sőt, az előző gondolatmenetből az is következik, hogy $\langle a, b\rangle$ egy primitív p^α-dik egységgyök kell legyen. Ekkor tekinthetjük a következő egzakt sorokat:

$$0 \longrightarrow H_1 := ker\,(\langle ., b\rangle) \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\langle ., b\rangle} \mathbb{Z}_{p^\alpha} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H_2 := ker\,(\langle a, .\rangle) \longrightarrow G_2 \xrightarrow{\langle a, .\rangle} \mathbb{Z}_{p^\alpha} \longrightarrow 0.$$

A $\mathbb{Z}\langle a\rangle \leqslant G_1$ és $\mathbb{Z}\langle b\rangle \leqslant G_2$ részcsoportok mentén könnyen megadhatunk szakító leképezéseket, így kapjuk, hogy $G_1 = \mathbb{Z}_{p^\alpha}\langle a\rangle \oplus H_1$ és $G_2 = \mathbb{Z}_{p^\alpha}\langle b\rangle \oplus H_2$. Vegyük észre, hogy ezekre a felbontásokra nézve a $\langle , \rangle$ párosítás blokkdiagonális alakú, így a megszorított $\langle , \rangle\big|_{H_1 \times H_2} : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}^*$ párosítás nemdegenerált marad. Ismételve az előző gondolatmenetet kapjuk, hogy a G_1 és G_2 véges Abel-csoportok ugyanolyan rendű ciklikus csoportok direkt szorzatára bomlanak, melyeken a párosítás diagonálisan hat (a megfelelő bázisban felírva diagonális mátrixú). Ebből az alakból már könnyen látszik, hogy a

$$G_2 \to Hom_{\mathbb{Z}}(G_1, \mathbb{C}^*),\ g_2 \mapsto \langle ., g_2\rangle$$

leképezés egy csoportizomorfizmus. $\square$

3.6.6. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy a* $K := ker(T_{N'} \to T_N) = N/N' = Hom_{\mathbb{Z}}(M'/M, \mathbb{C}^*)$ *csoport természetes módon hat az* $X' := T_{N'}emb(\triangle)$ *tórikus varietáson:*

$$ha\ u' \in U'_\sigma = \{v' : \mathcal{S}'_\sigma \to \mathbb{C} \mid v'(O) = 1, v'(m' + m'') = v'(m')v'(m'')\},\ \sigma \in \triangle,$$

és $k \in K$, *azaz* $k : M' \to \mathbb{C}^*$, $k\big|_M \equiv 1$ *egy homomorfizmus, akkor* $ku' \in U'_\sigma$: *ha* $m' \in \mathcal{S}'_\sigma \Rightarrow ku'(m') := k(m')u'(m')$. *Vegyük észre, hogy az* U'_σ*-k szokásos komplex (és algebrai) struktúrájára nézve a* K *hatása lineáris (sőt, diagonális).*

Nyilván a K *ezen hatása a holomorf (algebrai) függvények terére is kiterjed:* $k \in K, m' \in M'$ *és* $u' \in T_{N'}emb(\triangle)$ *esetén* $ke(m')(u') = e(m')(ku') = ku'(m') = k(m')u'(m') = k(m')e(m')(u') \Rightarrow ke(m') = k(m')e(m') \Rightarrow$ *így az* $\{e(m') \mid m' \in M'\}$ *függvények közül pontosan az* $\{e(m) \mid m \in M\}$ *alakú leképezések invariánsak a* K *hatására nézve.*

Minden $\sigma \in \triangle$ *SCRPC meghatároz egy* U'_σ *és egy* U_σ *nyílt halmazt az* X'*-ben és az* $X := T_N emb(\triangle)$*-ban. A 3.3.6 Állításban láttuk, hogy az* U'_σ *varietáson a polinomiális függvények magkaphatóak az* $\{e(m') \mid m' \in M' \cap \sigma^\vee\}$ *monomok* $\mathbb{C}$*-lineáris kombinációiként, azaz az* U'_σ, *mint komplex affin algebrai varietás, koordináta gyűrűje* $\mathbb{C}[U'_\sigma] = \mathbb{C}[e(m') \mid m' \in M' \cap \sigma^\vee]$. *Az előzőek szerint a* K*-invariáns polinomok gyűrűje pont a* $\mathbb{C}[e(m) \mid m \in M \cap \sigma^\vee]$, *ami pont az* U_σ *algebrai varietás koordináta gyűrűje. Mivel a* K *véges Abel-csoport és lineárisan hat az* X'*-n, ezért a Cartan tétel alapján* $U_\sigma \cong U'_\sigma/K$ *és így a* $\varphi^* : U'_\sigma \to U_\sigma$ *indukált leképezés maga a* K *hatása szerinti faktorleképezés.*

3.6.7. Következmény. *Legyen* $\varphi : (N', \triangle') \to (N, \triangle)$ *egy legyező leképezés, a hozzá tartozó ekvivariáns leképezés:* $\varphi_* : X' := T_{N'}emb(\triangle') \to X := T_N emb(\triangle)$. *A* φ_* *valódi és a* $\mathbb{C}(X')$ *véges bővítése a* $\mathbb{C}(X)$*-nek pontosan akkor, ha a* $\varphi : N' \to N$ *lineáris leképezés injektív, a komagja véges (azaz* $N' \leqslant N$ *véges indexű részcsoport) és* $\triangle'$ *lokálisan véges felbontása a* $\triangle$*-nak az* $N'_{\mathbb{R}} = N_{\mathbb{R}}$ *azonosítás mentén (azaz a* $\triangle'_\sigma := \{\sigma' \in \triangle \mid \sigma' \subset \sigma\}$ *halmaz véges minden* $\sigma \in \triangle$ *esetén és* $\sigma = \cup_{\sigma' \in \triangle'_\sigma} \sigma'$*).*

Tehát, ha az N' *véges indexű* $\mathbb{Z}$*-részmodulus az* N*-ben és* $\triangle' = \triangle \Rightarrow$ *a beágyazás által indukált* $\varphi_* : X' \to X$ *megegyezik az* $X' \to X'/K$ *faktorleképezéssel, ahol* $K = ker\,(T_{N'} \to T_N) = Hom_{\mathbb{Z}}(M'/M, \mathbb{C}^*) = N/N'$.

Bizonyítás. Először nézzük meg az elégségességet. A valódiság az előző állítás megkövetelt mindkét feltétele fennáll, így csak a racionális törtfüggvények testeire vonatkozó állítást kell belássuk. Ismeretes, hogy a $\mathbb{C}(X')$ és $\mathbb{C}(X)$ testeket meg tudjuk úgy kapni, hogy X'-ben és X-ben vesszük egy-egy affin nyílt részhalmazuk koordináta gyűrűjének hányadostestét. Ezeket az affin nyílt halmazokat választhatjuk

$T_{N'} \subset X'$-nek és $T_N \subset X$-nek, így $\mathbb{C}(X') = \mathbb{C}(T_{N'})$, míg $\mathbb{C}(X) = \mathbb{C}(T_N)$. Az ezen következményt megelőző érveléshez hasonlóan belátható, hogy a $\mathbb{C}[T_N]$ koordináta gyűrű megegyezik a $\mathbb{C}[T_{N'}]^K$ invariáns polinomok gyűrűjével. Az kéne, hogy ekkor a hányadostestekre is teljesüljön, hogy $\mathbb{C}(T_N) = \mathbb{C}(T_{N'})^K$. Mivel $\mathbb{C}[T_N] \leqslant \mathbb{C}[T_{N'}] \Rightarrow$ a hányadostestekre $Frac\,(\mathbb{C}[T_N]) \leqslant Frac\,(\mathbb{C}[T_{N'}])$ és nyilván az invariáns polinomok hányadosa is invariáns, így $\mathbb{C}(T_N) \leqslant \mathbb{C}(T_{N'})^K$. A másik irányú tartalmazás belátásához legyenek $f, g \in \mathbb{C}[T_{N'}]$ polinomok úgy, hogy $f/g \in \mathbb{C}(T_{N'})^K$. Ekkor

$$\frac{f}{g} = \frac{\prod_{k\in K} kf}{g \prod_{k\in K\setminus\{O\}} kf}.$$

De így a bal oldal és a jobb oldali számláló K-invariáns $\Rightarrow$ a jobb oldali nevező is K-invariáns $\Rightarrow$ az f/g invariáns elemnek van invariánsok hányadosaként való felírása is $\Rightarrow \mathbb{C}(T_N) \geqslant \mathbb{C}(T_{N'})^K \Rightarrow \mathbb{C}(T_N) = \mathbb{C}(T_{N'})^K \Rightarrow \mathbb{C}(T_{N'}) \Big| \mathbb{C}(T_N)$ Galois bővítés a K véges Galois csoporttal $\Rightarrow$ a $\mathbb{C}(T_{N'})$ valóban véges bővítése a $\mathbb{C}(T_N)$-nek.

A szükségességhez vegyük észre, hogy a valódisággal ekvivalens feltételekből automatikusan következik, hogy minden $\sigma \in \triangle$-ra a $\triangle'_\sigma = \{\sigma' \in \triangle' \mid \varphi(\sigma') \subset \sigma\}$ halmaz véges és $|\triangle'_\sigma| = \varphi^{-1}(\sigma)$. Így annyit kéne már csak belátni, hogy a $\varphi : N' \to N$ $\mathbb{Z}$-lineáris homomorfizmus injektív és véges indexű. Vegyük észre, hogy ez a φ keresztülvezethető a következő legyező leképezéseken:

$$(N', \triangle') \xrightarrow{\tilde{\varphi}} (\varphi(N'), \varphi(\triangle')) \xrightarrow{i} (N'', \triangle \cap \mathbb{R}\varphi(N')) \xrightarrow{j} (N, \triangle),$$

ahol $N'' := \mathbb{R}\varphi(N') \cap N$, míg i és j a megfelelő beágyazások. A tórikus varietások közötti φ_* leképezés így a következőkre faktorizálódik:

$$T_{N'}emb(\triangle') \xrightarrow{\tilde{\varphi}_*} T_{\varphi(N')}emb\,(\varphi(\triangle')) \xrightarrow{i_*} T_{N''}emb\,(\triangle \cap \mathbb{R}\varphi(N')) \xrightarrow{j_*} T_N emb(\triangle).$$

Vegyük észre, hogy az $i : (\varphi(N'), \varphi(\triangle')) \to (N'', \triangle \cap \mathbb{R}\varphi(N'))$ pont véges indexű beágyazás a legyező lokálisan véges felbontásával, így rá az elégségesség bizonyítása alapján automatikusan teljesül a hányadostestekre vonatkozó feltétel. Azt fogjuk belátni, hogy ha a φ és j nem izomorfizmusok, akkor rájuk nem teljesülhet, hogy az értelmezési tartományon a racionális függvények teste véges bővítése a értékkészlethez tartozónak.

Valóban, ha a $\tilde{\varphi} : N' \to \varphi(N')$ nem bijekció, akkor a leképezés linearitása miatt $dim(\varphi(N')_\mathbb{R}) < dim(N'_\mathbb{R}) \Leftrightarrow dim\left(T_{\varphi(N')}emb(\varphi(\triangle'))\right) < dim\,(T_{N'}emb(\triangle')) \Leftrightarrow trdeg\left(\mathbb{C}\left(T_{\varphi(N')}emb(\varphi(\triangle'))\right)\right) < trdeg\,(\mathbb{C}\,(T_{N'}emb(\triangle'))) \Rightarrow \mathbb{C}\,(T_{N'}emb(\triangle'))$ nem lehet véges bővítése $\mathbb{C}\left(T_{\varphi(N')}emb(\varphi(\triangle')\right)$-nek $\Rightarrow$ A $\tilde{\varphi} : N' \to \varphi(N')$ leképezés csoportizomorfizmus kell legyen.

Hasonlóan, ha a $j : N'' \hookrightarrow N$ nem izomorfizmus $\Rightarrow dim(N''_\mathbb{R}) < dim(N_\mathbb{R}) \Leftrightarrow dim\,(T_{N''}emb(\triangle \cap \mathbb{R}\varphi(N'))) < dim\,(T_N emb(\triangle)) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow trdeg\,(\mathbb{C}\,(T_{N''}emb(\triangle \cap \mathbb{R}\varphi(N')))) < trdeg\,(\mathbb{C}\,(T_N emb(\triangle))) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mathbb{C}\left(T_N emb(\triangle)\right)$ nem is ágyazódik bele $\mathbb{C}\left(T_{N''} emb(\triangle \cap \mathbb{R}\varphi(N'))\right)$-be, így biztosan nem kaphatunk véges bővítést, ha a j nem izomorfizmus.

Tehát megkaptuk, hogy ahhoz, hogy a φ_* valódi leképezés legyen és a racionális függvénytestekre vonatkozó állítás teljesüljön, a $\varphi : N' \to N$ mindenképpen egy véges indexű beágyazás kell legyen, melyre a $\triangle'$ lokálisan véges felbontása a $\triangle$-nak. $\square$

3.6.8. Példda. *1. A 3.3.8 Példa 6. részében beláttuk, hogy a $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}(qn_1 - n_2) + \mathbb{R}_{\geq 0}n_2 \subset N_{\mathbb{R}}$ kúp esetén, ahol $N \cong \mathbb{Z}^2$ és $q > 0$ egész, az U_σ koordináta gyűrűjére teljesül, hogy*

$$A_\sigma = \mathbb{C}\left[U^q, U^{q-1}V, ..., UV^{q-1}, V^q\right] \leqslant \mathbb{C}[U, V],$$

ami a varietásokon indukál egy $\mathbb{C}^2 \to U_\sigma$ leképezést, ez pedig megyezik a $\mathbb{C}^2$ egy $\mathbb{Z}_q$ hatás szerinti faktorizációjával ($\xi * (u, v) = (\xi u, \xi v)$). Ugyanezt a leképezést a tórikus struktúrából a következőképpen kaphatjuk meg: legyen $N' \leqslant N$ az n_2 és a $qn_1 - n_2$ vektorok által generált részcsoport, így $N'_{\mathbb{R}} = N_{\mathbb{R}}$. Jelölje σ' a σ kúp megfelelőjét az N'-ben, mivel ő itt egy bázis elemeivel van generálva, automatikusan kapjuk, hogy $U'_{\sigma'} = \mathbb{C}^2$, az $N' \hookrightarrow N$ beágyazás pedig indukál egy $\mathbb{C}^2 \to U_\sigma$ faktorleképezést. Ez pedig megegyezik a korábban kézzel legyártottal, ugyanis, mivel az N'-t generálja a qn_1 és az n_2, így az $M' \geqslant M$-et az $\frac{1}{q}m_1$ és az m_2, amelyek pont az U és az x_2 monomoknak felelnek meg, ahol $U^q = x_1$. Mivel az $\mathcal{S}'_{\sigma'}$ generátorai $\frac{1}{q}m_1$ és $\frac{1}{q}m_1 + m_2$, így $A'_{\sigma'} = \mathbb{C}[U, x_2] = \mathbb{C}[U, V]$, ahol $V = Ux_2$, így tényleg visszakapjuk az előző leírást.

2. Hasonló procedúra alkalmazható tetszőleges szinguláris kétdimenziós affin tórikus varietásra. Ehhez először vegyük észre, hogy az $N \cong \mathbb{Z}^2$-ben megfelelő bázis választásával elérhető, hogy a σ szinguláris kúp $\mathbb{R}_{\geq 0}n_2 + \mathbb{R}_{\geq 0}(qn_1 - (q-p)n_2)$ alakú legyen, ahol $0 < p < q$ relatív prím egészek. Ekkor a $\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma]$ koordináta gyűrű komplex vektortérként $A_\sigma = \oplus \mathbb{C}x_1^i x_2^j$ alakú, olyan (i, j) párokra, melyekre $j \leq \frac{q}{q-p}i$, ahol $i, j \geq 0$. Legyen N' a $qn_1 - (q-p)n_2$ és az n_2 által generált részrács az N-ben, ekkor az M'-t generálja az $\frac{1}{q}m_1$ és az m_2, amik az U és az x_2 monomoknak felelnek meg, $U^q = x_1$. Az $\mathcal{S}'_{\sigma'}$-t generálják az $\frac{1}{q}m_1$ és az $(q-p)\frac{1}{q}m_1 + m_2$ vektorok, így $A'_{\sigma'} := \mathbb{C}[\mathcal{S}'_{\sigma'}] = \mathbb{C}[U, U^{q-p}x_2] = \mathbb{C}[U, V]$ a $V = U^{q-p}x_2$ választással, tehát $U'_{\sigma'} = \mathbb{C}^2$. Az $N/N' \cong \mathbb{Z}_q$ csoport hat az $U'_{\sigma'} = \mathbb{C}^2$-n a $\xi * (u, v) = (\xi u, \xi^{q-p}v)$ hatással és $U_\sigma = U'_{\sigma'}/\mathbb{Z}_q = \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_q$, így ő egy ciklikus hányados szingularitás. Ezzel ekvivalens, hogy $A_\sigma = (A'_{\sigma'})^{\mathbb{Z}_n}$ invariáns gyűrűvel, ahol a $\mathbb{Z}_q$ hatása: $\xi * F(U, V) = F(\xi U, \xi^{q-p}V)$.

