Extremális gráfelméleti feladatok feldolgozása matematika tagozaton

Nagy Zoltán Lóránt

2013. április 20.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **2**

2. Módszertani bevezető **3**

2.1. Gráfelméleti ismeretek és elvárások
a tankönyvek szintjén 3

2.2. Az extremális gráfelmélet matematika-didaktikai szerepéről . . . 4

2.3. Gráfelméleti áttekintés - középiskolában és azon túl 6

2.3.1. A gráfelmélet a normál tantervű gimnáziumok anyagában 6

2.3.2. A speciális matematika tagozatos kiegészítő témakörök . 7

2.4. Az extremális gráfelméletről általában 8

2.5. Bevezető problémák részletes tárgyalása 9

2.6. A feldolgozás módjáról, a felmerülő nehézségekről 16

3. Gráfelméleti szakköri feladatsorok **19**

3.1. Felépített feladatsor a Turán-tétel jellegű problémakörhöz 19

3.2. Megoldások, megjegyzések és tapasztalatok összegzése 21

3.3. Feladatsor a Kővári - T. Sós - Turán tétel jellegű problémakörhöz 27

3.4. Megoldások, megjegyzések és tapasztalatok összegzése 29

Köszönetnyilvánítás

Szeretném kifejezni hálámat Szőnyi Tamásnak, aki nagy hatást gyakorolt rám és ezen írásra is rendkívül széleskörű tudásával és segítőkész tanácsaival. Rendkívül sokat tanultam volt tanáraimtól, különösen Kovács Csongornétől, Dobos Sándortól és Pósa Lajostól. Az ő matematikai - tanári látásmódjuknak, tehetséggondozó munkájuknak és személyes támogatásuknak nagyon sokat köszönhetek.

1. fejezet

Bevezetés

Dolgozatomban a speciális matematika tagozatok anyagához szeretnék kiegészítő, ha tetszik szakköri feldolgozásra szánható tematikus feladatsorokat gyűjteni és feldolgozni. Választott témám a gráfelmélet egy olyan meglehetősen új ága, az extremális gráfelmélet, amelyhez a magyar matematikai iskola hozzájárulása világviszonylatban is kiemelkedő. Ezzel együtt a középiskolában tanított tananyaghoz közvetlenül kapcsolható a fakultációt választó tanulók esetében is. Másrészt a magyar és nemzetközi versenyeken egyre gyakoribb, hogy a témakörhöz kapcsolódó feladatokkal találkozhatunk.
Legelőször elhelyezem az extremális gráfelméletet a matematikát fakultációs tárgyként választó középiskolás diákok és speciális matematika tagozatosak tanmenetének kontextusában. Alapvető célom egy tehetséges diákok fejlesztésére szánható szakköri feladatsor kidolgozása, aminek megoldásával a 11-12. évfolyamos diákok bővíthetik feladatmegoldó készségeiket és eszközeiket.
Hangsúlyt helyezek a feldolgozás mikéntjére matematika-didaktikai szempontból, valamint a feladatsor belső összefüggéseinek feltárására.
S végül, de nem utolsó sorban szeretnék egy kis kitekintést nyújtani, milyen kérdések és tanári megközelítés segítheti a diákokat a téma további önálló felfedezésére.

2. fejezet

Módszertani bevezető

2.1. Gráfelméleti ismeretek és elvárások a tankönyvek szintjén

A Nemzeti alaptanterv (2012) [10] a gráfelméletet a 9-12. évfolyamra helyezi a "Gondolkozási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok" témakörbe az alábbi megjegyzéssel: A gráf szemléletes fogalma és egyszerű alkalmazásai közműveltségi tartalomnak számít. Emellett a 2000. évi Kerettanterv [6] előírja a gráfok tanítását 11. és 12. évfolyamban is. Ennek megfelelően az újabb tankönyvcsaládokban a tananyag részét képezi külön fejezetben a gráfelmélet. Így például az [5], a [8] és a [2] tankönyvcsaládok a 11. évfolyamon szánnak egy-egy fejezetet neki, sőt a fakultáción matematikát tanulóknak szánt Hajnal - dr. Nemetz - dr. Pintér tankönyv [3] már 30 évvel ezelőtt részletesen és igen nagy mélységben tárgyalja a gráfelméletet a 11. és 12. évfolyam anyagában is. Mindez azért is rendkívül figyelemre méltó, mert a magyar nyelven is megjelenő gráfelméleti témájú könyvek közül az egyik legelső, az Andrásfai Béla nevéhez fűződő, és egyáltalán nem középiskolásoknak szóló könyve, az Ismerkedés a gráfokkal [1] mindössze 10 évvel előzte meg ezt a tankönyvet. Más oldalról megközelítve: a tankönyv megjelenése előtt két évvel, (1979-ben) matematika tanári képzésben végzett ELTE-s egyetemi hallgatóknak a gráfelméletnek még vékony szelete sem képezte kötelezően választandó részét az elsajátítandó anyagnak.

Mindez azzal magyarázható, hogy rendkívül ifjú tudományágról van szó, amely azonban robbanásszerű fejlődésen ment keresztül az elmúlt fél évszázadban. Ez a fejlődés pedig nagymértékű hatást gyakorolt a számítástechnika, a villamosságtan, a közgazdaság, az orvosbiológia, sőt a szociológia fejlődésére is. E nagy hatás már önmagában is indokolhatná, miért emelték be a középiskolai oktatásba is a gráfelméletet. Ugyanakkor számos más aspektust szeretnénk kiemelni, ami a gráfelmélet helyét és fontosságát hangsúlyozhatja; egyben megmagyarázhatja, miért választottam a gráfelmélet egy speciális ágának feldolgozását jelen dolgozatomban.

2.2. Az extremális gráfelmélet matematika-didaktikai szerepéről

Ezen aspektusok, melyek a gráfelmélet megjelenését indokolhatják, részben kapcsolódnak a Varga Tamás nevével fémjelzett komplex matematika tanítási kísérlet elgondolásaihoz. Mint új tudományágban, nagyon könnyű a diákoknak az alapfogalmak megértésén túl még nem vizsgált, újszerű területekre tévedni, ahol eredményeket mutathatnak fel. Ezáltal a *felfedeztető matematika* a szó legszorosabban vett értelmében művelhető benne: nem szükséges a tanár részéről direkt rávezetés ahhoz, hogy valamilyen területet a diákok felfedezzenek, hiszen kevesebb a kiépített út, aminek bejárását kell felfedeztetni: a felmerülő kérdések szinte mindegyike érdekes, vizsgálható területre vezet. Ezáltal a tanár diákot segítő mentor (vagy facilitátor) szerepe könnyen megvalósítható. A legfontosabb szakmai képesség a meglévő tudásra alapozva annak eldöntése, hogy a felmerülő problémák milyen mélységűek, könnyíteni avagy nehezíteni érdemes ahhoz további apró változtatásokkal, hogy érdekes és egyben számukra is könnyen vizsgálható problémával foglalkozzanak.

Magának az extremális gráfelméletnek különlegessége, hogy kiemelkedően magas a magyar tudósok, matematikusok hozzájárulása a témához. Ehelyütt a teljesség igénye nélkül Erdős Pál, Turán Pál, Simonovits Miklós, Füredi Zoltán, Gallai Tibor, T. Sós Vera, a 2012-es Abel-díjazott Szemerédi Endre, Lovász László valamint Kőnig Dénes nevét említjük. Ez a diákok témához való viszonyát (attitűdjét) is pozitív irányban befolyásolhatja, hiszen írásaikat, sőt fotóikat akár a Középiskolai Matematikai Lapokban is megtalálhatják.

