Oszthatóság a középiskolában

Szakdolgozat

Készítette:
Tóth Enikő
Tanári MA
Matematika–földrajz szak

Témavezető:
Dr. Freud Róbert
egyetemi docens
Algebra és Számelmélet Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar

Budapest, 2012

Tartalomjegyzék

Bevezetés **4**

1. Oszthatóság a tantervekben és az érettségin **7**

1.1. A Nemzeti Alaptanterv alapján 7

1.2. Kerettantervek alapján 10

1.3. Helyi tantervek 12

1.4. Az érettségi mint a legfontosabb kimeneti szabályozó 12

2. Az oszthatóság tantárgyon belüli szerepe **15**

3. Tanári kérdőívek **19**

4. Szakkörtervezet **28**

5. Számjegyes feladatok **33**

5.1. Feladat 34

5.1.1. Megoldás 34

5.2. Feladat 35

5.2.1. Megoldás 35

5.3. Feladat 36

5.3.1. Megoldás 37

5.4. Feladat 38

5.4.1. Megoldás 38

5.5. Feladat 39

5.5.1. Megoldás 39

5.6. Feladat 39

5.6.1. Megoldás 39

5.7. Feladat 39

5.7.1. Megoldás 40
5.8. Feladat 40
5.8.1. Megoldás 40
5.9. Feladat 40
5.9.1. Megoldás 41

6. Bizonyítási módszerek **42**
6.1. Feladat 43
6.1.1. Megoldás 43
6.2. Feladat 44
6.2.1. Megoldás 44
6.3. Feladat 44
6.3.1. Megoldás 44
6.3.2. Megoldás 45
6.4. Feladat 46
6.4.1. Megoldás 46
6.5. Feladat 47
6.5.1. Megoldás 47
6.6. Feladat 47
6.6.1. Megoldás 47
6.7. Feladat 48
6.7.1. Megoldás 48
6.7.2. Megoldás 48
6.8. Feladat 48
6.8.1. Megoldás 49

7. Prímszám vagy összetett? **50**
7.1. Feladat 50
7.1.1. Megoldás 50
7.2. Feladat 51
7.2.1. Megoldás 52
7.3. Feladat 53
7.3.1. Megoldás 54
7.4. Feladat 54
7.4.1. Megoldás 54
7.4.2. Megoldás 55

7.5. Feladat 56
7.5.1. Megoldás 56
7.6. Feladat 56
7.6.1. Megoldás 56
7.7. Feladat 57
7.7.1. Megoldás 57

8. Szakköri tapasztalatok **58**

9. Egyéb feladatok **60**
9.1. Feladat 60
9.1.1. Megoldás 61
9.2. Feladat 61
9.2.1. Első tanulói megoldás 62
9.2.2. Második tanulói megoldás 62
9.2.3. Harmadik tanulói megoldás 63
9.3. Feladat 63
9.3.1. Megoldás 63
9.4. Feladat 64
9.4.1. Megoldás 65

1. számú melléklet: Kivonat a kerettantervekből **68**

2. számú melléklet: Érettségi követelményrendszer **71**

3. számú melléklet: Tanári kérdőív **74**

4. számú melléklet: Bevezető sudoku **78**

5. számú melléklet: Feladatsorok **81**

Irodalomjegyzék **84**

Bevezetés

Témaválasztásomat több dolog is indokolta, ezek közül az egyik az egyetemen megkedvelt Számelmélet kurzus, míg a másik a 2011/12-es évi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny (későbbiekben OKTV) volt. 2011. szeptember 1-je óta pedagógus munkakörben foglalkoztatnak matematikatanárként a Petrik Lajos Két Tanítási Nyelvű Vegyészeti, Környezetvédelmi és Informatikai Szakközépiskolában. Az OKTV-re való jelentkezések kapcsán szembesültem azzal, hogy az iskolában sajnos nincsen matematika szakkör, ám a diákok mégis nagy számban szívesen vesznek részt különböző versenyeken matematikából is.

Saját diákjaim eredményességének javítása céljából — mikor lehetőségünk adódott — tartottunk OKTV feladatmegoldó órákat, ám hamar kiderült számomra, hogy szakkör hiányában nincsen meg bennük a feladatmegoldó rutin. Ezért gondoltam úgy, hogy érdemes lenne egy matematika szakkört tervezni az iskola érdeklődő tanulói számára, mellyel segítjük őket a versenyeken való eredményes szereplésben. Egy általános szakkör készítéséhez jelenleg kevés tapasztalattal rendelkezem, viszont egy téma köré épített szakkör megtervezése is sokban segítheti a tanulókat. Az oszthatóság témakörére esett a választásom egyrészt a számelmélethez való vonzalmam miatt, másrészt azért, mert kutatásaim során arra lettem figyelmes, hogy a legtöbb verseny feladatsorában találhatóak oszthatósághoz kapcsolódó feladatok. Így szakdolgozatom fő gondolata egy oszthatóság témakörű szakkör tervezete.

Szakdolgozatom szerkezete az alábbi logikát követi. Először egy szakirodalmi összefoglaló található, amelyben körüljárom, hogy a különböző tantervi szinteken, illetve az érettségi követelményrendszerben miként jelenik meg ez a témakör, mik a kötelezően tanítandó elemek, miben van választása a tanároknak. Ez egyrészt azért fontos, hogy ne akarjunk a szakkörön olyan tételekre, tartalmakra építeni, amelyek esetleg nem minden gyerek számára ismertek, másrészt pedig nekem nyújtott segítséget abban, hogy milyen jellegű feladatokat érdemes összeválogatni. Úgy gondoltam, hogy olyan tartalmak mindenképpen jelenjenek meg a szakköri órákon, amelyeket akár emelt szintű érettségin is tud használni a tanuló, hiszen ezzel az ő munkáját is segítjük. Az emelt szintű érettségin előkerülő tartalmak (például bizonyítási módszerek) a versenyfeladatok megoldásában is fontosak.

Ezt követi egy tantárgyon belüli elhelyezés, ennek lényege, hogy próbálom megmutatni a témakör matematikán belüli kapcsolatrendszerét. Ezek alapján felállítom a témakörre vonatkozó hipotéziseimet.

Az említett hipotézisek igaz voltát, valamint a tantervekben előírt tartalmak tényleges megjelenését egy tanári kérdőív segítségével vizsgálom. Az iskolatípusok közötti különbségeket, valamint a kezdő pedagógusok és 20 éve pályán lévő tanárok közötti különbségeket elemzem. Ennek célja nem az, hogy egyetemes következtetéseket vonjak le a témakörre vonatkozóan, mindössze annyi, hogy egy képet kapjak arról, hogyan gondolkoznak azok a középiskolai tanárok, akik az általam vizsgált témakört tanítják.

Ezt követi maga a szakkörtervezet, melyben tematikus rendezést követek. Minden téma esetén található egy ajánlás arra vonatkozóan, hány alkalmat szánok a témára, valamint egy általános leírás , hogy számomra milyen jellegű feladatokat ölel fel az adott téma. A szakköri órák témáit és a hozzájuk kapcsolt feladatokat önállóan válogattam. A feladatok részletes megoldását magam készítettem el, minden szakköri alkalomhoz csatoltam olyan feladatot is, melyet önállóan gyártottam. Magát a szakkört egy saját feladattal indítanám, ami az előzetes tudás becslésére szolgál sudoku-feladvány formájában.

Az általános leírás után három témát részletesen — feladatokkal és a hozzájuk tartozó megoldásokkal együtt — kifejtek. A választott témák olyan ötleteket, gondolatokat, módszereket mutatnak be, amelyek igen jól alkalmazhatóak mind az emelt szintű érettségi, mind pedig a versenyfeladatok megoldásában. Ezeket a konkrét szakköri órákat saját iskolámban meg is tartottam a félév során, így ennek a résznek zárásaként közlöm az itt szerzett tapasztalataimat, észrevételeimet.

Végezetül pedig olyan egyéb feladatokat mutatok be, amelyek érdekesek, számomra valami miatt fontossá váltak, a korábbi részekben nem kaptak helyet, illetve a matematika más ágához kapcsolódóan jelennek meg, de az oszthatósághoz kapcsolódnak. Ennek célja további tippek és trükkök megmutatása oszthatósághoz kapcsolódó feladatok megoldásához.

Köszönetet mondok a szakdolgozatomhoz rengeteg segítséget nyújtó témavezetőmnek, Freud Róbertnek, aki a szakmai részhez adott ötleteken kívül sokat segített a formai, nyelvi és technikai kivitelezésben is. A nehezebb technikai részek megvalósításában külön köszönet illeti informatikaszakos ismerőseimet. Köszönöm nővéremnek, Tóth Edinának, az ötletbörzét. Végül köszönettel tartozom minden pedagógusnak, akik kérdőívem kitöltésével hozzájárultak a munkámhoz, valamint azoknak a Petrik-es diákoknak, akik részt vettek az általam tartott szakkörön.

1. fejezet

Oszthatóság a tantervekben és az érettségin

Az iskolai oktatás témaköreit meghatározzák az oktatást szabályozó dokumentumok, melyek két csoportba sorolhatók: bemeneti vagy kimeneti szűrőként jelennek meg. A bemeneti szabályozást a különféle tantervek jelentik. Ma Magyarországon egy háromszintű szabályozási rendszer hatályos, melynek szintjei:

1. Nemzeti Alaptanterv
2. Kerettantervek
3. Helyi tanterv

A Nemzeti Alaptanterv az oktatás fő célkitűzéseit adja meg, amelyeket a további két szint konkrétumokkal egészít ki. Dolgozatomban a Nemzeti Alaptanterv és Nemzeti Erőforrás Minisztérium honlapján jelenleg fellelhető kerettantervet elemzem részletesebben a témakör szempontjából. A kimeneti szűrők közé tartoznak a különféle mérések és értékelések mind hazai, mind nemzetközi szinten. Ezek közül a kétszintű érettségit emeltem ki, hiszen napjainkban a felvételi rendszer átszervezését követően szerepe megnőtt, tehát akár azt is mondhatjuk, hogy a kimeneti szűrők közül ez az egyik legfontosabb a gyerek számára.

1.1. A Nemzeti Alaptanterv alapján

A Nemzeti Alaptanterv jellegéből eredően nem tartalmaz konkrétumokat az oktatás folyamatára vonatkozóan, hanem alapelveket, célokat fogalmaz meg, valamint a fő fejlesztési feladatokat az egyes műveltségterületeken belül. Fontos megjegyezni, hogy szakdolgozatom forrása a Nemzeti Alaptanterv 2007-es változata. Mivel az új Nemzeti Alaptantervnek még nem készült el a végleges változata, ezért szerepel szakdolgozatomban a korábbi változat. Természetesen a most készülő, jelentős változásokat hozó új Nemzeti Alaptanterv alakulását is figyelemmel fogom kísérni tanári munkám kapcsán. Az oszthatóság témaköre a matematika tantárgy, így a matematika műveltségterület részét képezi. Ennek a műveltségterületnek a Nemzeti Alaptantervben foglaltak szerint spirális a tananyag elrendezése, ami azt jelenti, hogy egyes témakörök több évfolyamon ismételten kerülnek elő mélyítés, bővítés céljából. Ez az oszthatóság témakörét is érinti, amely az általános iskola 3. évfolyamán kerül először igazán a matematika tananyagba. (Az „igazán" kifejezés azért szükséges, mert már első osztályban is megjelenik a páros és páratlan szám fogalma.) Ekkor az osztó és többszörös fogalma kerül bevezetésre. Majd ezt követően 6. évfolyamon a közös osztó fogalmával, illetve egyszerűbb oszthatósági szabályokkal bővül a témakör. Ezeket a 7. évfolyam tovább bővíti: újabb oszthatósági szabályok, valamint a prímszám fogalma jelenik meg. Végül a középiskola 9. évfolyamán kerül elő utoljára a témakör, tovább bővítve és mélyítve az eddig megszerzett ismereteket. A Nemzeti Alaptanterv egy jellegzetessége, hogy négy korcsoportra osztja a tanulókat (1-4. évfolyam, 5-6. évfolyam, 7-8. évfolyam, valamint 9-12. évfolyam). Ez a felosztás az életkori sajátosságok különbözőségén alapul, hiszen a különböző fejlesztési feladatok, kompetenciák megalapozása is meghatározott érettségi, illetve absztrakciós gondolkodási szint elérése után vihető véghez sikeresen. Természetesen az, hogy az alaptanterv például a „sejtés megfogalmazását" mint képzetalkotást az 1-4. évfolyamokra irányozza elő, nem azt jelenti, hogy a későbbiekben ennek fejlesztése elhanyagolható. A megadott korcsoport inkább a fejlesztési terület kezdeti időszakát jelöli ki, s onnantól folyamatos fejlesztést kíván meg. A matematika műveltségterület és az oszthatóság témaköre is nagy szerepet kap a modellek, gondolkodásmódok, módszerek és leírások kiválasztásának, illetve alkalmazásának elsajátításában. A Nemzeti Alaptanterv bevezetőjében felsorolt célok, értékek és kompetenciák közül véleményem szerint az oszthatóság témaköre az alábbi kivonatban találhatóak megvalósítását támogathatja:[1]

[1]Forrás: http://www.nefmi.gov.hu/kozoktatas/2007/nemzeti-alaptanterv. (letöltés dátuma: 2012.02.04.) Megjegyzés: A 2007-esnél frissebb verziójú NAT nem volt elérhető elektronikus formában ekkor bárki számára.

2. Megismerés

2.1. Tapasztalatszerzés

Elemek és tulajdonságok megnevezése, közös tulajdonság felismerése, tulajdonság tagadása mint szintén közös jellemző (1-4. évfolyam).
Oszthatósági szabályok felismerése, számok csoportosítása (5–6. évfolyam).

2.2. Képzelet (követő, alkotó)

Probléma megoldásának elképzelése, sejtés megfogalmazása (1–4. évfolyam).

2.3. Emlékezés

Szóbeli és írásbeli információkra és kérdésekre való emlékezés, például definíciókra (1–4. évfolyam).

2.4. Gondolkodás

Osztályozás egy vagy több szempont szerint (1–4. évfolyam).
Állítások megítélése igazságértékük szerint, elmondott gondolatmenet követése (1–4. évfolyam).
Információ megítélése aszerint, hogy adott szituációban szükséges-e a számunkra, általánosítás, specializálás, példák. Ellenpéldák keresése, alkotása, a tévedés megmutatása ellenpéldával (7–8. évfolyam).
A sejtés és a bizonyított állítás tudatos megkülönböztetése, tétel igazságának eldöntése, bizonyítások (indukciók, teljes indukció, dedukció, indirekt bizonyítás) (9–12. évfolyam).

2.6. Ismerethordozók használata

Könyvek, számítógépek használata, tanári segítség, társak segítése.
Oktatási-tanulási technológiákkal való megismerkedés, azok értelmes, interaktív használata (pl. internet, CD).

3. Ismeretek alkalmazása

Régebbi ismeretek, információk, felismerések mozgósítása, felhasználása az ismeretszerzés szituációjával analóg helyzetben (1–4. évfolyam).

4. Problémakezelés és -megoldás

Probléma felismerése (problémahelyzet átélése); problémaérzékenység (1–4. évfolyam).
Sikertelen megoldási kísérlet után újjal való próbálkozás, sikertelenség okának feltárása (7–8. évfolyam).
Az adott problémához hasonló egyszerűbb probléma keresése (7–8. évfolyam).
Többféle megoldási mód keresése, az alternatív megoldások összevetése.

5. Alkotás és kreativitás: alkotás öntevékenyen, saját tervek szerint; alkotások adott feltételnek megfelelően; átstrukturálás

Kidolgozás megalkotása, az eltervezett megoldás lépéseinek végrehajtása; a részeredmények értelmezése (1–4. évfolyam).

6. Akarati, érzelmi, önfejlesztő képességek és együttéléssel kapcsolatos értékek

6.1. Kommunikáció

Elnevezések, megállapodások, jelölések értése, kezelése (1–4. évfolyam).
Mások gondolatainak megértésére törekvés (példák és ellenpéldák keresése), saját gondolatok kifejezése, rögzítése (szóbeli elmesélés), saját gondolatok megértésére való törekvés (5–6. évfolyam).

6.3. Motiváltság

A saját képességek és műveltség fejlesztésének igénye („én is meg tudtam oldani"), a matematikai módszerek és eszközök megismerésének igénye (1–4. évfolyam).

7. A matematika épülésének elvei

A matematikai témakörök összekapcsolódásának értése intuitív módon.

1.2. Kerettantervek alapján

A háromszintű tantervi szabályozás második szintjét — a Nemzeti Alaptanterv után — a kerettantervek jelentik. Ez a szint már több konkrétumot tartalmaz arra

vonatkozóan, hogy adott évfolyamon milyen ismeretanyagot kell elsajátítania a tanulóknak. Az oszthatóság témaköre a Számtan, algebra témán belül kerül tárgyalásra a kerettantervekben, így erre szorítkozva foglalkozom vele én is.
Mivel minden iskolatípushoz és minden tagozathoz külön kerettanterv készült, ezért úgy gondolom, hogy ezeknek összehasonlító vizsgálata meghaladná tanulmányom kereteit.
Általánosságban annyi mindenképp elmondható a kerettantervekről, hogy ezek is az általános célok és fejlesztési feladatok korcsoportonkénti meghatározásával kezdődnek, akárcsak a Nemzeti Alaptanterv. Ezen kívül minden tantárgyhoz, így a matematikához is, éves óraszámokat rendel. Ezt követi egy táblázat melyben szerepelnek a különböző résztémák és az ezekhez kapcsolódó szükséges fejlesztési feladatok, tananyag és gondolkodási módszerek, illetve a továbbhaladás feltételei évfolyamonként.
A Nemzeti Erőforrás Minisztérium honlapján fellelhető kerettantervek, noha nem a legfrissebbek, mégis jól használhatóak.[2] Az *1. számú mellékletben* összegyűjtöttem az oszthatósághoz kapcsolódó feladatok, tananyagok és továbbhaladási feltételek rendszerét.
Az általános iskola bevezető szakaszában a páros és páratlan számok megkülönböztetése, míg a 3–4. évfolyamokon a számok helyi értékes felírása, a számjegyek ismerete jelenik meg a matematika tananyagában. A szűkebb értelemben vett oszthatóság (osztó és többszörös fogalma) az 5. osztályban kap teret, majd a 6–7. évfolyamokon a tanulók megismerkednek az oszthatósági szabályokkal, a prímtényezős felbontással, valamint a legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös fogalmával. Ezek ismerete a kimeneteli célok között is szerepel.
Ez az időszak már nyíltabban tükrözi a Nemzeti Alaptanterv fejlesztési céljait, például:

> *emlékezés és tapasztalatszerzés* (az oszthatósági szabályok felismerése),
> *gondolkodás* (Prímszám-e a kérdéses szám, avagy összetett? Melyik oszthatósági szabályt kell alkalmazni?)

Ezt követően a 8. évfolyamon más algebrai struktúrákkal kezdenek foglalkozni matematikaórán, így ekkor egyáltalán nem kerül elő a témakör.

[2] Forrás: http://www.nefmi.gov.hu/kozoktatas/tantervek/kerettanterv-2000 (letöltés dátuma: 2012.02.04.)

Végül a középiskolai matematikaoktatás első évében ismét előkerül az oszthatóság. (A 9. évfolyam kifejezés nem minden esetben fedi a valóságot, hiszen egy nyelvi előkészítős osztály esetében korántsem biztos, hogy 9. évfolyamon matematikát is tanulnak.) Ebben az időszakban a tanulók már különböző típusú iskolában folytatják tanulmányaikat, így a rájuk vonatkozó kerettantervek is eltérhetnek. A mellékletben található táblázatban a gimnáziumok, szakközépiskolák és szakiskolák kerettanterveit vetettem össze. Jól látható, hogy míg a szakközépiskolák és gimnáziumok tanterve egyezik, a szakiskolák tanterve nagy eltérést mutat. A szakiskolákban a korábban tanultak ismétlése, rendszerezése kerül előtérbe, míg a másik két iskolatípusban a megszerzett tudás felfrissítése mellett annak mélyítésén van a hangsúly.
A középiskolai matematikaoktatás első éve után az érettségire való készülés idején kerül ismét elő az oszthatóság, illetve érettségi előkészítők keretében szánhatnak még időt rá a tanárok. A későbbi évfolyamok során a bizonyítási módszerek illusztrálására használhatunk ismét számelméleti feladatokat, ám a kerettantervek nem írják elő, hogy a bizonyítási módszerek tanításánál milyen jellegű példákat alkalmazzunk.