A szituáció részletesebb leírása megtalálható a 3.7.9 Állításban.

3. *Könnyen belátható, hogy ha q és az $a_1, ..., a_r$ pozitív egészek és a $\mathbb{Z}_q$ hat a $\mathbb{C}^r$-en a következőképpen:*

$$\xi * (z_1, ..., z_r) = (\xi^{a_1} z_1, ..., \xi^{a_r} z_r),$$

akkor az ezen hatás szerinti algebrai faktortér (lásd a Cartal tételt) affin tórikus varietásként is megkapható, ha vesszük az

$$N' := \sum_{i=1}^{r} \mathbb{Z}(1/a_i)n_i \subset N := N' + \mathbb{Z}(1/m)(n_1 + ... + n_r)$$

rácsokat és az $\{n_1, n_2, ..., n_r\}$ bázis által generált σ kúpot. Ha $a_1 = ... = a_r = 1$, akkor ez a konstrukció a $\mathbb{CP}^{r-1}$ q-adfokú Veronese beágyazása fölötti kúpot adja vissza.

Ezt a konstrukciót nem feltétlenül affin tórikus varietásokra is kiterjeszthetjük, ha a csoporthatásokat kompatibilissá tesszük a nyílt affin részvarietásokon. Egy érdekes példa a $\mathbb{P}(d_0, ..., d_r) = (\mathbb{C}^{r+1} \setminus \{0\}) \,/ \sim$ súlyozott projektív tér, ahol

$$(z_0, ..., z_n) \sim (\lambda^{d_0} z_0, ..., \lambda^{d_r} z_r) \text{ minden } \lambda \in \mathbb{C}^*\text{-ra.}$$

Ahhoz, hogy ezt tórikus varietásként előállítsuk, induljunk ki abból a legyezőből, amit a 3.3.12 Példa 5. részében a projektív terek definíciójához megadtunk, azaz a $\triangle$ legyező álljon az $\{n_0, n_1, ..., n_q\}$ halmaz valódi részhalmazai által generált kúpokból, ahol ők generálják a rácsot és $\sum_{i=0}^{r} n_i = O$. Ha most az N rácsot úgy választjuk, hogy az $\{(1/d_i)n_i\}_{0 \leq i \leq q}$-k legyenek a generátorai, akkor a kapott tórikus varietás pont a $\mathbb{P}(d_0, ..., d_q)$ lesz.

Érdemes észrevenni, hogy a súlyozott projektív tér a standard projektív térből is megkapható a $G := \mathbb{Z}_{d_0} \times \mathbb{Z}_{d_1} \times ... \times \mathbb{Z}_{d_q}$ véges Abel-csoport következő hatása szerinti faktorizálással:

$$(\eta_0, \eta_1, ..., \eta_q) \in G \Rightarrow (\eta_0, \eta_1, ..., \eta_q) * (z_0, z_1, ..., z_q) = (\eta_0 z_0, \eta_1 z_1, ..., \eta_q z_q)$$

Ez egyszerűen onnan jön, hogy a következő kommutatív diagram indukál egy $\mathbb{CP}^q \to \mathbb{P}(d_0, ..., d_q)$ leképezést, ami a Cartan tétel alapján a $\mathbb{CP}^q \to \mathbb{CP}^q/G$ faktorleképezéssel izomorf.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{q+1} \arrow[r, "(z_0,...,z_q)\mapsto(z_0^{d_0},...,z_q^{d_q})"] \arrow[d, "\lambda:(z_0,...,z_q)\mapsto(\lambda z_0,...,\lambda z_q)"'] & \mathbb{C}^{q+1} \arrow[d, "\lambda:(z_0,...,z_q)\mapsto(\lambda^{d_0} z_0,...,\lambda^{d_q} z_q)"] \\
\mathbb{C}^{q+1} \arrow[r, "(z_0,...,z_q)\mapsto(z_0^{d_0},...,z_q^{d_q})"] & \mathbb{C}^{q+1}
\end{tikzcd}$$

$q = 2$ esetén ezen súlyozott projektív tér minden szingularitása ciklikus hányados, azaz Hirzebruch-Jung szingularitás.

3.6.9. Következmény. *A $\varphi_* : T_{N'}emb(\triangle') \to T_N emb(\triangle)$ pontosan akkor valódi és biracionális, ha a $\varphi : N' \to N$ egy izomorfizmus és a $\triangle'$ lokálisan véges felbontása a $\triangle$-nak az $N'_{\mathbb{R}} = N_{\mathbb{R}}$ azonosításnál.*

3.6.10. Megjegyzés. *A valódi biracionális leképezések egyik fontos példája a* ***felfújás*** *(lásd az 1.1.15 Példát). Ha $\sigma \in \triangle$ az $\{n_1, ..., n_r\}$ N-beli bázisvektorok által generált kúp, akkor legyen $n_0 := n_1 + ... + n_r$ és helyettesítsük σ-t az $\{n_0, n_1, ..., n_r\}$ halmaz az $\{n_1, ..., n_r\}$-et nem tartalmazó valódi részhalmazai által generált kúpokkal. Így kapunk egy $\triangle'$ legyezőt és egy $T_N emb(\triangle') \to T_N emb(\triangle)$ valódi biracionális leképezést. Azt állítjuk, hogy ez a leképezés az $orb(\sigma) = x_\sigma$ pont felfújása. Ennek belátásához, mivel az U_σ-n kívül semmit nem változattunk, feltehető, hogy a $\triangle$ legyező csak ezen σ oldalaiból áll, így $T_N emb(\triangle) = U_\sigma = \mathbb{C}^r$, ahol x_σ az origó. Ekkor a $T_N emb(\triangle')$-t együttesen lefedik az U_{σ_i} nyílt affin varietások, ahol σ_i az $\{n_0, n_1, ..., \hat{n_i}, ..., n_r\}$, $1 \leq i \leq r$, vektorok által generált kúp. Így ezek duálisa a $\sigma_i^\vee = \mathbb{R}_{\geq 0} m_i + \mathbb{R}_{\geq 0}(m_1 - m_i) + ... + \mathbb{R}_{\geq 0}(m_r - m_i)$ kúp, tehát a megfelelő koordinátagyűrű:*

$$\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma] = \mathbb{C}[x_i, x_1 x_i^{-1}, ..., x_r x_i^{-1}].$$

A másik oldalról, az origó felfújtja a $\mathbb{C}^r$-ben az

$$\{(\underline{x}, \underline{t}) \in \mathbb{C}^r \times \mathbb{CP}^{r-1} \mid \underline{x} \in \underline{t},\ \textit{azaz}\ x_i t_j = x_j t_i\ \forall i, j\textit{-re}\} \subset \mathbb{C}^r \times \mathbb{CP}^{r-1}$$

részvarietás, ahol a t_i-k a $\mathbb{CP}^{r-1}$-beli homogén koordinátákat jelölik. Ha U_i az a nyílt részhalmaz, amelyben $t_i \neq 0$, akkor minden $j \neq i$-re $x_j = x_i(t_j/t_i)$, így az $U_i = \mathbb{C}^r$ az x_i és $t_j/t_i = x_j/x_i$ koordinátafüggvényekkel. Tehát az $U_i = U_{\sigma_i}$ az előző σ_i-kre és a ragasztások is megegyeznek, tehát a megadott tórikus leképezés valóban megegyezik az x_σ pont felfújásával.

Ha a σ egy alacsonyabb dimenziós nemszinguláris kúp, akkor $U_\sigma = \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^*)^{r-k}$ és belátható, hogy a fenti algoritmussal az $orb(\sigma) = \{0\} \times (\mathbb{C}^*)^{r-k}$ részvarietás menti felfújást kapjuk meg.

A 3.5.1 Tételből kapjuk a következőt:

3.6.11. Következmény. *Legyen $\triangle'$ egy lokálisan véges nemszinguláris felbontása a $\triangle$ legyezőnek N-ben. Ekkor az $id : (N, \triangle') \to (N, \triangle)$ identikus homomorfizmus által indukált $id_* : T_N emb(\triangle') \to T_N emb(\triangle)$ ekvivariáns holomorf leképezés valódi, biracionális és a $T_N emb(\triangle)$ szingularitásainak ekvivariáns rezolúciója.*

Bizonyítás. Annyit kell már csak belátni, hogy az id_* leképezés egy sima pontokból álló sűrű halmaz felett izomorfizmus. Ehhez elég annyit észrevenni, hogy azon $\sigma \in \triangle$ kúpokra, melyek a $\triangle'$-ben is benne vannak (azaz amelyeket nem bontjuk fel), az U_σ

fölött az id_* izomorfizmus. Speciálisan, $\sigma = \{O\}$-ra $id_* = id : T_N \to T_N$ teljesül, így az id_* valóban rezolúció. □

3.6.12. Megjegyzés. *Ha $T_N emb(\triangle)$-nak csak izolált szingularitásai vannak, azaz a $\triangle$-ban csak a maximális dimenziós kúpok nem feltétlenül regulárisak és így az ő egypontú orbitjaik a szinguláris pontok, akkor csak ezen kúpok belsejeinek felbontásával erős rezolúciót kapunk.*

3.6.13. Tétel. ***(Tórikus szingularitások rezolúciója).*** *Minden $T_N emb(\triangle)$ tórikus varietásnak létezik ekvivariáns rezolúciója. Az eddigiek alapján ehhez csak a $\triangle$ legyezőnek kell egy $\triangle'$ lokálisan véges nemszinguláris felbontását megadni.*

Bizonyítás. A bizonyítás abból indul ki, hogy a Carathéodory Tétel segítségével a legyezőt néhány, a már meglévő generáló vektorok által feszített kúp hozzávételével szimpliciálissá tudjuk tenni. Ha most σ egy k-dimenziós szimpliciális kúp és $n_1, ..., n_k$ az első rácspontok a σ élei mentén, akkor a σ **multiplicitás**át úgy definiáljuk, hogy ő az n_i rácspontok által generált részcsoport indexe a $\sigma \cap N$ által generált N_σ részrácsban:

$$mult(\sigma) := [N_\sigma : \mathbb{Z}n_1 + ... + \mathbb{Z}n_k].$$

Nyilván, az U_σ pontosan akkor nemszinguláris, ha a σ multiplicitása 1. Könnyen meggondolható, hogy ha $mult(\sigma) > 1$, akkor létezik olyan n rácspont a σ-ban, melyre $O \neq n = \sum_{i=1}^{k} t_i n_i$, ahol $t_i \in [0, 1)$ minden i-re. Belátható, hogy a σ egy ilyen n primitív vektor menti felbontásában fellépő k-dimenziós kúpok multiplicitása $t_i mult(\sigma)$ minden nemnulla t_i-hez tartozó kúpra. Így ezt a felbontási lépést ismételgetve a multiplicitások egy idő után elérik az 1-et és egy nemszinguláris felbontást kapunk.

Részletes bizonyításhoz lásd például a (Kempf, Knudsen, Mumford, & Saint-Donat, 2006) könyvet. □

3.7. A Hirzebruch-Jung szingularitások, mint tórikus varietások

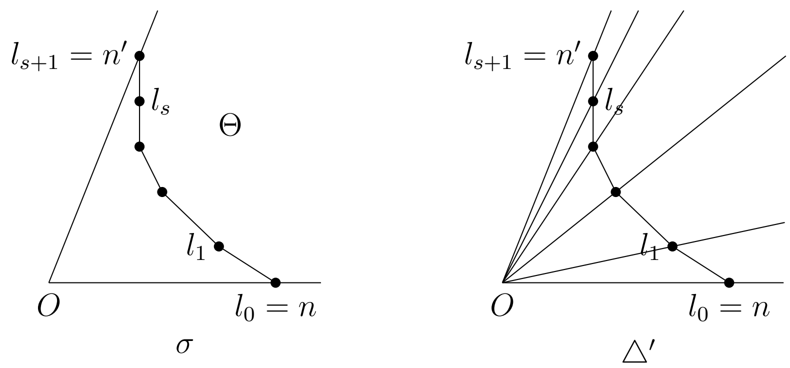
Az előző alfejezetek általános elméletét alkalmazzuk a 2 dimenziós tórikus szingularitásokra. Sőt, nemcsak leírjuk a minimális rezolúciójukat elemi konvex geometriával, hanem összekötjük őket a véges Hirzebruch-Jung lánctörtekkel és magukkal a Hirzebruch-Jung szingularitásokkal is.

Legyen tehát $N \cong \mathbb{Z}^2$ egy rács és σ egy SCRPC az $N_\mathbb{R}$-ben: legyen $dim(\sigma) = 2$ és ha $\triangle$ a σ oldalaiból álló legyező, akkor $T_N emb(\triangle) = U_\sigma$. Ekkor az $orb(\sigma)$ pont az egyetlen fixpontja a T_N hatásnak, ezért az U_σ normalitása miatt (lásd Appendix) az

$orb(\sigma)$ az egyetlen lehetséges szinguláris pont (másképpen ugyanez: 2 dimenzióban a regularitás definíciója szerint $\forall \tau \in \triangle, \tau \neq \sigma$ kúp nemszinguláris, így az U_τ nyílt varietások simák). Az σ-hoz választhatunk olyan $n, n' \in N$ primitív vektorokat, melyek $\mathbb{R}$-lineárisan függetlenek és melyekre $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}n + \mathbb{R}_{\geq 0}n'$. A 3.5.1 Tételből tudjuk, hogy ha az $\{n, n'\}$ pár $\mathbb{Z}$-bázisa az N-nek, akkor az U_σ tórikus varietás nemszinguláris.

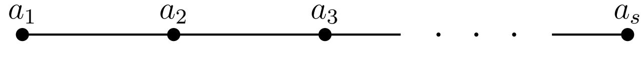
3.7.1. Állítás. *Egy ilyen σ SCRPC-re jelölje Θ a $\sigma \cap N \setminus \{O\}$ rácspontokból álló halmaz konvex burkát az $N_{\mathbb{R}}$-ben. Legyenek $l_0 = n, l_1, ..., l_s, l_{s+1} = n'$ ebben a sorrendben az N rácspontjai a $\partial\Theta$ határ poligonjának kompakt élein. Ekkor:*

1. *legyen $\triangle'$ a σ azon felbontása, mely az $\{\mathbb{R}_{\geq 0}l_{j-1} + \mathbb{R}_{\geq 0}l_j \mid j = 1, ..., s+1\}$ kúpok oldalaiból áll. Ekkor $T_N emb(\triangle') \to U_\sigma$ a minimális ekvivariáns rezolúciója a szingularitásnak (tehát $\triangle'$ a σ legszűkebb nemszinguláris felbontása);*



2. *léteznek olyan $a_j \leq -2$, $j = 1, ..., s$ egészek, hogy $l_{j-1} + l_{j+1} + a_j l_j = O$, minden $j \in \{1, ..., s\}$-re. Sőt, $T_N emb(\triangle')$-ben az $orb\,(\mathbb{R}_{\geq 0}l_j)$ orbit $C_j = V(\mathbb{R}_{\geq 0}l_j)$-vel jelölt lezártja izomorf a $\mathbb{CP}^1$-el és a C_j^2 önmetszési szám megegyezik az a_j-vel.*

A minimális rezolúció kivételes görbéje a nemszinguláris racionális görbékből álló $C_1 + ... + C_s$ lánc, melynek duális gráfja egy s hosszú lánc:



Bizonyítás. A $\partial\Theta$ határ poligon előáll a következők uniójaként: egy-egy félegyenes n-ből és n'-ből és szakaszok l_{j-1}-től l_j-ig minden $j \in \{1, ..., s+1\}$-re. Az $l_0, l_1, ..., l_{s+1}$ rácspontok kiválasztása által az $Ol_{j-1}l_j$ háromszögek nem tartalmaznak a csúcsaikon kívül egyéb N-beli pontot $\Rightarrow$ az $\{l_{j-1}, l_j\}$ párok $\mathbb{Z}$-bázisát alkotják az N-nek $\Rightarrow$ az $\mathbb{R}_{\geq 0}l_{j-1} + \mathbb{R}_{\geq 0}l_j$ kúpok valóban nemszingulárisak $\Rightarrow$ a $\triangle'$ legyező is nemszinguláris és könnyen láthatóan ő a legszűkebb nemszinguláris felbontása a σ-nak $\Rightarrow$ a $T_N emb(\triangle') \to U_\sigma$ leképezés a szingularitás minimális ekvivariáns rezolúciója.