A gráfelmélet matematika-didaktikai szempontból további kedvező vonása, hogy művelésével a matematikai kompetenciák többsége egyszerre fejleszthető eredményesen. Nehezen vitatható, hogy a gráfelmélet a matematika legegyszerűbb és legtisztább modelljei közé tartozik - ennek is köszönhető számtalan alkalmazása. Matematikai *modellalkotó* kompetencia fejlesztésére ennélfogva rendkívül alkalmas. (Ez a legfrissebb kerettanterv egyik kiemelt, új hangsúlyt kapó vonása [6].)

A következtetési, bizonyítási készség fejlesztésére szintén nagyon alkalmas - ez speciálisan az extremális gráfelméletre különösen is igaz. Egyszerű fogalmakból építkezünk, és a diákok rávezethetőek a tétel- *bizonyítás* deduktív jellegű logikus gondolkozásra; márpedig a *következtetési, bizonyítási készség* az élet számos területén fontos. Ehhez kapcsolódik, hogy számos egyszerű algoritmust is elsajátíthatnak vagy felfedezhetnek, az algoritmikus gondolkozási készséget fejlesztve. (Ennek az informatikában van óriási jelentősége.) Azzal, hogy a diákok a feladatok megoldói sőt részben kitűzői, a helyes érvelések gyakorlásával egyúttal a kommunikációs készégüket is fejleszthetik.

A gráfelméletre, azon belül pedig az extremális gráfelméletre a megoldási utak sokszínűsége is jellemző. Erre mutatunk szerényebb példákat jelen dolgozatunkban is, ugyanakkor ezt megerősítendő, hivatkozunk a témakör szoros kapcsolatára az absztrakt és lineáris algebrával [15, 13], a topológiával [16], az analízissel és a funkcionálanalízissel [18], a számelmélettel [14, 19] és a (véges) geometriával [7]. Mindez azonban nem csak annyit tesz, hogy a matematika minden ágával van határterülete a gráfelméletnek, hanem egyúttal arra is gondolunk, hogy egy adott probléma sokszor teljesen másféle megközelítésû módszerekkel is eredményesen megoldható. Ezáltal kreatív gondolkodás-fejlesztő hatást gyakorolhat egyetlen példának számos, lényegesen eltérő megoldásának megismertetése.

Végezetül, az extremális gráfelmélet jellemző kérdése és célja, hogy az ú.n. extrém, azaz bizonyos tulajdonság szerint maximalizált gráfok struktúrája milyen módon írható le. A mögöttes struktúrák rendszerének megértése, mint lényeglátás a matematikai gondolkozás és absztrakció egy jellegzetes és fontos módja és fejlesztési útja lehet.

2.3. Gráfelméleti és extremális gráfelméleti áttekintés - középiskolában és azon túl

2.3.1. A gráfelmélet megjelenése normál tantervű gimnáziumok anyagában

Az alábbiakban ismertetjük azon fogalmakat, definíciókat, tételeket és tipikus alkalmazásokat, amelyekkel egy általános gimnáziumi tanulónak találkoznia kell. A 2000. év után kiadott gimnáziumi matematikatankönyvekre támaszkodunk az áttekintésben. A fogalmakat, jelöléseket és tételeket ehelyütt csak közöljük, ismertként tekintünk rájuk a későbbiekben.

Fogalmak, jelölések és állítások:

• Csúcsok és élek egy gráfban. A csúcsok halmaza $V(G)$ és az élek halmaza $E(G)$. Általában a csúcsok $|V(G)|$ számát n-nel, az élek számát $e(G)$-vel jelöljük.
• Egyszerű gráfok. (Hurokél és párhuzamos él.) Gráf x csúcsának fokszáma: $d(x)$. Összefüggés a fokszámok és az élek száma között: $2e(G) = \sum_{x\in V(G)} d(x)$. (Kétszeres leszámlálás.)
A páratlan fokú csúcsok száma páros.

• Összefüggőség, komponensek,
• Teljes gráf (K_n), üres gráf, izolált csúcs, páros gráf,
• Teljes n csúcsú gráf éleinek száma $\binom{n}{2}$,
• komplementer gráf,
• út, csillag, kör, séta,
• Összefüggő körmentes gráf: fa. (Az n-csúcsú) fa élszáma $n-1$.
• Izomorfia,
• Zárt Euler-vonal, a zárt Euler-vonal létezésének szükséges és elégséges feltétele.

2.3.2. A speciális matematika tagozatos gráfelméletben megjelenő kiegészítő témakörök

A speciális matematika tagozaton jellemzően az előző fejezetben felsorolt gráfelméleti alapokra építve lényegesen több konkrét feladat megbeszélése fér bele a tananyagba. Mindezek mellett a következő fogalmak és tételkörök jelennek meg a tagozatos tanrendben [4]:

• Hamilton-körök (a gráf minden csúcsát tartalmazó kört mikor tartalmazhat egy gráf, Dirac-tétel),
• Síkbarajzolható gráfok és az Euler-féle poliéder-tétel, szabályos testek él-, lap- és csúcsszámai,
• Ramsey-típusú feladatok,
• Színezéssel kapcsolatos feladatok, a gráf kromatikus száma,
• Páros gráfok, teljes páros gráfok (jelölés: $K_{a,b}$, ha a két csúcsosztály a és b elemű), párosítási feladatok,
• Kereső algortmusok: szélességi és mélységi keresés,
• Végtelen gráfok.

Megjegyezzük, hogy mindezeket nagyrészt a Hajnal-Nemetz-Pintér-Urbán [3] tankönyv is tárgyalja.

2.4. Az extremális gráfelméletről általában

Órai feldolgozás szempontjából feltétlenül az induktív előrehaladó vagy spirális megközelítést tartjuk a téma feldolgozásában a legszerencsésebbnek, amint arra hamarosan ki is térünk. Mégis, ebben az összefoglaló fejezetben a lehető legáltalánosabb megközelítéssel vázolnám fel, mit is értünk pontosan extremális gráfelméleti kérdéseken. Tanárként ugyanis célszerű tisztán látni, mi az az általános struktúra, melybe kapcsolódnak a feladataink.

Legyen $\mathcal{G}$ a gráfok egy családja (halmaza), például egyszerű gráfok, irányított gráfok, páros gráfok. Adva van egy gráfparaméter melyet rögzítünk - ez a paraméter az esetek többségében a gráfok csúcsszáma, n. Adva van továbbá egy $\mathcal{P}$ gráftulajdonság; sok esetben olyan jellegű tulajdonság, hogy a gráf nem tartalmazhat egy rögzített F részgráfot. Tekintjük a gráfcsaládunk azon tagjait, melyekre a gráfparaméter az előre rögzített értékkel egyezik (például n-csúcsú a gráf) és teljesül rá az általunk választott tulajdonság.
Két fő kérdésre keressük a választ:

1. Milyen határok között mozoghat az így kapott gráfok esetén egy másik gráfparaméter értéke? (Gondolhatunk például itt a gráf élszámára, mint másik paraméter.) Mekkora lehet a maximumértéke a másik gráfparaméternek? (Azaz a példánál maradva, maximum hány éle lehet egy ilyen gráfnak?)

2. Leírhatóak-e egyszerűen azok a gráfok, melyekre nézve a maximum felvétetik? (*Ezeket hívjuk - a tulajdonságra nézve - extrém vagy extremális gráfoknak.*) Jellemezhetőek-e valamiféle általános struktúrával?

Megjegyezzük, hogy az első kérdésre sokszor várhatunk - diákjainktól is - olyan megfigyeléseket, bizonyításokat, amellyel alsó és felső becslésekkel határok közé szorítják a vizsgált paraméterértéket. Ez lehetőséget teremt a differenciált oktatásra is: a lassabban haladó, kevésbé fogékony diákok is értékelhető eredményt érhetnek el, miközben esetleg gyorsabb, tehetségesebb társaik erős korlátokat bizonyítanak, vagy a struktúrára nézve is bizonyítanak eredményeket.

Ugyan általában valóban az első kérdés megválaszolása a könnyebb, sokszor tulajdonképpen éppen az segíthet igazán jó korlátot mutatni, hogy kiindulunk abból a feltevésből, hogy extrém gráfunk van, és a tulajdonságait, szerkezetét vizsgáljuk e feltevés mellett.