1.3. Helyi tantervek

Ez a tantervi szabályozás harmadik szintje, és talán a legfontosabb, hiszen az iskola szocio-kulturális hátterét alapul véve készíti el az iskola vezetősége. A tanulók egyéni sajátosságai leginkább ezen a szinten támogathatók, segíthetők, így tehát ezek a tantervek nagyon különbözőek is lehetnek. A helyi tantervet minden iskolai intézmény maga készít el, így ezek összehasonlító elemzése szinte lehetetlen.

1.4. Az érettségi mint a legfontosabb kimeneti szabályozó

A kétszintű érettségi rendszer egyik fő jellegzetessége, hogy kompetencia központú, tehát minden témakör esetén kijelöli azokat a legfontosabb kompetenciákat, melyek meglétét méri az érettségi vizsga. Az Oktatási Hivatal oldalán

megtalálható a részletes érettségi vizsgakövetelmény minden tantárgyhoz, így a matematikához is. Fontos megjegyezni, hogy a részletes érettségi vizsga követelményrendszer a követelményeket közép- és emelt szintre részletesen lebontva taglalja. Az oszthatóság témaköre — a kerettantervekhez hasonlóan — itt is a Számelmélet, algebra témakör keretein belül található meg.
A *2. számú mellékletben* található kivonat mutatja a számelmélet és algebra témakörén belül az oszthatósághoz tartozó témák szerepét a kétszintű érettségi rendszerben. A legfontosabb célok közé tartozik a műveletek absztrahálása és a permanencia-elv fontosságának felismerése. Az érettségi követelményrendszer témái közül a 2.2 ponton belül „Számelméleti ismeretek" című altéma foglalkozik mindössze az oszthatósággal. Ha az egész érettségi vizsgakövetelményt nézzük, akkor ez a pont igen kis része az egész dokumentumnak, emiatt úgy tűnhet, hogy az érettségiben nincs nagy szerepe az oszthatóságnak. Ez arra utalna, hogy kompetencia alapú az érettségi, s az általam tárgyalt témakör olyan mértékben nem támogatja a kitűzött kompetenciák fejlődését, ami viszont nem igaz. A későbbi fejezetekben bemutatom, hogy mind a Nemzeti Alaptanterv kompetenciáit, mind az érettségi követelményrendszerben megjelölteket nagymértékben fejleszthetjük az általam tárgyalt témakörrel.
Célszerű lehet az érettségi dolgozatokat megtekinteni — amelyek szintén megtalálhatóak az Oktatási Hivatal honlapján — és azt megvizsgálni, hogy ezekben milyen jellegű feladatokban, milyen gyakran jelenik meg a témakör. Ha végignézzük a középszintű érettségi feladatokat, többször is előfordul a témakör az I. részben, viszont a II. részben sosem. Halmazelméleti és kombinatorikai jellegű feladatok keretében található a legtöbb oszthatóságot tartalmazó példa, amelyek megoldása 2–4 pontot ér. Egy középszintű érettségi feladat, amely az oszthatóság alkalmazását igényli, például az alábbi:

6. Háromjegyű számokat írtunk fel a 0, 5 és 7 számjegyekkel. Írja fel ezek közül azokat, amelyek öttel oszthatók, és különböző számjegyekből állnak![3]

Az emelt szitnű érettségin konkrét számelméleti példák is előfordultak már, mint ahogy az alábbi 9. feladat is mutatja:

[3]Matematika - középszint, írásbeli vizsga 0631, I. összetevő, 2006. október 25., 6. feladata

9. Melyek azok az N kétjegyű pozitív egész számok, amelyekre a következő négy állítás közül pontosan kettő igaz és kettő hamis:

– Az N osztható 7-tel.

– Az N a 29 többszöröse.

– Az $N + 11$ négyzetszám.

– Az $N - 13$ négyzetszám.[4]

Összességében tehát azt a konklúziót vonhatjuk le, hogy a matematika érettségin kis mennyiségben, de előfordulnak olyan feladatok, amelyek az oszthatóság témakörének alkalmazását igénylik. Míg a középszintű érettségin az ilyen jellegű feladatokért kevés pont jár, az emelt szintű érettségin akár a II. rész legtöbb pontot érő feladatai között is szerepelhet. Ezek alapján mindenképp úgy gondolom, hogy érdemes rendesen körbejárni ezt a témakört a középiskolák első évfolyamán.

[4]Matematika - emelt szint, írásbeli vizsga 0631, II. rész, 2007. május 8., 9. feladata

2. fejezet

Az oszthatóság tantárgyon belüli szerepe

A matematika egy olyan tantárgy, ami különböző témákra bontható, melyek látszólag függetlenek egymástól, ám ha mélyebben belegondolunk, rengeteg helyen kapcsolódnak össze a különböző témák, témakörök. Az oszthatóság esetében ez a kapcsolatrendszer igen szerteágazó, ami mutatja, hogy valójában mennyire fontos szerepe van a témakörnek. Noha a 9. évfolyamon tanult számelmélet témakör keretében jelenik meg utoljára komplexen ez a téma, fontos megemlíteni, hogy példák kapcsán, valamint analógiák alkotása végett más témaköröknél is jól alkalmazhatóak az itt megszerzett ismeretek.

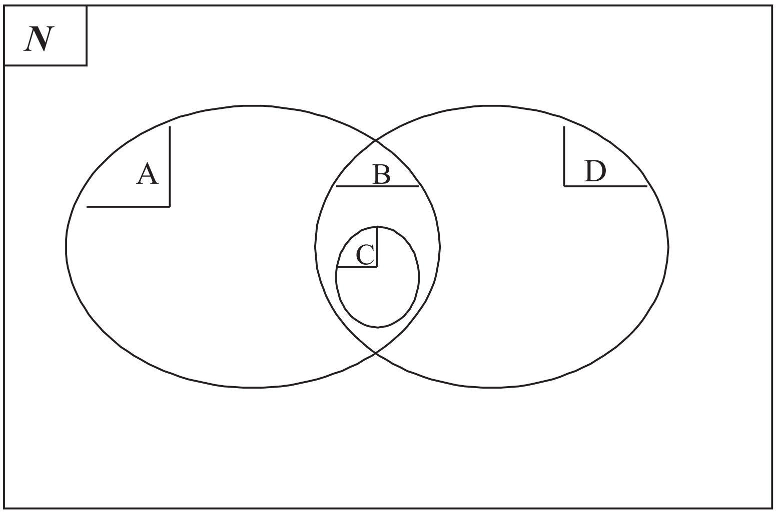
A számelméleti tudás és a halmazokról tanultak közös alkalmazása egy elterjedt gyakorlat a matematikaoktatásban, valamint az érettségi vizsgákon. Ennek lényege, hogy néhány oszthatósági szabály segítségével definiáljunk halmazokat, amelyekre valamilyen halmazműveletet kell alkalmazni, vagy pedig a halmazok egymáshoz vett viszonyát kell szemléltetni Venn-diagramon. Az alábbi feladat az utóbbit célozza:

Legyen a természetes számok halmaza az alaphalmaz. Tekintsük a következő halmazokat:

$A = \{3\text{-mal osztható számok}\}$
$B = \{6\text{-tal osztható számok}\}$
$C = \{12\text{-vel osztható számok}\}$
$D = \{2\text{-vel osztható számok}\}$

Milyen kapcsolat van a halmazok között? Ábrázoljuk Venn-diagramon!

A feladat megoldása a következő:



Ez a feladat mozgósítja a gyerekek oszthatósággal kapcsolatos ismereteit, illetve a különböző halmazműveletekről tanultakat, tehát kettős célt szolgál. Ezt a feladatot saját gyakorlatomban az oszthatóság témakörénél alkalmaztam. A jelenleg érvényben lévő tantervek szerint ez a témakör a halmazelmélet után következik időben, így a már elsajátított tudás rögzítését, ellenőrzését is segíthetjük vele.

Egy másik tekintélyes témakör a gondolkodási és bizonyítási módszerek, amely szintén szoros összefüggésben van az oszthatósággal, ugyanis minden bizonyítási módszerre található számelméleti típuspélda. Noha a bizonyítási módszerek csak az emelt szintű tananyag részét képezik, mégis érdemes megmutatni a diákoknak, hogyan lehet a tételeket bizonyítani, mert ez mélyebb rálátást enged nekik a matematika törvényszerűségeire. Az oszthatóság témaköréhez kapcsolódó bizonyítások technikailag nem nehezek, így könnyebben meglátják a gyerekek a bizonyítások lényegét, ezáltal könnyebb láttatni — illetve a diákoknak elsajátítani — a formális matematika működését. Összességében könnyebb példákon keresztül megismerik a bizonyítás mint matematikai érvelés módszereit, így a bizonyítás menetének és rendszerének megértése gyorsabb és hatékonyabb. A matematikai logika keretein belül a „minden" és „van olyan" kvantorok helyes használata középszinten is elvárt tudás, valamint az, hogy képes legyen a tanuló megállapítani az állítások logikai értékét, azaz eldönteni azok igaz vagy hamis voltát. Az ilyen jellegű feladatok a középszintű érettségi I. részében 4 pontot érő feladatként jelenhetnek meg. A számelmélet témakörén belül rengeteg szemléletes példa található arra, hogy a „minden” kvantorral ellátott mondatok megcáfolására elegendő mindössze egyetlen ellenpélda létezése. Vegyük az alábbi állítást:

A három minden nemnegatív egész hatványa osztható 3-mal.

A fenti állítás hamis, hiszen $1 = 3^0$, ahol a hatványkitevő nemnegatív szám, viszont 3-mal osztva 1 maradékot ad. Az emelt szintű érettségi követelményei között szerepel az alábbi bizonyítási típusok ismerete: direkt és indirekt bizonyítás, skatulyaelv, valamint a teljes indukció módszere. Ezek mindegyike nagyon jól szemléltethető a számelmélet témakörén belül. Erre egy későbbi fejezetben térek majd vissza, ahol mindegyik bizonyítási módszerre egy-egy példát is mutatok.

Mint már korábban láttuk, a Nemzeti Alaptanterv és a kerettantervek hangsúlyozzák a matematika tantárgy egyedi struktúráját, logikájának formálisságát, így fontossá válik a tanulók formális gondolkozásának fejlesztése. Ebben is nagy szerepe lehet az oszthatóság témakörének. Fontosnak tartom, hogy a számokat ne csak önmagukban tudják kezelni a gyerekek, hanem maradékosztályok elemeiként is. Ennek a formalizálási készségnek a kialakítása segíti a tanulókat a későbbi nehezebb témakörök megértésében. Ha a gyerek tudja egységként kezelni a $7k+3$ alakú számokat, akkor könnyebb lesz megértenie a szabad vektor fogalmát. A szabad vektor fogalma annyit takar, hogy minden vektort, ami azonos irányú és egyforma hosszúságú, egy vektorosztályba sorolunk, így bármelyik példányát kicserélhetjük egy másikkal, ha azzal könnyebb elvégezni a kívánt műveleteket (például: vektorok összeadása).

Hasonló analógiát állíthatunk fel a trigonometriában is. Ez a témakör véleményem szerint nagyon nehezen érthető a gyerekek számára, főként a trigonometrikus egyenletek, ahol végtelen sok megoldása lehet az egyenletnek a szinusz és koszinusz függvények esetében, azok periodicitása miatt. Akárcsak a $7k + 3$ alakú számokat az oszthatóságban, a trigonometriában egy osztályba soroljuk az adott x helyet és annak $k \cdot 2\pi$-vel vett eltoltjait, például $\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$. (Ha a szinusz és koszinusz egységkörre alapozott kiterjesztését vesszük, akkor úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az adott α szöget és annak $k \cdot 360\circ$-kal vett elforgatottjait tesszük egy osztályba.) Hátterének megértése nélkül a gyerekek számára érthetetlen, miért kell odaírniuk a $k \cdot 2\pi$-t. Ezért is gondolom úgy, hogy ha a 9. évfolyamtól kezdve látják a tanulók, hogy miként lehet osztályokba sorolni a hasonló tulajdonságokkal rendelkező elemeket, akkor erre alapozva könnyebben értik meg a későbbi, nehezebb témakörök kapcsán ezt a gondolatmenetet.

Mivel a fent említett témakörök közül az oszthatóság kerül elő legelőször a tananyagban, valamint könnyebb is a gyereke számára, ezért tartom szükségesnek azt, hogy a formális gondolkodás fejlesztését már ezzel a témakörrel elkezdjük.

3. fejezet

Tanári kérdőívek

Ahhoz, hogy egy szakkört érdemben meg lehessen tervezni, véleményem szerint szükség van arra, hogy tájékozódjunk afelől, hogy általában a matematikatanárok milyen mélységben tanítják az adott témakört: melyek a tananyag sarkalatos pontjai, amelyeket szinte mindenki megtanít a 9. évfolyamon, illetve milyen típusfeladatok kerülnek elő egy átlagos középiskolai osztályban. A legegyszerűbben kérdőív segítségével kaphatunk reális képet erről, ezért készítettem el a 3. mellékletben található kérdőívet.

A kérdőív első részében olyan általános kérdések szerepelnek, melyek a kitöltő személy nemére, tanári pályán eltöltött éveinek számára, valamint a kitöltő személy által képviselt középiskola típusára (gimnázium, szakközépiskola vagy szakmunkásképző) kérdeznek rá.
Kérdőívemben találhatóak olyan szakmai kérdések, melyekben konkrétan arra kérdezek rá, hogy mit tanítanak meg az egyes tanárok: például mely oszthatósági szabályokat tanítja (4. kérdés), illetve az általam felsorolt oszthatósághoz kapcsolódó tételek közül válassza ki azokat, amelyeket tanítja (5. kérdés). Az utóbbi esetben az általam fel nem sorolt tételek felsorolására is van lehetősége (6. kérdés). A felsorolt tételek az iskolám által használt tankönyvben találhatóak (Hajdú Sándor - féle *Gondolkodni jó!*) mindegyiknél megjelölve, hogy kiegészítő vagy normál tananyag-e. Természetesen az a kijelentés, hogy „tanítok valamilyen tételt" a matematika esetében tág értelmezési lehetőségeket vet fel. Ezért kell megkülönböztetnünk különböző szinteket a tételek tanításában. Ennél a kérdésnél (7. kérdés) négy lehetőséget adtam meg, amelyek a tanítás formális mivoltát segítenek felderíteni.

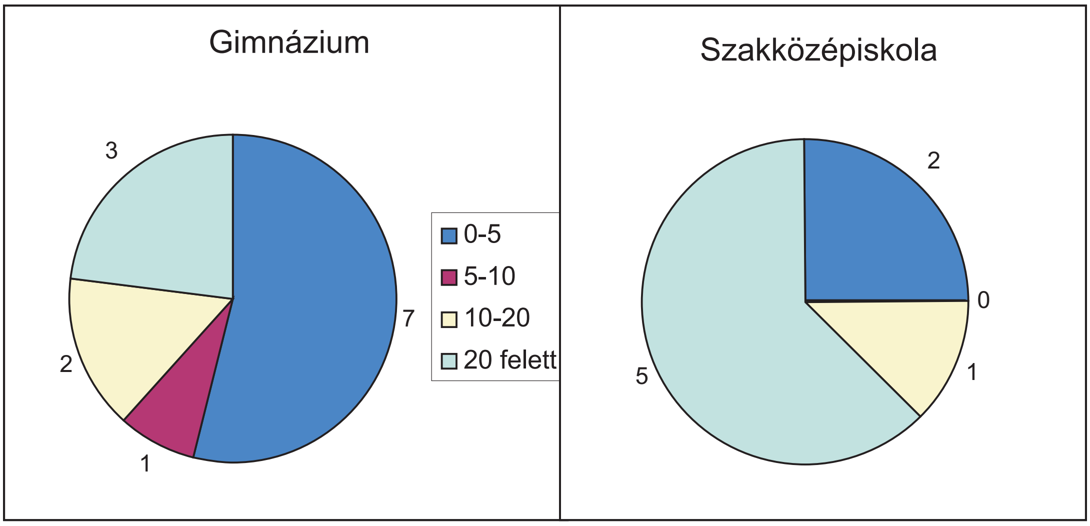
A 8. kérdés konkrét feladatokat vonultat fel, és az alapján kell osztályozni őket a tanárnak, hogy milyen célcsoportnak — átlagos matematikaórán ülő gyerekeknek, emelt szintű érettségire készülőknek, illetve a matematika iránt kifejezetten érdeklődő szakköri csoportnak — adná oda ezt, vagy pedig egy hasonló jellegű feladatot.

Ezek mellett szerepel egy olyan kérdés is, ami a témával kapcsolatos hipotéziseimet tartalmazza. Ezeket korábban *Az oszthatóság tantárgyon belüli szerepe* című fejezetben tárgyaltam. A hipotézisemmel kapcsolatban meg kellett állapítania a kérdőív kitöltőjének, hogy mennyire ért egyet az adott állításokkal.

A kérdőív kiértékelésénél két szempontot vizsgálok: a középiskola típusát és a korcsoportot, azaz a pedagógus pályán eltöltött éveinek számát. Az egyik fő kérdés, amelyre a választ keresem, az az, hogy az általam vizsgált iskolák esetében van-e meghatározó jellegű eltérés iskolatípusok szerint. Vannak-e olyan tételek, oszthatósági szabályok, feladattípusok, amelyeket jellemzően nem tanítanak meg az egyik iskolatípusban, de a másikban igen. Feltételezéseim a következőek:

- a gimnáziumokban a gyerekek nagyobb hányada jelentkezik emelt szintű érettségire, ezért itt nagyobb hangsúlyt fordítanak a formális matematikai nyelvre;
- a gimnáziumokban az általam felsorolt feladatok közül többet visznek be a tanárok alap matematikaórára és érettségire készülő gyerekeknek;
- a hipotéziseimre és a feladattípusokra vonatkozó kérdéseknél markáns eltérések lesznek a korcsoportok tekintetében a tapasztalat végett;
- a hipotézisekre vonatkozó kérdéskör nagyban eltérő eredményeket hozhat a korcsoportok tükrében is.

Összesen 21 tanári kérdőív érkezett vissza, ezek közül 8-at szakközépiskolai tanár és 13-at gimnáziumi tanár töltött ki, szakmunkásképző iskolából nem sikerült információt gyűjtenem. Az általam gyűjtött minta nem reprezentatív, ahhoz nem elég nagyszámú, valamint a minta térbeli eloszlása is kicsi, mivel budapesti és Pest környéki iskolák tanárai töltötték ki a kérdőívek 80–90%-át. A kérdőív célja nem is az volt, hogy egy teljes körű összehasonlítást végezzek iskolatípusonként és korcsoportonként, hanem a tájékozódás. A továbbiakban szerepelnek a nagyobb eltéréseket mutató kérdésekre adott válaszok eloszlásai iskolatípusokra, illetve korcsoportokra vetítve. Szakdolgozatomban csak azoknak a kérdéskörök-nek a tárgyalására térek ki, amelyeknél nagymértékű eltérések mutatkoznak. Vessünk egy pillantást az általam gyűjtött minta eloszlására a két iskolatípusban dolgozó tanárok pedagógusi pályán eltöltött éveik száma alapján:



Jól látható, hogy főként a két szélső életkori kategória képviselői szerepelnek az adatsoromban. Ennek egyik oka a pedagógusok mindenki által ismert életkor eloszlása. A kezdő pedagógusok nagy aránya viszont abból ered, hogy évfolyam-társaim segítségével küldtem szét a kérdőíveket, melyet ők maguk is kitöltöttek, tehát ez az eloszlás saját státuszom, kapcsolatrendszerem hozadéka. Így a kiér-tékelést erre a két kategóriára vetítve végzem, mivel a II. kategóriában (5-10 éve tanít) mindössze egy kérdőívet töltöttek ki, ezért ebből semmilyen következtetést sem lehet levonni. Érdekes jelenség, hogy a szakközépiskolákban a IV. korcsoport (több mint 20 éve tanít) aránya a legmagasabb, míg a gimnáziumokban éppen ellenkezőleg a legfiatalabb korcsoporté.

Statisztikai elemzés

A statisztikai elemzést korábban jelzett feltételezéseim alapján végeztem. A 6. és 9. kérdéseket a fejezet végén fogom elemezni.