Mivel az $\{l_{j-1}, l_j\}$ és $\{l_j, l_{j+1}\}$ párok egyszerre $\mathbb{Z}$-bázisai az N-nek, sőt, azonos irányításúak $\Rightarrow$ a két bázis közötti áttérési leképezés mátrixának determinánsa 1 kell legyen: ha $l_{j+1} = -a_j l_j + b_{j-1} l_{j-1}$ valami a_j és b_{j-1} egészekre $\Rightarrow$ az áttérési mátrix

$$\begin{pmatrix} 0 & b_{j-1} \\ 1 & -a_j \end{pmatrix} .$$

$\Rightarrow det = b_{j-1} = 1 \Rightarrow l_{j-1} + l_{j+1} + a_j l_j = O$ teljesül, és a konvexitás miatt látjuk, hogy $a_j \leq -2$ kell legyen.

Nézzük most a C_j görbéket. A 3.4.1 Állítás *3*. része alapján

$$\overline{orb(\mathbb{R}_{\geq 0} l_j)} = orb(\mathbb{R}_{\geq 0} l_j) \cup orb(\mathbb{R}_{\geq 0} l_{j-1} + \mathbb{R}_{\geq 0} l_j) \cup orb(\mathbb{R}_{\geq 0} l_j + \mathbb{R}_{\geq 0} l_{j+1}),$$

ahol az első tag $\mathbb{C}^*$-al izomorf, a másik kettő pedig egy-egy pont amit a megfelelő $U_{\mathbb{R}_{\geq 0} l_j}$-beli "egyparaméteres részcsoport" limeszeként kaphatunk meg $\Rightarrow$ valóban, a $C_j = \mathbb{CP}^1$ és ezek egy-egy pontban metszik egymást, így a duális rezolúciós gráf a megfelelő lánc.

Az önmetszési számok kiszámításához használhatjuk a rezolúciós gráf *3*. egyszerű tulajdonságát, vagy hivatkozhatunk a 3.3.12 Példa *4*. részére, ahol a Hirzebruch felületen számoltuk ki egy görbe önmetszési számát. Annyit kell észrevenni, hogy ott igazából azt az általános esetet számoltuk ki, amikor $\{l_{j-1}, l_j\}$ és $\{l_j, l_{j+1}\}$ egész bázisai az N-nek és $l_{j+1} = -l_{j-1} + a l_j$, azaz $l_{j+1} + l_{j-1} - a l_j = 0$. Tehát az a helyére $-a_j$-t helyettesítve kapjuk, hogy a C_j önmetszési száma valóban a_j. □

Az $l_1, ..., l_s$ rácspontok kiszámításában a Hirzebruch-Jung lánctörtek nyújtanak segítséget. Ha az $n, n' \in N$ továbbra is azon primitív rácspontok, melyekre teljesül, hogy $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} n + \mathbb{R}_{\geq 0} n'$, akkor létezik olyan $n_1 \in N$ primitív vektor, melyre $\{n, n_1\}$ egész bázisa az N-nek és $n' = pn + qn_1$, ahol $0 \leq p < q$, $(p, q) = 1$ relatív prím egészek. Valóban, az n primitív vektort ki tudom egészíteni az N egy bázisává valamilyen $\tilde{n}_1 \in N$ primitív rácsponttal. Ekkor $n' = \tilde{p} n + \tilde{q} \tilde{n}_1$. Feltehető, hogy $\tilde{q} > 0$, különben $\tilde{n}_1$ helyett választhatjuk a $-\tilde{n}_1$-et a másik bázisvektornak. De ekkor $n' = \tilde{p} n + \tilde{q} \tilde{n}_1 = (\tilde{p} + k\tilde{q}) n + \tilde{q}(\tilde{n}_1 - kn) \Rightarrow k \in \mathbb{Z}$ jó megválasztásával elérhető, hogy $0 \leq p := \tilde{p} + k\tilde{q} < q := \tilde{q}$, tehát ezen k-t használva $n_1 := \tilde{n}_1 - kn,\ q := \tilde{q},\ p := \tilde{p} + k\tilde{q}$ a jó választások. Az n' primitívségéből következik, hogy ekkor $(p, q) = 1$.

Nyilván, ha $p = 0$ és $q = 1$, akkor $n' = n_1$ és így a σ kúp nemszinguláris.

Legyen most a $q/(q - p)$-nek a Hirzebruch-Jung lánctörtbe fejtése a következő:

$$\frac{q}{q-p} = b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{1}{b_3 - ... \cfrac{1}{b_{s'}}}} = [b_1, ..., b_{s'}],$$

ahol $b_1 > 0$ és $j > 1$ esetén $b_j \geq 2$ egészek.

3.7.2. Lemma. *Ezen feltételek mellett* $s' = s$ *és* $\forall j \in \{1, ..., s\}$*-re :* $b_j = -a_j$. *Sőt, ha az* $\{l_0, l_1, ..., l_{s+1}\}$ *és az* $\{n_2, ..., n_{s+1}\}$ *sorozatokat induktívan definiáljuk a következőképpen:*

$$l_0 := n, \ l_j := l_{j-1} + n_j, \ n_{j+1} := (b_j - 2)l_{j-1} + (b_j - 1)n_j,$$

akkor az $l_0 = n, l_1, ..., l_s, l_{s+1} = n'$ *vektorok lesznek a* $\partial\Theta$ *poligon kompakt élein levő rácspontok, ahol* $l_{j-1} + l_{j+1} = b_j l_j$.

Bizonyítás. Legyen $q_1 := q$, $q_2 := q - p$. A $q_3, ..., q_{s'+2}$ nemnegatív egészeket a $q_{j+1} = b_{j-1}q_j - q_{j-1}$ rekurzió segítségével adjuk meg. Ekkor nyilván

$$\frac{q_{j-1}}{q_j} = b_{j-1} - \frac{1}{\frac{q_j}{q_{j+1}}}.$$

Könnyen kiszámolható, hogy ekkor $q_{s'+1} = 1$, $q_{s'+2} = 0$ és $0 < q_{j+1} < q_j$, $\forall j \leq s'$. Érdemes észrevenni, hogy a q_j-k a Hirzebruch-Jung lánctörtek fejezet jelölésrendszerében az $n_{j,s'}$ számlálóknak felelnek meg, míg a rekurzív definiáló egyenlet a 2.1.3 Állítás első azonossága.

Vegyük észre, hogy minden j-re az $\{l_j, n_{j+1}\}$ pár egy $\mathbb{Z}$-bázisát adja az N-nek és $n' = (q_j - q_{j+1})l_{j-1} + q_j n_j$ ebben a bázisban. Valóban, $j = 0$ esetén $\{l_0, n_1\} = \{n, n_1\}$ definíciója szerint $\mathbb{Z}$-bázis. Mivel a rekurzív definíció szerint

$$l_1 = l_0 + n_1, \ n_2 = (b_1 - 2)l_0 + (b_1 - 1)n_1,$$

így az $\{l_1, n_2\}$ rendszerről az $\{l_0, n_1\}$ bázisra való áttérés mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 1 & b_1 - 2 \\ 1 & b_1 - 1 \end{pmatrix},$$

amelynek determinánsa 1, így az $\{l_1, n_2\}$ is $\mathbb{Z}$-bázisa az N-nek és az irányítása is megegyezik az $\{l_0, n_1\}$ bázisével.

Általános j-re ugyanígy kapjuk, hogy az $\{l_j, n_{j+1}\}$ rendszerről az $\{l_{j-1}, n_j\}$ rendszerre való áttérés mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & b_j - 2 \\ 1 & b_j - 1 \end{pmatrix}$$

alakú, melynek determinánsa szintén 1, így indukcióval kapjuk, hogy minden j-re $\{l_j, n_{j+1}\}$ ugyanolyan irányítású $\mathbb{Z}$-bázis.

Mivel az $\{l_{j-1}, n_j\}$ bázisról az $\{l_j, n_{j+1}\}$ bázisra való áttérés mátrixa az előző mátrix inverze:

$$\begin{pmatrix} b_j - 1 & 2 - b_j \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

kapjuk, hogy az $\{l_0, n_1\} = \{n, n_1\}$ bázisról az $\{l_j, n_{j+1}\}$ bázisra való áttérés mátrixa:

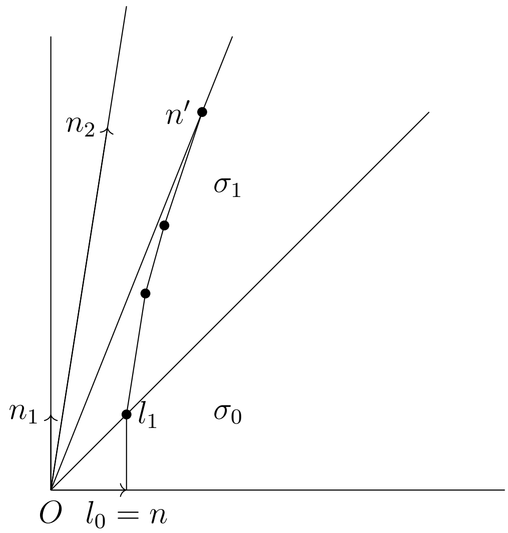
$$\begin{pmatrix} b_j - 1 & 2 - b_j \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{j-1} - 1 & 2 - b_{j-1} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} b_1 - 1 & -2 - b_1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Innen már a 2.1.3 Állítást azonosságait felhasználva könnyen kijön, hogy

$$n' = pn + qn_1 = (q_1 - q_2)l_0 + q_1 n_1 = (q_j - q_{j+1})l_{j-1} + q_j n_j$$

minden j-re. Speciálisan, $j = s'$-re $n' = l_{s'} + n_{s'+1} = l_{s'+1}$.

Jelölje $\sigma_0 := \sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} l_0 + \mathbb{R}_{\geq 0} n'$ az eredeti SCRPC-t, amely az eddigik szerint része az $\mathbb{R}_{\geq 0} l_0 + \mathbb{R}_{\geq 0} n_1$ nemszinguláris kúpnak. Emellett az l_0 és az $l_1 = l_0 + n_1$ valóban az első két rácspont kell legyen a határ kompakt élein, mivel $n' = (q_1 - q_2)l_0 + q_1 n_1,\ 0 < q_2 < q_1$.



Ezért a σ_0-t felbonthatom az $\mathbb{R}_{\geq 0} l_1$ félegyenes mentén az $\mathbb{R}_{\geq 0} l_0 + \mathbb{R}_{\geq 0} l_1$ nemszinguláris és a $\sigma_1 := \mathbb{R}_{\geq 0} l_1 + \mathbb{R}_{\geq 0} n'$ részre. Mivel $n' = (q_2 - q_3)l_1 + q_2 n_2$, kapjuk, hogy $\sigma_1 \subset \mathbb{R}_{\geq 0} l_1 + \mathbb{R}_{\geq 0} n_2$ nemszinguláris kúpnak és mivel $0 < q_3 < q_2$, így rá is alkalmazható az előző érvelés, azaz tényleg l_2 kell legyen a harmadik rácspont a határon. Ezt induktívan folytatva tényleg kapjuk, hogy az $l_0 = n, l_1, ..., l_{s'}, l_{s'+1}$ vektorok a határpoligon kompakt éleinek egész rácspontjai, ezért $s' = s$-nek teljesülnie kell. Emellett $l_{j-1} + l_{j+1} = l_{j-1} + l_j + n_{j+1} = l_{j-1} + l_{j-1} + n_j + (b_j - 2)l_{j-1} + (b_j - 1)n_j = b_j(l_{j-1} + n_j) = b_j l_j$ is teljesül, így kapjuk a $\forall j \in \{1, ..., s\} :\ b_j = -a_j$ azonosságokat. $\square$

Tudjuk, hogy az $U_\sigma = \{u : \mathcal{S}_\sigma \to \mathbb{C} \mid u(O) = 1,\ u(m + m') = u(m)u(m')\}$ varietásnak meg tudjuk adni egy affin beágyazását, ha megadjuk az $\mathcal{S}_\sigma$ monoid egy $\{k_0, k_1, ..., k_{t+1}\}$ generátorrendszerét:

$$(e(k_0), e(k_1), ..., e(k_{t+1})) : U_\sigma \hookrightarrow \mathbb{C}^{t+2}.$$

Alkalmazzuk tehát a 3.7.1 Állítást a $\sigma^\vee \subset M_\mathbb{R}$ kúpra, ahol σ egy kétdimenziós SCRPC.

3.7.3. Állítás. *Legyen $\Theta^\vee$ a $\sigma^\vee \cap M \setminus \{O\}$ halmaz konvex burka $M_\mathbb{R}$-ben a $\sigma^\vee$ SCRPC-re. Ha $k_0, k_1, ..., k_{t+1}$ az M azon pontjai, melyek a $\partial\Theta^\vee$ határpoligon kompakt élein helyezkednek, akkor ők egy minimális generátorrendszerét adják az $\mathcal{S}_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ monoidnak és léteznek olyan $c_i \geq 2$, $i = 1, ..., t$ egészek, melyekre teljesül, hogy $k_{i-1} + k_{i+1} = c_i k_i$, $\forall i \in \{1, ..., t\}$-re.*

Bizonyítás. A 3.7.1 Állítás bizonyításának érvelését alkalmazva a $\sigma^\vee$-ra látjuk, hogy a $\{k_{i-1}, k_i\}$ párok $\mathbb{Z}$-bázisát adják az M-nek és minimális generátorrendszerei az $M \cap (\mathbb{R}_{\geq 0} k_{i-1} + \mathbb{R}_{\geq 0} k_i)$ monoidoknak, ahol $i = 1, ..., t+1$. Mivel $\sigma^\vee \cap M$ ezen monoidok uniója, kapjuk, hogy a $\{k_0, k_1, ..., k_{t+1}\}$ generátorrendszere a $\mathcal{S}_\sigma$-nak. A rendszer minimalitását a $\Theta^\vee$ konvexségéből kapjuk: nem tudunk közülük elhagyni elemeket, hogy a maradékból is ki lehessen fejezni minden $\sigma^\vee$-beli rácspontot.

A c_i-k létezése és tulajdonságai automatikusan következnek a 3.7.1 Állításból. □

A Θ és $\Theta^\vee$ konvex halmazok valamilyen értelemben egymás duálisai:

3.7.4. Definíció. *A $h^\vee : \sigma^\vee \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $h^\vee(m) = min\{\langle m, n\rangle \mid n \in \Theta\}$ függvényt **támaszfüggvény**nek nevezzük (support function). Ekkor a $h^\vee$ **pozitívan homogén** és **felülről konvex**, azaz $\forall c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$-ra $h^\vee(cm) = ch^\vee(m)$ és*

$$h^\vee(m + m') \geq h^\vee(m) + h^\vee(m')$$

minden $m, m' \in \sigma^\vee$-ra.