2.5. Bevezető problémák részletes tárgyalása

Az általános bevezető után következzék néhány egyszerű példa, amely illusztrálja mind a fenti megközelítést, mind a kapcsolódási pontokat az eddig tárgyalt (gimnáziumi anyagban előforduló) kérdésekkel.
Megállapodás, hogy ha G egy gráf, és F egy másik gráf, akkor azt mondjuk, hogy a G gráf F-mentes, ha nem tartalmazza F-et részgráfként. Amint láttuk, különböző F gráfokat nézve ez a legjellemzőbb tulajdonság, amit vizsgálunk a témakörünkben. A p csúcsú teljes gráfot p-klikknek hívjuk.

2.5.1. Feladat. *G legyen n-csúcsú gráf. Legfeljebb hány éle lehet, ha nem tartalmaz kettő hosszú (két élből álló) utat? (Ezt P_3-mal jelöljük, arra utalva, hogy 3 csúcs van. Szokásos elnevezése még a "cseresznye" is.)*

A fenti kontextusba helyezve: G egyszerű gráf, a rögzített paraméterünk a csúcsszám, a tulajdonság a P_3-mentesség, a vizsgált paraméter pedig az élszám.

Ismétlő, bemelegítő feladatként alkalmas: világos, hogy minden fok legfeljebb 1 lehet, így a fokszámösszeg maximuma n. Figyelem: a fokszámösszeg páros kell legyen mivel épp az élszám kétszerese. Ebből adódik, hogy $e(G) \leq \lfloor n/2 \rfloor$. Ahhoz, hogy készen legyünk, meg kell mutatnunk, hogy ez valóban a (felvehető) maximum, tehát ennyi élű gráfunk ténylegesen létezik: ez könnyű lépés, hiszen $\lfloor n/2 \rfloor$ független éllel előállítottunk egy megfelelő gráfot. (Egyúttal azt is látjuk, hogy csakis így nézhet ki egy $\lfloor n/2 \rfloor$ élű, P_3-mentes gráf izomorfia erejéig.)

2.5.2. Feladat. *G legyen n-csúcsú gráf. Legfeljebb hány éle lehet, ha nem tartalmaz három hosszú (három élből álló) utat? (Ezt P_4-gyel jelöljük.)*

Egy kicsit csavartunk a feladaton - inkább talán az előző feladat (b) részeként érdemes feladni - , egyetlen érték kicsi változtatásával - és máris új jelenséggel állunk szemben. A megoldás viszont továbbra is ujjgyakorlat lehet: nézzünk egy legalább másodfokú x csúcsot. Könnyű belátni, hogy ennek szomszédai vagy elsőfokúak mind; vagy ha nem, akkor x-nek pontosan kettő szomszédja van, amelyek egymással is szomszédosok, és további csúcsba nem vezet belőlük él. Tehát egy olyan gráf, amelyre a tulajdonság fennáll, izolált csúcsokból, csillag-gráfokból és háromszög komponensekből áll. Minden komponensben tehát legfeljebb annyi élet találunk, mint csúcsot. Innen könnyen leolvasható, hogy az n élszámot csak úgy érhetjük el, ha a gráf diszjunkt háromszögekből áll, így éppen n éle van. Ellenkező esetben legfeljebb $n-1$. Az $n-1$ mindig elérhető (például az $n-1$ élű csillggal), az n él pedig csak akkor, ha $3|n$.

2.5.3. FELADAT. *G legyen n-csúcsú gráf. Legfeljebb mekkora a minimális fokszáma, ha nincsen benne Hamilton-kör?*

Ezzel a feladattal - másféleképpen megfogalmazva - már találkoztak addigra, mikor témánk tárgyalásába kezdtünk: ha G nem tartalmaz Hamilton-kört, akkor a minimális fokszám nem érheti el az $n/2$-et. Valóban, Dirac (Gábor) tétele szerint ha egy n-csúcsú gráf összes fokszám legalább $n/2$, akkor van benne Hamilton-kör.

Érdekes, sőt érdemes lehet látni, hogy ez a feladat is a tágabb értelembe vett extremális gráfelméletbe sorolható probléma. Mi több, ez a tanult tétel önmagában nem is ad teljes választ: az következik belőle, hogy a minimális d fokszámra $d \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ teljesül ha a gráfban nincs Hamilton-kör - ez tehát egy felső korlát. Létezik-e olyan $d = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ minimális fokszámú gráf, amelyben nincs Hamilton-kör? Vagy valamilyen $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$-nál kisebb δ számra is igaz, hogy $d > \delta$ minimális fokszám esetén szintén biztosan van a gráfban Hamilton-kör? Előbbi lesz igaz, amit az egy jól választott példával, egy teljes páros gráffal könnyen meg lehet mutatni. A Hamilton-körök tárgyalásánál találkozhattunk a jelenséggel, hogy egy gráf biztosan nem tartalmazhat Hamilton-kört, ha valamelyik k-elemszámú csúcshalmazát elhagyva több mint k komponensre esik szét a gráf. Legyen egy összesen n csúcsú teljes páros gráf egyik csúcsosztályában pontosan $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ csúcs. Ezeket elhagyva a megmaradt csúcsok között nem vezet él, és több mint $\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$ van belőlük.

Mantel és Turán tétele

2.5.4. KÉRDÉS. *Mennyi lehet az élszáma egy olyan n-csúcsú gráfnak, amelyben nincs háromszög? (Átfogalmazva: K_3-mentes, vagy nincs benne 3-as klikk.)*

Ezt a kérdést válaszolja meg teljes egészében Mantel tétele. A feldolgozásban azonban lehetőséget adhatunk a probléma határainak megtapasztalására:

2.5.5. FELADAT. *Keressünk olyan n csúcsú gráfot, amelynek sok éle van, de nem tartalmaz háromszöget!*

Konkrét példákból az élszám elérhető maximumára alsó korlátot kaphatunk. Nem nehéz rájönni, hogy a teljes páros gráfok a feltételnek megfelelnek, és sok élet tartalmaznak ha a két csúcsosztály mérete nem, vagy csak 1-gyel tér el. Ha nem találunk ennél jobb példát, megszülethet az a természetes sejtés, hogy ilyen nincs is. Ezt próbáljuk meg igazolni lépésről lépésre haladva.

2.5.6. FELADAT. *Mutassuk meg, hogy ha egy n csúcsú gráfban nincs háromszög, és egy fokszáma "nagyon nagy", akkor az élek száma nem lehet "nagyon nagy"!*

Ez a feladat így nem egzakt, megbeszélhetjük, mi is számíthat nagyon nagynak egy fokszám és az élszám esetén. Várható, hogy érzik, fokszám esetében az $n-1$-hez, élszám esetében az $\binom{n}{2}$-höz "közeli" értékre gondolunk. A pontos eredményt ők maguk kiszámolhatják: ha van d-es fokszám, akkor az élek száma legfeljebb $\binom{n}{2}-\binom{d}{2}$. Valóban: a d-fokú csúcs szomszédai között nem mehetnek élek.

Ennek a gondolatnak a mentén tovább is léphetünk:

2.5.7. FELADAT. *Mutassuk meg, hogy ha egy n csúcsú gráfban nincs háromszög, akkor az élek száma legfeljebb $\frac{\sqrt{5}-1}{4}n^2 \approx 0.309n^2$!*

2.5.8. MEGJEGYZÉS. *Kialakult sejtésünk $\frac{1}{4}n^2 = 0.25n^2$-ről szól.*

Az eredmény az előző feladatból következik. Ha ugyanis $\frac{\sqrt{5}-1}{4}n^2$ lenne az élszám, abból skatulyaelvvel következne, hogy van olyan csúcs, aminek a fokszáma legalább $\frac{\sqrt{5}-1}{2}n$. Viszont ennek szomszédai között nem lehetnek élek, azaz $e \leq \binom{n}{2} - \binom{qn}{2}$, ahol $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Tovább becsülve, $e < \frac{1}{2} \cdot (n^2 - (qn)^2)$, de a $x < 1 - x^2$ másodfokú egyenlõtlenség csak $x < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ feltétellel állhat fenn a pozitív tartományban, ebbõl adódik állításunk.