A 4. kérdésre adott válaszok eloszlása iskolatípusok szerint (G-gimnázium, SZKI-szakközépiskola)

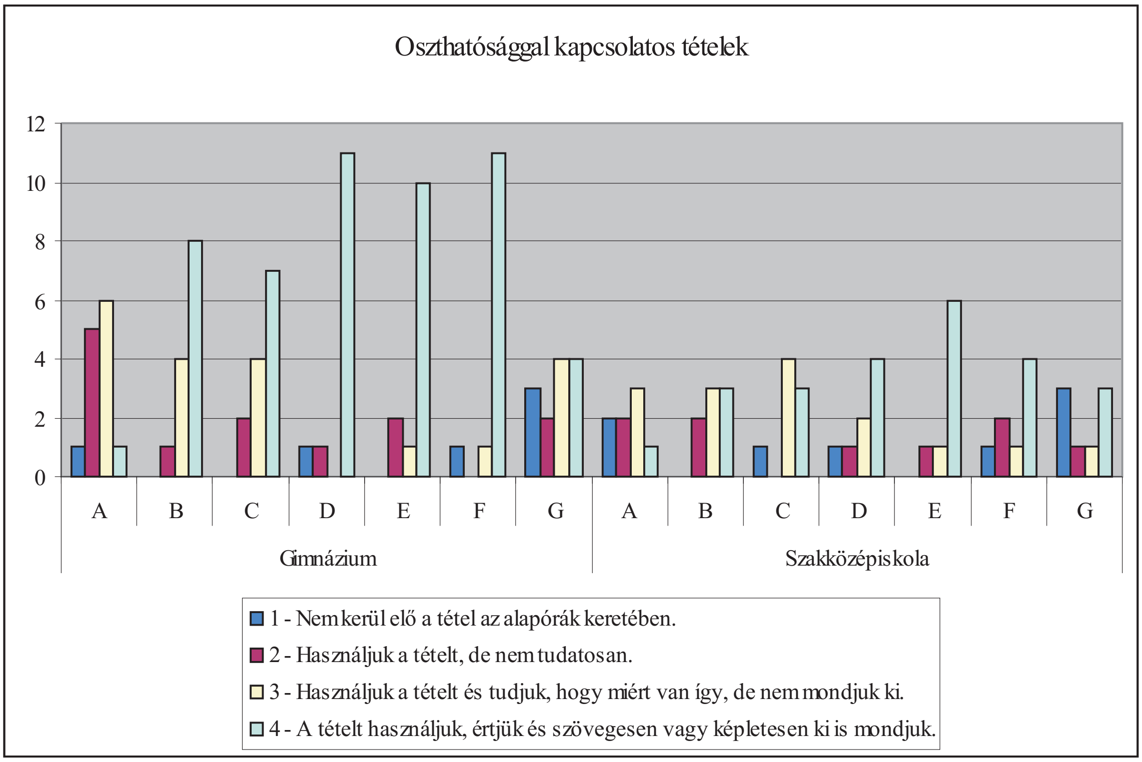
	2	3	4	5	7	8	9	10	11	20	25	50	100	125	1000	10^k
G	13	13	13	13	1	13	13	13	7	5	8	7	7	5	6	9
SZKI	8	8	8	8	1	6	7	7	2	4	4	4	5	1	5	3

A 4. kérdés esetében szembetűnő, hogy 10-ig a 7-es oszthatósági szabály kivételével mindegyik oszthatósági szabályt megtanítja a tanárok többsége. Számomra elgondolkodtató, hogy van olyan tanár, aki a 8-cal és 9-cel való oszthatóságot nem tanítja szakközépiskolában, ami azért meglepő, mert ezek ismerete középszintű érettségi vizsgakövetelmény. A többi oszthatósági szabály tekintetében az a következtetés vonható le, hogy általában a tanárok fele tanítja meg az általam vizsgált mintában, mindkét iskolatípusban.
Korcsoportonként vizsgálva láthatjuk, hogy szinte mindegyik oszthatósági szabályt azonos arányban tanítják a két korcsoport képviselői, hiszen ha az egyikben közel 100%-ban, körülbelül 50%-ban, illetve alig páran tanítják meg az adott oszthatósági szabályt, akkor a másikban is ez jellemző.

	2	3	4	5	7	8	9	10	11	20	25	50	100	125	1000	10^k
0-5 év	9	9	9	9	1	8	8	9	4	4	6	5	6	2	5	5
20 év felett	8	8	8	8	1	7	8	7	3	3	4	4	3	2	3	4

Ez a kérdés sem iskolatípus, sem korcsoport szempontjából nem hozott kirívó különbségeket, ennek talán az lehet az egyik oka, hogy a kerettantervek a jelzett oszthatósági szabályok mindegyikének az ismeretét kitűzik. Az érettségi követelményrendszer viszont már csak a 10 hatványaira, 2-re, 3-ra, 4-re, 5-re, 6-ra, 8-ra és 9-re vonatkozó szabályokat követeli meg, ezért csökken a többi oszthatóságot tanító tanárok száma.

Az 5. kérdés a különböző tételek tanításához kapcsolódik, a tétel tanításának mélységére, formális voltára irányul. Ha elfogadjuk, hogy a tétel nem tudatos használatától a szöveges vagy képletes kimondásig nő a formalitás, akkor ez alapján láthatjuk, hogy melyik iskolatípus helyez nagyobb hangsúlyt a formális gondolkodásra, a formális matematikára ebben a témakörben.



Az első (A jelű) tétel esetében is látható különbség, hiszen a szakközépiskolai tanárok negyede meg sem említi ezt a tételt, melyet a maradékos osztás tételeként is szoktak nevezni. A B jelű tételtől kezdve F-ig a gimnáziumi tanárok legtöbbje formálisan ki is mondja a tételeket. A szakközépiskolákban csak a prímek száma (D), a számelmélet alaptétele (E) és az osztók számára vonatkozó (F) tételek esetében fordul elő, hogy a tanárok 50%-a szövegesen vagy képletesen ki is mondja a tételt. Viszont olyan jellegű eltérés nem fordul elő, hogy az egyik iskolatípusban szinte egyöntetűen tanítanák a tételt, míg a másikban pedig szinte egyáltalán nem.

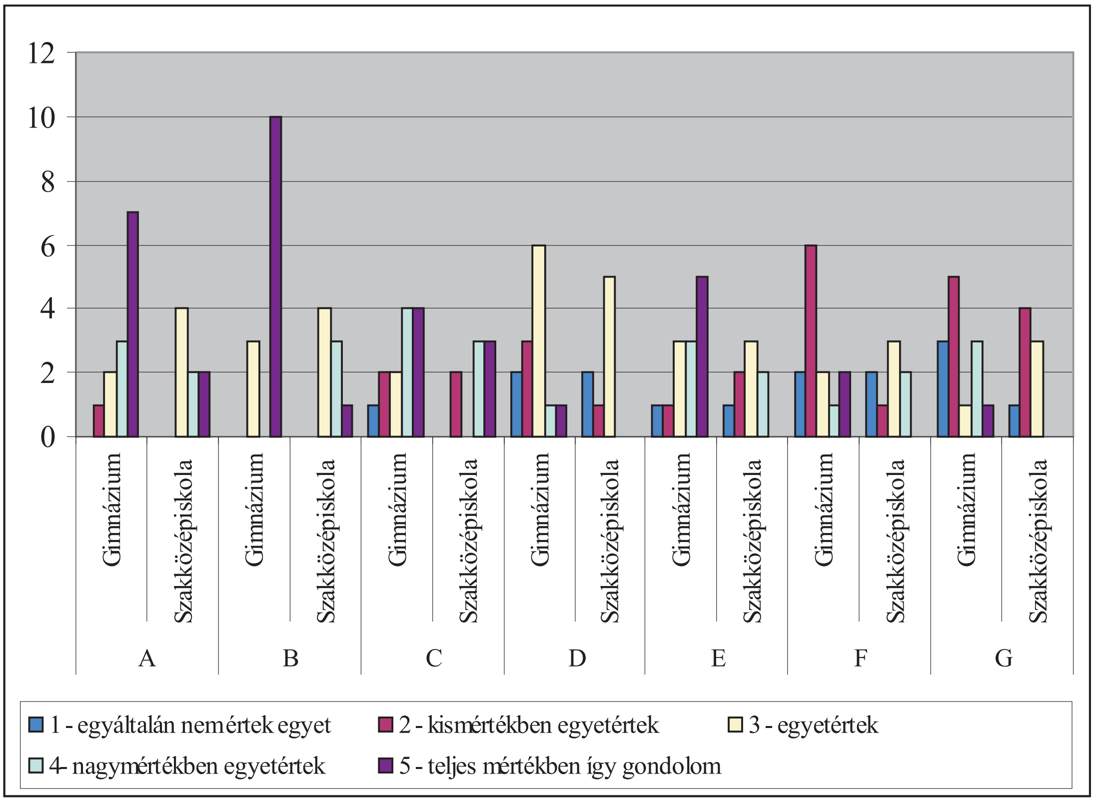
Összességében azt lehet látni, hogy a gimnáziumokban a formális matematika nyelve nagyobb arányban jelenik meg.

A 7. kérdés saját hipotéziseimet tartalmazza az oszthatóság témaköréhez kapcsolódóan. A gimnáziumok és szakközépiskolák különbségeit tekintve igen szembetűnő az első két állítás. Ez a két állítás az alábbi:

A - A bizonyítási módszerek tanításában fontos szerepe van az oszthatóságnak.

B - A logika megalapozását segíti elő (például: ellenpélda keresése).

A gimnáziumi tanárok többsége teljes mértékben egyetért a két állítással, míg az általam vizsgált mintában a szakközépiskolai tanárok egyetértettek ugyan, de míg az adott válaszok átlaga 4, 2 valamint 4, 5 a két kérdés esetében a gimnáziumok képviselőinél, itt 3, 8-as és 3, 6-es értékeket kapunk.

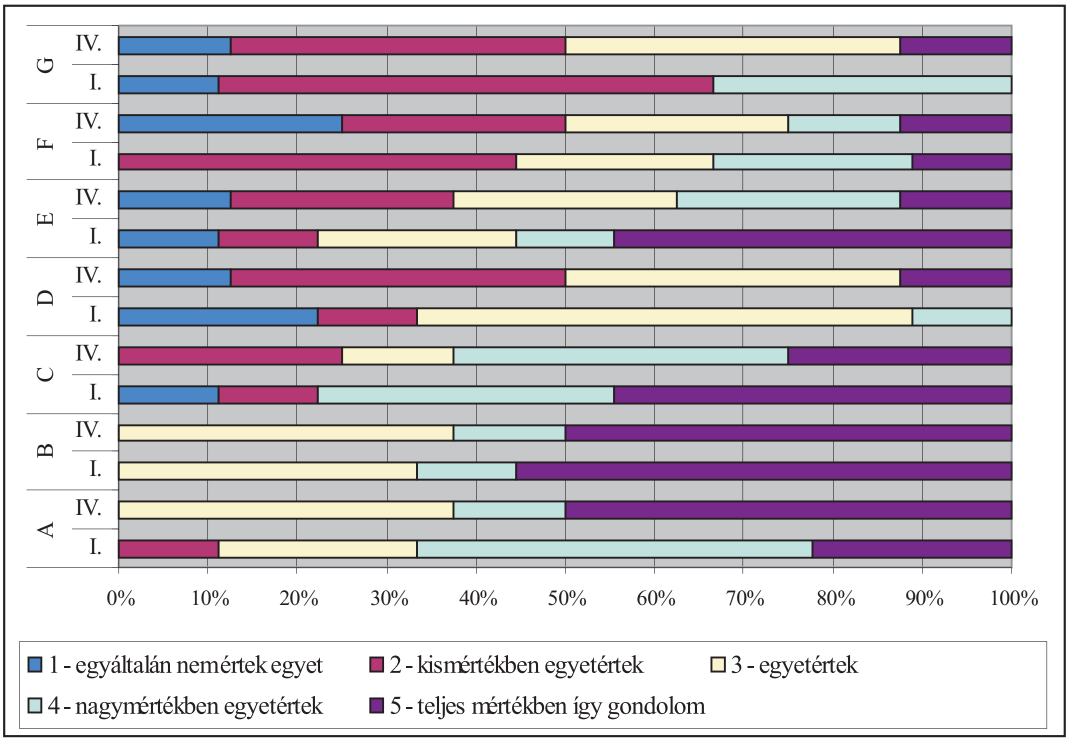


A többi kérdés esetében hasonló eloszlást mutat a két iskolatípus. Személy szerint az F és G állításokra adott válaszok érdekeltek a legjobban, hiszen az analógiáknak a megléte egyáltalán nem kőbe vésett igazság, ezek az állítások tükrözik leginkább saját elképzeléseimet. Ennél a két állításnál mindkét iskolatípus esetén szignifikáns eltérések találhatóak az eloszlásokban. A legnagyobb szórásértékek a 7. kérdésen belül a C, F és G alkérdésekhez kapcsolódnak.

A szabad vektor fogalmához kapcsolódóan a gimnázium tanárok nagyobbik fele nem vagy csak kismértékben ért egyet az állítással, míg a szakközépiskolában tanító pedagógusok esetében ez az eloszlás szinte homogén. A G jelű állítás esetében viszont a szakközépiskolában dolgozó tanárok közül senki sem ért egyet nagyobb mértékben az állítással, míg a gimnáziumokból származó kérdőíveknél közel 30% nagymértékben egyetért ezzel.

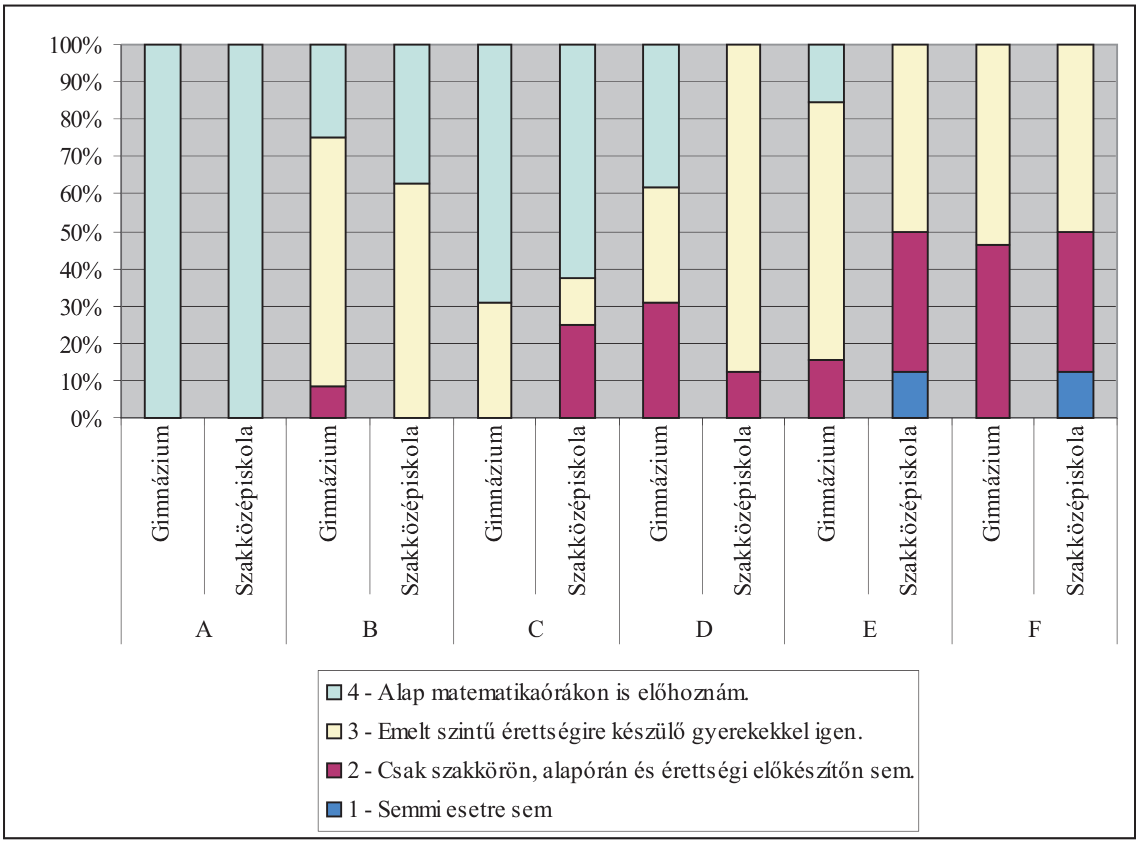
Személy szerint úgy gondolom, hogy az analógiák alkalmazása könnyebbé teheti

a diákok számára a későbbi témakörök megértését, ezért ennek szellemében próbálom minél jobban megalapozni az oszthatóságon keresztül a többi témakört. Érdemes lenne a hipotéziseket nagyobb mintán is megvizsgálni, azt keresni, hogy a nagyobb minta mutat-e eltérést, vagy továbbra is nagy szórás áll fenn az F és G jelű kérdéseknél.
A két szélső korcsoportot tekintve az alábbi diagram rajzolható:



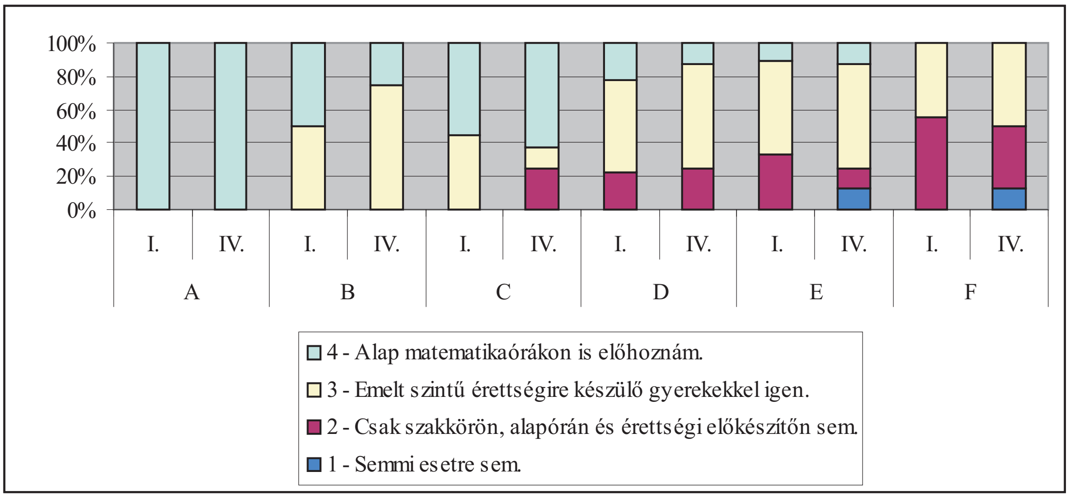
Az első három állítás esetében igen hasonlóak az eloszlások, míg a D állításnál (Az általános iskolában jól megalapozzák az oszthatóságot.) a kezdő tanárok többsége egyetért az állítással — legtöbbjük a 3-as számot jelölte meg —, míg az idősebb korosztály esetében jobban megoszlanak a vélemények, és nagyobb eltolódás figyelhető meg a két véglet felé. A formális gondolkodás fejlesztésére vonatkozó kérdés esetében (E) az I. korcsoportba tartozó tanárok több mint fele nagymértékben vagy teljes mértékben ért egyet az állítással, míg az idősebb tanárok esetében az eloszlás homogénebb, kiegyenlítődni látszik. Feltételezhető, hogy ez a tanítási tapasztalat hiányából adódik, illetve a pedagógiai háttértudás eltérő voltából. Hasonlóan az analógiákra vonatkozó kérdések esetében is az E kérdéshez hasonló eloszlást láthatunk.

A 8. kérdésben különböző feladatminták szerepelnek, melyek kapcsán azt kellett eldöntenie a tanároknak, hogy ők milyen iskolai szituációban alkalmaznák. Az iskolatípusok függvényében azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a gimnáziumokban több jelenik meg az általam bemutatott feladatok közül alap matematikaórán, valamint a nehezebb feladatok közül biztosan lesz olyan, melyet a szakközépiskolák tanárai egyáltalán nem alkalmaznak.



Az első állítást a B feladat kivételével mindegyik feladattípus esetében alátámasztják a gyűjtött adatok. A második állítást pedig leginkább az D, E és F kérdések statisztikái támasztják alá.

A két szélső korcsoportot vizsgálva azt láthatjuk, hogy a fiatalabb korosztály képviselői minden esetben többet akarnak megtanítani, mint a rutinos több éve tanító kollégáik. Minden egyes feladat eloszlásánál az tapasztalható, hogy ha egy feladatot a IV. korcsoport tagjai inkább csak szakkörre vinnének be, akkor ezeket az I. korcsoport tagjai kisebb arányban vinnék csak szakkörre, inkább alap matematikaórán vagy érettségi előkészítőn adnának fel. Az E és F kérdéseknél érdekes, hogy van olyan tanár, aki ezeket nem vinné be semmilyen matematikaórára, ám ezek mellett a különböző kategóriákba közel azonos arányban képviselteti magát a két korcsoport. Ezt mutatja az alábbi diagram is:



A 6. kérdés nem hozott semmilyen plusz információt. A 9. kérdésben sokan utaltak arra, hogy ők csak az általuk tanított gyerekekről tudnak nyilatkozni, így válaszaikat a tanulók képességszerkezete is befolyásolja.