Mivel Θ a $\sigma \cap N \setminus \{O\}$ halmaz konvex burka, ezért a felülről konvexitás miatt elég csak ezen rácspontokon nézni a minimumot, sőt, elég csak a határon, azon belül is csak az $\{l_0, ..., l_{s+1}\}$ rácspontokon. Valóban ezek közül is elég csak azokon vizsgálni, ahol a $\partial\Theta$ határpoligon törik: legyenek $\{l_{j(\alpha)} \mid 0 \leq \alpha \leq v\}$ a Θ konvex halmaz csúcsai, ahol $0 = j(0) < j(1) < ... < j(v) = s + 1$. Ekkor kapjuk, hogy

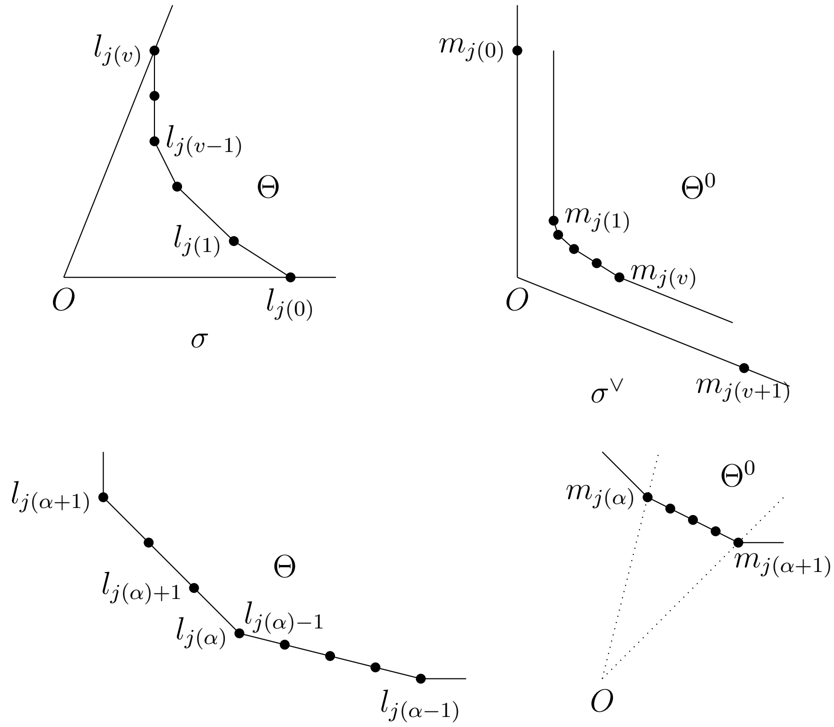
$$h^\vee(m) = min\{\langle m, l_{j(\alpha)}\rangle \mid 0 \leq \alpha \leq v\},\ \forall m \in \sigma^\vee.$$

Legyen a Θ konvex halmaz **poláris poliéder**e (polar polyhedra) a $\Theta^0 := \{m \in \sigma^\vee \mid h^\vee(m) \geq 1\} \subset \sigma^\vee$. Ez egy konvex poliéder teljesen a $\sigma^\vee$ belsejében, ugyanis a $h^\vee$ támaszfüggvény eltűnik a $\sigma^\vee$ határán.

Legyen $m_{j(0)} := k_0$ és $m_{j(v+1)} := k_{t+1}$ az egyértelmű primitív eleme M-nek a $\sigma^\vee \cap \{l_0\}^\perp$ és $\sigma^\vee \cap \{l_{s+1}\}^\perp$ oldalakon. Az $m_{j(\alpha)}$, $\alpha = 1, ..., v$ primitív elemeket az M-ben a következő azonosságokkal definiálhatjuk:

$$\langle m_{j(\alpha)}, l_j\rangle = 1,\ \forall j \in \{j(\alpha - 1), j(\alpha - 1) + 1, ..., j(\alpha)\},$$

ugyanis az $\{l_j \mid j(\alpha-1) \leq j \leq j(\alpha)\}$ pontok kollineárisak az N-ben úgy, hogy bármely kettő egymás utáni $\mathbb{Z}$-bázisát adja az N-nek. A Θ konvexitásából kapjuk, hogy $h^\vee(m_{j(\alpha)}) = 1$ minden $\alpha \in \{1,..,v\}$-re, így ők pont a poláris poliéder határán helyezkednek, míg $h^\vee(m_{j(0)}) = h^\vee(m_{j(v+1)}) = 0$.



A rajzról látszik, hogy $h^\vee(m) = \langle m, l_{j(\alpha)}\rangle$, ha $m \in \mathbb{R}_{\geq 0} m_{j(\alpha)} + \mathbb{R}_{\geq 0} m_{j(\alpha+1)}$. Sőt, minden $\alpha \in \{1, ..., v-1\}$-re az $m_{j(\alpha)}$-t az $m_{j(\alpha+1)}$-el összekötő zárt szakasz pontosan $b_{j(\alpha)} - 1$ darab M-rácspontot tartalmaz, melyek mind az $Om_{j(\alpha)}m_{j(\alpha+1)}$ háromszög $m_{j(\alpha)}m_{j(\alpha+1)}$ oldalán helyezkednek el. Valóban, $\langle m_{j(\alpha)}, l_{j(\alpha)-1}\rangle = \langle m_{j(\alpha)}, l_{j(\alpha)}\rangle = 1$ és $\langle m_{j(\alpha+1)}, l_{j(\alpha)}\rangle = \langle m_{j(\alpha+1)}, l_{j(\alpha)+1}\rangle = 1$, és mivel $\{l_{j(\alpha)-1}, l_{j(\alpha)}\}$ egész bázisa az N-nek, így ha $\{m, m'\}$ az M duális bázisa $\Rightarrow m_{j(\alpha)} = m + m',\ m_{j(\alpha+1)} = (b_{j(\alpha)} - 1)m + m'$, ugyanis $\langle (b_{j(\alpha)} - 1)m + m', l_{j(\alpha)}\rangle = \langle m', l_{j(\alpha)}\rangle = 1$ és $\langle (b_{j(\alpha)} - 1)m + m', l_{j(\alpha)+1}\rangle = \langle (b_{j(\alpha)} - 1)m + m', b_{j(\alpha)}l_{j(\alpha)} - l_{j(\alpha)-1}\rangle = 1 - b_{j(\alpha)} + b_{j(\alpha)} = 1$ teljesül. De ekkor az $m_{j(\alpha)}$-t az $m_{j(\alpha+1)}$-el összekötő szakaszon tényleg pontosan $b_{j(\alpha)} - 1$ darab M-rácspont található (ezek mind $\lambda m + m',\ \lambda = 1, ..., b_{j(\alpha)} - 1$ alakúak), melyek közül bármely kettő egymást követő az M egy $\mathbb{Z}$-bázisát adja, így az O-val együtt olyan háromszögeket alkotnak, melyeknek csak a csúcsai rácspontok.

Most belátjuk, hogy a $\Theta^\vee$ igazából a $\Theta^0 \cup \mathbb{R}_{\geq 0}k_0 \cup \mathbb{R}_{\geq 0}k_{t+1}$ konvex burka. Ehhez elég annyit ellenőrizni, hogy $m \in ConvHull\,(\Theta^0 \cup \mathbb{R}_{\geq 0}k_0 \cup \mathbb{R}_{\geq 0}k_{t+1})\ \forall m \in \mathcal{S}_\sigma \setminus \{O\}$-ra. Ha most létezik olyan $O \neq n \in \sigma \cap N$, amire $\langle m, n\rangle = 0 \Rightarrow m \in \sigma^\vee \cap \{n\}^\perp$, tehát m a $\sigma^\vee$ egy oldalán helyezkedik el $\Rightarrow m \in \mathbb{R}_{\geq 0}k_0 \cup \mathbb{R}_{\geq 0}k_{t+1}$. Ha pedig minden $n \in \sigma \cap N,\ n \neq O$-ra $\langle m, n\rangle > 0$, akkor az $\langle , \rangle \to \mathbb{Z}$ eredeti párosítás tulajdonsága szerint $\langle m, n\rangle \geq 1, \forall\ O \neq n \in \sigma \cap N$-re $\Rightarrow h^{\vee}(m) \geq 1 \Rightarrow m \in \Theta^0$ teljesül. Tehát a $\Theta^{\vee}$ valójában az $\{m_{j(\alpha)} \mid 0 \leq \alpha \leq v+1\} \cup \mathbb{R}_{\geq 1} m_{j(0)} \cup \mathbb{R}_{\geq 1} m_{j(v+1)}$ konvex burka $\Rightarrow$ a $\partial\Theta^{\vee}$ határpoligon kompakt élei pontosan az $\{m_{j(\alpha)} \mid 0 \leq \alpha \leq v+1\}$ pontokat összekötő szakaszok.

A 3.7.2 Lemma bizonyításában szereplő $\{l_0, n_1\}$ és az $\{l_s, n_{s+1}\}$ egész N-bázisok M-beli duális bázisait megszerkesztve és az $\{m_{j(0)},\ m_{j(1)}\}$ és $\{m_{j(v)},\ m_{j(v+1)}\}$ párokat azokban kifejezve láthatjuk, hogy ők az M-nek $\mathbb{Z}$-bázisai, így az $m_{j(0)}m_{j(1)}$ és az $m_{j(v)}m_{j(v+1)}$ szakaszokon nincsen az M-nek más pontja. Így kapjuk, hogy a $\partial\Theta^{\vee}$ kompakt élein levő M-beli pontok száma:

$$t + 2 = v + 2 + \sum_{1 \leq \alpha \leq v-1} (b_{j(\alpha)} - 3) =$$

$$= 3 + \sum_{1 \leq \alpha \leq v+1} (b_{j(\alpha)} - 2) = 3 + \sum_{1 \leq j \leq s} (b_j - 2),$$

ugyanis $b_j = 2 \Leftrightarrow$ ha az $l_{j-1},\ l_j$ és l_{j+1} pontok kollineárisak, azaz l_j nem csúcsa a Θ poliédernek. Ugyanezt a duális esetben is végigmondva kapjuk a következőt:

3.7.5. Lemma. *Legyenek $l_0, l_1, ..., l_{s+1}$ ebben a sorrendben a $\partial\Theta$ határpoligon kompakt élein fekvő N-beli pontok ($\Theta = ConvHull\,(\sigma \cap N \setminus \{O\})$). Ekkor léteznek olyan $b_j \geq 2$ egészek, hogy $l_{j-1} + l_{j+1} = b_j l_j,\ 1 \leq j \leq s$-re. Hasonlóan legyenek $k_0, k_1, ..., k_{t+1}$ ebben a sorrendben a $\partial\Theta^{\vee}$ határpoligon kompakt élein fekvő M-beli pontok ($\Theta^{\vee} = ConvHull\,(\sigma^{\vee} \cap M \setminus \{O\})$). Ekkor léteznek olyan $c_i \geq 2$ egészek, hogy $k_{i-1} + k_{i+1} = c_i k_i,\ 1 \leq i \leq t$-re. Sőt,*

$$\sum_{1 \leq j \leq s} (b_j - 2) = t - 1 \ \text{\textit{és}}\ \sum_{1 \leq i \leq t} (c_i - 2) = s - 1.$$

Vegyük észre, hogy a $C_1 + ... + C_s$ kivételes görbe önmetszési száma:

$$-(C_1 + ... + C_s)^2 = 2 + \sum_{1 \leq j \leq s} (b_j - 2) = t + 1.$$

3.7.6. Következmény. *Ha p, q relatív prímek, $0 < p < q$, akkor a következő Hirzebruch-Jung láctörtbe fejtésekre:*

$$\frac{q}{q-p} = [b_1, ..., b_s],\ b_j \geq 2,\ 1 \leq j \leq s,$$

$$\frac{q}{p} = [c_1, ..., c_t],\ c_i \geq 2,\ 1 \leq i \leq t,$$

teljesül, hogy

$$(b_1 + ... + b_s) - s = (c_1 + ... + c_t) - t = t + s + 1.$$

Bizonyítás. Annyit kell csak belátni, hogy ezek a b_j, c_i, s és t egészek megegyeznek az előző lemmákban ugyanígy jelöltekkel. Valójában a b_j-knek pont ez a lánctört adta a definícióját, így azt kell csak belátni, hogy a 3.7.3 Állításban definiált c_i-k és t a q/p lánctörtjét adják vissza.

Mivel $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}n + \mathbb{R}_{\geq 0}(pn + qn_1)$ és $\{n, n_1\}$ egész bázisa az N-nek, ezért ha $\{m, m_1\}$-el jelöljük a M duális bázisát

$$\Rightarrow \sigma^\vee = \mathbb{R}_{\geq 0}m_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}(qm - pm_1) = \mathbb{R}_{\geq 0}m_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}((q-p)m_1 + q(m - m_1)),$$

ahol $0 < q - p < q$, így az $\{m_1, m - m_1\}$ bázisban standard formájú a $\sigma^\vee$, és itt a második irány meredeksége $q/(q-p) \Rightarrow$ azű 3.7.2 Lemma szerint $\frac{q}{p} = [c_1, ..., c_t]$ teljesül a k_i rácspontokhoz tartozó c_i-kre, tehát valóban alkalmazhatjuk az előző lemmát mind a b_j-kre, mind a c_i-kre. $\square$

A $\sigma^{\vee\vee} = \sigma$ azonosítás lehetőséget ad arra, hogy a $\frac{q}{q-p}$ és a $\frac{q}{p}$ lántörtje közötti átjárást konkrétan meg tudjuk adni. Ehhez csak annyit kell felhasználni, hogy a 3.7.5 Lemma előtti érvelés jelölésében az $m_{j(\alpha)}$ és $m_{j(\alpha+1)}$ pontok közötti szakaszon rajtuk kívül pontosan $b_{j(\alpha)} - 3$ rácspont van. Később beláttuk, hogy ezek a rácspontok mind a $\Theta^\vee$ határán vannak, így ők valami k_i-k. Mivel ők mind kollineárisak, így automatikusan a nekik megfelelő c_i egészek 2-k kell legyenek. Így azt kapjuk, hogy minden, a Θ határán csúcsnak megfelelő $b_{j(\alpha)}$ megad $b_{j(\alpha)} - 3$ darab egymást követő 2-est a $\frac{q}{p}$ lánctörtjében. A dualitás miatt ugyanígy. minden, a $\Theta^\vee$ határán csúcsnak megfelelő $c_{i(\beta)}$ meghatároz a $\frac{q}{(q-p)}$ lánctörtjében $c_{i(\beta)} - 3$ darab egymást követő 2-st. Innen kapjuk a következőt:

3.7.7. Lemma. ***(Riemenschneider-féle pontdiagram).*** *Legyenek $0 < p < q$ relatív prím egészek, ekkor a $q/(q-p)$ Hirzebruch-Jung lánctörtbe fejtése megadható a következő alakban:*

$$\frac{q}{q-p} = [b_1, ..., b_s] = [(2)^{m_1-1}, n_1, (2)^{m_2-1}, n_2, ..., n_a, (2)^{m_{a+1}-1}],$$

ahol $(2)^l$ az l tagú, azonosan 2-esekből álló sorozatot jelöli, míg $m_j \geq 1$, $n_j \geq 3$ egészek minden j-re. Ekkor $\frac{q}{p} = [c_1, ..., c_t] =$

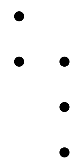
$$\frac{q}{p} = [m_1 + 1, (2)^{n_1-3}, m_2 + 2, (2)^{n_2-3}, ..., m_a + 2, (2)^{n_a-3}, m_{a+1} + 1].$$

Az átszámítást segíti a következő pontdiagram:

$$\begin{array}{lllll}
\bullet & \bullet \cdots \bullet & & & b_1 - 1 \text{ pont az első sorban} \\
& \bullet & \bullet \cdots \bullet & & b_2 - 1 \text{ pont a második sorban} \\
& & \bullet & \bullet \cdots & b_3 - 1 \text{ pont a harmadik sorban} \\
& \vdots & & & \vdots
\end{array}$$

míg az oszlopokban sorra $c_1 - 1, c_2 - 1, \ldots$ pont van.

3.7.8. Példa. *$q = 11$, $p = 4$ esetben $11/7 = [2, 3, (2)^2]$, így a hozzá tartozó pont-diagram a következő:*



így kapjuk, hogy $11/4 = [3, 4]$, amit számolással ellenőrizhetünk.

A következő állítás a 3.6.7 Következményen keresztül összeköti az U_σ affin tórikus varietásokat a Hirzebruch-Jung szingularitásokkal. Valójában az derül ki, hogy minden kétdimenziós tórikus szingularitás hányados szingularitás, így ezzel a Hirzebruch-Jung szingularitások egy újabb ekvivalens definícióját kapjuk:

3.7.9. Állítás. *Legyenek $0 \le p < q$ relatív prím egészek és jelölje $\varepsilon \in \mathbb{Z}_q$ az $\varepsilon := e^{\frac{2\pi i}{q}}$ generátort. Tegyük fel, hogy ez a $\mathbb{Z}_q$ csoport a következőképpen hat a $\mathbb{C}^2$-n:*

$$\varepsilon * (z_1, z_2) \mapsto (\varepsilon^{-p} z_1, \varepsilon z_2) = (\varepsilon^{q-p} z_1, \varepsilon z_2).$$

Legyen $N \cong \mathbb{Z}^2$ rács az $\{n_1, n_2\}$ bázissal és legyen $\sigma := \mathbb{R}_{\ge 0} n_1 + \mathbb{R}_{\ge 0}(pn_1 + qn_2)$ egy SCRPC. Ekkor az U_σ affin tórikus varietás megegyezik $\mathbb{C}^2$-nek ezen $\mathbb{Z}_q$ hatás szerinti faktorterével.