A 2.5.5 konstrukciói alapján a $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ számot jó lenne 1/4-ig letornázni, mert 1/4-es szorzóval tudunk csak jó konstrukciót. (Az $n/2, n/2$ csúcshalmazú páros gráffal.)

Megkérdezhetjük, kihasználtuk-e maximálisan a feladat feltételét? Világos, hogy nem. A $\frac{\sqrt{5}-1}{2}n$ nagyságú csúcshalmazon kívüli pontokra illeszkedő éleket nem vizsgáltuk, a közöttük kitiltott háromszögekről továbbra is mondhatnánk valamit. E fennmaradó csúcshalmazra újra felírva a háromszögmentesség feltételét az előzőhöz hasonlóan (majd akár ezt az algoritmust iterálva), valamivel lejjebb tornázhatjuk a kapott felső korlátot, de nem közelítjük meg amit szeretnénk bizonyítani. Ha van idő, illetve olyan diák, aki ezt az utat követi, mégis érdemes lehet közösben megnézni az eredményt: a probléma határain túl a (határérték fogalmán keresztül) az analízissel való kapcsolódási pontra is rá lehet tapintani.

2.5.9. Feladat. *Igazoljuk a Mantel-tételt: ha G háromszögmentes n-csúcsú gráf, élszáma legfeljebb $\frac{1}{4}n^2$, és egyenlőség csak páros n esetén, a $G = K_{n/2,n/2}$ gráf esetén teljesül.*

Hasonlóan a 2.5.6 feladathoz, könnyű észrevétel, hogy ha u és v csúcsokra $uv \in E(G)$, akkor $d(u) + d(v) \leq n$ mivel u-nak és v-nek nem lehet közös szomszédja. Ahhoz, hogy ezt az egész gráfban ki tudjuk használni, az összes élre felírva, és összeadva ezt kapjuk:

$$\sum_{uv \in E(G)} (d(u) + d(v)) \leq ne(G) = n \cdot \frac{1}{2} \sum_{i \in V(G)} d(i).$$

Észrevehetjük, hogy pontosan megmondható, hogy az egyes $d(u)$ értékek a bal oldalon hányszor lettek összeszámolva: nyilván $d(u)$-szor, hiszen az összes u-ra illeszkedő él esetében egyszer hozzáadtuk az összeghez. Innen, felhasználva a négyzetes és számtani közép közti egyenlőtlenséget,

$$ne(G) = n\cdot\frac{1}{2}\sum_{i\in V(G)} d(i) \geq \sum_{uv\in E(G)} (d(u)+d(v)) = \sum_{i\in V(G)} d^2(i) \geq \frac{\left(\sum_{i\in V(G)} d(i)\right)^2}{n},$$

azaz

$$ne(G) \geq \frac{4e^2(G)}{n},$$

ahonnan az állítás egyenlőtlenségre vonatkozó része adódik. Egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha minden egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, ekkor egyrészt $d(i) = d(j)$ minden i, j párra (számtani-négyzetes közép), másrészt $d(u) + d(v) = n$ a kiindulási becslésünkből, minden uv élre nézve. Ebből azonnal adódik, hogy a sejtett teljes páros gráf az egyedüli példa, ahol egyenlőség teljesül.

Visszatekintés: a bizonyítás lényegében egy magától értetődő megfigyelés az egész gráfon történő kihasználásán múlott.

Kitekintés: további bizonyításokat olvashatunk Lovász László feladatgyűjteményében, (10. fejezet) [9], illetve Aigner-Ziegler: Bizonyítások a Könyvből c. könyvében (17. fejezet, [12]).

A problémánál tovább időzve felvethetjük a következő kérdést, reflektálva arra, hogy a konstrukció bizonyos értelemben nagyon egyszerű volt. Valóban: ha páros gráfot veszünk, eleve garantáljuk, hogy háromszögmentes legyen, így feltehetjük, hogy a maximális élszámú háromszögmentes páros gráf teljes páros gráf, azaz a két csúcsosztály minden csúcspárja között van él.

2.5.10. Kérdés. *G gráf nem páros gráf, de háromszögmentes: mekkora lehet legfeljebb az élszáma?*

Az előző bizonyítás gondolatkörében maradva javíthatjuk a felső korlátot. A probléma egyúttal egy másik érdekes jelenségre is rámutat: ha $n^2/4$-től kevéssel tér el egy háromszögmentes gráf élszáma, akkor a gráf mindenképpen páros. Valóban: ha valamely uv él esetében $d(u) + d(v) = n$ teljesülne, akkor a gráf csak úgy lehet háromszögmentes, ha egyúttal páros is. Emiatt nem páros gráf esetében $d(u) + d(v) \leq n - 1$ teljesül minden uv élre, ami a fenti bizonyítást ismételve $e(G) \leq \frac{n(n-1)}{4}$-et ad.

Most áttérünk a Mantel-tétel általánosítására.

2.5.11. Kérdés. *Mennyi lehet az élszáma egy olyan n-csúcsú gráfnak, amelyben nincs teljes 4-csúcsú részgráf?*
Mennyi lehet az élszáma egy olyan n-csúcsú gráfnak, amelyben nincs teljes $k+1$-csúcsú részgráf? (Átfogalmazva: K_{k+1}-mentes, vagy nincs benne $k+1$-es klikk.)

Az előző feladatok részletes tárgyalása várhatóan ad ötletet arra nézve, milyen jellegű K_{k+1}-mentes sokélű konstrukciót keressenek, vagy hogyan próbáljanak felső korlátot találni. E két irány hangsúlyozása azonban fontos lehet. A pontos eredményt, bizonyítási célt csak kellő tapasztalatgyűjtés után javasoljuk kimondani.

2.5.12. Feladat. *Igazoljuk a Turán-tételt [11]: ha G K_{k+1}-mentes n-csúcsú gráf, élszáma legfeljebb $\frac{k-1}{2k}n^2$ lehet. Egyenlőség csak k-val osztható n esetén teljesülhet, és (izomorfia erejéig) egyféle gráf esetén áll fenn. (Ezt hívjuk majd n-csúcsú k osztályú Turán-gráfnak.)*

Erősebb forma: ha G K_{k+1}-mentes n-csúcsú gráf, akkor maximum annyi éle lehet mint az n-csúcsú k-osztályú Turán-gráfnak. Ha pontosan annyi éle van, akkor éppen az n-csúcsú k-osztályú Turán-gráf a G gráf.

2.5.13. Megjegyzés. *A bizonyítás előkészítéséhez jó pontosan látni, hogy mely gráfra teljesülhet az egyenlőség. Ez segíthet feltárni, min múlhat a bizonyítás. A képlet, és a Mantel-problémához tartozó konstrukció nyomán az alábbi gráfot sejthetjük a legnagyobb élszámú jelöltnek, helyesen:*

2.5.14. Konstrukció. *[n-csúcsú, k-osztályú Turán-gráf] Bontsuk fel k csoportba (osztályba) az n csúcsot, és vezessenek élek az összes különböző osztályba* *tartozó csúcspárok között. Az ilyen k-osztályú gráfok közül n-csúcsú, k-osztályú Turán-gráfnak nevezzük azt, amelyben a csúcsosztályok mérete nem, vagy csak eggyel tér el, vagyis minden csúcsosztály mérete $\lfloor n/k \rfloor$ vagy $\lceil n/k \rceil$.*

A 2.5.12 probléma megoldására számos bizonyítás ismeretes, és a szakirodalomban magyar nyelven is fellelhető. Ehelyütt a részletes bemutatások helyett csak hivatkozunk ezekre, és kiemeljük azokat a főbb gondolatokat és eljárásokat, amik célba vezetnek.