Összességében véve az mondható el a kérdőív eredményeiről, hogy érdemes lenne egy nagyobb minta esetén is vizsgálatot végezni. Az általam feltételezett különbségek többségében már ekkora minta esetén is megmutatkoztak, noha szükséges hozzátenni azt is, hogy az általam vizsgált szakközépiskolák és gimnáziumok is az adott iskolatípuson belül igen előkelő helyen szerepelnek a rangsorokban.

Ami mindenképp szignifikáns különbségeket mutat, az a formális matematika megjelenése a két iskolatípus viszonyában vizsgálva. Számomra a legérdekesebb a formális gondolkodásra vonatkozó kérdéskör volt; főként az analógiák megléte vagy nem léte. Továbbra is úgy gondolom, hogy ezek az analógiák fontosak, és gyakorlatomban nagy hangsúlyt fektetek a maradékosztályokban való gondolkodásra, s kíváncsian várom, hogy a gyerekek, akiket ebben a szellemben tanítottam, könnyebben veszik-e majd a későbbi akadályokat.

4. fejezet

Szakkörtervezet

Az általam tervezett szakkör főként oszthatósággal kapcsolatos problémákat, illetve ehhez kapcsolódóan a kongruenciák bevezetését és alkalmazását dolgozza fel. Főként olyan feladatokat gyűjtöttem, amelyek támogatják a különböző tanulmányi versenyekre való felkészülést, esetleg konkrétan korábbi versenyfeladatok, melyek jól alkalmazható ötletet, megoldási módszert mutatnak be. Egy szakköri óra körülbelül 45 perces lenne, amit minden valószínűséggel a tanítási órák végeztével lehetne megtartani.
A célcsoportot nem fixálom, mivel úgy gondolom, hogy egy versenyfelkészítő szakkörön fontos számelméleti feladatokkal is foglalkozni, hiszen a legtöbb tanulmányi versenyen előfordul egy-egy számelméleti kérdés minden fordulóban. Természetesen a szakkört mindenképpen azzal kellene kezdeni, hogy a diákok előzetes tudását felmérjük. Ez azért fontos, mert nem tudhatjuk minden gyerekről biztosan, hogy mit tanult meg az alapórán, vagy kilencedikes tanulókra gondolva, mit hozott magával az általános iskolából. Ehhez egy szintfelmérő feladatot készítettem, ami egy sudoku-feladvány képében jelenne meg (4. számú melléklet).
A sudokuban 24 állításról kell eldöntenie a tanulónak, hogy igaz vagy hamis. A kijelentések logikai értéke alapján kap egy számot 1-től 9-ig, amit beírhat a kijelentés sorszámával jelölt sudoku-négyzetbe. Ha minden állítás logikai értékét helyesen megtalálta, akkor kapott egy sudokut 24 alapszámmal, ami megfejtésre vár. Ezt a feladatot az ihlette, hogy a gyerekek, akiket tanítok, egy-két kivétellel mindannyian nagyon szeretik a sudoku-feladványokat, ezért ezzel közelebb lehet hozni hozzájuk a matematikát. Természetesen a siker érdekében érdemes ellenőrizni a sudoku alapszámainak helyességét közösen, mielőtt megfejtik a tanulók a feladványt. A sudokuban szereplő állítások az alaptudásukat mérik fel,

esetleges hiányosságok pótolhatok, tévhitek kijavíthatók ennek segítségével az érdemi munka megkezdése előtt. Az első foglalkozás abból állna, hogy a sudoku feladatait megbeszéljük.
Ezt követően tematikus sorrendben követik egymást a szakköri órák. Minden alkalommal vagy kétalkalmanként különböző témákat dolgozunk fel. A szakköri órán megszerzett ismeretek alkalmazásához a gyerekek minden alkalommal házi feladatot is kapnak, hogy otthon még egyszer átgondolják a megoldási módszert, amit aznap elsajátítottak.
Az alábbi témák szerint csoportosítottam a szakkörön feldolgozandó anyagot:

1. Oszthatósági szabályokat, osztók száma tételt alkalmazó feladatok (2-3 alkalom)

Ezeken az órákon a középiskola törzsanyagához kapcsolódó témaköröket vennénk végig feladatokon keresztül, azokat bővítenénk, illetve mélyítenénk. Az oszthatósági szabályokkal történő bizonyításoknál előfordul olykor, hogy a binomiális tétel alkalmazása is bizonyításként szolgál, tehát a binomiális tétel mint új ismeret jelenne meg az itt végzett feladatok kapcsán. Egy példa arra, hogy miként jelenhet meg a többféle bizonyítási módszer egy egyszerű feladaton belül:

Igazoljuk, hogy $9 \mid 10^{33} + 8$.[1]

Megoldások:

A 9-es oszthatósági szabály alapján a bizonyítás a következő: Mivel 10^{33} számjegyeinek összege 1 (hiszen egy darab egyesen kívül csak nullákat tartalmaz), ha hozzáadunk 8-at, akkor a számjegyek összege 9 lesz. A 9-es oszthatósági szabály szerint a szám osztható 9-cel.

Egy másik bizonyítási módszer a maradékok vizsgálata. Ehhez két fontos tételt kell ismernie a diákoknak. Az egyik azt mondja ki, hogy egy összeg maradéka adott számmal osztva megegyezik a maradékok összegével. A másik tétel állítása pedig, hogy egy szorzat maradéka megegyezik a tényezők maradékai szorzatának maradékával bármilyen oszthatóság esetében.

[1] Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből, Typotex Kiadó, Budapest, 2003, 36. o., 369. /a

$9 \mid 10^{33}+8$-at kell bizonyítanunk. 10 maradéka 9-cel osztva 1, így 10^{33} maradéka 1^{33} lesz 9-cel osztva a szorzat maradékára vonatkozó tétel alapján, míg a 8 maradéka önmaga. Alkalmazva az összeg maradékára vonatkozó tételt megkapjuk, hogy a maradék 9, azaz 0, tehát a kifejezés osztható 9-cel.

A binomiális tétel alkalmazásával is bizonyíthatunk, ám ez nehezebb a fenti két módszernél:
A binomiális tétel alapján

$$10^{33} = (9+1)^{33} = 9^{33} + \binom{33}{1} \cdot 9^{32} \cdot 1 + \cdots + \binom{33}{32} \cdot 9^{1} \cdot 1^{32} + 1.$$

A binomiális tétellel kifejtett alakban az utolsó tag kivételével mindenhol szerepel a 9 szorzótényezőként, tehát ezek a tagok oszthatók 9-cel, tehát 10^{33} maradéka 1 lesz 9-cel osztva. Ehhez a számhoz 8-cat adva éppen osztható lesz 9-cel.

Ezen kívül még más módszerekkel is meg lehet oldani ez a feladatot. (Például a $10^{33}+8 = 10^{33}-1+9$ átírást alkalmazva.) Fontos, hogy minden megoldási kísérletet nézzünk végig, hiszen ahány gyerek van a csoportban, annyiféleképpen gondolkodnak. A több megoldás szerepeltetése szintén segíti a tanulókat abban, hogy nagyobb biztonsággal tudjanak versenyfeladatokat megoldani.

2. Számjegyes feladatok (2 alkalom)

A két alkalom kidolgozott anyagát a későbbiekben részletesen tárgyalom. Azt, hogy hogyan oszlik meg a 9 feladat a 2 alkalom között, nem kötném meg, ez a résztvevő tanulóktól és a szakkört tartó tanártól függ.

3. "Határozzuk meg az(oka)t a számo(ka)t" típusú feladatok (1 alkalom)

Nagyon sok olyan versenyfeladat található, amelyben adnak egy kifejezést, képletet, és arra kíváncsiak, mely számokra teljesül, hogy ez a kifejezés teljesít egy egyenlőséget. Hasonlóképpen egy számot is kereshetünk megadott tulajdonság alapján:

Melyik az a legkisebb természetes szám mely osztható az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ számok mindegyikével?

Megoldás:

Ahhoz, hogy minden szám ossza a felsoroltak közül, az előforduló számok prímfelosztásában szereplő prímeket a maximális hatványon kell venni. Ezek szorzata adja meg a keresett számot.
10-ig csak a $2, 3, 5$ és 7 prímszámok fordulnak elő. Ezek legmagasabb hatványon a $8, 9, 5$ és 7 számokban fordulnak elő, tehát $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$ a legkisebb ilyen szám, ha a természetes számokat mint a pozitív egészeket tekintjük.
Ha a természetes számokat 0-val kezdjük, akkor a 0 a megoldás, hiszen az minden más számmal osztható.

4. Bizonyítási módszerek (1 alkalom)

Ezt a szakköri órát a későbbiekben részletesen kifejtem.

5. Prím vagy összetett? (1 alkalom)

Ezt a szakköri órát a későbbiekben részletesen kifejtem.

6. Kongruenciák bevezetése (1 alkalom)

A kongruenciákat tekinthetjük úgy, mint az oszthatóság „átfogalmazását”, amelyben a különböző maradékosztályok elemeit egységként kezeljük. Ennek segítségével műveleteket definiálhatunk és az oszthatóság helyett kongruenciákat alkalmazva könnyebben számolhatunk.
Például a 3-as oszthatóság bizonyítása két módszerrel:

A maradékok összegére és szorzatára vonatkozó tételeket alkalmazva $\overline{a_1 a_2 \cdot a_n} = a_n + a_{n-1} \cdot 10 + \cdots + a_1 \cdot 10^n$. 3-mal osztva 10, valamint 10 összes hatványa 1 maradékot ad. Így a fenti összeg az alábbira redukálható: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Ennélfogva ez az összeg akkor és csak akkor osztható 3-mal, ha a szám is osztható 3-mal. Tehát a számjegyek összegét kell tekintenünk a 3-mal való oszthatóság vizsgálatánál.
Megjegyzés: Érdemes megtanítani a gyerekeknek azt is, hogy ezzel a módszerrel nemcsak azt tudjuk meghatározni, hogy osztható-e 3-mal a szám vagy nem, hanem azt is, hogy milyen maradékot ad a szám 3-mal osztva. (A számjegyek összegének 3-as maradéka megegyezik a szám 3-as maradékával.)

Kongruenciák segítségével az alábbi módon bizonyíthatunk:

$\overline{a_1 a_2 \cdot a_n} = a_n + a_{n-1} \cdot 10 + \cdots + a_1 \cdot 10^n$

$10 \equiv 1 \pmod 3$, ezért a 10-esek kiválthatók 1-esekkel.

$\overline{a_1 a_2 \cdot a_n} = a_n + a_{n-1} \cdot 10 + \cdots + a_1 \cdot 10^n \equiv a_n + a_{n-1} \cdot 1 + \cdots + a_1 \cdot 1^n \pmod 3$

$\overline{a_1 a_2 \cdot a_n} = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 \pmod 3$

Ebből jól láthatjuk, hogy a számjegyek összegét kell vizsgálnunk. Ha a számok összege kongruens 0-val, pontosan akkor lesz a szám osztható 3-mal. Itt is könnyen láthatjuk, hogy a számjegyek összegének 3-as maradéka megegyezik a szám 3-as maradékával.

7. Kongruenciák alkalmazása (1-2 alkalom)

Akár a korábban megoldott feladatokat, akár más feladatokat kongruenciák segítségével oldunk meg. Az oszthatósági szabályokat is bizonyíthatjuk ily módon, illetve nagyon jó, ha megmutatjuk a tanulóknak, hogy a teljes indukciós bizonyításokat hogyan lehet kongruenciák segítségével kiváltani. A teljes indukciós bizonyításokhoz kapcsolódó oszthatósági feladatok akár emelt szintű érettségin is előfordulhatnak, ám néha ezek kongruenciák segítségével történő bizonyítása az indukciós helyett sokkal kevesebb időt igényel, különösen, ha ismerik az Euler-Fermat-tételt. Ezen kívül akár a kongruenciákhoz kapcsolódó prímteszteket is megmutathatjuk a tanulóknak, ha többet szeretnénk foglalkozni ezzel a témakörrel.

A további fejezetekben a részletesen kidolgozott szakköri órák anyaga található feladatokkal és megoldásokkal.

5. fejezet

Számjegyes feladatok

A szakkörnek ezen a két óráján olyan feladatokkal foglalkozunk, amelyekben a számok számjegyei játsszák a legnagyobb szerepet. Az ilyen jellegű feladatoknak számos különböző típusa lehet, mint például:

- megadtunk egy képzési módszert, és arra keressük a választ, milyen jegyre végződik az adott szám;
- megadunk valamilyen tulajdonságot általánosságban, és azt keressük, mely egész (vagy pozitív egész) számokra érvényesül a tulajdonság (általában ezeknél a feladatoknál csak néhány különböző megoldást találunk);
- valamint egy jellegzetes feladattípus az is, amikor adott egy általános alakú szám, és ezzel kapcsolatban kell valamilyen állítást megvizsgálni vagy bizonyítani.

Az első feladattípus megoldásában főként az oszthatósági szabályok, illetve a számok maradékosztályokba sorolása segít, ezért egy ilyen jellegű feladat átvezetné a gyerekeket az előző szakköri órák feladataitól az új, ismeretlen módszerhez. Megadná a kontinuitását, egymáshoz kapcsolná az alkalmakat. Megemlítendő az is, hogy ez a feladattípus akár alap matematikaórán is előkerülhet, hiszen vannak olyan matematikakönyvek és feladatgyűjtemények — például a Hajdú Sándor-féle *Gondolkodni jó!* , vagy pedig az Egységes érettségi feladatgyűjtemény —, amelyek ilyen jellegű feladatokat is tartalmaznak.
Az utóbbi két típus esetén a megoldás kulcsát az adja, ha az összes n-jegyű számot egységesen tudjuk kezelni. Erre a matematikában az alábbi jelölésrendszert vezették be: Az adott szám számjegyeit az angol ábécé betűivel jelöljük és az egész

szám fölé egy vonalat húzunk. Például általánosan a háromjegyű számokat így jelöljük: $\overline{abc}$. Ez a jelölés azért praktikus, mert teljes mértékben alkalmas az adott számok együttes jelölésére, valamint ha valamilyen tulajdonságot vizsgálunk, akkor azt is jól lehet jelölni rajta. Például azok a négyjegyű számok, amelyeknek az első és utolsó jegye megegyezik, az alábbi módon jelölhetők: $\overline{abca}$. Előfordulhat olyan feladat is, amelyben a számjegyek számának ismerete nélkül kell valahogyan jelölnünk a számokat, ekkor például az alábbi jelölés használható: $\overline{a_1a_2\dots a_n}$. Így egységesen kezelve a számokat gyorsabban juthatunk megoldásra, mintha egyesével vizsgálnánk meg minden számot. Nagyon fontos megemlíteni azt is, hogy az ilyen feladatokban sokszor a számok helyi értékes átírását kell alkalmazni. Az ilyen módszerrel felírt számok általában az alap matematikaórákon nem jelennek meg, ezért tartom igen fontosnak, hogy megmutassuk ezt a módszert a gyerekeknek, hiszen matematika versenyfeladatokban gyakran szükséges az alkalmazása.

Feladatok és megoldások

5.1. Feladat

Öt egymást követő egész számot összeszorzunk. Milyen jegyre végződik az így kapott szám?[1]

5.1.1. Megoldás

Bármely öt egymást követő szám között létezik pontosan egy 5-tel osztható szám, valamint legalább két darab páros szám. Tehát a szám osztható lesz 5-tel és 2-vel, így 10-zel is. A 10-zel osztható számok mindig 0-ra végződnek, tehát 0-ra végződik az adott szám.

[1]Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből, Typotex Kiadó, Budapest, 2003, 37.oldal, 386. feladat

A feladat megoldása után kétféle általánosítási út lehetséges:

- vizsgáljuk azt, hogy hány számot kell legalább összeszoroznunk, hogy kettő, három, ..., n darab 0-ra végződjön a szám;
- vagy pedig azt is vizsgálhatjuk, hogy bármely öt egymást követő szám szorzata esetén melyik számról tudjuk, hogy biztosan osztja a szorzatot, illetve ha nem öt, hanem k darab számot veszünk, akkor milyen oszthatóságot találunk.

Ezeket vizsgáljuk az alábbi két feladatban.

5.2. Feladat

Legalább hány egymást követő egész számot kell összeszoroznunk, hogy a szorzat biztosan legalább 2, 6 vagy éppen 31 darab 0-ra végződjön?

5.2.1. Megoldás

A nullák száma a 10-hatványokkal való oszthatóságot mutatja. Ahhoz, hogy egy szám osztható legyen 100-zal, teljesülnie kell a 4-es és 25-ös oszthatóságnak. Mivel itt egymást követő számok szorzatáról van szó, ezért itt a 25-ös oszthatóság úgy teljesül, hogy az összeszorzott számok között biztosan létezik kettő 5-tel osztható szám. Vegyük az alábbi 10 számot:

$$a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5, a+6, a+7, a+8, a+9$$

Ezek között mindig van kettő darab 5-tel osztható, viszont ha csak 9 darabot veszünk, akkor előfordulhat, hogy csak egy 5-tel osztható szám került be a számaink közé. (Ebben az esetben az 5-ös osztás maradékai rendre $1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4$.) Tehát a 25-ös oszthatósághoz legalább 10 szám szorzata kell. Ekkor viszont a 4-es oszthatóság már automatikusan teljesül, hiszen a fenti számsor fele páros szám (sőt, több szám 4-gyel is osztható), így már 32-vel is biztosan osztható.

Nézzük, mi történik 6 darab 0 esetén, azaz a 10^6-nal való oszthatóságot kell vizsgálnunk. Vegyük a szám prímtényezős felbontását $10^6 = 2^6 \cdot 5^6$. Itt az 5-ös 6-szor jelenik meg mint szorzótényező, így olyan számokat kell tartalmaznia a szorzatnak, amelyekben összességében megtalálható 6 darab 5-ös szorzótényezőként. A fenti bizonyítást alapul véve láthatjuk, hogy a 2-esek mint szorzótényezők száma sokkal gyorsabban nő, mint az 5-ösöké, így elég az ötösökre koncentrálnunk. Látható, hogy minden egymást követő 30 szám között található 6 darab olyan, ami 5-tel osztható. (Ugyanis minden ötödik szám osztható öttel, azaz minden számötösben található egy 5-tel osztható.) Viszont ezt a számot még csökkenthetjük. Tudjuk, hogy minden ötödik szám osztható öttel, de az is igaz, hogy minden 25-dik természetes szám 5^2-nel is osztható, így eggyel kevesebb öttel osztható szám is elég. Tehát a 6 darab 5-ös már 25 szám esetén is teljesül, viszont ennél kevesebb még nem elég, hisz ha az első szám 1 maradékot ad 25-tel osztva, akkor az $5., 10., 15., 20.$ szám lesz öttel osztható, de több nem. Ezzel beláttuk, hogy a 25 nem csökkenthető.

Hány természetes számot kell összeszoroznunk, hogy 31 darab 0-ra végződjön a szorzat?

Az előző két bizonyítást alapul véve azt biztosan tudjuk, hogy $10^{31} = 2^{31} \cdot 5^{31}$-nel való oszthatóságot kell vizsgálnunk. Továbbra is elég az 5-ös szorzótényezők számára koncentrálnunk. Ha korábbi esetekből indulunk, akkor azt biztosan tudjuk, hogy $5 \cdot 31 = 155$ természetes szám szorzata biztosan elég lesz. Vajon lehet-e ennél kevesebb? Ha végiggondoljuk, észrevehetjük, hogy minden 25-dik természetes szám nemcsak 5-tel, hanem 25-tel is osztható, ami két 5-ös tényezőt tartalmaz. Ismét az lesz a legrosszabb eset, ha az első számunk 1 maradékot ad 5-tel osztva. Mint korábban láttuk, ebben az esetben 25 szám esetén 6 nullára végződik a szám. Ha ismét 25 számmal szorozzuk, akkor biztosan lesz 12 nulla. Ez alapján azt a következtetést vonhatjuk le, hogy 25 szám legalább 6 darabbal növeli a nullák számát. Mivel $30 = 5 \cdot 6$, 5 ilyen 25-ös csoport biztosan kell. Ez összesen 125 szám. Azt is tudjuk, hogy minden 125 egymást követő szám között van egy 125-tel osztható, azaz 3 darab 5-öst tartalmazó szám, így nincs is szükség többre, hiszen biztosan megjelenik szorzótényezőként a 31-dik ötös is.

5.3. Feladat

Melyik a legnagyobb egész szám, amely biztosan osztja bármely 5 egymást követő természetes szám szorzatát? Mi változik, ha nem 5, hanem k darab egymást követő számot szorzunk össze?