Bizonyítás. Legyen $N' := \mathbb{Z}\langle n_1, pn_1 + qn_2 \rangle$ elemek által generált részmodulus az N-ben. Ő ekkor nyilván egy q indexű részcsoport.

Ha most $\triangle$ a σ oldalaiból álló legyező, akkor a $\iota : (N', \triangle) \hookrightarrow (N, \triangle)$ természetes beágyazás indukál egy

$$\iota_* : U'_\sigma = T_{N'} emb(\triangle) \to T_N emb(\triangle) = U_\sigma$$

ekvivariáns holomorf leképezést. Ez azonban a 3.6.7 Következmény szerint maga az $U'_\sigma \to U'_\sigma/(N/N')$ faktorleképezés, azaz $U_\sigma = U'_\sigma/(N/N')$.

Vizsgáljuk most meg tehát az N/N' véges csoportot és hatását az U'_σ-n. Először is, az nyilvánvaló, hogy $N/N' \cong \mathbb{Z}_q$, konkrét izomorfizmust a következőképpen adhatunk meg: $a \in \mathbb{Z}$ esetén: $N/N' \ni an_2 + N' \leftrightarrow \varepsilon^a \in \mathbb{Z}_q$, mivel $n_2 \notin N'$, sőt, ő generálja is az N/N' csoportot. Valóban, csak a q-szorosa van N'-ben, így ő egy q rendű elem egy q elemszámú csoportban.

Jelölje most $\{m_1, m_2\}$ az $\{n_1, n_2\}$ duális bázisát az M-ben, míg $\{m'_1, m'_2\}$ az M' duális bázisát az N'-beli $\{n_1, pn_1 + qn_2\}$ bázisra nézve. Láttuk, hogy a $\iota : N' \hookrightarrow N$ beágyazás indukál egy $\iota^* : M \hookrightarrow M'$ beágyazást, melyre $m_1 = m'_1 + pm'_2$ és $m_2 = qm'_2$ adódik (a ι^*-ot lehagyva a jelölésből).

Mivel $\sigma^\vee \cap M' = \mathbb{Z}_{\geq 0} m'_1 + \mathbb{Z}_{\geq 0} m'_2$, így valóban kapjuk az

$$(e(m'_1), e(m'_2)) : U'_\sigma \xrightarrow{\simeq} \mathbb{C}^2,\ z_1 = e(m'_1),\ z_2 = e(m'_2)$$

izomorfizmust.

A 3.6.4 Megjegyzésben láttuk, hogy ekkor a $\langle , \rangle$ párosítások együttesen kiterjednek egy $\langle , \rangle : M' \times N \to \frac{1}{q}\mathbb{Z}$ leképezéssé. A 3.6.5 Lemma bizonyítása alapján az $N/N' \xrightarrow{\simeq} Hom_{\mathbb{Z}}(M'/M, \mathbb{C}^*)$ azonosítás a következő:

$$N/N' \ni n + N' \mapsto \left(w_n : m' + M \mapsto e^{2\pi i \langle m', n \rangle} \right) \in Hom_{\mathbb{Z}}(M'/M, \mathbb{C}^*).$$

Azt is láttuk, hogy egy ilyen $w_n \in ker(T_{N'} \to T_N)$ úgy hat az U'_σ-n, hogy minden $u' \in U'_\sigma$-ra

$$w_n u' \in U'_\sigma,\ \forall m' \in \mathcal{S}'{}_\sigma\text{-ra}:\ w_n u'(m') = w_n(m') u'(m') = e^{2\pi i \langle m', n \rangle} u'(m').$$

Tehát a $w_{n_2} \simeq n_2 + N \simeq \varepsilon \in \mathbb{Z}_q$ így hat a $\mathbb{C}^2$-n:

$$\varepsilon(z_1) = w_{n_2}(e(m'_1)) = e^{2\pi i \langle m'_1, n_2 \rangle} e(m'_1) = e^{2\pi i \langle m1 - (p/q)m_2, n_2 \rangle} e(m'_1) = e^{\frac{-2\pi i p}{q}} z_1 = \varepsilon^{-p} z_1.$$

$$\varepsilon(z_2) = w_{n_2}(e(m'_2)) = e^{2\pi i \langle m'_2, n_2 \rangle} e(m'_1) = e^{2\pi i \langle (1/q) m_2, n_2 \rangle} e(m'_1) = e^{\frac{2\pi i}{q}} z_1 = \varepsilon z_1.$$

Tehát ez tényleg a $\varepsilon * (z_1, z_2) \mapsto (\varepsilon^{-p} z_1, \varepsilon z_2)$ hatás, így tényleg $U_\sigma = \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_q$. □

Vegyük észre, hogy a $\varepsilon * (z_1, z_2) \mapsto (\varepsilon^{-p} z_1, \varepsilon z_2)$ hatás (a 2.2.8 Megjegyzés szerint) megegyezik a Hirzebruch-Jung szingularitások eredeti definíciójában szereplő $\xi * (z_1, z_2) \mapsto (\xi z_1, \xi^{q-p} z_2)$ hatással, így a most megkapott ciklikus hányados szingularitás az $X_{q,q-p}$ modell térrel izomorf, így a rezolúciós gráfjának dekorációi valóban a $q/(q-p)$ lánctörtjéből származnak.

3.7.1. A Hirzebruch-Jung szingularitások egyenletei és az invariáns gyűrű generátorai

A 3.7.3 Állítás előtt is láttuk, hogy az $\mathcal{S}_\sigma = M \cap \sigma^\vee$ minden generátorrendszere meghatározza az U_σ varietás egy affin beágyazását. Magában a 3.7.3 Állításban pedig 2 dimenziós σ esetén megadtuk a $\{k_0, ..., k_{t+1}\}$ minimális generátorrendszert. A 3.3.6 Állítás bizonyítása szerint pedig, ha ezeknek megadjuk a monoid-relációit, abból kiszámolhatjuk az U_σ egyenleteit. 2 dimenziós esetben tehát megadhatjuk a Hirzebruch-Jung szingularitások egy-egy konkrét reprezentációját.

Azt rögtön a definíció után láttuk, hogy $k_{i-1} + k_{i+1} = c_i k_i$. Ezeket összegezve

$$(k_{i-1} + k_{i+1}) + (k_i + k_{i+2}) + ... + (k_{j-1} + k_{j+1}) = c_i k_i + c_{i+1} k_{i+1} + ... c_j k_j.$$

Átrendezve, kapjuk, hogy az M-ben teljesül a következő:

$$k_{i-1} + k_{j+1} = (c_i - 1)k_i + \sum_{i<l<j} (c_l - 2)k_l + (c_j - 1)k_j, \text{ ha } i < j.$$

De a két oldal $\mathcal{S}_\sigma$-ban is értelmes, így nyilván ott is egyenlő, tehát egy nemtriviális monoid relációt ad.

3.7.10. Állítás. *$\mathcal{S}_\sigma$-ban az összes monoid reláció előállítható az alábbiakból:*

$$k_{i-1} + k_{i+1} = c_i k_i, \forall i \in \{1, ..., t\},$$

$$k_{i-1} + k_{j+1} = (c_i - 1)k_i + \sum_{i<l<j} (c_l - 2)k_l + (c_j - 1)k_j, \text{ minden } i < j \text{ párra.}$$

Bizonyítás. Azt már láttuk, hogy ezek valóban relációk, azt kell még belátni, hogy bármely $\sum_{i_1 \le l_1 \le j_1} u_{l_1} k_{l_1} = \sum_{i_2 \le l_2 \le j_2} v_{l_2} k_{l_2} = m \in \mathcal{S}_\sigma$, $\forall u_{l_1}, v_{l_2} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$, alakú reláció előállítható ilyenekből. A bizonyítás ötlete az, hogy mindkét oldalra külön-külön alkalmazzuk az állításban szereplő relációkat, mígnem egy kanonikus alakhoz jutunk. Konkrétan, a legnagyobb és legkisebb indexű tag helyére, a megfelelő relációt alkalmazva, a két index közötti tagokat tudunk betenni, így minden lépésben el tudjuk tüntetni a legnagyobb és a legkisebb indexű k_l generátorok legalább egyikét az összegből. Ezt addig tudjuk csinálni, mígnem a kifejezésben csak két egymást követő indexű generátorunk marad:

$$\sum_{i_1 \le l_1 \le j_1} u_{l_1} k_{l_1} = u_{i'_1} k_{i'_1} + u_{i'_1+1} k_{i'_1+1} = m$$

valami $i'_1 \in \{0, 1, ..., t\}$-re és $u_{i'_1}, u_{i'_1+1} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$-ra. Hasonlóan

$$\sum_{i_2 \le l_2 \le j_2} v_{l_2} k_{l_2} = v_{i'_2} k_{i'_2} + v_{i'_2+1} k_{i'_2+1} = m$$

$i'_2 \in \{0, 1, ..., t\}$-re és $v_{i'_2}, v_{i'_2+1} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$-ra. De ekkor $m \in \mathbb{R}_{\ge 0} k_{i'_1} + \mathbb{R}_{\ge 0} k_{i'_1+1}$ kúpnak és $m \in \mathbb{R}_{\ge 0} k_{i'_2} + \mathbb{R}_{\ge 0} k_{i'_2+1}$ kúpnak, azt pedig korábbról tudjuk, hogy $\{k_{i'_1}, k_{i'_1+1}\}$ és $\{k_{i'_2}, k_{i'_2+1}\}$ is $\mathbb{Z}$-bázisa az M-nek, tehát az m felírása mindkettőben egyértelmű. Így a két kúp vagy egy élben metszi egymást, melyen rajta van az m, vagy megegyeznek. Mindkét esetben a bázisokban való egyértelmű kifejezhetőség miatt kapjuk, hogy az m két kifejezése megegyezik, így a két eredeti kifejezést a már megadott relációk segítségével össze tudjuk kötni. Lényegében azt csináltuk, hogy az m bármely kifejezését összekötöttük a kanonikussal, ahol a kanonikus alatt azt értjük, amelyet a felbontásban őt tartalmazó nemszinguláris kúp bázisában kapunk. □

Ennek következményeként a 3.3.6 Állítást és a 3.7.5 Lemmát alkalmazva kapjuk a Hirzebruch-Jung szingularitások egyenleteit:

3.7.11. Következmény. *Az $X_{q,q-p}$, $0 < p < q$ Hirzebruch-Jung szingularitás egy affin realizációját megadhatjuk a következőképpen: ha p/q lánctört felírása $[c_1, ..., c_t]$ valamilyen $t \in \mathbb{Z}_{>0}$-ra és $\forall i \in \{1, ..., t\}$: $c_i \in \mathbb{Z}$, $c_i \geq 2$ egészekre, akkor $X_{q,q-p}$ az a varietás $\mathbb{C}^{t+2}$-ben, amit az*

$$I := \left(x_{i-1}x_{i+1} - x_i^{c_i}, x_{j-1}x_{k+1} - x_j^{c_j-1} \left(\prod_{j<l<k} x_l^{c_l-2} \right) x_k^{c_k-1} \middle| \forall i, j, k : j < k \right)$$

ideál vág ki.

Vegyük észre, hogy a k_i rácspontok konkrét koordinátáinak kiszámolásával megkaphatjuk az invariáns gyűrű minimális generátorrendszerét.

3.7.12. Példa. *A 3.6.8 Példa 2. részében leírt esetben az ottani jelöléseket használva az A_σ koordinátagyűrű generátorrendszere a következő: $\{U^{s_i}V^{t_i} \mid 1 \geq i \geq e\}$, ahol az e-t és a kitevőket a következőképpen kaphatjuk meg. Legyenek $c_2, ..., c_{e-1}$ a q/p Hirzuebruch-Jung lánctörtjében fellépő egészek (mind ≥ 2): $q/p = [c_2, ..., c_{e-1}]$. Ekkor*

$$s_1 = q,\ s_2 = p, \quad s_{i+1} = c_i s_i - s_{i-1},\ \text{ha } 2 \leq i \leq e-1;$$

$$t_1 = 0,\ t_2 = 1, \quad t_{i+1} = c_i t_i - t_{i-1},\ \text{ha } 2 \leq i \leq e-1.$$

Vegyük észre, hogy a 2.1.2 Definíció jelölésében $s_i = n_{i,e-1}$, míg $t_i = n_{2,i}$. Így megkaptuk a $\mathbb{Z}_q$-nak a $\mathbb{C}^2$-n vett $\xi * (u, v) = (\xi u, \xi^{q-p}v)$ hatására invariáns polinomok gyűrűjének egy minimális generátorrendszerét.

3.7.13. Megjegyzés. *Tehát azt látjuk, hogy a σ kúp felelős az $X_{q,q-p}$ szingularitás rezolúciós gráfjáért, így a topológiájáért (lásd a Csővezeték szerkesztés című alfejezetet), míg a $\sigma^\vee$ az egyenletekért és az algebrájáért.*

Ha a $\sigma^\vee$ kúpot $\pi/2$-vel elforgatjuk és az $N_\mathbb{R} \cong M_\mathbb{R}$ azonosításnál a σ-val együtt ábrázoljuk, akkor azt látjuk, hogy ő azonosítható a σ kiegészítő kúpjával és így még több kombinatorikus dualitási tulajdonság levezethető a $(\sigma, \sigma^\vee)$ párra, lásd (Popescu-Pampu et al., 2007).

4. Az analitikus Lipman kúp és a Hirzebruch-Jung szingularitások kapcsolata

A kapcsolat megvilágítása előtt szükséges néhány alapvető definíció és tétel átnézése.

4.1. Racionális szingularitások Picard csoportja

Ebben az alfejezetben csak az állításokat és a definíciókat mondjuk ki, a bizonyítások megtalálhatók például a (Hartshorne, 1997), (Barth, Hulek, Peters, & van de Ven, 2003) és a (Némethi, 202?) könyvekben.

4.1.1. A vonalnyalábok Picard csoportja

Rögzítsünk egy S normális analitikus halmazt.

4.1.1. Definíció. *Az S fölötti holomorf vonalnyalábok a tenzorszorzásra nézve egy csoportot alkotnak. Az ő izomorfia osztályaik csoportja az S* ***Picard csoportja****, jelölése $Pic(S)$. A vonalnyalábok Cech-kociklusként való értelmezéséből és a Cech- és kéve kohomológia megegyezéséből kapunk egy $Pic(S) \cong H^1(S, \mathcal{O}_S^*)$ természetes izomorfizmust, ahol $\mathcal{O}_S^*$ az invertálható holomorf függvények kévéje az S-en.*

A kévék exponenciális egzakt sorozatából

$$0 \to \mathbb{Z}_S \to \mathcal{O}_S \xrightarrow{e} \mathcal{O}_S^* \to 0,$$

ahol $e(f) = exp(2\pi i f)$, kapjuk az exponenciális kéve kohomológia egzakt sorozatot:

$$... \to H^1(S, \mathbb{Z}_S) \to H^1(S, \mathcal{O}_S) \to H^1(S, \mathcal{O}_S^*) \xrightarrow{c_1} H^2(S, \mathbb{Z}_S) \to H^2(S, \mathcal{O}_S) \to ...$$

Itt a $H^2(S, \mathbb{Z}_S)$ a Cech kohomológián keresztül izomorf a $H^2(S, \mathbb{Z})$ szinguláris kohomológia csoporttal, a c_1 leképezés pedig egy $\mathcal{L}$ vonalnyaláb Cech kociklusához az első Chern osztályát (ami vonalnyaláb esetben az Euler osztállyal megegyezik) rendeli.

Vegyük észre, hogy hasonló egzakt sort kapunk a topologikus vagy a sima komplex vonalnyalábok esetében is, az $\mathcal{O}_S$ kéve helyett a C_S-et vagy a C_S^∞-et véve. Ezek a kévék azonban aciklikusak, így például a topologikus esetben $H^i(S, C_S) = 0$, ha $i > 0$, így a vonalnyalábok topologikus osztályozását megadja a $c_1 : Pic^{top}(S) \xrightarrow{\simeq} H^2(S)$ izomorfizmus. Tehát a $c_1 : Pic(S) \to H^2(S)$ értelmezhető a $Pic(S) \to Pic^{top}(S)$ "felejtő homomorfizmusként" is.