1. megközelítés. (Turán eredeti bizonyítása nyomán) Használjunk teljes indukciót az n csúcsszámra, azaz tegyük fel, hogy n-nél kisebb csúcsszámú gráfokra az állítást igazoltuk. ($n \leq k$ eseteket vehetjük kezdőlépésnek.) Vegyünk egy maximális élszámú n csúcsú G gráfot, keressük meg benne a legnagyobb klikket - ennek mérete nyilvánvalóan k lesz. Becsüljük meg, legfeljebb hány él lehet ezen k-klikk és a maradék gráf között, és teljes indukciót használva az n csúcsszámra, adjunk felső becslést a maradék, $n-k$ csúcsszámú gráf élszámára. Így felső becslést nyerünk G élszámára is, és megvizsgálhatjuk, mikor teljesülhet egyenlőség.

2. megközelítés. Arra törekszünk, hogy belássuk, a 2.5.14 konstrukció szerint k-osztályú gráf lehet csak olyan, amiben az élszám maximális. Ha ezt tudjuk, könnyen adódik, hogy az ilyenek között akkor lesz legnagyobb az élszám, ha az osztályok mérete legfeljebb 1-gyel tér el. (Külön feladatként kitűzendő!) A következő állítást igazolhatjuk: ha G $k+1$-klikk-mentes, maximális élszámú, akkor nem létezhet olyan három csúcsa, amely pontosan egy élet feszít. (Vázlatosan: Ha nem teljesülne, akkor a három csúcs fokszámai alapján G-ben néhány él törlésével és hozzáadásával a maximálisnál nagyobb élszámú gráfot kapnánk, ami ellentmondás.) Az így bizonyított kis állítás meglepő erejű: az következik belőle, hogy a csúcsok osztályokba rendeződnek, melyek között minden él be van húzva, az osztályokon belül azonban nem fut él. Ebből a bizonyítás befejezése már könnyű.

3. megközelítés. (Zykov eljárása) Két korábban is alkalmazott módszert hozunk össze. Az egyik az első megközelítésben alkalmazott szélsőséges hely-

zetből való kiindulás: ennek jegyében feltesszük, hogy a G vizsgált gráfunk élszáma maximális. A másik módszerre tekinthetünk úgy, hogy kis módosításokat hajtunk végre a gráfon, másképpen fogalmazva egyszerű gráf-transzformációkat alkalmazunk. Esetünkben a transzformáció a következő: tekintsünk egy maximális fokú u pontot, és egy olyat, ami vele nem szomszédos (v csúcs). Töröljük el a v-re illeszkedő éleket, cserébe kössük össze v-t u összes szomszédjával. Így az élszám nem csökkent, és az u-val nem szomszédos csúcsokra alkalmazva az eljárást u-hoz szimmetrikus helyzetű csúcsok halmazát hoztuk létre, amik egymással sincsenek összekötve. Ezzel a gráf-transzformáció-sorozattal elértük, hogy találjunk egymással nem szomszédos csúcsok egy halmazát, amely minden más csúccsal össze van kötve - éppen úgy, ahogy ez a Turán-gráf egyes osztályaira is teljesül.
Ha az eljárást az így kapott csúcsosztály törlése után nyert gráfban folytatjuk, beláthatjuk, hogy a 2. megközelítéshez hasonlóan a csúcsok osztályokba rendeződnek, melyek között minden él be van húzva, az osztályokon belül azonban nem fut él. Ebből a bizonyítás befejezése már könnyű.

2.6. A feldolgozás módjáról, a felmerülő nehézségekről

A szakköri feldolgozás általában egyfajta kötetlenebb légkört is jelent, valamint az időbeli rugalmassággal is számolhatunk. Egyrészt a szigorú 45 perces időbeosztás, másrészt pedig bizonyos kimeneti eredmények elérése okozta presszió nem jelenik meg. Ez a tanár számára hatalmas könnyebbséget jelent, hiszen ezáltal valóban van idő arra, hogy a tanulók gondolkodásmódját akár egyenként fejlessze, meghallgasson a csoport olyan megoldást is, amely jó ötletre épül (amint láttuk azt a Mantel tétel bizonyítása felé történő első lépésekkor), ám a végső célhoz, az éles ereményhez nem vezet el - csak gyengébb korlátokat tudtunk velük bizonyítani. Ezek a megoldások, megoldáskezdemények didaktikai szempontból sokszor még értékesebbek is lehetnek, mint egy szellemes rövid teljes megoldás: pontosan arra mutatnak rá, miben rejlik az adott probléma

nehézsége, mi az, amit a feladat feltételéből a megoldás nem aknáz ki elegendő módon. Ennek tükrében válik igazán széppé egy-egy olyan bizonyítás, ami az adott problémát teljesen megoldja: rátalálhatunk benne arra a pontra, hogy mitől is vezetett eredményre egyik megközelítés a másikkal szemben.
Van egy másik fontos aspektus is, amit ki kell emelnünk. Még a gimnáziumi matematikaórán is jellemzőnek mondható, hogy olyan problémákkal találkoznak a diákok, amik a megfelelő eszközt és megközelítési módszert alkalmazva egyfajta "hivatalos eredmény"-hez vezetnek: a megoldás végén egyértelmű, hogy a kívánt eredményt kaptuk, vagy nem. Valójában ez olyan implicit szemléletet tükröz, ami három szempontból sem igazán szerencsés.
Ha a matematikánál maradunk: nemcsak az extremális gráfelméletben, de a matematika tudományának teljes területén gyakori jelenség, hogy az igazán nehéz problémák megoldásában a részeredményeket, az áttöréseket is rendkívüli elismerés illeti. Mindez tehát a matematikai sikeresség fogalmát tehát árnyalja a középiskolai képhez képest. A normál tantervű gimnáziumok esetén talán ennek kisebb a jelentőssége, de a matematikában tehetséges diákok között nagyon fontos lehet a továbbtanulásuk szempontjából, ha ezt a hibás szemléletet árnyaljuk, megváltoztatjuk.
A második pedagógiai szempont. Ha van lehetőségünk egy adott problémán belül differenciáltan tanítani, nagyon jó, ha tudunk élni vele. Az extremális gráfelmélet ebből a szempontból nagyon szerencsés terület: az, hogy mekkora alsó és felső becslést tudunk adni a vizsgált paraméterre - például a gráf élszámára, tanulónként eltérő lehet, és ugyanúgy elismerhetjük annak teljesítményét, aki egy ügyes gondolattal a triviálisnál többet bizonyított - tehát például olyan alsó/felső korlátot adott meg, ahol a feladat feltételét valamennyire kihasználta - , mint aki teljesen megoldotta a feladatot. Ez motiváló is a gyerekek számára, és megengedi neki, hogy sikerként értékeljen olyan eredményt is, ami számára valóban siker is - még akkor is, ha ennél nagyobb siker elérésére is képes lehetne.
A harmadik szempontunk az elsővel kissé analóg: valójában nemcsak a matematikában, hanem az élet számos területén jellemző az, hogy egy feladat részmegoldása már komoly siker lehet, vagy hogy a pontos eredmény számunkra megfelelő megközelítése elegendő is lehet. Egy informatikus, mérnök vagy or-

vos számára, ha a vizsgált program futási ideje, az épület tervének stabilitása vagy az ellenszérum hatékonysága egy megfelelő küszöbértéket elér, akkor eredményesnek tekinthetjük a munkát. Ennek szellemében bátran bátoríthatjuk azon diákjainkat is, akik az adott feladatban teljes megoldásig nem jutottak el, de (önmagukhoz képest) figyelemre méltő eredményt értek el.