5.3.1. Megoldás

Ha bármely 5 egymást követő szám szorzatát osztja, akkor a legkisebb 5 egymást követő számot is osztania kell. Tehát osztania kell $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$-öt, ami 120, így a 120 lehet a legnagyobb egész szám, amire igaz az állítás. Bizonyítsuk be, hogy a 120 valóban osztja bármely 5 egymást követő természetes szám szorzatát. Ekkor az alábbit kell bizonyítanunk:

$$120 \mid a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)$$

Egy szám akkor osztható 120-szal, ha osztható 3-mal, 5-tel és 8-cal is. A három oszthatóság teljesüléséből következik a 120-szal való oszthatóság, mert ezek páronként relatív prímek.

Az 5-ös oszthatóság könnyen belátható, hiszen bármely öt egymást követő számot vettük, egy közülük mindig 5-tel osztható, így az 5 biztosan osztja a szorzatot. A szám osztható 8-cal, mivel a számok között legalább két páros szám található (ps, ptlan, ps, ptlan, ps; vagy pedig ptlan, ps, ptlan, ps, ptlan sorrendben), valamint azt is tudjuk, hogy minden második páros szám osztható 4-gyel. Ebből következik, hogy biztosan van két páros szám a tényezők között, melyek közül az egyik 4-gyel osztható, tehát a szorzat prímtényezős felbontásában a 2 legalább a harmadik hatványon szerepel. Így a szorzat valóban osztható 8-cal. Már csak a 3-as oszthatóságot kell belátnunk, azt, hogy

$$3 \mid a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)$$

Minden három egymást követő természetes szám között létezik pontosan egy, amelyik 3-mal osztható, ezért a fenti öt szám közül legalább egy osztható lesz hárommal, tehát az egész szorzat is. Ezzel beláttunk, hogy bármely öt egymást követő természetes szám szorzata osztható 120-szal. Az a kérdés merülhet fel, hogyan kapcsolódik a 120 az 5-höz. Bizonyításunk elején láttuk, hogy 120 éppen az első öt természetes szám szorzata, amit 5!-sal jelölünk a matematikában.

Mi változik, ha nem 5, hanem k darab egymást követő számot szorzunk össze?

Ha k-t valamilyen nagyobb számnak választjuk, szinte lehetetlen a korábbi módszerrel megvizsgálni, hiszen egyre több és bonyolultabb oszthatóságot kell vizsgálnunk. (Például ha $k = 11$-et veszünk, akkor vizsgálni kell a $11! = 39916800$-val való oszthatóságot, ami azt jelenti, hogy a szám osztható kell legyen 2^8-nal, 3^4-nel, 5^2-nal, 7-tel és 11-gyel.) Ezért érdemes más módszerrel próbálkozni. Az előző bizonyítás záró gondolata alapján vegyük a természetes számok szorzatát 1-től k-ig. Ez a szám, a természetes számok szorzata 1-től k-ig a matematikában egy külön jelölést kapott $k!$ (k-faktoriális). A sejtésünk az, hogy bármely k egymást követő természetes szám szorzatát osztja $k!$. Sejtésünk bizonyítását kezdjük az oszthatóság definíciójának alkalmazásával:

$$k! \mid a(a+1)(a+2)\dots(a+(k-1))$$

jelenti, hogy létezik egy olyan c egész szám, melyre igaz, hogy

$$c \cdot k! = a(a+1)(a+2)\dots(a+(k-1)) \Leftrightarrow c = \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+(k-1))}{k!}.$$

Vegyük észre, hogy

$$c = \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+(k-1))}{k!} = \binom{a+k-1}{k}.$$

Ezzel egy binomiális együtthatót kaptunk, ami mindig egész szám.

5.4. Feladat

Az $\overline{abb}$ alakú háromjegyű szám számjegyeit összeszorozva olyan $\overline{ac}$ kétjegyű számot kapunk, amelyben a számjegyek szorzata c. Mennyi a, b és c értéke?[2]

5.4.1. Megoldás

Mivel $ac = c \iff ac - c = 0$, ebből c kiemelése után rögtön látszik, hogy a szorzat csak akkor lehet 0, ha $a = 1$ vagy $c = 0$. Vegyük az $a = 1$ esetet. Így az $\overline{abb}$ számjegyeinek szorzatára $b^2 = \overline{1c} = 10 + c$ adódik. Mivel c számjegy, ezért b^2 korlátok közé szorítható: $10 \leq b^2 < 20$. A 10 és 20 között csak egy négyzetszám van, a 16. Eszerint $c = 6, b = 4$. Ha $c = 0$, akkor $a \cdot 0 = 0$, tehát az a bármilyen szám lehetne, de $abb = \overline{ac} = \overline{a0} = 10a$, amiből azt kapjuk, hogy $b^2 = 10$. Ebben az esetben b nem egész szám, tehát nem kapunk újabb megoldást.

Így egyetlen megoldás létezik: $b = 4, c = 6$.

[2]Zrínyi Ilona matematika verseny, 2004, 8. osztály, országos, 21. feladat variálva (az értékre is rákérdezve)

5.5. Feladat

Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek négyzetének összege 9?[3]

5.5.1. Megoldás

Legyen egy ilyen szám $\overline{abc}$. Ha a négyzetösszeg 9, akkor $a^2 \leq 9, b^2 \leq 9, c^2 \leq 9$. A 9-nél nem nagyobb négyzetszámok a $0, 1, 4, 9$. Ezek közül háromnak az összege a következőképpen lehet 9-cel egyenlő: $0 + 0 + 9$ vagy $1 + 4 + 4$. Az első verziónak csak a 900 felel meg (hiszen $a \neq 0$). A második verziónak megfelel a 144, 414 és a 441. Ezek szerint 4 ilyen szám van.

5.6. Feladat

Az a és b számjegyek, $a \neq 0$. Mutassuk meg, hogy az $\overline{ababab}$ alakú hatjegyű tízes számrendszerbeli számok mind oszthatóak 777-tel.[4]

5.6.1. Megoldás

A jelölés a következőképpen oldható fel:
$\overline{ababab} = 100000a + 10000b + 1000a + 100b + 10a + b = 101010a + 10101b = (10a + b) \cdot 10101$. A 10101 prímtényezős felbontása $3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$, a 777 törzstényezős felbontása $3 \cdot 7 \cdot 37$. Eszerint $777 \mid 10101$, tehát $777 \mid (10a + b) \cdot 10101$, azaz $777 \mid \overline{ababab}$.

Házi feladatok

5.7. Feladat

Az alábbi számok közül melyik az, amelyet 768-cal megszorozva a szorzat a legtöbb 0-ra végződik? 7500 vagy 5000 vagy 3125 vagy 2500 vagy 10000?[5]

[3] Kenguru matematika verseny, 2007, 11-12. osztály, 7. feladat variálva (nem tesztes feladatként)
[4] KMBK XXXIII. Kalmár László versenye, 2004, 7. osztály, országos feladatsor, 1. feladat
[5] Kenguru matematika verseny, 2003, 7-8. osztály, 11. feladat (nem teszt formájában)

5.7.1. Megoldás

Vegyük észre, hogy ha egy szám k darab nullára végződik, akkor 10^k osztja a számot. Azt kell tehát megtudnunk, melyik szám 768-szorosát osztja a legnagyobb 10-hatvány.

$768 = 2^8 \cdot 3$

$7500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^4$

$5000 = 2^3 \cdot 5^4$

$3125 = 5^4$

$2500 = 2^2 \cdot 5^4$

$10000 = 2^4 \cdot 5^4$

Mivel a 3125 prímtényezős felbontásában van a legnagyobb hatványon az 5, ezért a $768 \cdot 3125$-t osztani fogja a 10^5, míg a többi szorzatot nem. Ezek szerint a $768 \cdot 3125$ végződik a legtöbb nullára.

5.8. Feladat

Az a, b és c számjegyek, $a \neq 0$. Mutassuk meg, hogy az $\overline{abcabc}$ alakú hatjegyű tízes számrendszerbeli számok mind oszthatóak 77-tel.[6]

5.8.1. Megoldás

Megoldása teljesen analóg a 5.6. feladat megoldásával: $1001 \mid \overline{abcabc}$, $1001 = 13 \cdot 77$.

Érdekesség

5.9. Feladat

A $26 \cdot 93$ szorzat különleges. Ha a szorzótényezőkön belül a számjegyeket felcseréljük, akkor a $62 \cdot 39$ szorzatot kapjuk, amelynek értéke meglepő módon megegyezik az eredetiével, $26 \cdot 93 = 62 \cdot 39$.
Mi a „titka” ezeknek a számoknak?
Keress más ilyen szorzatokat!

[6] KMBK XXXIII. Kalmár László versenye, 2004, 7. osztály, országos feladatsor, 1. feladat variációja

5.9.1. Megoldás

$26 \cdot 93 = 62 \cdot 39$ Általánosan felírva: $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{ba} \cdot \overline{dc}$. Ezt kifejtve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(10a + b) \cdot (10c + d) &= (10b + a) \cdot (10d + c)\\ 100ac + 10bc + 10ad + bd &= 100bd + 10ad + 10bc + ac\\ 99ac &= 99bd\\ ac &= bd\end{aligned}$$

Tehát a fenti szorzatban szereplő számok „titka” az, hogy a tízesek helyén álló számok szorzata $(2 \cdot 9)$ megegyezik az egyesek helyén álló számok szorzatával $(6 \cdot 3)$. Vagyis minden olyan $\overline{ab}$ és $\overline{cd}$ számpárra, melyekre igaz, hogy $ac = bd$, teljesül, hogy $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{ba} \cdot \overline{dc}$. További ilyen számpárok: $32 \cdot 46 (= 23 \cdot 64)$; $21 \cdot 36 (= 12 \cdot 63)$; stb.

6. fejezet

Bizonyítási módszerek

Ezen a szakköri órán a különböző bizonyítási módszerekkel ismerkedünk meg számelméleti példákon keresztül. A bizonyítási módszerek tanítása mint a matematikai gondolkodásmód elsajátításának segítése igen fontos teendő annak ellenére, hogy a bizonyítási módszerek alkalmazása csak az emelt szintű érettségin követelmény.
Az alábbi bizonyítástípusok alkalmazására kerül sor a szakkör folyamán:

- ellenpélda keresése,
- direkt bizonyítás (szorzattá bontás segítségével),
- skatulya elv,
- indirekt bizonyítás,
- teljes indukció.

Az ellenpélda keresés, mint bizonyítási módszer a bevezető sudoku megbeszélése kapcsán is előkerül, ezért ezen az órán ezzel már nem foglalkozunk. A többi módszert példák segítségével lépésenként építjük fel a tanulók ötletei alapján, tanári irányítással.

Feladatok és megoldások

6.1. Feladat

Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges, 5-nél nagyobb p prímszámra 360 osztója $(p^4 - 5p^2 + 4)$-nek.[1]

6.1.1. Megoldás

Bontsuk szorzattá a fenti kifejezést, mivel ez egy másodfokúra visszavezethető negyedfokú polinom.

$$p^4 - 5p^2 + 4 = (p^2 - 1)(p^2 - 4) = (p - 1)(p + 1)(p - 2)(p + 2)$$

Rendezzük nagyság szerinti sorba a szorzótényezőket: $(p - 2)(p - 1)(p + 1)(p + 2)$. Ha p is szerepelne a fenti szorzatban, akkor 5 egymást követő szám lenne:

$$(p - 2)(p - 1)p(p + 1)(p + 2)$$

Nézzük meg, milyen oszthatóságoknak kell teljesülnie, hogy osztható legyen 360-nal a kifejezés. Ehhez bontsuk a 360-at páronként relatív prím szorzótényezőkre:

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Mivel p-vel együtt öt egymást követő számot kaptunk, ezért az öt szám valamelyike mindenképpen osztható lesz 5-tel. Mivel $p > 5$ prím, ezért a másik négyből kerül ki az 5-tel osztható, azaz a keresett kifejezés 5-tel biztosan osztható lesz. Vizsgáljuk a 9-es oszthatóságot. Ismét induljunk ki 5 egymást követő számból. Mivel $p \neq 3$ és prím, így a következő két eset állhat fenn: $p - 2$ és $p + 1$ osztható 3-mal, vagy pedig $p - 1$ és $p + 2$. Összességében mindenképpen lesz két darab 3-mal osztható szám, azaz a kifejezést osztani fogja a 9. Végül a 8-as oszthatóságot kell megvizsgálnunk. Tudjuk, hogy p biztosan páratlan prím, ezért $p - 1$ és $p + 1$ páros számok. Sőt, mivel egymást követő páros számok, ezért egyikük 4-gyel is osztható. Ezért szorzatuk — és így az egész kifejezés is — osztható lesz 8-cal. A $p^4 - 5p^2 + 4$ kifejezés osztható 8-cal, 9-cel és 5-tel is, így 360-nal is.

[1] KöMaL 1988. januári szám, 29. oldal, C.127-es feladat (kitűzte: Tamán Ildikó, Jászberény), valamint más szövegezéssel megjelent az OKTV 2010/11, 1. kategória, 1. fordulójában is

6.2. Feladat

Bizonyítsuk be, hogy hét négyzetszám között mindig van kettő, melyek különbsége osztható 10-zel.[2]

6.2.1. Megoldás

Nézzük a négyzetszámok 10-zel vett maradékát, azaz az utolsó számjegyét.

n 10-es maradéka	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2 10-es maradéka	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

A táblázatból könnyen leolvasható, hogy a négyzetszámok 10-zel osztva csak a következő maradékok valamelyikét adhatják: 0, 1, 4, 5, 6, 9. Ez 6 különböző lehetőség, azaz a maradékok alapján skatulyákba sorolhatjuk a négyzetszámokat. Mivel összesen hét négyzetszámunk van, és mindegyiket be kell raknunk a 6 skatulya valamelyikébe, így biztosan lesz olyan skatulya, amiben 2 szám szerepel. Ezek különbsége viszont osztható lesz 10-zel. Ezzel bizonyítottuk az állítást.

6.3. Feladat

Igazoljuk a következő oszthatóságot:

$$17 \mid 6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}, n = 1, 2, \ldots$$

6.3.1. Megoldás

Próbáljuk ki $n = 1$-re:

$$6^{2\cdot 1} + 19^1 - 2^{1+1} = 6^2 + 19 - 2^2 = 51.$$

Ezután tegyük fel, hogy $n = k$-ig teljesül az oszthatóság: $17 \mid 6^{2k} + 19^k - 2^{k+1}$. Ez az indukciós feltételünk.

Be kell látnunk, hogy $k + 1$-re is igaz. Érdemes úgy alakítani a kitevőket, hogy az $n = k$ eset kitevőin szerepeljenek a hatványok:

$$6^{2(k+1)} + 19^{k+1} - 2^{(k+1)+1} = 6^{2k+2} + 19^{k+1} - 2^{k+2} = 36 \cdot 6^{2k} + 19 \cdot 19^k - 2 \cdot 2^{k+1}.$$

[2] Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből, Typotex Kiadó, Budapest, 2003, 138. o., 1596. feladat

Próbáljuk visszavezetni k-ra, azaz alkalmazzunk az indukciós feltételt. Mivel a 6^{2k} előtt 36 szerepel szorzóként, ezért írjuk fel a fenti $n = k$ eset 36-szorosát. $36 \cdot 6^{2k} + 36 \cdot 19^k - 36 \cdot 2^{k+1}$ biztosan osztható 17-tel az indukciós feltétel miatt. Vonjuk ki ebből az $n = k + 1$-re kapott kifejezést:

$$(36 \cdot 6^{2k} + 36 \cdot 19^k - 36 \cdot 2^{k+1}) - (36 \cdot 6^{2k} + 19 \cdot 19^k - 2 \cdot 2^{k+1}) =$$

$$36 \cdot 6^{2k} + 36 \cdot 19^k - 36 \cdot 2^{k+1} - 36 \cdot 6^{2k} - 19 \cdot 19^k + 2 \cdot 2^{k+1} =$$

$$17 \cdot 19^k + 34 \cdot 2^{k+1} = 17 \cdot (19^k + 2 \cdot 2^{k+1}).$$

A különbség szintén osztható 17-tel, ezért a $k + 1$-es esetnek is oszthatónak kell lennie 17-tel az oszthatóság tulajdonságai miatt.
Ezzel bizonyítottuk az állítást.

Megjegyzés:

Érdemes $n = 0$-ra külön megvizsgálni, mivel 0-ra könnyű kiszámolni az értékeket és sok esetben már ekkor is érvényesül a keresett oszthatóság:

$$6^{2 \cdot 0} + 19^0 - 2^{0+1} = 6^0 + 19^0 - 2^1 = 1 + 1 - 2 = 0$$

. Mivel a 0 minden számmal osztható, ezért 17-tel is, tehát $n = 0$ -ra is igaz az állítás. Az ilyen jellegű feladatoknál gyakran előfordul, hogy 0-tól kezdődik az n értékek felsorolása, vagy akár úgy is szövegezhetnek egy hasonló feladatot, hogy éppen arra kérdeznek rá, hogy milyen n értékekre lesz igaz az oszthatóság. Ha megmutatjuk a tanulóknak, hogy az $n = 0$ eset is megvizsgálandó, akkor a hasonló feladatokban nem fogják kifelejteni ezt az esetet.

6.3.2. Megoldás

A feladat megoldható az $a - b \mid a^n - b^n$ oszthatóság alapján is.

$$6^{2n} + 19^n - 2^{n+1} = 36^n + 19^n - 2 \cdot 2^n = 36^n - 2^n + 19^n - 2^n.$$

Alkalmazzuk a fenti azonosságot az első két tag és az utolsó két tag esetében. $36 - 2 \mid 36^n - 2^n$, valamint $19 - 2 \mid 19^n - 2^n$, tehát $36^n - 2^n = 34k$ és $19^n - 2^n = 17l$, ahol k és $l \in \mathbb{Z}$. Így $6^{2n} + 19^n - 2^{n^1} = 36^n - 2^n + 19^n - 2^n = 34k + 17l = 17(2k + l)$, ami osztható 17-tel.

6.4. Feladat

Egy 1001 lakosú városban megalakítják az összes 13 tagú klubot. Minden egyes klub elnököt választ tagjai közül. Bizonyítsuk be, hogy vannak a városnak olyan lakói, akik különböző számú klubnak az elnökei.[3]

6.4.1. Megoldás

Tegyük fel, hogy a feladat állítása nem igaz, tehát mindenki ugyanannyi, azaz k darab klubnak elnöke, ahol k nemnegatív egész. Ekkor a klubok száma egyrészt éppen $1001k$, hiszen a városnak 1001 lakója van és minden klubot pontosan egy elnök vezet, másrészt a klubok száma $\binom{1001}{13}$, hiszen a városban minden lehetséges 13 tagú klubot megalakítottak. Ezek szerint $\binom{1001}{13} = 1001k = 13 \cdot 77k$, vagyis a 13 osztója a $\binom{1001}{13}$-nak. Ebből adódóan a 13 osztója a
$12! \cdot \binom{1001}{13} = 12! \cdot \frac{1001 \cdot 1000 \cdot \dots \cdot 989}{13!} = \frac{1001 \cdot 1000 \cdot \dots \cdot 989}{13} = 77 \cdot 1000 \cdot \dots \cdot 989$
szorzatnak is. Mivel a 13 prímszám, ezért osztója a 77, 1000,. . . , 989 számok valamelyikének, ami viszont nem igaz, hiszen $77 = 13 \cdot 5 + 12$, valamint

$$13 \cdot 77 = 1001 > 1000 > 999 > \dots > 989 > 988 = 13 \cdot 76.$$

Ellentmondásra jutottunk, ami az jelenti, hogy az általunk feltett állítás hamis, így a feladatban kitűzött állítást bebizonyítottuk.

A feladat általánosítható az alábbi módon:
Legyen a pozitív egész n szám osztható a p prímszámmal, de ne legyen osztható ennek négyzetével p^2-tel. Ekkor, ha az n-lakosú városban megalakítják az összes p-tagú klubot, és minden egyes klub elnököt választ tagjai közül, akkor vannak a városnak olyan lakói, akik különböző számú klubnak az elnökei.

[3]KöMaL 1990. márciusi szám, 126. oldal, GY.2616-os feladat (megoldása: KöMaL 1991. januári szám 20. o.)

Házi feladatok

6.5. Feladat

Legyen $p > 3$ prímszám. Mutassuk meg, hogy $3 \mid p^2 - 1$, valamint $24 \mid p^2 - 1$.[4]

6.5.1. Megoldás

A $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ felbontás alapján $(p-1)p(p+1)$ három egymást követő szám szorzata, így valamelyik tényező biztosan osztható lesz 3-mal. Mivel $p > 3$ prímszám, ezért $p-1$ vagy $p+1$ lesz osztható 3-mal, tehát a szorzatukat is osztania kell a 3-nak.