Általában a c_1 leképezés magját $Pic^0(S)$-sel jelöljük, ő a topolgikusan triviális holomorf vonalnyalábok csoportja.

4.1.2. A Riemann-Roch tétel

4.1.2. Tétel. ***(Riemann-Roch görbékre).*** *Legyen C egy kompakt sima görbe és $\mathfrak{L}$ egy vonalnyaláb fölötte, melyre $\mathfrak{L} = \mathcal{O}_C(D)$, valami $D \in Div(C)$ divizorra. Ekkor*

$$h^0(\mathcal{O}_C(D)) - h^1(\mathcal{O}_C(D)) = 1 - h^1(\mathcal{O}_C) + deg(D),$$

ahol $h^i(\mathcal{O}_C(D))$ a megfelelő $H^i(C, \mathcal{O}_C(D))$ kéve kohomológia csoport komplex dimenzióját jelöli, $deg(D)$ pedig a D divizor foka.

Jelölés. $\chi(\mathcal{O}_C(D)) := h^0(\mathcal{O}_C(D)) - h^1(\mathcal{O}_C(D))$.

Ha most a C görbét simán beágyazzuk egy X sima kompakt felületbe, akkor ő meghatároz egy $[C] \in H_2(X, \mathbb{Z})$ homológia osztályt. Emellett a $H_2(X, \mathbb{Z})$-n van egy nemdegenerált bilineáris forma: a homologikus metszési szám (jelöljük továbbra is $(\,,\,)$-el).

Ha $D \in Div(X)$, akkor ő egy $[D] \in H_2(X, \mathbb{Z})$ homológia osztályt is reprezentál és a divizorok homologikus metszési száma megegyezik az algebrai metszetmultiplicitásukkal. A D divizorhoz tartozó $\mathcal{O}_X(D)$ vonalnyalábnak a C görbére vett $\mathcal{O}_X(D)\big|_C$ megszorítása is egy vonalnyaláb, melyre teljesül, hogy

$$\mathcal{O}_X(D)\big|_C = \mathcal{O}_C\left(\sum_{p \in C \cap D} i_p(C, D)p\right) \in Pic(C),$$

ahol $i_p(C, D)$ a C és D divizorok $p \in C \cap D$ pontban vett algebrai metszetmultiplicitását jelöli. Ekkor $deg_C\left(\mathcal{O}_X(D)\big|_C\right) = ([C], [D]) = (C, D)$ teljesül.

Mivel a C sima görbe az X-en, ezért az TC érintőnyaláb és a $TX\big|_C$ megszorított nyaláb segítségével definiálható a $\mathcal{V}_{C \hookrightarrow X}$ normálnyaláb:

$$0 \longrightarrow TC \longrightarrow TX\big|_C \longrightarrow \mathcal{V}_{C \hookrightarrow X} \longrightarrow 0$$

Ezt dualizálva kapjuk a következő egzakt sort:

$$0 \longrightarrow \mathcal{V}^*_{C \hookrightarrow X} \longrightarrow T^*X\big|_C \longrightarrow T^*C \longrightarrow 0\,.$$

Tetszőleges V n-dimenziós sima algabrai vagy analitikus varietás esetén az Ω^n_V kanonikus vonalnyalábot a T^*V koérintőnyaláb n-edik külső hatványaként definiáljuk. Tehát $V = C$ esetén $\Omega^1_C = T^*C = \mathcal{O}_C(K_C)$ a $K_C \in Div(C)$ kanonikus divizora, míg $V = X$ esetén $\Omega^2_X = \wedge^2 T^*X = \mathcal{O}_X(K_X)$ valami $K_X \in Div(X)$ kanonikus divizorra.

Ismeretes, hogy $\mathcal{O}_X(C)\big|_C = \mathcal{V}_{C \hookrightarrow X}$, így $\mathcal{V}^*_{C \hookrightarrow X} = \mathcal{O}_X(-C)\big|_C$.

A ragasztási leképezések elemzésével belátható, hogy $\mathcal{V}^*_{C \hookrightarrow X} \otimes T^*C = \Omega^2_X\big|_C$ a korábbi egzakt sor alapján, így

$$\mathcal{O}_X(-C)\big|_C \otimes \mathcal{O}_C(K_C) = \mathcal{O}_X(K_X)\big|_C.$$

Ezt hívjuk az adjunkciós formulának. A C fölötti fokszámra térve $\Rightarrow$

$$-(C,C)+deg(K_C)=(K_X,C),$$

és $deg(K_C)=2g_C-2$ a Serre-dualitás alapján, ahol $g_C=dim_{\mathbb{C}}\left(H^1(C,\mathcal{O}_C)\right)$. Így:

$$\chi(\mathcal{O}_C)=1-g_c=-\frac{1}{2}(C,C+K_X).$$

A Riemann-Roch tétel alapján ekkor:

$$\chi(\mathcal{O}_C(D))=(D,C)-\frac{1}{2}(C,C+K_X),\ \forall D\in Div(X).$$

Ha $D>0$ effektív divizor, akkor az $\mathcal{O}_X(-D)$ kéve egy ideál kéveként is felfogható az $\mathcal{O}_X$-ben, így tekinthetjük a szerinte vett faktorból léltrehozott $\mathcal{O}_D$ hányadoskévét:

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_X(-D)\longrightarrow\mathcal{O}_X\longrightarrow\mathcal{O}_D\longrightarrow 0 \tag{1}$$

$D'\in Div(X)$ tetszőleges divizor esetén definiálhatjuk az $\mathcal{O}_D(D')=\mathcal{O}_X(D')\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_D$ kévét. Az előző egzakt sort a $\mathcal{O}_X(-D')$ kévével tenzorszorozva kapjuk, hogy

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_X(-D-D')\longrightarrow\mathcal{O}_X(-D')\longrightarrow\mathcal{O}_D(-D')\longrightarrow 0$$

egzakt. Ha a D' divizor is effektív, akkor a

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_X(-D-D')\longrightarrow\mathcal{O}_X\longrightarrow\mathcal{O}_{D+D'}\longrightarrow 0 \tag{2}$$

sorozat is egzakt, és így a Kígyó lemmát használva az (1) és a (2) egzakt sorozatokra kapjuk, hogy a következő sorozat egzakt:

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_D(-D')\longrightarrow\mathcal{O}_{D+D'}\longrightarrow\mathcal{O}_{D'}\longrightarrow 0\,.$$

A hozzá tartozó kohomologikus kéve hosszú egzakt sorból és a Riemann-Roch korábbi alakjaiból indukcióval kapjuk, hogy $D>0$ effektív divizor esetén

$$\chi(\mathcal{O}_D(D'))=(D,D')-\frac{1}{2}(D,D+K_X).$$

Speciálisan, $D'=0$ esetén:

$$\chi(D):=\chi(\mathcal{O}_D)=-\frac{1}{2}(D,D+K_X).$$

4.1.3. Az Artin-ciklus és a Laufer algoritmus

Legyen most (X,o) egy normál felület szingularitás, $\phi:\tilde{X}\to X$ pedig egy jó lokális rezolúciója. A kivételes görbét jelölje E, irreducibilis komponenseit $\{E_v\}_{v\in\mathcal{W}}$. Legyenek L és L' a rezolúcióhoz tartozó rácsok és $\mathcal{S}$ a Lipman kúp. Ekkor egyszerű számolással belátható a következő:

4.1.3. Lemma. *$l, l' \in L'$ esetén az 1.1.23 Definícióban definiáltuk a $min\{l, l'\} \in L'$ osztályt. Az $\mathcal{S}$ Lipman kúp erre a min műveletre zárt.*

Mivel az 1.1.27 Állítás szerint minden $0 \neq l \in \mathcal{S},\ l = \sum_v r_v E_v$ esetén $r_v > 0$ minden v-re, azért az $\mathcal{S}\setminus\{0\}$ halmaznak létezik egyértelmű minimális eleme az 1.1.23 Definíció szerinti $\geq$ relációra nézve.

4.1.4. Definíció. *Az $\mathcal{S}\setminus\{0\}$ halmaz egyértelmű minimális elemét jelölje Z_{min}, melynek neve **Artin-ciklus**. Az 1.1.27 Állítás szerint $Z_{min} \geq E$.*

4.1.5. Állítás. ***(Laufer algoritmus a Z_{min} megtalálására).*** *A Z_{min} minimális Artin-ciklus megtalálható a következő algoritmussal: induktívan legyártunk egy sorozatot: $z_1 = E_v, z_2, ..., z_t = Z_{min} \in L_{\geq 0}$, amely bármelyik E_v-vel kezdődhet, és legyen $z_{i+1} := z_i + E_{v(i)}$, ahol a $v(i)$ indexet a következőképpen választjuk ki. Tegyük fel, hogy az z_i-t már ismerjük, ha most $z_i \in \mathcal{S} \Rightarrow z_i = z_t = Z_{min}$ és készen vagyunk, ha viszont $z_i \notin \mathcal{S} \Rightarrow$ a Lipman kúp definíciója szerint létezik olyan v, melyre $(z_i, E_v) > 0$ és ekkor $v(i) := v$. Ez az algoritmus, bár tartalmaz választásokat, véges sok lépés után megáll és az $z_t = Z_{min}$-t adja vissza.*

4.1.6. Definíció. *A Laufer algroritmus során megkonstruált $z_1, ..., z_t \in L_{\geq 0}$ sorozatot **Laufer-sorozat**nak nevezzük. Definíciója szerint teljesül, hogy $z_1 = E_v$ valamelyik v-re és $z_{i+1} = z_i + E_{v(i)}$, olyan $v(i)$ index esetén, melyre $(z_i, E_{v(i)}) > 0$.*

4.1.4. Racionális szingularitások

Legyen (X, o) egy normál felület szingularitás, X egy megfelelően kicsi és Stein környezete az o-nak, és $\phi : \tilde{X} \to X$ egy rögzített jó rezolúció.

4.1.7. Definíció. *Az (X, o) normál felület szingularitás geometriai génusza*

$$p_g := dim\left(\left(R^1\phi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}\right)_o\right).$$

4.1.8. Megjegyzés. *A fejezet elején leírt feltételek mellett*

$$p_g := dim\left(R^1\phi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(X)\right) = dim\left(H^1\left(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}\right)\right) =^{jel} h^1\left(\mathcal{O}_{\tilde{X}}\right).$$

4.1.9. Definíció. *Az (X, o) szingularitás **racionális**, ha $p_g = 0$.*

A racionalitás topológiai jellemzése:

4.1.10. Tétel. *A Riemann-Roch tételekkel és a kéve kohomologikus egzakt sorokkal belátható, hogy a következők ekvivalensek (lásd (Némethi, 202?)), (Laufer, 1971)):*

1. *$p_g = 0$;*

2. *$\chi(l) \geq 1$ minden $l \in L_{>0}$, ahol $L = H_2(\tilde{X}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\langle E_v \rangle_v$ a rezolúcióhoz tartozó rács, egyben az E-beli tartójú divizorok részcsoportja;*

3. *$\chi(Z_{min}) = 1$, ahol Z_{min} az Artin ciklus, azaz az $\mathcal{S}$ Lipman kúp legkisebb $\neq O$ eleme, egyben egy E tartójú effektív divizor;*

4. *A Γ_X rezolúciós gráf egy fa, melyre minden g_v génusz 0, és $\left(E_{v(i)}, z_i\right) = 1$ minden $1 \leq i \leq t$-re a Laufer algoritmus Laufer-sorozatában.*

Elnevezés. *Ha egy rezolúciós gráf teljesíti valamelyiket a fenti 2.-3.-4. feltételek közül, akkor őt **racionális gráf**nak nevezzük.*

4.1.11. Következmény. *Könnyen látható, hogy 4. racionalitási feltétel teljesül, ha a Γ gráf egy $\mathbb{CP}^1$-ekből álló fa és a csúcsok fokszámaira teljesül, hogy $\kappa_v \leq -E_v^2$ minden v-re. Ekkor a $Z_{min} = E$ is teljesül. Speciálisan, a Hirzebruch-Jung szingularitások is racionálisak.*

4.1.12. Következmény. *Ha az (X, o) racionális szingularitás, akkor $Pic^0(\tilde{X}) = 0$, azaza ha egy holomorf vonalnyaláb a $\tilde{X}$ fölött topologikusan triviális (a Chern osztálya $O \in H^2(\tilde{X})$), akkor ő analitikusan is az.*

Bizonyítás. Ebben az esetben az exponenciális kéve kohomológia egzakt sorban $H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 0$, így a $c_1 : Pic(\tilde{X}) \to Pic^{top}(\tilde{X})$ leképezés injektív. □

4.2. Az analitikus Lipman kúp

4.2.1. Definíció. ***(Analitikus Lipman kúp).*** $\mathcal{S}_{an} := \{div_E(f) \mid f \in \mathcal{O}_{X,o}\} \subset L$.

4.2.2. Megjegyzés. *Az 1.1.26 Lemma alapján $\mathcal{S}_{an} \subset \mathcal{S}$. Sőt, abban az esetben, ha az (X, o) racionális, akkor $\mathcal{S}_{an} = \mathcal{S}$. Valóban, ha veszünk egy $l \in \mathcal{S}$ divizort, tudjuk, hogy $(l, E_v) \leq 0$ minden v-re, és szeretnénk belátni, hogy létezik olyan $f \in \mathcal{O}_{X,0}$, melyre $div_E(f) = l$. Ha most minden olyan $v \in \mathcal{W}$-re, melyre $(l, E_v) < 0$, veszünk egy E_v-re transzverzális (a többi $E_w(w \neq v)$-t nem metsző) S_v divizort és ezeket $(-(l, E_v))$ multiplicitással hozzáadjuk az l-hez, egy olyan $\tilde{l}$ divizort kapunk, melyre $(\tilde{l}, E_v) = 0$ minden v-re. Ha most vesszük az ezen divizorhoz tartozó vonalnyalábot ($\mathcal{O}_{\tilde{X}}(\tilde{l})$), akkor az ő Chern osztálya ($\in H^2(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \cong H_2(\tilde{X}, \partial\tilde{X}, \mathbb{Z}) = L'$) az $\tilde{l}$ választása miatt 0, így ő egy topologikusan triviális nyaláb. De az X racionális, így a 4.1.12 Következmény alapján ő analitikusan is triviális. Tehát az $\tilde{l}$ lineárisan ekvivalens a 0 divizorral, így ő egy f meromorf függvény divizora. De ő effektív, így ez az f kénytelen holomorf lenni. Ekkor nyilván $div(f) = \tilde{l}$ és $div_E(f) = l$ teljesül.*

4.2.3. Definíció. *Ha $(\mathcal{M}, \star)$ egy monoid,*

$$\mathbb{C}[\mathcal{M}] := \left\{ \sum_{i=1}^{k} z_i m_i \middle| k \in \mathbb{N},\ \forall i:\ m_i \in \mathcal{M},\ z_i \in \mathbb{C} \right\}$$

egy $\mathbb{C}$ feletti algebra a $\left(\sum_{i=1}^{k} z_i m_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{l} z'_j m'_j\right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} z_i z'_j \left(m_i \star m'_j\right)$ szorzásra nézve. Őt nevezhetjük az M ***monoidalgebrá****jának.*

Véve most a végesen generált $\mathcal{S}$ Lipman kúpot, jelölje $Spec\,(\mathbb{C}\,[\mathcal{S}])$ azt az algebrai varietást, melynek koordináta gyűrűje a $\mathbb{C}\,[\mathcal{S}]$. Vegyük észre, hogy ekkor könnyen meg tudunk adni egy $\mathcal{O}_{X,o} \to \mathbb{C}\,[\mathcal{S}]$ leképezést:

$$f \mapsto div_E(f),$$

ami a szorzás műveletre nézve homomorfizmus, ugyanis

$$div_E(fg) = div_E(f) + div_E(g) = div_E(f) \star div_E(g),$$

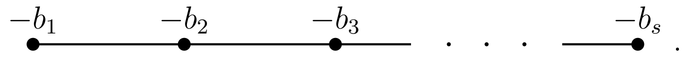
ha az $\mathcal{S}$-beli összeadást (ami ugye $\mathbb{C}\,[\mathcal{S}]$-ben pont szorzás) a $\star$-al jelöljük. Vegyük észre, hogy ez nem egy algebra homomorfizmus.