Előfordulhat, hogy bizonyos diákok számára az első lépés megtétele már problémát jelent: hogyan fogjon hozzá? Ennek a esélyét tanárként csökkenthetjük azzal, ha a szakkör/óra elején átismételjük a vonatkozó előzetes tudást, illetve személyesen neki szóló segítő kérdéseket teszünk fel, ha elakad. E bizonyos első lépés megtétele sokszor csak annyi volna, hogy próbálja meg elképzelni, milyenek lehetnek a keresett gráfok, milyen struktúra lehet például megfelelő. Ezt az elképzelést segítheti, ha elkezd a feltételnek megfelelő (kezdetben például kis csúcsszámú) gráfokat felrajzolni. A témakörünkbe tartozó feladatok esetében tipikus jelenség, hogy a kevés élszámú (például akár az üres) gráf megfelelhet a feltételnek, és egyenként megnézhetjük, mely élek hozzávétele lehet még engedélyezett. Annak a gráfnak a struktúrája, amihez további élet már nem vehetünk hozzá, hogy ne sértse a feltételt, általában erős struktúrával rendelkezik, és ha nem is az optimális gráfot kaptuk meg, segíthet az optimális megtalálásában.
E ponton hallgatólagosan feltételeztük, hogy a gond nem abból származik, hogy kevés alkalommal találkoztak a gráfmodellel a téma tárgyalásánál - természetesen ha az elindulást a gráfokról alkotott hézagos szemléleti kép okozza, akkor érdemes visszanyúlni egyszerűbb gráfelméleti feladatokhoz.

Végezetül: a szakkör időbeli rugalmassága a munkamódszerben is változtatási lehetőségeket jelent. Míg a téma frontális előadásával talán sokkal több eredményt tudnánk ismertetni, és több ismeret befogadásának lehetősége állhat fenn, az egyéni otthoni - tanárral konzultált előrahaladás, vagy a páros, illetve csoportos munka eredménye, melyben egymástól is tudnak tanulni megoldásokat és ötleteket, összességében mélyebben megmarad az emlékezetükben, és sokszor élményszerűbb is.

3. fejezet

Gráfelméleti szakköri feladatsorok

A következő feladatokkal a Turán-tétel alkalmazásához ajánlhatjuk: a megoldás kulcsa, hogy megfelelő (gráf)modellt válasszunk, és vegyük észre, hogy a feladat feltétele - közvetlenül vagy közvetetten - éppen annak felel meg, hogy a modellgráfban nem találunk adott csúcsszámú teljes részgráfot. Ekkor viszont van felső becslésünk a tétel értelmében a gráf élszámára.

3.1. Felépített feladatsor a Turán-tétel jellegű problémakörhöz

3.1.1. Feladat. *Fruzsina Activityzni hívja* 19 *legjobb barátnőjét, de kissé csalódottan látja be, hogy egyetlen négyfős csapatot sem tudnak alakítani, hogy a kvartettben mindenki mindenkit ismerjen.*
Legalább hány új ismeretség köttetik Fruzsi játékdélutánján?

3.1.2. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy n csúcsú gráf csúcsai színezhetőek* 5 *színnel úgy hogy egyszínű csúcsok közt nem vezet él, akkor legfeljebb* $2n^2/5$ *éle lehet a gráfnak!*

3.1.3. Feladat. *Adott n origó kezdőpontú félegyenes. Mutassuk meg, hogy* *legfeljebb* $n^2/4$ *olyan pár lehet köztük, melyek szöge nagyobb mint* 120 *fok! Van-e olyan példa, amikor* $n^2/4$ *van?*

3.1.4. FELADAT. [1] *Az n csúcsú G egyszerű gráf éleinek halmaza előáll, mint két páros gráf élhalmazának uniója. Mutassuk meg, hogy $e(G) \leq \frac{3}{8}n^2$, ahol $e(G)$ a G éleinek számát jelöli.*

3.1.5. FELADAT. *Az egyszerűsített ötös lottón 90 számból húznak 5-t, egy szelvényen azonban csak 2 számot jelölnek meg. Minimum hány szelvényt kell kitölteni, hogy biztosan legyen két találatosunk?*

3.1.6. FELADAT. *Egy 15 pontú gráf éleit pirossal és kékkel színeztük meg, hogy nincs egyszínű háromszög a gráfban. Maximum hány éle van a gráfnak?*

3.1.7. FELADAT. *A 10 csúcsú teljes gráf éleit k színnel színezzük úgy, hogy bármely k pontot választva a köztük futó élek között mind a k szín előfordul. Határozzuk meg a legkisebb k-t, melyre létezik ilyen színezés!*

3.1.8. FELADAT. [2]

Egy egyszerű G gráf csúcsaira nemnegatív racionális számokat írunk, amelyek összege 1. *Ezután minden élre ráírjuk a két végén található csúcsra írt szám szorzatát. Végül képezzük az éleken kapott szorzatok A összegét. Határozzuk meg A maximumát az alábbi esetekben! Hogyan osszuk el a számokat a csúcsokra, hogy a maximumot kapjuk?*

Az egyszerű gráf legyen
(a) négy hosszú kör;
(b) négy csúcsú, 5-élű gráf;
(c) négy csúcsú teljes gráf;
(d) C_n, azaz az n-hosszú kör;

---

[1] Az alábbi feladatok egy része várhatóan egy egyetemi feladatgyűjteménynek is részét képezi, Csikvári Péter, Pálvölgyi Dömötör és Nagy Zoltán Lóránt szerkesztésében (Diszkrét Matematikai Feladatok)

[2] Köszönet Hraskó Andrásnak, aki meghívott a Fazekas Mihály Gimnázium 2012. őszi speciális matematika tagozatos felkészülő táborába. Ide hoztam ezt és a következő feladatot. A megoldás leírását is kissé kiegészítette.

(e) $K_{m,n}$, azaz az $m+n$ csúcsú teljes páros gráf;

(f) K_n teljes gráf!

3.1.9. FELADAT. *Mutassuk meg, hogy a 3.1.8 feladatban tetszőleges (véges) egyszerű gráf esetén*

$$\sum_{(i,j)\in E(G)} a_i a_j \leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\omega(G)}\right),$$

és a becslés éles! ($\omega(G)$ a gráf legnagyobb teljes részgráfjának mérete.)

3.2. Megoldások, módszertani megjegyzések és tapasztalatok összegzése

3.1.1 Az első megfigyelésünk a Turán-tétel megismerése (és az ismeretségi gráf felelevenítése) után, hogy ha a lányokat pontként reprezentáljuk, kölcsönös ismeretségüket pedig összekötő élekkel, akkor a feltétel azt mondja ki, hogy az így kapott gráfban nincsen négy csúcsú teljes részgráf. Másrészt a kérdés arra vonatkozik, legalább hány él hiányzik a gráfunkból, ami nyilván annak meghatározásának felel meg, hogy legfeljebb hány éle lehet a gráfnak: a két szám összege ugyanis éppen $\binom{20}{2}$ lesz. A Turán-tételt tehát $k=3$ paraméterrel alkalmazhatjuk, amiből azt kapjuk hogy nem lehet több, mint $\frac{3-1}{2\cdot 3}\cdot 20^2$ él. Ebből az adódik, hogy legfeljebb $\lfloor \frac{3-1}{2\cdot 3}20^2 \rfloor = 133$ éle lehet a modellgráfnak, azaz legalább $\binom{20}{2}-133=57$ ismeretség születik.