A 24-gyel való oszthatóságnál is induljunk ki a $(p-1)p(p+1)$ szorzatból. Mivel $p > 3$, ezért p páratlan prím, tehát $p-1$ és $p+1$ egymást követő páros számok, ezért egyikük néggyel is osztható. Így tehát a szorzat osztható lesz 8-cal. Az előző bizonyítás miatt 3-mal is osztható, tehát 24 is osztja.

6.6. Feladat

Mutassuk meg, hogy 5 egész szám között mindig van három, melyek összege osztható 3-mal.[5]

6.6.1. Megoldás

Egy szám 3-mal osztva a $0, 1$ vagy 2 maradékokat adhatja, azaz ebbe a három skatulyába sorolhatjuk be őket. Ha az öt szám között van három, amik azonos maradékot adnak, akkor ezek összege osztható 3-mal. Ha nincs három ilyen, akkor viszont minden maradék előfordul egyszer, tehát kiválasztunk a három skatulyából 1—1 elemet, és ezek összege osztható lesz 3-mal.

[4] Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből, Typotex Kiadó, Budapest, 2003, 138. o., 1605. feladat

[5] Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből, Typotex Kiadó, Budapest, 2003, 34. o., 343. feladat

6.7. Feladat

Igaz-e, hogy $4 \mid 3 \cdot 17^n + 9^{n+1}$ minden n nemnegatív egész számra?

6.7.1. Megoldás

Teljes indukcióval bizonyítunk: $n = 0$-ra $3 \cdot 17^0 + 9^{0+1} = 3 + 9 = 12$, ami tényleg osztható 4-gyel.
Tegyük fel, hogy $n = k$-ig teljesül az állítás, azaz $4 \mid 3 \cdot 17^k + 9^{k+1}$, minden k-ra, ami nem nagyobb n-nél. Be kell látnunk, hogy $n = k + 1$-re is igaz az állítás.

$$3 \cdot 17^{k+1} + 9^{k+2} = 3 \cdot 17 \cdot 17^k + 9 \cdot 9^{k+1} = 51 \cdot 17^k + 9 \cdot 9^{k+1}.$$

Vezessük vissza az $n = k$ esetre a feladatot, például az alábbi módon

$$51 \cdot 17^k + 9 \cdot 9^{k+1} = 9(3 \cdot 17^k + 9^{k+1}) + 24 \cdot 17^k.$$

A fenti egyenlőség jobb oldala osztható 4-gyel, hiszen az első tag az indukciós feltétel miatt, míg a második tagban a 24-es szorzótényező osztható 4-gyel, akkor viszont a bal oldal is osztható 4-gyel. Ezzel beláttuk az állítást, tehát minden nemnegatív egészre igaz az állítás.

6.7.2. Megoldás

Hasonlóan a 6.3. feladat megoldásához itt is alkalmazható az $a - b \mid a^n - b^n$ azonosság. $4 \mid 3 \cdot 17^n + 9^{n+1}$ a bizonyítandó állítás. $3 \cdot 17^n + 9^{n+1} = 4 \cdot 17^n - 1 \cdot 17^n + 9 \cdot 9^n = 4 \cdot 17^n + 8 \cdot 9^n + 9^n - 17^n$ Az első két tag osztható 4-gyel, míg az utolsó két tagra alkalmazható a fenti azonosság: $9^n - 17^n$ osztható $9 - 17$-tel, azaz -8-cal, ami osztható 4-gyel. Így az egész kifejezés osztható 4-gyel.

6.8. Feladat

Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok prímszám létezik.[6]

[6] Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből, Typotex Kiadó, Budapest, 2003, 36. o., 368. feladat, bizonyítás alapja: 1. megoldás

6.8.1. Megoldás

Indirekt bizonyítással lássuk be. Tegyük fel, hogy véges sok prímszám van: $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Konstruálunk egy számot, ami ezek közül egyikkel sem osztható, az alábbi módon: Vegyük az összes prímszám szorzatát, $K = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n$, ami minden prímszámmal osztható. Adjunk hozzá egy természetes számot K-hoz úgy, hogy ne ossza semelyik p_i ismert prímszám. Már csak azt kell kitalálnunk melyik számot kell hozzáadnunk. Ha bármelyik p_i prímet adjuk hozzá a véges sok közül, akkor az a prímszám osztani fogja $K+p_i$ számot. Ha bármelyik m összetett számot adjuk hozzá, akkor $(K; m) > 1$ biztosan osztani fogja a $K + m$ számot. Ha az 1-et adjuk hozzá, akkor biztosak lehetünk benne, hogy a fenti prímek nem osztják $K + 1$-et, tehát $K + 1$-nek biztosan van olyan prímosztója — akár önmaga — ami nem szerepel a felsorolt prímszámaink között. Ugyanis $p_i \mid K$ minden i természetes számra így, ha létezik olyan p_i prímszám a felsoroltak között, ami osztja $K + 1$-et, akkor a $K + 1 - K$-t, azaz 1-et is osztania kellene, ami ellentmondásra vezet, hiszen az egyet csak önmaga osztja a pozitív egészek körében.
Az indirekt feltevésünk hamis, tehát az eredeti állítás igaz.

7. fejezet

Prímszám vagy összetett?

A szakköri órán azzal foglalkozunk, miként láthatjuk be egy számról, hogy prím vagy összetett. Különböző bizonyítási módszereket használunk, olyanok is előkerülnek, amelyeket már a korábbiakban is alkalmaztunk (például teljes indukció vagy ellenpélda-keresés). Ezenkívül előkerülnek olyan polinomok is, amelyek egy darabig prímszámokat adnak eredményül, ám egy bizonyos n érték után elromlik ez a „képlet”. Végezetül együtt megfogalmazzuk, hogy miért nem lehet létrehozni olyan polinomot, ami minden természetes számra prímet ad.

Feladatok és megoldások

7.1. Feladat

Mutassuk meg, hogy $2^{10} + 5^{12}$ szám összetett szám.[1]

7.1.1. Megoldás

A középiskolában a prímszámot az alábbi módon definiáljuk:
Prímszámnak vagy törzsszámnak nevezzük a természetes számot, ha pontosan két osztója van a természetes számok között. (Az egy és önmaga.)
Összetett számnak nevezzük azt a nullától különböző természetes számot, amely-

[1]Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből, Typotex Kiadó, Budapest, 2003, 37. o., 376. feladat

nek kettőnél több természetes szám osztója van.[2]
(Megjegyzés: A felsőbb matematikában ez a definíció a felbonthatatlan szám fogalmát jelöli, míg a „prímnek lenn” kifejezés egy oszthatósági tulajdonság által definiált.)
Azt kell megmutatnunk, hogy ennek a számnak van valódi osztója, azaz 1-en és önmagán kívül más természetes számmal is osztható.
Mivel mindkét tagban a kitevő páros, így négyzetekként kezelhetjük őket: $2^{10} = (2^5)^2$, illetve $5^{12} = (5^6)^2$.
Emeljük négyzetre a $2^5 + 5^6$ kifejezést:

$$(2^5 + 5^6)^2 = (2^5)^2 + 2 \cdot 2^5 \cdot 5^6 + (5^6)^2 = 2^{10} + 2^6 \cdot 5^6 + 5^{12}.$$

Fejezzük ki a fent kapott kifejezésből az általunk keresettet az alábbi módon:

$$2^{10} + 5^{12} = (2^5 + 5^6)^2 - 2^6 \cdot 5^6.$$

Vegyük észre, hogy az egyenlőség jobb oldalán egy nevezetes azonosság látható, méghozzá a két tag négyzetének különbségére vonatkozó. Ez alapján szorzattá bontható a jobb oldali kifejezés:

$$2^{10} + 5^{12} = (2^5 + 5^6)^2 - 2^6 \cdot 5^6 = \left[(2^5 + 2^6) - 2^3 \cdot 5^3\right] \cdot \left[(2^5 + 2^6) + 2^3 \cdot 5^3\right].$$

Végeredményül kaptunk egy szorzatot, amely osztja a keresett számot és egyik tényező sem maga a szám. Ez könnyen látható abból, hogy nagyságrendileg sokkal nagyobb a bal oldali kifejezés, mint a jobb oldalon állók bármelyike.
Így $2^{10} + 5^{12}$ összetett szám.

7.2. Feladat

Mutassuk meg, hogy $19 \cdot 8^n + 17$ az n minden nemnegatív egész értékére összetett szám.[3]

[2] A két definíció forrása: Hajdu Sándor - Czeglédy István - Hajdu Sándor Zoltán - Kovács András: Matekatika 9. Gondolkodni jó!, Műszaki Kiadó, Budapest, 2009, 199. oldal

[3] Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből, Typotex Kiadó, Budapest, 2003, 37. o., 382. feladat

7.2.1. Megoldás

Vizsgáljuk meg először néhány n értékre a kifejezést, hogy megsejtsük, mivel osztható a kifejezés.(Mivel nehéz kialakítani sejtésünket, ezért érdemes több értékre is megnézni, milyen oszthatóságot mutat a kifejezés.)
$n = 0$-ra $19 \cdot 8^0 + 17 = 19 + 17 = 36$, ami osztható 3-mal.
$n = 1$-re $19 \cdot 8^1 + 17 = 169 = 13^2$, ami osztható 13-mal.
$n = 2$-re $19 \cdot 8^2 + 17 = 1233 = 3^2 \cdot 137$, ami osztható 3-mal.
$n = 3$-ra $19 \cdot 8^3 + 17 = 9745 = 5 \cdot 1949$, ami osztható 5-tel.
$n = 4$-re $19 \cdot 8^4 + 17 = 77841 = 3^4 \cdot 31^2$, ami osztható 3-mal.
$n = 5$-re $19 \cdot 8^5 + 17 = 622609 = 13 \cdot 47893$, ami osztható 13-mal.
$n = 6$-ra $19 \cdot 8^6 + 17 = 4980753$, ami osztható 3-mal.
$n = 7$-re $19 \cdot 8^7 + 17 = 39845905$, ami osztható 5-tel.
A fentiek alapján a sejtésünk a következő:
$19 \cdot 8^n + 17$ osztható

- 3-mal, ha n páros;
- 13-mal, ha n páratlan és $4k + 1$ alakú;
- 5-tel, ha n páratlan és $4k + 3$ alakú.

Értelemszerűen a bizonyítás is három különböző esetből áll.

1. eset: n páros

$$19 \cdot 8^{2k} + 17 = 19 \cdot (8^2)^k + 17 = 19 \cdot 64^k + 17$$

Vizsgáljuk a kifejezésben a tagok 3-as maradékát, hiszen a műveleteket a tagok maradékaival végezve megkapjuk, milyen maradékot ad a szám 3-mal osztva.

Az adott szám	19	64	64^k	17	$19 \cdot 64^k + 17$
A szám 3-as maradéka	1	1	1^k	-1	$1 \cdot 1^k + (-1) = 0$

Ha n páros, akkor a fentiek értelmében 3-mal osztható.

2. eset: Ha n páratlan és $4k + 1$ alakú, akkor 13 osztja.

$$19 \cdot 8^{4k+1} + 17 = 19 \cdot 8 \cdot (8^4)^k + 17 = 19 \cdot 8 \cdot 4096^k + 17$$

Vizsgáljuk az előző esethez hasonlóan a mardékokat most 13-mal osztva:

Az adott szám	19	8	4096	4096^k	17	$19 \cdot 8 \cdot 4096^k + 17$
A szám 13-as maradéka	6	8	1	1^k	4	$6 \cdot 8 \cdot 1^k + 4 = 52 = 13 \cdot 4$

Mivel a szám maradéka osztható 13-mal, ezért a szám is osztható lesz 13-mal, ha n teljesíti a feltételeket.

3. eset: Ha n páratlan és $4k + 3$ alakú, akkor 5 osztja.

$$19 \cdot 8^{4k+3} + 17 = 19 \cdot 512 \cdot (8^4)^k + 17 = 19 \cdot 512 \cdot 4096^k + 17$$

A kifejezés maradéka 5-tel osztva:

Az adott szám	19	512	4096	4096^k	17	$19 \cdot 512 \cdot 4096^k + 17$
A szám 5-ös maradéka	4	2	1	1^k	2	$4 \cdot 2 \cdot 1^k + 2 = 10 = 5 \cdot 2$

Mivel a szám maradéka mindig osztható 5-tel, ezért a szám is osztható lesz 5-tel, ha n teljesíti a feltételeket.

Ezzel beláttuk sejtésünket, mely szerint $19 \cdot 8^n + 17$ az n minden nemnegatív egész értékére összetett szám, méghozzá az alábbi oszthatóságok teljesülnek:

- ha n páros, akkor a számot a 3 osztja;
- ha n páratlan és $4k + 1$ alakú, akkor a 13-as oszthatóság teljesül;
- illetve n páratlan és $4k + 3$ alakú esetben, a szám osztható 5-tel.

7.3. Feladat

Valaki kipróbálta hogy $n^2 + n + 41$, $n = 1, 2, \dots, 30$-ra prímszám. Most azt állítja, hogy $n^2 + n + 41$ minden természetes számra prím. Igaza van-e?[4]

[4]Bartha - Bogdán - Csúri - Duró - Gyapjas - Kántor - Pintér: Matematikai feladatgyűjtemény I. a középiskolák tanulói számára, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 47. oldal, II. felezet, 90. feladat

7.3.1. Megoldás

Mivel a 41 prímszám, ezért a szám akkor nem lesz prím, ha például 41 osztja $n^2 + n + 41$-et. Nyilvánvaló, hogy 41 osztja a fenti polinomot $(41^2 + 41 + 41)$.

Megjegyzés: Gondoljuk meg, hogy találhatunk-e olyan polinomot, amely minden természetes számot behelyettesítve prímet ad!

7.4. Feladat

Határozzuk meg azokat a prímeket, amelyekre $4p^2 + 1$ és $6p^2 + 1$ is prímszám.[5]

7.4.1. Megoldás

Vizsgáljuk meg néhány p értékre, hogy kialakuljon bennünk egy képzet.
$p = 2$-re
$4 \cdot 2^2 + 1 = 17$ prímszám és $6 \cdot 2^2 + 1 = 25$ összetett szám
$p = 3$-ra
$4 \cdot 3^2 + 1 = 37$ prímszám és $6 \cdot 3^2 + 1 = 55$ összetett szám
$p = 5$-re
$4 \cdot 5^2 + 1 = 101$ prímszám és $6 \cdot 5^2 + 1 = 151$ prímszám
$p = 7$-re
$4 \cdot 7^2 + 1 = 197$ prímszám és $6 \cdot 7^2 + 1 = 295$ összetett szám
$p = 11$-re
$4 \cdot 11^2 + 1 = 485$ összetett szám és $6 \cdot 11^2 + 1 = 727$ prímszám
Ezek alapján az vehető észre, hogy $4p^2 + 1$ és $6p^2 + 1$ közül az egyik általában osztható 5-tel, kivéve a $p = 5$ esetet, ezért vizsgáljuk a kifejezés 5-ös maradékát. Tudjuk, hogy 5-tel osztva a 4 maradéka -1, míg 6-nak 1.

p	0	1	2	3	4
$4p^2 + 1$	$-1 \cdot 0^2 + 1$ $= 1$	$-1 \cdot 1^2 + 1$ $= 0$	$-1 \cdot 2^2 + 1$ $= 1$	$-1 \cdot 3^2 + 1$ $\to 2$	$-1 \cdot (-1)^2 + 1$ $= 0$
$6p^2 + 1$	$1 \cdot 0^2 + 1$ $= 1$	$1 \cdot 1^2 + 1$ $= 2$	$1 \cdot 2^2 + 10$ $\to 0$	$1 \cdot 3^2 + 1$ $\to 0$	$1 \cdot (-1)^2 + 1$ $= 2$

[5]Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből, Typotex Kiadó, Budapest, 2003, 35. o., 353. feladat önálló megoldással.

A fenti táblázatból jól látható, hogy akkor lehet mindkét 5-nél nagyobb kifejezés egyszerre prím, ha 5-tel osztva mindkettő 0-tól különböző maradékot ad. Ez egyetlen esetben fordul elő, ha p osztható 5-tel. Mivel csak egy 5-tel osztható prímszám van, ezért csak az 5 a megoldás, ami valóban jó.

7.4.2. Megoldás

Egy másik megoldási lehetőség a szorzattá bontás módszere, melyet korábban már említettünk. Ebben az esetben viszont „meg kell dolgoznunk” azért, hogy szorzattá tudjunk bontani. Sejtésünk alapján 5-tel mindig osztható, ezt kell bizonyítani a szorzatalak segítségével.
Tudjuk, hogy ha egy szám maradéka n-nel osztva k, akkor ha ebből a számból kivonunk egy n-nel osztható számot, akkor a különbség maradéka is k lesz.
Így tehát $4p^2 + 1$ maradéka megegyezik $1 - p^2$ maradékával.
Hasonlóképpen $6p^2 + 1$ maradéka ugyanaz, mint $p^2 - 4$-é.
Az, hogy $1 - p^2$ és $p^2 - 4$ közül valamelyik osztható 5-tel, a prímtulajdonság miatt ekvivalens azzal, hogy szorzatuk osztható 5-tel:

$$(1 - p^2)(p^2 - 4) = (1 - p)(1 + p)(p - 2)(p + 2) = (p - 2)(1 - p)(p + 1)(p + 2)$$

Ha $1 - p$ helyett $p - 1$ szerepelne, akkor ez p-vel kiegészítve öt egymást követő szám szorzata lenne, ezért emeljünk ki $1 - p$-ből -1-et, hiszen ez az oszthatóságon nem változtat.
Ekkor $(p - 2)(p - 1)(p + 1)(p + 2)$ biztosan osztható lesz 5-tel, mivel $(p - 2)(1 - p)p(p + 1)(p + 2)$ öt egymást követő szám szorzata, amely osztható öttel, és ha $p \neq 5$, akkor valamelyik másik tényező biztosan osztható 5-tel.
Tehát csak $p = 5$ esetben nem osztható 5-tel, így csak ebben az esetben lehet prímszám $4p^2 + 1$ és $6p^2 + 1$ is. Valóban prímek is.

Házi feladatok

7.5. Feladat

Igaz-e, hogy az alábbi polinomok minden természetes számra prímszámot adnak?[6]

1. $n^2 - 5n + 47$
2. $3n^2 - 3n + 23$

7.5.1. Megoldás

A 7.3.1. megoldáshoz hasonlóan kell eljárnunk. Az 1. esetben $n^2 - 5n + 47$ biztosan osztható lesz 47-tel, ha n helyére 47-et helyettesítünk. Ekkor ugyanis minden tag osztható lesz 47-tel, tehát az összeg is. A 2. esetben $3n^2 - 3n + 23$-at vizsgáljuk meg. $n = 23$-ra biztosan osztható ez a szám 23-mal, azaz a ebben az esetben a kifejezés nem lesz prímszám.

7.6. Feladat

Oldjuk meg a 7.1. feladatot általánosan: Bizonyítsuk be, hogy $2^{2k} + 5^{2l}$ sohasem prím, ha k páratlan és l páros pozitív egészek.

7.6.1. Megoldás

A 7.1.1. megoldás gondolatmenete alapján emeljük négyzetre $2^k + 5^l$-t, hiszen ennek négyzetében megjelennek a keresett tagok:

$$(2^k + 5^l)^2 = (2^k)^2 + 2 \cdot 2^k \cdot 5^l + (5^l)^2 = 2^{2k} + 2^{k+1} \cdot 5^l + 5^{2l}$$

Ebből azt kapjuk, hogy $2^{2k} + 5^{2l} = (2^k + 5^l)^2 - 2^{k+1} \cdot 5^l$
Mivel $k+1$ és l is páros számok, így ebben az esetben is használhatjuk a két négyzet különbségére vonatkozó nevezetes azonosságot.

$$2^{2k} + 5^{2l} = (2^k + 5^l)^2 - 2^{k+1} \cdot 5^l = \left[(2^k + 5^l) - 2^{\frac{k+1}{2}} \cdot 5^{\frac{l}{2}}\right] \cdot \left[(2^k + 5^l) - 2^{\frac{k+1}{2}} \cdot 5^{\frac{l}{2}}\right]$$

[6]Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből, Typotex Kiadó, Budapest, 2003, 35. o., 358. feladat variációja

Itt minden kitevő egész, tehát az egész számok körében találtunk két olyan számot (a jobb oldalon szereplőket), amelyek osztják a keresett számot, de nem triviális osztók, azaz egyikük sem maga a szám, ami a nagyságrendjükből következik. A keresett szám tényleg összetett bármilyen k páratlan és l páros szám esetén.