Láttuk, hogy ha az (X, o) szingularitás racionális, akkor az $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{an}$, így minden Lipman kúpbeli divizor principális, azaz találhatunk hozzá olyan holomorf függvényt, melynek ő a divizora. Most ezt a hozzárendelést szeretnénk megkonstruálni Hirzebruch-Jung szingularitások esetén, úgy, hogy ez egy szelése legyen a fentebbi leképezésnek. Tehát egy olyan $\mathcal{S} \to \mathcal{O}_{X,o}$ leképezést akarunk, mely minden $s \in \mathcal{S}$-beli elemhez egy $f_s \in \mathcal{O}_{X,o}$ függvény rendel, hogy $div_E(f_s) = s$ és $s, t \in \mathcal{S}$ esetén $f_{s\star t} = f_s \cdot f_t$ teljesüljön. Vegyük észre, hogy mivel az $\mathcal{S}$ szabadon generálja a $\mathbb{C}\,[\mathcal{S}]$-t, mint $\mathbb{C}$ feletti vektorteret, így az $\mathcal{S} \to \mathcal{O}_{X,o}$ leképezés automatikusan kiterjed egy $\mathbb{C}\,[\mathcal{S}] \to \mathcal{O}_{X,o}$ algebra homomorfizmussá. Affin algebrai esetben a koordináta gyűrűk közötti homomorfizmus megad a varietások között egy algebrai leképezést, így kapunk egy $X \to Spec\,(\mathbb{C}\,[\mathcal{S}])$ reguláris leképezést.

4.3. A Hirzebruch-Jung szingularitás beágyazása a Lipman kúphoz tartozó tórikus varietásba

Legyen az (X, o) egy Hirzebruch-Jung szingularitás. Ekkor ő megkapható $\mathbb{C}^2$-nek a $\xi * (a, b) = (\xi a, \xi^q b)$ alakú $\mathbb{Z}_n = \{\xi \in \mathbb{C} \mid \xi^n = 1\}$-hatással vett faktorizációjával (ahol n és q relatív prímek, $n > q$). A Cartan Tételből azt is tudjuk, hogy ő egy affin algebrai varietás, melynek koordináta gyűrűje $\mathbb{C}\,[a, b]^{\mathbb{Z}_n} \leqslant \mathbb{C}\,[a, b]$, a $\mathbb{Z}_n$-invariáns polinomok részgyűrűje.

Legyen n/q lánctörtbe fejtése $[b_1, ..., b_s]$, $b_i \geq 2$. Ekkor a 2.2.1 Tétel bizonyításának (*1.* $\Rightarrow$ *3.*) irányában definiált $\phi : \tilde{X} \to X_{n,q}$ leképezés egy jó és minimális rezolúció, melynek rezolúciós gráfja a következő:



A 2.1.4 Megjegyzésből tudjuk, hogy jelen esetben a metszési mátrix determinánsára teljesül, hogy $|det(I)| = n$. Ekkor az 1.1.21 Definícióban szereplő $H = L'/L$ faktorcsoport rendje is n. Sőt, a következő is igaz:

4.3.1. Lemma. *Hirzebruch-Jung esetben $H = \mathbb{Z}_n$ és az E_1^* osztálya generálja.*

Bizonyítás. Annyit kell belássunk, hogy minden $i \in \mathcal{W}$-re $E_i^* \equiv k_i E_1^*$ (mod L) valami $k_i \in \mathbb{Z}$ esetén. Ehhez vegyük észre, hogy $E_{i-1}^* - b_i E_i^* + E_{i+1}^* = -E_i$ az 1.1.24 Megjegyzés alapján, azaz $E_{i-1}^* - b_i E_i^* + E_{i+1}^* \equiv 0$ (mod L). Ezekből induktívan kiszámolható, hogy

$$E_i^* \equiv n_{1,i-1} E_1^* \ (mod\ L),$$

ahol az $n_{i,j}$-k a parciális lánctörtek számlálóit jelölik, lásd a 2.1.2 Definíciót. $\square$

Vegyük észre, hogy $E_s^* \equiv q' E_1^*$ $(mod\ L)$ is generálja ezt a $\mathbb{Z}_n$-et.

4.3.1. H hatása a koordinátagyűrűn

4.3.2. Definíció. *Legyen (X, o) egy normál felület szingularitás, $\phi : \tilde{X} \to X$ egy jó rezolúciója.*

Tekintsük most a $\mathbb{C}[\mathcal{S}']$ algebrát. Mivel az $\mathcal{S}'$-t, mint monoidot, az E_v^*-ok szabadon generálják, így ők ezt a $\mathbb{C}$-algebrát is szabadon generálják. Ekkor ezen az algebrán meg tudjuk adni H-nak egy hatását, ha megadjuk azt a generátorokon:

$$[l'] \bullet E_v^* = exp\left(2\pi i \left(E_v^*, l'\right)\right) E_v^*,$$

ahol $[l']$ az $l' \in L'$ osztályát jelöli a H-ban. Ez nyilvánvalóan egy jóldefiniált, szabad, diagonális hatás a $\mathbb{C}[\mathcal{S}']$-n.

4.3.3. Állítás. *Ha az (X, o) egy Hirzebruch-Jung szingularitás és ϕ a korábban megkonstruált jó rezolúció, a $\mathbb{C}[\mathcal{S}']^H$, azaz a H ezen hatására invariáns elemek gyűrűje megegyezik $\mathbb{C}[\mathcal{S}] \leqslant \mathbb{C}[\mathcal{S}']$-el.*

Bizonyítás. Az előzőek alapján Hirzebruch-Jung szingularitás esetén $H = \mathbb{Z}_n\langle[E_1^*]\rangle$, így elég csak az $[E_1^*]$-el való hatásra invariáns elemeket vizsgálni. A hatás linearitása és diagonalitása miatt elég csak a $\mathbb{C}[\mathcal{S}']$, mint $\mathbb{C}$-vektortér, egy bázisát vizsgálni.

Legyen tehát $l' \in \mathcal{S}'$, ekkor ő felírható $l' = \sum_i k_i E_i^*, \ k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ alakban. $\mathbb{C}[\mathcal{S}']$ jelölésrendszerében $l' = (E_1^*)^{k_1} \star ... \star (E_s^*)^{k_s}$. Ekkor

$$[E_1^*] \bullet l' = (exp(2\pi i (E_1^*, E_1^*)) E_1^*)^{k_1} \star ... \star (exp(2\pi i (E_i^*, E_1^*)) E_i^*)^{k_i} \star ... =$$

$$= exp\left(2\pi i \sum_{i=1}^{s} k_i (E_i^*, E_1^*)\right) (E_1^*)^{k_1} \star ... \star (E_s^*)^{k_s} = exp(2\pi i (l', E_1^*)) l'.$$

$$\Rightarrow [E_1^*] \bullet l' = l' \Leftrightarrow (l', E_1^*) \in \mathbb{Z}.$$

Az l'-t felírhatjuk a $\mathbb{Q}$ felett az $\{E_i\}_i$ bázisban is, azaz $l' = \sum_i r_i E_i, \ r_i \in \mathbb{Q}$. Definíció szerint

$$l' \in \mathcal{S} \Leftrightarrow r_i \in \mathbb{Z} \ \forall i\text{-re}.$$

De $r_i = -(l', E_i^*)$, így

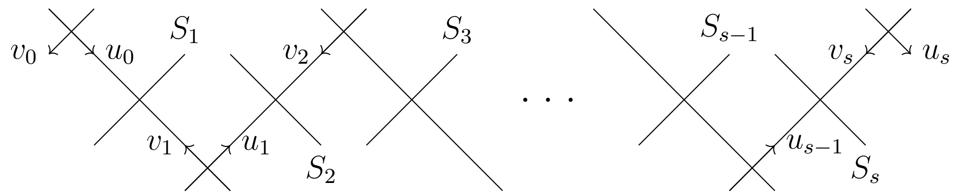
$$l' \in \mathcal{S} \Leftrightarrow (l', E_i^*) \in \mathbb{Z} \ \forall i \Leftrightarrow (l', E_1^*) \in \mathbb{Z}.$$

Az utolsó ekvivalenciában a balról jobbra irány triviális, a jobbról balra irányban azt használjuk ki, hogy $L' = \{l' \in L \otimes \mathbb{Q} \mid \forall i : \ (l', E_i) \in \mathbb{Z}\}$. Ha ugyanis $r_1 \in \mathbb{Z}$, akkor $(l', E_1) = r_1(-b_1) + r_2 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow r_2 \in \mathbb{Z}$. A lánc mentén végighaladva, ugyanígy, indukcióval kapjuk, hogy $r_i \in \mathbb{Z}$ minden i-re, tehát $l' \in \mathcal{S}$. □

A kívánt $\mathbb{C}[\mathcal{S}] \to \mathbb{C}[a,b]^{\mathbb{Z}_n}$ leképezést úgy is megkaphatjuk, ha először egy $\mathbb{C}[\mathcal{S}'] \to \mathbb{C}[a,b]$ leképezést konstruálunk meg, majd kommutatívan és $\mathbb{Z}_n$ ekvivariánsan próbáljuk meg kiegészíteni az alábbi diagramot. Ez utóbbit azért könnyebb létrehozni, mert $\mathbb{C}[\mathcal{S}']$ az E_i^*-ok által definiált szabad $\mathbb{C}$-algebra, így elég a homomorfizmust csak a generátorokon megadni.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[a,b] & \mathbb{C}[\mathcal{S}'] \arrow[l, "?"'] \\
\mathbb{C}[a,b]^{\mathbb{Z}_n} \arrow[u] & \mathbb{C}[\mathcal{S}] \arrow[l, "?"'] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Először a 2.2.1 Tétel bizonyításában megszerkesztett U_i térképeken próbáljuk megkonstruálni az adott divizorral rendelkező függvényeket. Egy $l \in \mathcal{S}$-beli divizorhoz a 4.2.2 Megjegyzésben leírt módon hozzáveszek további E-re transzverzális S divizorokat, hogy tényleg egy 0-val lineárisan ekvivalens divizort kapjak. Ahhoz, hogy $s, t \in \mathcal{S}$ esetén az $f_{s \star t} = f_s \cdot f_t$ szorzattulajdonság teljesüljön felvesszük az E_i-kre transzverzális $S_i = \{v_i = 1\} = \{u_{i-1} = 1\}$ divizorokat és minden esetben, mikor az adott E_i-re transzverzális divizort kell az l-hez hozzáadjak ezt az S_i-t választom.



Tekintsük most a 2.2.1 Tétel bizonyításának (*1.* $\Rightarrow$ *3.*) részében definiált

$$f = u_0^n v_0^q = ... = u_i^{n_{i+1,s}} v_i^{n_{i+2,s}} = ... = u_{s-1}^{b_s} v_{s-1} = u_s v_s^0,$$

$$g = u_0^0 v_0 = u_1 v_1^{b_1} = ... = u_i^{n_{1,i-1}} v_i^{n_{1,i}} = ... = u_s^{n_{1,s-1}} v_s^n,$$

$$h = u_0 v_0 = u_1 v_1^{b_1 - 1} = ... = u_i^{m_i} v_i^{m_{i+1}} = ...$$

függvényeket. Ők az $X_{n,q}$ modell téren az x, y és z függvényeknek felelnek meg, akik pedig az (*1.* $\Leftrightarrow$ *4.*) azonosításnál a b^n, a^n és $a^{n-q}b$ invariáns polinomokkal azonosulnak. Ezt az azonosítást megtartva legyen:

$$div_E(f) \mapsto b^n,\ div_E(g) \mapsto a^n,\ div_E(h) \mapsto a^{n-q}b. \qquad (3)$$

Ezt próbáljuk meg kiterjeszteni az egész $\mathcal{S}'$-re. Ehhez vegyük észre, hogy a 2.2.3 Megjegyzés szerint $div_E(f) = nE_1^*$ és $div_E(g) = nE_s^*$, így az $E_1^* \mapsto b$ és $E_s^* \mapsto a$ konzisztens az eddigiekkel. Az 1.2.9 és a 2.1.4 Megjegyzések szerint azonban minden E_i^*-ra teljesül, hogy nE_i^* már $\mathcal{S}$-ben van és együtthatói az $\{E_i\}_{i\in\mathcal{W}}$ bázisban $(1 < i < s)$:

$$\begin{aligned}
det\,(\Gamma_{1,i}) &= n_{1,0} n_{i+1,s},\\
det\,(\Gamma_{2,i}) &= n_{1,1} n_{i+1,s},\\
&...\\
det\,(\Gamma_{j,i}) &= n_{1,j-1} n_{i+1,s},\\
&...\\
det\,(\Gamma_{i,i}) &= n_{1,i-1} n_{i+1,s},\\
&...\\
det\,(\Gamma_{i,k}) &= n_{1,i-1} n_{k+1,s},\\
&...\\
det\,(\Gamma_{i,s}) &= n_{1,i-1} n_{s+1,s}.
\end{aligned}$$

Mivel $(nE_i^*, E_j) = -n\delta_{i,j}$, így kapjuk, hogy az $nE_i^* + nS_i$ lesz a 0-val lineárisan ekvivalens divizor. A neki megfelelő függvény az $\{U_i\}_{i\in\mathcal{W}}$ térképeken:

$$v_0^{n_{1,0}n_{i+1,s}} \left(u_0^{n_{1,i-1}} v_0^{n_{2,i-1}} + 1\right)^n = u_1^{n_{1,0}n_{i+1,s}} v_1^{n_{1,1}n_{i+1,s}} \left(u_1^{n_{2,i-1}} v_1^{n_{3,i-1}} + 1\right)^n = ...$$

$$... = u_j^{n_{1,j-1}n_{i+1,s}} v_j^{n_{1,j}n_{i+1,s}} \left(u_j^{n_{j+1,i-1}} v_j^{n_{j+2,i-1}} + 1\right)^n = ...$$

$$... = u_{i-1}^{n_{1,i-2}n_{i+1,s}} v_{i-1}^{n_{1,i-1}n_{i+1,s}} (u_{i-1}+1)^n = u_i^{n_{1,i-1}n_{i+1,s}} v_i^{n_{1,i-1}n_{i+2,s}} (v_i+1)^n = ...$$

$$... = u_k^{n_{1,i-1}n_{k,s}} v_k^{n_{1,i-1}n_{k+1,s}} \left(u_k^{n_{i+1,k-1}} v_k^{n_{i+1,k}} + 1\right)^n = ...$$

Ezt g-ben és h-ban a következőképpen fejezhetjük ki:

$$\left(\frac{h^{n_{1,i-1}}}{g^{n_{1,i-1}-n_{2,i-1}}} + 1\right)^n g^{n_{i+1,s}}.$$

A (3)-as formulák alapján ennek a képe $\mathbb{C}[a,b]$-ban

$$\left(\frac{a^{(n-q)n_{1,i-1}} b^{n_{1,i-1}}}{a^{n(n_{1,i-1}-n_{2,i-1})}} + 1\right)^n a^{nn_{i+1,s}} = \left(b^{n_{1,i-1}} + a^{n_{i+1,s}}\right)^n,$$

ugyanis a 2.1.3 Állításbeli harmadik rekurziós formula szerint $qn_{1,i-1} - nn_{2,i-1} - n_{i+1,s} = 0$. Ekkor tehát E_i^* képe legyen $b^{n_{1,i-1}} + a^{n_{i+1,s}}$. Így minden $E_i^* \in \mathbb{C}[\mathcal{S}']$-beli báziselemnek meg tudtuk adni a képét, tehát a szabad generálás miatt ez egy egyértelmű $\Phi : \mathbb{C}[\mathcal{S}'] \to \mathbb{C}[a,b]$ algebra homomorfizmust határoz meg:

$$\Phi(E_1^*) = b,\ \Phi(E_i^*) = b^{n_{1,i-1}} + a^{n_{i+1,s}},\ \Phi(E_1^*) = a.$$