Készen vagyunk-e? Vegyük észre, hogy nem! Annyit bizonyítottunk, hogy 57 ismeretség biztos születik, de lehet, hogy valójában mindenképpen születik több is. Először visszatérhetünk a Turán-tétel alkalmazásának lépéséhez. A tétel erősebb alakjából következik, hogy az egyszerűbb $\frac{k-1}{2\cdot k}n^2$ élszámra vonatkozó felső korlát helyett, mely $k \nmid n$ esetén nem egész felső korlátot ad, számolhatnánk az igazságnak megfelelő, n-csúcsú k-osztályú Turán-gráf élszámával mint felső korláttal, $k=6$, $n=20$ értékek mellett. A gráfot felrajzolva

azt látjuk, hogy az osztályok létszáma rendre $6, 6, 7$, és innen pontosan a 133-as élszám-küszöböt kapjuk.
Lehetséges-e, hogy ez az ismeretségi gráf? Világos, hogy nem: Fruzsina minden barátnőjét ismeri, így ő egy 19-fokú pont lesz az ismeretségi gráfban. A korábbi gondolatmenet azonban segít most: a barátnőket tekintve nem lehet semelyik három közülük egymás ismerős, hiszen akkor Fruzsinával négyen lennének. Tehát ha a 19-fokú csúcsot törüljük a gráfból, a maradék 19-csúcsú gráfban nem lehet háromszög (vagyis teljes hármas részgráf). Tehát a Mantel-tétel (vagyis a Turán tétel speciális esete) szerint legfeljebb $19 + \lfloor \frac{2-1}{2 \cdot 2} n^2 \rfloor = 109$ éle lehet az ismeretségi gráfnak, azaz legalább 81 ismeretség köttetik. Ez az eredmény már éles: ha Fruzsi barátnői közül van egy-egy 9- és 10-fős társaság, akik csak Fruzsit és a másik társaságot ismerik, a feladat feltétele teljesül, és éppen 81 ismeretség hiányzik jelenleg.

3.1.2 Gráfok csúcs-színezésével korábban már találkozhattak pár bevezető feladaton keresztül, de tulajdonképpen itt erre nincs szükség. Azt kell észrevenni, hogy a gráfban nincs hat csúcsú teljes részgráf (jelöléssel: K_6). Valóban, ha lenne, akkor az öt lehetséges szín közül volna olyan, ami két csúcsához is tartozik a K_6-nak, de ekkor a színezés nem a feltételünk szerinti. A Turán-tétel feltétele tehát teljesül $k = 5$-ös paraméterrel, így legfeljebb $\frac{5-1}{2 \cdot 5} n^2$ éle lehet a gráfnak.

Állításunk világos, hogy éles: az 5-osztályú Turán-gráfnál egyenlőséget kapunk az élszámra ha $5|n$, másrészt az egyes osztályokhoz külön-külön színt rendelve jó színezését kapjuk ennek a gráfnak.

3.1.3 A megoldás kulcsa ismét az, hogy megfelelő modellt találunk, amely segítségével a félegyenes-párokra tudunk fókuszálni. A geometriainak tűnő állítás azonnal egyszerű gráfelmélet feladattá változik, ha a félegyeneseknek csúcsokat, a $120°$-nál nagyobb szöget bezáró félegyenes-párokhoz a csúcsokat összekötő éleket rendelünk: ekkor a geometriai struktúránknak megfelelő gráfban kell az élek számát maximalizálni. Vegyük észre, hogy nincs ebben a gráfban háromszög: ez ugyanis olyan bezárt szögeket jelentene a félegyenesek között, melyek összege 360°-nál nagyobb. Ekkor viszont a Turán-tételt $k = 2$-re alkalmazva, (vagyis a Mantel-tételt alkalmazva) megkapjuk a kívánt $n^2/4$-es felső korlátot. Lehet-e ez a becslés éles? Pontosan akkor, ha egyrészt n páros, másrészt két egyenlő nagyságú osztályba sorolhatóak a csúcsok, az osztályok között pedig minden él be van húzva. Ez a geometriai struktúrában annak felel meg, hogy két osztályba sorolhatóak a félegyenesek, az osztályon belül a bezárt szögük "kicsi", a két osztály között viszont 120°-nál nagyobb. Ez meg is valósítható, ha felvesszük a síkon (az origón át) az x tengelyt mint számegyenest, és például az egyik félegyenesosztály félegyenesei a pozitív féltengellyel, a másik félegyenesei a negatív féltengellyel zárnak be 30°-nál kisebb szöget.

3.1.4 Könnyű látni, hogy két páros gráf élhalmazával a K_5 gráf nem fedhető: Akárhogyan partícionálja az első páros gráf két osztályba a csúcsokat, lesz egy legalább 3 nagyságú osztály, azaz egy K_3 amit az első nem fedett le, és ezt a második páros gráf sem tudja lefedni. Tehát az élhalmazok uniója K_5-mentes gráfot alkot, így Turán tételét $k + 1 = 5$-tel alkalmazva összesen legfeljebb $\frac{k-1}{2k}n^2 = \frac{3}{8}n^2$ éle lehet.

3.1.5 Feleltessünk meg a számoknak csúcsokat, és kössünk össze kettőt, ha együtt megjelöljük egy szelvényen, így kapjuk az $n = 90$ csúcsú G gráfot. Akkor nyerünk biztosan, ha bármely öt csúcs között van 2, akiket összekötöttünk, azaz a gráf komplementerében nincsen K_5 gráf. G komplementerének emiatt legfeljebb $\left\lfloor \frac{3}{8}n^2 \right\rfloor = 3037$ éle lehet a Turán tétel szerint, azaz G-nek legalább $\binom{90}{2} - 3037 = 968$ éle van, ennyi szelvényt kell kitöltenünk - illetve ennyi elegendő is. Valóban: ha a 1–22, továbbá a 23–45, 46–67, 68–90 számok között az összes lehetséges szelvényt kitöltjük, akkor éppen $968 = \binom{22}{2} + \binom{23}{2} + \binom{22}{2} + \binom{23}{2}$ szelvényt töltünk ki, és így öt kihúzott szám közül biztosan lesz kettő, ami ugyanabba a tartományba esik.
Látszik, hogy a skatulyaelvvel is szoros kapcsolatban van a vizsgált tételünk.

3.1.6 Tekintsük a színezett élek gráfját! Mivel az $R(3, 3)$ Ramsey-szám 6, ezért a gráfban nem lehet K_6, így a Turán-tétel szerint legfeljebb $\frac{4}{10}15^2 = 90$ éle lehet.

Valóban ez az elérhető maximum, mert ha 5 háromcsúcsú X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 csoportba osztjuk a csúcsokat, xy kék él ha $x \in X_i, y \in X_{i+1}$, piros ha $x \in X_i, y \in X_{i+2}$ valamelyik i-re, akkor nem lesz egyszínű háromszög a gráfban.

3.1.7 Turán tételéből adódik, hogy ha $k = 4$-gyel igaz lenne az állítás, akkor rögzítve egy színt - legyen például a piros -, minden pontnégyesbe esne ilyen színű él. Ekkor a piros élek száma legalább 12 lenne, a 3.1.5 és a 3.1.6 megoldások gondolatmenete szerint. Valóban: a pirostól különböző színek számára egy felső becslésünk adódik abból a felismerésből, hogy nem feszíthetnek teljes 4-es gráfot. Összesen azonban nincsen 4×12, csak 45 él a tízcsúcsú gráfban, emiatt $k \geq 5$. Vizsgáljuk tehát $k = 5$ értékét: létezik-e jó színezés 5 színnel? A válasz igenlő, könnyen mutathatunk ilyen színezést.

3.1.8 **(a)** Itt az $A = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_1$ szorzatösszeg maximumát keressük, ahol az a_i-k nemnegatívak és összegük 1. Vegyük észre, hogy $A = (a_1 + a_3)(a_2 + a_4)$ így érdemes alkalmaznunk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{(a_1 + a_3)(a_2 + a_4)} \leq \frac{(a_1 + a_3) + (a_2 + a_4)}{2} = \frac{1}{2}. \tag{3.1}$$

Tehát a $A \leq \frac{1}{4}$ és ez a határ el is érhető minden olyan esetben, amikor $a_1 + a_3 = \frac{1}{2}$ és $a_2 + a_4 = \frac{1}{2}$.

(c) Most az $A = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_1 + a_1a_3 + a_2a_4$ összeget vizsgáljuk.