7.7. Feladat

Adjuk meg az összes olyan p prímszámot, amelyekre $8p^2 + 1$ is prímszám.[7]

7.7.1. Megoldás

Vizsgáljuk meg az első pár prímszámot, hogy megsejtsük az eredményt.
$p = 2$-re
$8 \cdot 2^2 + 1 = 33 = 3 \cdot 11$ összetett
$p = 3$-ra
$8 \cdot 3^2 + 1 = 73$ prím
$p = 5$-re
$8 \cdot 5^2 + 1 = 201 = 3 \cdot 67$ összetett
$p = 7$-re
$8 \cdot 7^2 + 1 = 393 = 3 \cdot 121$ összetett
Ezek alapján az a sejtés fogalmazható meg, hogy $p = 3$ esetén prím, egyébként pedig mindig osztható 3-mal. Most bizonyítsuk sejtésünket!
Egy prímszám 3-mal osztva 0, 1 vagy 2 maradékot adhat. Vizsgáljuk meg ezekben az esetekben milyen maradékot ad $8p^2 + 1$.

p maradéka	0	1	2
$8p^2 + 1$ maradéka	$8 \cdot 0^2 + 1 = 1$	$8 \cdot 1^2 + 1 = 9 \rightarrow 0$	$8 \cdot 2^2 + 1 = 33 \rightarrow 0$

Jól látható, $8p^2 + 1$ hogy csak akkor nem osztható 3-mal, ha p osztható 3-mal. Mivel egyetlen olyan prímszám van, ami osztható 3-mal, ezért csak $p = 3$ -ra lesz prímszám.

[7] Bartha - Bogdán - Csúri - Duró - Gyapjas - Kántor - Pintér: Matematikai feladatgyűjtemény I. a középiskolák tanulói számára, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 47. oldal, II. felezet, 89. feladat saját megoldással

8. fejezet

Szakköri tapasztalatok

A szakkörtervezet részletesen kidolgozott órái közül hármat megtartottam a Petrik Lajos Két Tanítási Nyelvű Vegyészeti, Környezetvédelmi és Informatikai Szakközépiskolában, ahol tanítom a kéttannyelvű osztályokat. Ebben az iskolában a két tanítási nyelvű osztályban 10. évfolyamon tanulják az oszthatóság témakörét, míg a többi osztályban 9. évfolyamon.

Mivel nem akartam egyik osztályomnak sem kedvezni, ezért minden évfolyamról hívtam tanulókat. Ennek eredménye az volt, hogy minden szakköri órán vegyes korcsoportban dolgoztunk. Elég népszerű volt a szakkör, hiszen a kedvezőtlen csütörtök 9. órai időpont ellenére mindig volt legalább 5 résztvevő (9.-12. évfolyamig). A szakköri órák 45 percesek voltak.

A bevezető sudoku feladványt (4. melléklet) körülbelül 17 gyerek oldotta meg, bár többen közülük végül mégsem tudtak járni a szakkörre egyéb elfoglaltságaik miatt. Jellemzően a feladatok $\frac{2}{3}$-át sikerült teljesíteniük hibátlanul azoknak, akiknek nem volt friss az oszthatósággal kapcsolatos tudásuk. Ez részben köszönhető annak, hogy támaszkodhattak korábbi tanulmányaikra, részben pedig annak, hogy próbálgatás alapján több részfeladat is megoldható volt. A próbálgatás útján megszerzett intuícióik bizonyítását is elvégeztük az első szakköri alkalmon. Ezt követte a számjegyes feladatok köré épülő feladatsor. Ezt két alkalommal sikerült elvégeznünk, mert nagyon sok fejtörést okozott a feladatsor 5.2. feladata, melyben a nullák számát kellett vizsgálni. Még a legtehetségesebb gyerekeknek is gondolt okozott a 31 darab nullás eset megértése. Számomra igen érdekes, hogy ennek ellenére az 5.3. feladatot sokkal könnyebben kitalálták. Az egész feladatsorból a helyi értékes feladatok voltak a diákok kedvencei, hiszen nagyon egyszerűnek tartották az ezekre vonatkozó bizonyításokat.

A következő szakköri órán a bizonyítási módszerekkel foglalkoztunk. Ezt a szakköri órát azért tartottam igen fontosnak, mert az emelt szintű érettségire készülő gyerekek felkészülését is támogatta ez az óra. A skatulya elv vált a tanulók kedvenc bizonyítási módszerévé. Szerintük, ha „észrevesszük, mit kell látni, akkor ez pofon egyszerű”. A szakköri órán megjelent diákok számára egyöntetűen az indirekt bizonyítás módszere tűnt a legnehezebbnek. Nehezen értették meg a logikai csavart - az indirekt feltevést -, bár meg kell jegyezni, hogy logikát még egyikük sem tanult.
Összességében úgy gondolom, hogy sikeres volt a szakkör, főként a figyelemfelkeltés miatt. Többen kérdezték, hogy esetleg jövőre lesz-e matematika szakkör az iskolában. A házi feladatok megoldása még folyamatban van a legtöbb gyereknél, de az eddig visszaérkezett megoldások mind helyesek voltak.
Azok a tanulók, akik valamilyen egyéb elfoglaltságuk, vagy az óra időpontja miatt nem tudtak járni a szakkörre, szintén megkapták a feladatsorokat és nagy örömömre közülük is többen adtak be helyes megoldásokat.

9. fejezet

Egyéb feladatok

Szakdolgozatom ezen részében olyan feladatok találhatók, melyek nem közvetlenül kapcsolódnak a korábbiakhoz. Található közöttük olyan, amely egy részletesen ki nem dolgozott szakköri órán fordulna elő; olyan, amely a matematika más ágán belül közvetve alkalmazza az oszthatóságot a megoldásban; illetve olyan feladat is, melyet gyakorlatomban szorgalmi feladatként adtam fel a diákjaimnak, és hatalmas lelkesedéssel fogadták. Mondjuk úgy, hogy ezek a feladatok szakdolgozatom törzséből kimaradtak, ám mégis fontosnak tartom bemutatni őket.

9.1. Feladat

A következő feladat egy jó példa a számelmélet egyéb területeken való alkalmazására. A feladatot kombinatorika témakörben adtam fel a gyerekeknek matematikaórán:

Feladat. A határállomáson őrségben egyszerre négy katona áll. Hány tagú az őrszolgálati egység, ha 1365-féleképpen lehet a négy őrt kiválasztani?[1]

[1] Dr. Gerőcs László-Orosz Gyula-Paróczay József-Dr. Szászné Simon Judit: MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005, 25. o., 166. feladat

9.1.1. Megoldás

Legyen az őrszolgálati egység száma n. Az összes sorrend (mivel négy különböző embert kell választani, és a választási sorrend nem befolyásolja az őrök személyét) $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = 1365.$
Tehát $1365 \cdot 24$-et négy egymást követő szám szorzatára kell bontanunk. Ehhez vegyük a szám prímtényezős felbontását: $1365 \cdot 24 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$. A prímtényezős felbontás számai közül kerül ki $n, (n-1), (n-2), (n-3)$ valamelyike. Szükségünk van egy nagyságrendi becslésre, hogy gyorsabban megtaláljuk a keresett számokat.
Könnyen látható, hogy $\binom{n}{4}$ kis számok esetén elég kis szám ($n = 12$ esetén is csak 495 az értéke), viszont például $\binom{20}{4} = 4845$ sokkal nagyobb.
Ezért kezdjük a legnagyobb prímszámmal (13), hiszen a kisebb számokra igen kicsi $\binom{n}{4}$ értéke. Vizsgáljuk meg, melyik szorzótényező helyére kerül a 13-as szám:

n értéke	13	14 ($n-1=13$)	15 ($n-2=13$)	16 ($n-3=13$)
$\binom{n}{4}$ értéke	715	1001	1365	1820

Mint a táblázat is mutatja $n = 15$-re kapjuk meg az 1365-öt, tehát az őrszolgálati egysége 15 tagból áll.

A keresett szám megtalálásához egy másik módszer lehet, ha a prímtényezős felbontás segítségével felírjuk a szám osztóit, sőt nem is kell mindet felírnunk, hiszen ha megvizsgáljuk a különböző őrségek számát, láthatjuk, hogy ez kisebb, mint például $\binom{20}{4}$. Így elég csak 20-ig felírni az osztókat, amelyek közül könnyen megtalálható a négy egymást követő szám. 32760 osztói: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 18, 20,... Tehát $n(n-1)(n-2)(n-3) = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$, így $n = 15$ adódik. Az őrség 15 főből áll.

9.2. Feladat

A következő feladat az egyik kedvencem. A feladat megoldása roppant egyszerű, ám mégsem emiatt vált az egyik kedvencemmé. Mikor a számelmélet témakört tanítottam, ezt a feladatot szorgalmi feladatként adtam a gyerekeknek, kíváncsi voltam, ki miként oldja meg. 24 tanulóból 18-an megoldották a feladatot. Azért tartom kifejezetten jónak ezt a feladatot, mert bárki meg tudja oldani, hiszen ha azonnal nem is látja át, próbálkozás útján is rájön egy matematikai tételre.

Feladat. A szultán születésnapján néhány rabot szabadon akar bocsátani. A 100 cellás börtönben 100 börtönőr van. Az 1. őr minden ajtót kinyit. A 2. őr minden 2. ajtót bezár. A 3. őr minden harmadik ajtót kinyit, ha zárva volt, s bezár, ha nyitva volt. Hasonlóan nyit-zár a többi őr is. Mely cellák ajtaja marad nyitva?[2]

9.2.1. Első tanulói megoldás

Nézzük a rab szemszögéből a történetet. Vegyük a 24. cellában ülő rabot. (Akármelyik más cella is megfelelő.) Mely őrök nyúlnak az ő cellája ajtajához? Az 1. kinyitja, a 2. bezárja, 3. kinyitja, 4. bezárja, 6. kinyitja, 8. bezárja, 12. kinyitja és végül a 24. bezárja. Pontosan azok az őrök nyitják-zárják a 24. rab ajtaját, akiknek sorszáma osztja a 24-es számot. Mivel az 1. őr nyitja az ajtókat, ezért azok az ajtók lesznek nyitva, ahova páratlan számú őr megy nyitni vagy zárni. Azaz keressük azokat a számokat, amelyeknek páratlan sok osztójuk van. Minden szám osztóit felírhatjuk osztópáronként. Akkor lesz páratlan sok osztója, ha találhatunk olyan osztópárt, aminél mindkét tényező azonos. Ezek a négyzetszámok. Tehát a nyitva maradó cellák sorszáma: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 és 100.
Ebből következtethetünk az alábbi tételre:
Azok a számok, amelyek osztóinak száma páratlan, pontosan a négyzetszámok.

9.2.2. Második tanulói megoldás

Voltak olyan diákok, akik konkrétan kivágtak papírból 100 ajtót, amelyek egyik oldalára az NY (nyitva), másik oldalára a Z (zárva) betűket írták, majd ezekkel eljátszották a történetet. Mikor megkapták az ajtók számát, a számokból vonták le a következtetést, és jöttek rá a tételre.

[2]Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből, Typotex Kiadó, Budapest, 2003, 21. o., 116. feladat

9.2.3. Harmadik tanulói megoldás

Olyan gyerek is volt (egy lány), aki először visszavezette a problémát egy egyszerűbb feladatra, tehát megnézte, hogy 10 cella és 10 börtönőr esetén mi történik. Az itt szerzett tapasztalatok alapján fogalmazta meg a tételt és tért vissza az eredeti feladathoz.
Az előző megoldások eredményét kapta ő is.

9.3. Feladat

A következő feladat egy OKTV feladat, amely a "Határozzuk meg azokat a számokat" típusú feladatokat felölelő szakköri alkalommal kerülhetne feldolgozásra. A fontos gondolat, ami miatt mindenképp szükségesnek tartom megemlíteni ezt a feladatot az, hogy ha prímszámokkal kapcsolatos állításokat vizsgálunk, sokszor érdemes valamilyen oszthatóság szerint különválasztani a prímszámokat (ezáltal különböző esetekre bontani a feladatmegoldásunkat), mert ez megkönnyíti a megoldást.

Feladat. Határozza meg az összes olyan p, r, s pozitív prímszámot, amelyekre teljesül az $5p^2 + 7r^2 + 2002 = 15s$ egyenlőség![3]

9.3.1. Megoldás

Mivel minden együttható páratlan, viszont 2002 páros szám, ezért érdemes lehet a kifejezést paritás alapján vizsgálni. A megoldást bontsuk különböző esetekre az alapján, hogy p és r páros avagy páratlan prímek.

1. eset: Tegyük fel, hogy p és r páratlan prímszámok.
A feltételből következik, hogy az egyenlőség bal oldalán egy páros szám szerepel, így s páros kell legyen. Mivel egyetlen páros prímszám van, ezért $s = 2$, ekkor a jobb oldalon 30 áll.
Mivel p és r pozitív prímek, így a bal oldali kifejezés 2002-nél biztosan nagyobb, ami nem lehet egyenlő 30-cal. Tehát ebben az esetben nincsen megoldás.

[3]OKTV 2002/2003 Matematika I. kategória, 1. (iskolai) forduló, 6. feladat

2. eset: p és r közül az egyik páros prím, azaz 2.
Tegyük fel, hogy $p = 2$.
$5 \cdot 2^2 + 7r^2 + 2002 = 15s$
$2022 + 7r^2 = 15s$
A jobb oldalon álló kifejezés osztható 3-mal, így az egyenlőség teljesülése végett a bal oldal is osztható 3-mal.
Mivel $2022 = 3 \cdot 674$, ezért $7r^2$-nek is oszthatónak kell lennie 3-mal. A prímtulajdonság miatt $3 \mid 7r^2 \Rightarrow 3 \mid r^2 \Rightarrow 3 \mid r$. Mivel r prímszám, ezért $r = 3$.
Behelyettesítve a kapott értékeket $5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 3^2 + 2002 = 2085 = 15s$. Innen s-re a 139-et kapjuk, ami valóban prímszám.
Ennek az esetnek tehát létezik megoldása: $p = 2, r = 3$ és $s = 139$.

Tegyük fel, hogy $r = 2$.
$5p^2 + 7 \cdot 2^2 + 2002 = 15s$
$5p^2 + 2030 = 15s$
Öttel osztva az egyenlőség mindkét oldalát, az alábbi összefüggést kapjuk:
$p^2 + 406 = 3s$.
A 3-as oszthatóság vizsgálata a célszerű, mivel a jobb oldal biztosan osztható 3-mal. A bal oldalon 406 maradéka 3-mal osztva 1, ezért p^2-nek 2-t kellene maradékul adnia 3-mal osztva, hogy teljesülhessen az egyenlőség. Viszont egy négyzetszám 3-as maradéka csak 0 vagy 1 lehet, tehát ebben az esetben nem kapunk újabb megoldást.
Összességében a különböző eseteket megvizsgálva láthatjuk, hogy mindössze egyetlen megoldása van az egyenlőségnek, mégpedig az alábbi:

$$p = 2, r = 3, s = 139.$$

9.4. Feladat

A matematikaversenyeken gyakran előfordul olyan feladat, amiben az aktuális évszám szerepel. Ilyen jellegű feladat a következő is, ami szorosabban az oszthatósági szabályokhoz kapcsolódik, tehát az ezt feldolgozó szakköri alkalmon is bevihetjük magunkkal.

Feladat. Írjunk a 2012 elé is, után is egy-egy számjegyet úgy, hogy a kapott hatjegyű szám osztható legyen

1. 88-cal;
2. 99-cel.[4]

9.4.1. Megoldás

$88 \mid \overline{x2012y}$
Mivel $88 = 8 \cdot 11$, ezért a 8-as és 11-es oszthatósági szabályokat kell vizsgálnunk. Mivel x és y számjegyek, ezért $0 \leq x \leq 9$ és $0 \leq y \leq 9$ pozitív egészek.
A 11-es oszthatósági szabály kimondja, hogy:
A szám akkor és csak akkor osztható 11-gyel, ha a páros helyi értéken álló számjegyeinek összege megegyezik a páratlan helyi értéken álló számjegyeinek összegével, vagy a kettő különbsége 11 többszöröse. 11-es oszthatósági szabály alapján $(x + 0 + 2) - (2 + 1 + y) = x - y - 1$ osztható kell legyen 11-gyel. Mivel $0 \leq x \leq 9$ és $0 \leq y \leq 9$, ezért csak az az eset áll fenn, hogy a különbség 0-val egyenlő. Ekkor $x - y = 1$. A 8-as oszthatósági szabály miatt az utolsó három számjegy által alkotott szám osztható kell legyen 8-cal, így y lehetséges értékei: 0 vagy 8. Ebből az alábbi két megoldást kapjuk:
$y = 0 \rightarrow x = 1$, a szám tehát $120120 = 8 \cdot 11 \cdot 1365$
$y = 8 \rightarrow x = 9$, a szám $920128 = 8 \cdot 11 \cdot 10456$
(Mivel ekvivalens állításokat hajtottunk végre, ezért ellenőrzésre nincsen szükség, ám a számok fentihez hasonló szorzatalakját felírva megbizonyosodhatunk róla, hogy semmit sem számoltunk el.)

$99 \mid \overline{x2012y}$
Mivel $99 = 9 \cdot 11$, ezért a 9-es és 11-es oszthatósági szabályokat kell vizsgálnunk. Mivel x és y számjegyek, ezért $0 \leq x \leq 9$ és $0 \leq y \leq 9$ pozitív egészek.
A feladat első részében a 11-es oszthatósággal foglalkoztunk, ezért itt már csak annak eredményét használjuk: $x - y = 1$.
A 9-es oszthatósági szabály szerint a számjegyek összege osztható kell legyen 9-cel. A két ismeretlenre vonatkozó feltételek miatt tudjuk, hogy a számjegyek összege nem lehet 5-nél kisebb, illetve 23-nál nagyobb.

[4] Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből, Typotex Kiadó, Budapest, 2003, 36. o., 371. feladat átírása aktuális évszámra.

5 és 23 között az alábbi 9-cel osztható számok találhatók: $9, 18$.
Így két egyenletrendszert kapunk:

1. eset:

$$x - y = 1$$
$$x + y + 5 = 9$$

Az első egyenletből x-et kifejezve és a második egyenletbe behelyettesítve megkapjuk, hogy $y = \frac{3}{2}$. Mivel y számjegy, ezért pozitív egész szám kell legyen, tehát nem kapunk valódi megoldást.

2. eset:

$$x - y = 1$$
$$x + y + 5 = 18$$

Az egyenletrendszert megoldva megkapjuk: $x = 7, y = 6$. Mivel x és y is pozitív egészek és teljesítik a rájuk vonatkozó feltételeket, ez a megoldás jó: $720126 = 9 \cdot 11 \cdot 7274$. Tehát egyetlen megoldás van, ez pedig a 720126.

Mellékletek

1. számú melléklet

Kivonat a kerettantervekből

Évfolyam	Fejlesztési feladatok	Tananyag és gondolkodási módszerek	Továbbhaladás feltételei
1. évfolyam		A számok bontott alakja, számjegyek száma, páros, páratlan számok.	Páros és páratlan számok felismerése.
2. évfolyam	Algoritmusok követése az egyesekkel és tízesekkel végzett műveletek körében.	Számok bontása tízesek és egyesek összegére. Számok tulajdonságai: páros, páratlan. Oszthatóság megfigyelése pl. 3-mal, 5-tel, 10-zel.	Az egyes, tízes fogalmának ismerete. Tájékozottság a tízes számrendszerben. A számok néhány tulajdonságának ismerete: adott szám jellemzése a megismert tulajdonságokkal.
3. évfolyam	Elemek szétválogatása, osztályozása, rendezése.	Számok tulajdonságai, oszthatóság. Számok képzése, számjegyek helyi és alaki értéke. Számok kapcsolatai: osztója, többszöröse.	Számok nagyságrendjének és helyiértékének biztos ismerete. Számok képzése, helyiérték szerinti bontása.

Évfolyam	Fejlesztési feladatok	Tananyag és gondolkodási módszerek	Továbbhaladás feltételei
4. évfolyam	Matematikai ismeretek bővítése: számfogalom bővítése 10000-ig.	Számok bontása, képzése a számjegyek alaki-, helyi-, valódi értékének értelmezése.	Számok helyiérték szerinti írása, olvasása. Számok képzése, bontása.
5. évfolyam	Műveletfogalom kiterjesztése, mélyítése. Számolási készség fejlesztése a kibővített számkörben.	Műveletek szóban (fejben) és írásban, szemléltetés számegyenesen. Természetes számok körében: osztók, többszörösök.	
6. évfolyam	A bizonyítási igény felkeltése. Racionális számok többféle megjelenítése, többféle leírása.	Egyszerű oszthatósági szabályok (2-vel, 5-tel, 10-zel, 4-gyel, 25-tel, 100-zal). Két szám közös osztói, közös többszöröseik. Törtek egyszerűsítése, bővítése.	2-vel, 5-tel, 10-zel, 100-zal való oszthatóság.
7. évfolyam	Matematikatörténeti érdekességek megismerése.	Prímtényezős felbontás. Két szám legnagyobb közös osztója, legkisebb közös többszöröse. Egyszerű oszthatósági szabályok (3-mal, 9-cel, 8-cal, 125-tel, 6-tal).	Osztó, többszörös, két szám közös osztóinak, néhány közös többesének megkeresése.