Vegyük észre, hogy

$$[E_1^*] \bullet E_i^* = exp\left(2\pi i\left(E_1^*, E_i^*\right)\right) E_i^* =$$

$$= exp\left(2\pi i(-1)det\left(\Gamma_{1,i}\right)/det\left(\Gamma_X\right)\right) E_i^* = exp\left(-2\pi i n_{i+1,s}/n\right) E_i^* = \varepsilon^{-n_{i+1,s}} E_i^*,$$

ahol $\varepsilon = exp(2\pi i/n)$. Hasonlóan

$$\varepsilon * b = \varepsilon^q b = \varepsilon^{n_{2,s}} b,$$

$$\varepsilon * a = \varepsilon a = \varepsilon^{n_{s+1,s}} a,$$

$$\varepsilon * \left(b^{n_{1,i-1}} + a^{n_{i+1,s}}\right) = \varepsilon^{qn_{1,i-1}} b^{n_{1,i-1}} + \varepsilon^{n_{i+1,s}} a^{n_{i+1,s}} = \varepsilon^{n_{i+1,s}} \left(b^{n_{1,i-1}} + a^{n_{i+1,s}}\right),$$

mert mint azt fentebb láttuk $qn_{1,i-1} - nn_{2,i-1} = n_{i+1,s}$. Így beláttuk a következőt:

4.3.4. Állítás. *A $\Phi : \mathbb{C}[\mathcal{S}'] \to \mathbb{C}[a,b]$ algebra homomorfizmus $\mathbb{Z}_n$-ekvivariáns (ha H generátorát az $[-E_1^*]$ osztálynak választjuk), így az invariáns gyűrűket egymásba képezi. Tehát a következő diagram kommutatív:*

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}[a,b] & \xleftarrow{\ \Phi\ } & \mathbb{C}[\mathcal{S}'] \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathbb{C}[a,b]^{\mathbb{Z}_n} & \xleftarrow{\ \Phi\ } & \mathbb{C}[\mathcal{S}]
\end{array}$$

Vegyük észre, hogy a $\Phi|_{\mathbb{C}[E_1^*,E_s^*]}$ megszorított leképezés $\mathbb{Z}_n$-ekvivariáns izomorfizmust ad $\mathbb{C}[E_1^*, E_s^*]$ és $\mathbb{C}[a,b]$ között, így ha $\Psi = (\Phi|_{\mathbb{C}}[E_1^*, E_s^*])^{-1}$, akkor a következő diagram is kommutatív:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[a,b] & \mathbb{C}[\mathcal{S}'] \arrow[l, "\Phi"'] & \mathbb{C}[E_1^*, E_s^*] \arrow[l, "\Psi"'] \\
\mathbb{C}[a,b]^{\mathbb{Z}_n} \arrow[u] & \mathbb{C}[\mathcal{S}] \arrow[l, "\Phi"'] \arrow[u] & \mathbb{C}[E_1^*, E_s^*]^{\mathbb{Z}_n} \arrow[l, "\Psi"'] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Ez az algebrai varietásokon a következő kommutatív diagramot jelenti:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^2 \arrow[r, "Spec(\Phi)"] \arrow[d, "\mathbb{Z}_n"'] & Spec\,(\mathbb{C}[\mathcal{S}']) \arrow[r, "Spec(\Psi)"] \arrow[d, "\mathbb{Z}_n"] & \mathbb{C}^2 \arrow[d, "\mathbb{Z}_n"] \\
X_{n,q} \arrow[r, "Spec(\Phi)"] & Spec\,(\mathbb{C}[\mathcal{S}]) \arrow[r, "Spec(\Psi)"] & X_{n,q}
\end{tikzcd}$$

Mivel a $\Phi \circ \Psi$ lényegében az identikus leképezés, ezért azt kapjuk, hogy $X_{n,q}$ injektíven ágyazódik be $Spec\,(\mathbb{C}[\mathcal{S}])$-be, és annak retraktuma is.

4.3.5. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy ezen fejezet állításai a tórikus varietások nyelvezetével is leírhatók. Valóban, legyen* $M := L$ *rács,* $M' := L'$*, így* $N' := (M')^* \leqslant M^* =: N$ *rácsok. Nyilván* $N'_{\mathbb{R}} = N_{\mathbb{R}}$ *és* $M_{\mathbb{R}} = M'_{\mathbb{R}}$*. Ekkor az* $\mathcal{S} \subset M$ *Lipman kúp előállítható* $\mathcal{S}_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ *alakban:* $l \in M = L$*-re* $l \in \mathcal{S} \Leftrightarrow (l, E_v) \leq 0,\ \forall v \Leftrightarrow (l, -E_v) \geq 0,\ \forall v$*, így ha* $\{E_v\}_{v\in\mathcal{W}}$*-t tekintjük az* M *bázisának, akkor legyen* $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ *az* N*-beli duális bázisban az* $-I$ *metszési mátrix oszlopvektorai által generált szigorúan konvex racionális poliéderkúp. Erre valóban teljesül, hogy* $\mathcal{S} = \sigma^\vee \cap M$ *és* $\mathcal{S}' = \sigma^\vee \cap M'$*. Ha most* $\triangle$ *jelöli a* σ *oldalaiból álló legyezőt, akkor tekinthetük a* $\iota : (N', \triangle) \hookrightarrow (N, \triangle)$ *beágyazást, melyre* $T_{N'}emb(\triangle) = U'_\sigma = Spec\,(\mathbb{C}[\mathcal{S}'])$*, míg* $T_N emb(\triangle) = U_\sigma = Spec\,(\mathbb{C}[\mathcal{S}])$*.*

A 3.6.6 Megjegyzés szerint $N/N' \cong M'/M = L'/L = H$ *természetes módon hat a* $T_{N'}emb(\triangle)$ *tórikus varietáson, így a* $\mathbb{C}[\mathcal{S}']$ *koordináta gyűrűjén is. A 3.6.7 Következmény szerint ekkor a* $\iota_* : T_{N'}emb(\triangle) \to T_N emb(\triangle)$ *leképezés az ezen hatás szerinti faktorizáció és így* $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$ *az invariáns gyűrű. Könnyen belátható, hogy ez a hatás megegyezik a 4.3.2 Definícióban megadott hatással és így a tórikus elméletből automatikusan következik a 4.3.3 Állítás.*

Ha most $N_1 \cong \mathbb{Z}^2$ *rács az* $\{n_{1,1}, n_{1,2}\}$ *bázissal és*

$$\sigma_1 := \mathbb{R}_{\geq 0} n_{1,2} + \mathbb{R}_{\geq 0}((n-q)n_{1,2} + n n_{1,1})$$

egy SCRPC, $\triangle_1$ az ő oldalaiból álló legyező, akkor $T_{N_1}emb(\triangle_1) = X_{n,q}$ a 3.7.9 Állítás alapján. Jelölje M_1 az N_1 duális terét, $N_1' := \mathbb{Z}\langle n_{1,2}, (n-q)n_{1,2}+nn_{1,1}\rangle \leqslant N_1$ és M_1' ennek a duálisa. Vegyük észre, hogy az általunk konkrétan megkonstruált $\Phi : \mathbb{C}[\mathcal{S}'] \to \mathbb{C}[a,b] = \mathbb{C}[\mathcal{S}'_{\sigma_1}]$ leképezés indukál egy $M' \to M_1'$ lineáris homomorfizmust, amire méghozzá M képe M_1-ben van. Így ennek a duálisa egy $\Phi^* : N_1 \to N$ lineáris leképezés, melyre $\Phi^*(N_1') \subset N'$. Tehát a 4.3.4 Állításban szereplő leképezések a következő legyező leképezések által indukáltak:

$$\begin{tikzcd}
(N_1', \triangle_1) \arrow[r, "\Phi^*"] \arrow[d] & (N', \triangle) \arrow[d, "\iota"] \\
(N_1, \triangle_1) \arrow[r, "\Phi^*"] & (N, \triangle).
\end{tikzcd}$$

A. Appendix a normalitás tulajdonságairól

Itt csak egy rövid összefoglalót közlünk a normális varietások és analitikus halmazok tulajdonságairól. A bizonyítások megtalálhatóak például a (Shafarevich, 2013) és a (Kaup & Kaup, 2011) könyvekben.

A.1. Normális algebrai varietások

Egy A nullosztómentes gyűrű integrálisan zárt, ha a hányadostestének minden A fölött egész eleme az A-ban van.

Egy X irreducibilis affin komplex varietást normálisnak nevezünk, ha a $\mathbb{C}[X]$ koordinátagyűrűje integrálisan zárt. Az X irreducibilis varietás normális, ha minden pontjának van normális affin környezete.

Ha X egy normális varietás, akkor tetszőleges $Y \subset X$ részvarietás esetén az $\mathcal{O}_Y$ lokális gyűrű integrálisan zárt. Visszafelé, ha az X irreducibilis és minden $x \in X$ pontra az $\mathcal{O}_x$ lokális gyűrű integrálisan zárt (azaz az X normális az x pontban), akkor az X normális.

Mivel minden UFD integrálisan zárt, ezért minden nemszinguláris varietás normális. Ha az X normális varietás, a szinguláris pontok halmaza legalább 2 kodimenziós, így az algebrai görbék esetén a normalitás és a simaság ekvivalens tulajdonságok.

Egy X irreducibilis varietás normalizáltja egy X^ν irreducibilis normális varietás és egy hozzá tartozó $\nu : X^\nu \to X$ reguláris, véges és biracionális leképezés. Minden irreducibilis affin varietásnak van egyértelmű affin normalizáltja: ha A-val jelöljük a $\mathbb{C}[X]$ koordináta gyűrű integrális lezártját a $\mathbb{C}(X)$-ben, akkor ő egy végesen generált nullosztómentes $\mathbb{C}$-algebra, így az $X^\nu := Spec(A)$ jó választás lesz, a ν leképezés pedig a $\mathbb{C}[X] \hookrightarrow A$ beágyazás által indukált reguláris függvény.

Ha a $g : Y \to X$ egy véges reguláris biracionális leképezés, akkor létezik olyan $h : X^\nu \to Y$ reguláris függvény, amelyre a

$$\begin{tikzcd} & X^\nu \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ Y \arrow[rr, "g"'] & & X \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív. Hasonlóan, ha a $g : Y \to X$ egy reguláris leképezés, $g(Y)$ sűrű az X-ben és az Y normális, akkor létezik olyan $h : Y \to X^\nu$ reguláris függvény, amelyre a

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X^\nu \arrow[rr, "\nu"'] & & X \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív.

A.2. Normális analitikus halmazok

Rögzítsünk egy X redukált komplex analitikus halmazt. Az X normális az $x \in X$ pontban, ha az $\mathcal{O}_{X,x}$ lokális gyűrű integrálisan zárt. Az X normális, ha minden pontjában normális.

Amennyiben az X egy irreducibilis algebrai varietás, akkor az algebrai értelemben vett normalitás ekvivalens az analitikus értelemben vett normalitással.

A következő állítások ekvivalensek az X redukált analitikus halmaz esetén:

1. X normális,

2. a $\Sigma(X)$ szinguláris halmaz kodimenziója ≥ 2 és minden $U \subset X$ nyílt halmaz esetén az $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(U \setminus \Sigma(X))$ megszorítás szürjektív,

3. bármely $U \subset X$ nyílt halmazra minden $U \setminus \Sigma(X)$-en korlátos holomorf függvény egyértelműen terjed ki az egész U-n holomorf függvénnyé.

Ezen fenti tulajdonságokat érdemes összehasonlítani a Riemann Kiterjesztési Tétellel, mely azt állítja, hogy ha az X egy összefüggő komplex sokaság, A egy analitikus halmaz benne, $a \in A$ és f egy holomorf függvény $X \setminus A$-n, akkor az f-nek létezik egy egyértelmű kiterjesztése az a-ba, feltéve, hogy az f korlátos az a egy környezetében, vagy az A kodimenziója az a pontban legalább 2.

Speciálisan, minden összefüggő normális halmaz ekvidimenziós, lokálisan irreducibilis és a szinguláris pontok halmazának kodimenziója ≥ 2. Továbbá, ha $A \subset X$ és $dim(A) < dim(X)$, akkor $X \setminus A$ is összefüggő. Így az $X \setminus \Sigma(X)$ is összefüggő.

Az algebrai normalizációs eljárásnak a következő analitikus megfelelője van. Rögzítsünk egy összefüggő redukált X analitikus halmazt. Definíció szerint, egy **gyengén holomorf függvény** az $U \subset X$ nyílt halmazon egy holomorf függvény az $U \setminus \Sigma(X)$-en, amely korlátos a $\Sigma(X)$ környezetében. A gyengén holomorf függvények $\mathcal{O}'(U)$ gyűrűje egy $\mathcal{O}(U)$-algebra, így kapunk egy $\mathcal{O}'$ kévét, mely az $\mathcal{O}$ kéve fölött egy algebra és melyre $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$. Ekkor az $\mathcal{O}'$ kéve és az $\mathcal{O}$ kéve $\hat{\mathcal{O}}$ normalizáltja megegyezik.

Az $\mathcal{O} \subset \hat{\mathcal{O}}$ beágyazás által indukált leképezés az $n : \hat{X} \to X$ normalizáció. Ez egy véges leképezés, amely szürjektív és izomorfizmus az $X \setminus \Sigma(X)$ felett. Az n normalizáció minden olyan $\hat{X} \to X$ leképezést dominál, mely bír ezzel a három tulajdonsággal. Sőt, minden $Y \to X$ szürjektív holomorf függvény, melyre az Y normális egyértelműen keresztülvezethető az n-en.

Ha az X lokálisan irreducibilis, akkor ez az n egy homeomorfizmus. Általánosabban, az $n^{-1}(o)$ számossága megegyezik az (X, o) lokális irreducibilis komponenseinek számával. Ha az (X, o) irreducibilis az o-ban, akkor a $\Sigma(X)$ sehol sem sűrű az o körül és $U \setminus \Sigma(X)$ összefüggő minden elég kicsi $U \ni o$ környezet esetén.

Általában az a tény, hogy a $\Sigma(X) \subset X$ legalább 2 kodimenziós még nem garantálja, hogy az X normális.

Hivatkozások

Barth, W., Hulek, K., Peters, C., & van de Ven, A. (2003). *Compact Complex Surfaces* (Vol. 4). Springer Science & Business Media.

Cartan, H. (2015). Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes. In *Algebraic geometry and topology* (pp. 90–102). Princeton University Press.

Chevalley, C. (1955). Invariants of finite groups generated by reflections. *American Journal of Mathematics*, *77*(4), 778–782.

Frank, A., & Király, T. (2013). Operációkutatás.

Fulton, W. (1993). *Introduction to Toric Varieties.(am-131), volume 131.* Princeton University Press.

Grauert, H., Peternell, T., & Remmert, R. (1994). *Several complex variables VII: sheaf-theoretical methods in complex analysis* (Vol. 74). Springer.

Grauert, H., & Remmert, R. (1955). Zur Theorie der Modifikationen. I. Stetige und eigentliche Modifikationen komplexer Räume. *Mathematische Annalen*, *129*(1), 274–296.

Grauert, H., & Remmert, R. (2012). *Coherent analytic sheaves* (Vol. 265). Springer Science & Business Media.

Hartshorne, R. (1997). Algebraic geometry, gtm 52 (1977). *MR*, *57*, 3116.

Hatcher, A. (2002). *Algebraic Topology.* Cambridge University Press.

Huybrechts, D. (2005). *Complex geometry: an introduction.* Springer Science & Business Media.

Kaup, L., & Kaup, B. (2011). *Holomorphic functions of several variables: an introduction to the fundamental theory* (Vol. 3). Walter de Gruyter.

Kempf, G., Knudsen, F., Mumford, D., & Saint-Donat, B. (2006). *Toroidal embeddings 1* (Vol. 339). Springer.

Laufer, H. B. (1971). *Normal two-dimensional singularities* (No. 71). Princeton University Press.

Milnor, J. (1968). *Singular points of complex hypersurfaces* (No. 61). Princeton University Press.

Némethi, A. (202?) *Normal Surface Singularities.* Springer.

Neumann, W. D. (1981). A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves. *Transactions of the American Mathematical Society*, *268*(2), 299–344.

Oda, T. (1985). *Convex bodies and algebraic geometry: An introduction to toric varieties.* Springer.

Popescu-Pampu, P., et al. (2007). The geometry of continued fractions and the topology of surface singularities. In *Singularities in geometry and topology 2004* (pp. 119–195).

Rockafellar, R. T. (1970). *Convex analysis*. Princeton University Press.

Shafarevich, I. R. (2013). *Basic Algebraic Geometry 1: Varieties in Projective Space*. Springer Science & Business Media.

Shephard, G. C., & Todd, J. A. (1954). Finite unitary reflection groups. *Canadian Journal of Mathematics*, *6*, 274–304.

Stein, K. (1956). Analytische Zerlegungen komplexer Räume. *Mathematische Annalen*, *132*(1), 63–93.