Évfolyam	**Fejlesztési feladatok**	**Tananyag és gondolkodási módszerek**	**Továbbhaladás feltételei**
9. évfolyam Gimnázium	A matematika iránti érdeklődés erősítése az elemi számelmélet alapvető problémáival és matematikatörténeti vonatkozásaival.	Relatív prímek, oszthatósági feladatok, a prímszámok száma, példa számrendszerekre.	3-mal, 9-cel való oszthatóság ismerete. Számok prímtényezőkre való bontása.
9. évfolyam Szakközépiskola	A matematika iránti érdeklődés erősítése az elemi számelmélet alapvető problémáival és matematikatörténeti vonatkozásaival.	Relatív prímek, oszthatósági feladatok, a prímszámok száma, példa számrendszerekre.	3-mal, 9-cel való oszthatóság ismerete. Számok prímtényezőkre való bontása.
9. évfolyam Szakiskola	A rendszerezőképesség fejlesztése. A matematika iránti érdeklődés erősítése a matematikatörténeti vonatkozásokkal.	Számelméleti alapfogalmak: prímszám, összetett szám, osztó, többszörös. Oszthatósági szabályok, prímtényezős felbontás. Két szám legnagyobb közös osztója, legkisebb közös többszöröse.	A 2-vel, 3-mal, 5-tel való oszthatóság ismerete, prímtényezős felbontás.

2. számú melléklet

Matematika

I. RÉSZLETES ÉRETTSÉGI VIZSGAKÖVETELMÉNY

Az érettségi követelményeit két szinten határozzuk meg:

középszinten a mai társadalomban tájékozódni és alkotni tudó ember matematikai ismereteit kell megkövetelni, ami elsősorban a matematikai fogalmak, tételek gyakorlati helyzetekben való ismeretét és alkalmazását jelenti;

az emelt szint tartalmazza a középszint követelményeit, de az azonos módon megfogalmazott követelmények körében az emelt szinten nehezebb, több ötletet igénylő feladatok szerepelnek. Ezen túlmenően az emelt szint követelményei között speciális anyagrészek is találhatók, mivel emelt szinten elsősorban a felsőoktatásban matematikát használó, illetve tanuló diákok felkészítése történik.

(A) Kompetenciák

Számelmélet, algebra

- Legyen képes a tanuló betűs kifejezések értelmezésére, ismerje fel használatuk szükségességét, tudja azokat kezelni, lássa, hogy mi van a „betűk mögött”.
- Ismerje az egyenlet és az egyenlőtlenség fogalmát, megoldási módszereit (pl. algebrai, grafikus, közelítő).
- Legyen képes egy adott probléma megoldására felírni egyenleteket, egyenletrendszereket, egyenlőtlenségeket, egyenlőtlenség-rendszereket.
- Tudja az eredményeket előre megbecsülni, állapítsa meg, hogy a kapott eredmény reális-e.
- Az emelt szinten érettségiző diáknak legyen jártassága az összetettebb algebrai átalakításokat igénylő feladatok megoldásában is.

(B) Vizsgakövetelmények 2. *Számelmélet, algebra*

Az algebra tanításának egyik fő célja annak felfedeztetése és megértetése, hogy egymástól távol állónak tűnő problémák ugyanazon matematikai, algebrai struktúrával rendelkeznek, ezért megoldásuk során hasonló eljárásokat, gondolatmeneteket alkalmazhatunk, s leírásuk formálisan azonos módon történik. (Például különböző témakörökből vett másodfokú egyenletre vezető feladatok.)

Fontos a számolás során megismert műveleti szabályok absztrahálása, a jártasság megszerzése a betűkifejezésekkel végzett műveletekben. Meg kell mutatni a számfogalom bővítésének szükségességét és folyamatát. El kell juttatni a tanulókat a permanencia-elv fontosságának felismeréséhez.

TÉMÁK	**Középszint**	**Emelt szint**
2.2. **A természetes számok halmaza, számelméleti ismeretek**	Ismerje, tudja definiálni és alkalmazni az oszthatósági alapfogalmakat (osztó, többszörös, prímszám, összetett szám). Tudjon természetes számokat prímtényezőkre bontani, tudja adott számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét kiszámíteni; tudja mindezeket egyszerű szöveges (gyakorlati) feladatok megoldásában alkalmazni. Definiálja és alkalmazza feladatokban a relatív prímszámokat. Tudja a számelmélet alaptételét alkalmazni feladatokban.	Tudja pontosan megfogalmazni a számelmélet alaptételét.

TÉMÁK	Középszint	Emelt szint
2.2.1. Oszthatóság	Ismerje a 10 hatványaira, illetve a $2, 3, 4, 5, 6, 8, 9$ számokra vonatkozó oszthatósági szabályokat, tudjon egyszerű oszthatósági feladatokat megoldani.	Oszthatósági feladatok.

3. számú melléklet

KÉRDŐÍV

Szakdolgozatomban az oszthatóság témakörével foglalkozom, valamint azzal, hogy miként jelenik meg a mai magyar középiskolákban, és a tanárok miként viszonyulnak ehhez a témakörhöz.
Ebben a kutatásban szeretném segítségét kérni az alábbi kérdőív kitöltésével, melynek kitöltése körülbelül 15–20 percet vehet igénybe.
Amennyiben még nem tanította a témakört, akkor az alapján töltse ki, hogy miként tanítaná.
Segítségét előre is köszönöm.

Tóth Enikő

Kérem, válaszait aláhúzással vagy karikázással jelölje!

1. Neme: férfi nő

2. Hány év tanít? 0-5 5-10 10-20 20 felett

3. Milyen középiskolában tanít?

   Szakközépiskola Gimnázium Szakmunkásképző

   Egyéb:

4. Mely oszthatósági szabályokat tanítja meg 9. osztályban?

2-es 3-mas 4-es 5-ös 7-es 8-as 9-es 10-es 11-es
20-as 25-ös 50-es 100-as 125-ös 1000-es 10 hatványaira

5. Az alábbi tételek Hajdú Sándor *Gondolkodni jó!* c. tankönyvében szerepelnek. Mikor Ön a számelmélet témakörén belül az oszthatóságot tanítja, megtanítja-e a gyereket az alábbi tétel használatára, illetve kimondja-e tételesen az alap matematikaórán?

   1 — Nem kerül elő a tétel az alapórák keretében.

2 — Használjuk a tételt, de nem tudatosan.
3 — Használjuk a tételt és tudjuk, hogy miért van így, de nem mondjuk ki.
4 — A tételt használjuk, értjük és szövegesen vagy képletesen ki is mondjuk.

A	Bármely a, b természetes számhoz ($b \neq 0$) található olyan egyértelműen meghatározott k és r természetes szám, amelyre $a = b \cdot k + r$, ahol $0 \leq r < b$ teljesül.	1	2	3	4
B	Ha egy összeg minden tagja osztható egy számmal, akkor az összeg is osztható ezzel a számmal.	1	2	3	4
C	Ha egy szorzat valamelyik tényezője osztható egy számmal, akkor a szorzat is osztható ezzel a számmal.	1	2	3	4
D	Végtelen sok prímszám van.	1	2	3	4
E	Számelmélet alaptétele	1	2	3	4
F	Osztók száma tétel	1	2	3	4
G	Ha két szám legnagyobb közös osztóját megszorozzuk a legkisebb közös többszörösével, akkor a két szám szorzatát kapjuk.	1	2	3	4

6. Van-e bármilyen (az oszthatósággal kapcsolatos) tétel a fentieken kívül, melyet Ön a tanítási gyakorlatban alkalmaz, avagy megtanít az alap matematikaórák keretében?
Nem, nincsen.
Igen, az alábbi(ak):

7. Az alábbi állítások, hipotézisek az oszthatóság témakörének fontosságára, más témakörökkel vett kapcsolataira vonatkoznak. Kérem, jelölje meg, Ön mennyire ért egyet velük.
1 — egyáltalán nem értek egyet
2 — kismértékben egyetértek
3 — egyetértek
4 — nagymértékben egyetértek
5 — teljes mértékben így gondolom

A	A bizonyítási módszerek tanításában fontos szerepe van az oszthatóságnak.	1	2	3	4	5
B	A logika megalapozását segíti elő (például: ellenpélda keresése).	1	2	3	4	5
C	Az emelt szintű érettségire való felkészülés idején érdemes több időt szánni erre a témakörre.	1	2	3	4	5
D	Az általános iskolában jól megalapozzák az oszthatóságot.	1	2	3	4	5
E	A formális gondolkodás fejlesztését segíti a maradékosztályokban való gondolkodás.	1	2	3	4	5
F	A maradékosztályok használata 9. évfolyamon elősegíti a szabad vektor fogalmának kialakítását a későbbiekben. (A szabad vektor ugyanis az azonos irányú és hosszúságú vektorokat egy vektorként kezeli.)	1	2	3	4	5
G	A maradékosztályok egységként kezelése elősegítheti a trigonometriában az egyenletek összes megoldásának megtalálását. (α-nak $2k\pi$-vel vett eltoltjai is megoldások egy szinusz- vagy koszinusz-függvény esetén.)	1	2	3	4	5

8. A következő táblázatban oszthatósággal kapcsolatos feladatokat talál. Ezek mindössze minták, a feladatok jellegére, nehézségére, érdekességére, illetve a bizonyítási módszerek hasznosságára vonatkozik az alábbi kérdés.

Ön megoldatná-e az alábbi, vagy pedig egy hasonló jellegű - Ön által módosított - feladatot a gyerekekkel bármelyik évfolyamon?

1 — Semmi esetre sem.

2 — Csak szakkörön, alapórán és érettségi előkészítőn sem.

3 — Emelt szintű érettségire készülő gyerekekkel igen.

4 — Alap matematikaórákon is előhoznám.

A	Az alaphalmaz legyen a természetes számok halmaza. Rajzolj egy halmazábrát, melyen feltünteted az alaphalmazt és az alábbi halmazokat a köztük lévő viszonyokkal: $A = \{45\,\text{osztói}\}$;$B = \{60\,\text{osztói}\}$; $C = \{75\,\text{osztói}\}$ Írjuk be a halmazábrába a következő számokat: $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 12; 15; 20; 25; 30; 45; 60; 75$	1	2	3	4
B	Írjunk az 1994 elé is, után is egy-egy számjegyet úgy, hogy a kapott hatjegyű szám osztható legyen 88-cal.	1	2	3	4
C	Milyen számjegyre végződik 5 egymást követő páratlan szám szorzata? Indokolj!	1	2	3	4
D	Az a és b számjegyek, $a \neq 0$. Mutassuk meg, hogy az $\overline{ababab}$ alakú hatjegyű tízes számrendszerbeli számok mind oszthatóak 777-tel.	1	2	3	4
E	Valaki kipróbálta hogy $n^2 + n + 41$, $n = 1, 2, \ldots, 30$-ra prímszám. Most azt állítja, hogy $n^2 + n + 41$ minden természetes számra prím. Igaza van-e?	1	2	3	4
F	Az a, b, c, d és e olyan, páronként különböző egész számok, amelyekre teljesül a következő egyenlőség: $(6 - a)(6 - b)(6 - c)(6 - d)(6 - e) = 45$ Mennyi lesz az $a + b + c + d + e$ összeg értéke?	1	2	3	4

9. Észrevételek, megjegyzések, javaslatok

4. számú melléklet

Bevezető sudoku

Ez a feladat az oszthatósággal kapcsolatos előzetes tudásod felderítésére szolgál.

Döntsd el az alábbi állításokról - számológép használata nélkül -, hogy igazak vagy hamisak. Ha az állítás igaz, akkor karikázd be az I oszlopban található számot, ellenkező esetben a H oszlopét. Az I és H oszlopokban szereplő bekarikázott számokat írd be a sudoku megfelelő helyeire. (Például, ha az első állítás igaz, akkor az 1-essel jelölt négyzetbe az 1. sor I oszlopában található szám kerül.)

ÁLLÍTÁS	**I**	**H**
1. 123456 és 273747 ugyanazt a maradékot adja 3-mal osztva.	4	2
2. Ha $a \mid bc$ és a nem osztója b-nek, akkor $a \mid c$.	5	7
3. Egy szám osztható 4-gyel, ha az utolsó három számjegyéből alkotott szám osztható 4-gyel.	3	1
4. Egy négyzetszám 4-gyel osztva csak 0 vagy 1 maradékot adhat.	9	8
5. Végtelen sok prímszám van.	7	3
6. Ha $a \mid b$ és $a \mid c$, akkor $a \mid 3b + 5c$.	3	4
7. Ha egy szám osztható 2-vel és 6-tal, akkor 12-vel is osztható.	1	2
8. Három egymást követő szám szorzata mindig osztható 6-tal.	6	9
9. Ha egy szám osztható 3-mal és 5-tel, akkor 15-tel is osztható.	1	7
10. Öt egymást követő páratlan szám szorzata bármely páratlan számra végződhet.	3	5
11. Ha $a \mid b$ és $b \mid c$, akkor $a \mid c$.	6	2

ÁLLÍTÁS	**I**	**H**
12. $6 \mid 10^{10} + 14$	1	8
13. Ha $a \mid c$ és $b \mid c$ akkor $ab \mid c$.	9	2
14. Ha két szám különbsége 3, akkor a legnagyobb közös osztójuk osztható 3-mal.	5	4
15. Két szomszédos szám legkisebb közös többszöröse a két szám szorzatával egyenlő.	7	9
16. Ha $[a;b] = 12$ és $[b;c] = 12$, akkor $[a;c] = 12$.	8	5
17. Két 3-mal osztható szám közös osztói mind oszthatók 3-mal.	2	8
18. Ha $(a;b) = 2$ és $(b;c) = 2$, akkor $(a;c) = 2$.	3	4
19. Ha $a \mid c$ és $b \mid c$, akkor $(a;b) \mid c$ és $[a;b] \mid c$.	2	1
20. Minden egész a, b számra áll, hogy $a \cdot b = (a;b)[a;b]$	3	7
21. Ha a pozitív egész számokat összeadjuk 1-től 1000-ig, akkor a kapott összeg osztható 11-gyel.	6	9
22. Az alábbi szám négyzetszám: $2^5 \cdot 3^4 \cdot 4^2 \cdot 6^3 \cdot 10^2 \cdot 75$	7	5
23. Egy számnak akkor és csak akkor van páratlan sok osztója, ha négyzetszám.	5	8
24. Bármely három szomszédos egész szám összege osztható 6-tal.	4	1

SUDOKU

			1	2	3			
						4		5
		6	7			8	9	
		10					11	12
13	14					15		
	16	17			18	19		
20		21						
			22	23	24			

SUDOKU — MEGOLDÁS

			4	7	3			
						9		7
		3	2			6	1	
		5					6	1
2	4					7		
	5	8			4	2		
3		6						
			7	5	1			

5. számú melléklet: Feladatsorok

Számjegyes feladatok

5.1. Öt egymást követő egész számot összeszorzunk. Milyen jegyre végződik az így kapott szám?
5.2. Legalább hány egymást követő egész számot kell összeszoroznunk, hogy a szorzat biztosan legalább 2, 6 vagy éppen 31 darab 0-ra végződjön?
5.3. Melyik a legnagyobb egész szám, amely biztosan osztja bármely 5 egymást követő természetes szám szorzatát? Mi változik, ha nem 5, hanem k darab egymást követő számot szorzunk össze?
5.4. Az $\overline{abb}$ alakú háromjegyű szám számjegyeit összeszorozva olyan $\overline{ac}$ kétjegyű számot kapunk, amelyben a számjegyek szorzata c. Mennyi a, b és c értéke?
5.5. Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek négyzetének összege 9?
5.6. Az a és b számjegyek, $a \neq 0$. Mutassuk meg, hogy az $\overline{ababab}$ alakú hatjegyű tízes számrendszerbeli számok mind oszthatóak 777-tel.

Házi feladatok

5.7. Az alábbi számok közül melyik az, amelyet 768-cal megszorozva a szorzat a legtöbb 0-ra végződik? 7500 vagy 5000 vagy 3125 vagy 2500 vagy 10000?
5.8. Az a, b és c számjegyek, $a \neq 0$. Mutassuk meg, hogy az $\overline{abcabc}$ alakú hatjegyű tízes számrendszerbeli számok mind oszthatóak 77-tel.

Érdekesség

5.9. A $26 \cdot 93$ szorzat különleges. Ha a szorzótényezőkön belül a számjegyeket felcseréljük, akkor a $62 \cdot 39$ szorzatot kapjuk, amelynek értéke meglepő módon megegyezik az eredetiével, $26 \cdot 93 = 62 \cdot 39$.
Mi a „titka” ezeknek a számoknak?
Keress más ilyen szorzatokat!

Bizonyítási módszerek

6.1. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges, 5-nél nagyobb p prímszámra 360 osztója $(p^4 - 5p^2 + 4)$-nek.
6.2. Bizonyítsuk be, hogy hét négyzetszám között mindig van kettő, melyek különbsége osztható 10-zel.
6.3. Igazoljuk a következő oszthatóságot:

$$17 \mid 6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}, n = 1, 2, \ldots$$

6.4. Egy 1001 lakosú városban megalakítják az összes 13 tagú klubot. Minden egyes klub elnököt választ tagjai közül. Bizonyítsuk be, hogy vannak a városnak olyan lakói, akik különböző számú klubnak az elnökei.

Házi feladatok

6.5. Legyen $p > 3$ prímszám. Mutassuk meg, hogy $3 \mid p^2 - 1$, valamint $24 \mid p^2 - 1$.
6.6. Mutassuk meg, hogy 5 egész szám között mindig van három, melyek összege osztható 3-mal.
6.7. Igaz-e, hogy $4 \mid 3 \cdot 17^n + 9^{n+1}$ minden n nem negatív egész számra?
6.8. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok prímszám létezik.

Prímszám vagy összetett?

7.1. Mutassuk meg, hogy $2^{10} + 5^{12}$ szám összetett szám.

7.2. Mutassuk meg, hogy $19 \cdot 8^n + 17$ az n minden nemnegatív egész értékére összetett szám.

7.3. Valaki kipróbálta hogy n^2+n+41, $n = 1, 2, \ldots, 30$-ra prímszám. Most azt állítja, hogy $n^2 + n + 41$ minden természetes számra prím. Igaza van-e?

7.4. Határozzuk meg azokat a prímeket, amelyekre $4p^2 + 1$ és $6p^2 + 1$ is prímszám.

Házi feladatok

7.5. Igaz-e, hogy az alábbi polinomok minden természetes számra prímszámot adnak?

1. $n^2 - 5n + 47$
2. $3n^2 - 3n + 23$

7.6. Oldjuk meg a 7.1. feladatot általánosan: Bizonyítsuk be, hogy $2^{2k} + 5^{2l}$ sohasem prím, ha k páratlan és l páros pozitív egészek.

7.7. Adjuk meg az összes olyan p prímszámot, amelyekre $8p^2 + 1$ is prímszám.

Irodalomjegyzék

[1] http://www.nefmi.gov.hu/kozoktatas/2007/nemzeti-alaptanterv. (letöltés dátuma: 2012.02.04.)

[2] http://www.nefmi.gov.hu/kozoktatas/tantervek/kerettanterv-2000 (letöltés dátuma: 2012.02.04.)

[3] http://www.oh.gov.hu/kozoktatas/erettsegi_vizsgak (letöltés dátuma: 2012.03.16.)

[4] Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből, Typotex Kiadó, Budapest, 2003

[5] Versenyfeladatsorok: Zrínyi Ilona matematika verseny, Kenguru matematika verseny, KMBK XXXIII. Kalmár László versenye

[6] Hajdu Sándor - Czeglédy István - Hajdu Sándor Zoltán - Kovács András: Matekatika 9. Gondolkodni jó!, Műszaki Kiadó, Budapest, 2009

[7] Bartha - Bogdán - Csúri - Duró - Gyapjas - Kántor - Pintér: Matematikai feladatgyűjtemény I. a középiskolák tanulói számára, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

[8] Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 1893-1993 (CD-rom)

[9] KöMaL folyóirat