Mivel

$$A = \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)}{2}$$

és a számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenség szerint

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{4}} \geq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{1}{4},$$

így

$$A \leq \frac{1 - \frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{8},$$

és ez a maximum akkor vétetik fel, ha a változók mind egyenlők egymással, azaz $\frac{1}{4}$-del.

(b) Fusson az átló az 1. és a 3. csúcs között, azaz vizsgáljuk az $A = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_1 + a_1a_3$ összeget!

(b) 1. (valójában nem jó) megoldása: Mivel $A = (a_1 + a_3)(a_2 + a_4) + a_1a_3$ és $(a_1 + a_3)(a_2 + a_4)$ maximuma akkor van, amikor $(a_1 + a_3) = (a_2 + a_4) = \frac{1}{2}$ míg $(a_1 + a_3)$ rögzítése mellett a_1a_3 akkor veszi fel a maximumát, ha $a_1 = a_3$, így $a_1 = a_3 = \frac{1}{4}$, $(a_2 + a_4) = \frac{1}{2}$ esetén kapjuk a maximumot, amelynek értéke $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$.

(b) 2. megoldása: $A = (a_1 + a_3)(a_2 + a_4) + a_1a_3$ így lényegtelen, hogy az a_2-re és a_4-re összesen jutó „súly" hogyan oszlik el a_2 és a_4 között, feltehetjük, hogy az összes „súlyt" az egyikre tettük, tehát pld $a_4 = 0$. Tehát most az $A' = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$ összeget kell maximalizálnunk. A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenségből (vagy három számtani-mértani közép összegéből) adódóan $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1 \leq a_1^2+a_2^2+a_3^2$. Mivel $a_1+a_2+a_3 = 1$, ebből $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1 \leq 1/3$ adódik, ami $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{3}$ választás mellett éles is. A maximum értéke $3\frac{1}{9} = \frac{1}{3}$.

A maximum két esetben vétetik fel. Vagy $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{3}$ és $a_4 = 0$, vagy $a_1 = a_4 = a_3 = \frac{1}{3}$ és $a_2 = 0$.

Megjegyzés A 2. megoldásban kaptuk a jó eredményt. Ez valóban nagyobb, mint a korábban kapott érték: $\frac{1}{3} = \frac{16}{48} > \frac{15}{48} = \frac{5}{16}$. Az 1. megoldásban ott követtük el a hibát, hogy egy olyan kifejezést is maximalizálni akartunk – nevezetesen az $(a_1 + a_3)(a_2 + a_4)$ szorzatot – amely nem volt feladatunk.

(d) $n = 3$ esetét a (b) feladatrészben tisztáztuk, a maximum $\frac{1}{3}$ volt, míg (a)-ban láttuk $n = 4$ esetét, ahol a maximum $\frac{1}{4}$-nek adódott. Látni fogjuk, hogy ez lesz a maximum minden $n \geq 4$ esetben.

Az A kifejezés értéke elérheti az $\frac{1}{4}$ értéket pl. $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ esetén. Belátjuk, hogy ez a felső korlát. Vegyünk egy a_i, a_{i+2} párt. Ezek az összegben $a_{i-1}+a_{i+1}$, illetve $a_{i+3}+a_{i+1}$ szorzóval szerepelnek. Feltehető, hogy a szorzók közül az előbbi a nagyobb; ekkor egy $a_1 \dots, a_n$ szám-n-esből kiindulva az A kifejezés értékét növeljük, ha a_i helyére $(a_i + a_{i+2})$-t írjuk, míg a_{i+2}-t lenullázzuk. Feltehetjük tehát, hogy $a_n = 0$. Ekkor legyen w a páratlan indexű a_i-k összege, a feltétel szerint tehát $(1-w)$ a páros indexűeké. Ekkor $A = \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} \leq w(1-w)$ teljesül, mivel a jobboldalon a baloldal minden nemnegatív tagja szerepel, eltekintve a 0 értékű $a_1 a_n$ szorzattól. $w(1-w) \leq 1/4$, amiből állításunk következik.

$n > 4$ esetén pontosan akkor kapunk maximumot, hogyha az egyik csúcsra $\frac{1}{2}$-et, két szomszédjára pedig tetszőleges eloszlásban összesen $\frac{1}{2}$-et teszünk.

(e) Jelölje a páros gráf egyik osztályának csúcsaira írt számokat b_1, b_2, $\dots$, b_m, a másik osztály csúcsaira írt számokat c_1, c_2, $\dots$, c_n. Az

$$A = \sum_{i}^{m} \sum_{j}^{n} b_i c_j = \left(\sum_{i}^{m} b_i \right) \left(\sum_{j}^{n} c_j \right) = BC$$

kifejezés maximumát keressük, ahol $\sum_i^m b_i = B$ és $\sum_j^n c_j = C$. Mivel B és C nemnegatív számok és összegük 1, így szorzatuk maximumát a $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$ esetben kapjuk. A maximum értéke $\frac{1}{4}$.

Megjegyezzük, hogy a végeredmény és a bizonyítás jó a *teljes* páros gráfok mellett *tetszőleges* – legalább egy éllel rendelkező – páros gráfok esetén is.

(f) A (c) esethez hasonlóan járhatunk el:

$$A = \sum_{i>j}^{i,j \leq n} a_i a_j = \frac{\left(\sum_i a_i\right)^2 - \left(\sum_i^n a_i^2\right)}{2},$$

ahol a számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenség szerint

$$\sqrt{\frac{\sum_i^n a_i^2}{n}} \geq \frac{\sum_i a_i}{n} = \frac{1}{n},$$

így

$$A \leq \frac{1 - \frac{1}{n}}{2} = \frac{n-1}{2n},$$

és a maximumot akkor kapjuk, amikor az összes változó egyenlő egymással, azaz $\frac{1}{n}$-nel.

3.1.9 Legyen az a_i súlyok nevezőinek legkisebb közös többszöröse N, és készítsük el azt a G' gráfot, amelyet az G felfújásával kapunk a következő módon: i csúcs helyét egy Na_i nagyságú X_i független halmaz veszi át, és ha $ij \in E(G)$, akkor X_i és X_j minden csúcsa legyen összekötve. Így $|V(G')| = N$, és

$$|E(G')| = N^2 \sum_{(i,j)\in E(G)} a_i a_j.$$

Ha a G gráfban nincs $\omega(G)+1$-es klikk, akkor G'-ben szintén teljesül ez, ami miatt Turán tétele szerint az élszám becsülhető az alábbi módon:

$$|E(G')| \leq \frac{\omega(G)-1}{2\omega(G)} N^2.$$

N^2-tel való osztás után az állítást nyerjük.

Turán tétel nélkül is könnyen célba érhetünk. Vegyünk egy súlyeloszlást: $(a_1, a_2, \ldots a_n)$, és tekintsünk egy olyan (i,j) csúcspárt, amelyre $a_i a_j > 0$, és $ij \in E(G)$. Hasonlítsuk össze i és j csúcsok szomszédainak súlyösszegét; feltehető, hogy ez az összeg i esetén nagyobb (vagy egyenlő). A kifejezés értéke nem csökken, ha $a_i := a_i + a_j, a_j := 0$ módon módosítjuk a súlyokat. Az eljárást iterálva feltehető, hogy nemnulla súlyok csak egy G-beli klikkhez tartoznak, innen pedig a 3.1.8 feladat (f) része adja a megoldást.

3.3. Feladatsor a Kővári - T. Sós - Turán tétel jellegű problémakörhöz

A Turán-tétel esetében olyan gráfokat vizsgátunk, amik adott p méretű K_p klikket nem tartalmaztak. A következő feladatsor feladatai olyan gráfokkal hozhatók összefüggésbe, és olyan gráfok élszámát határozzák meg, amik adott a, b pozitív számpárra a $K_{a,b}$ teljes páros gráfot nem tartalmazzák. Vegyük észre, hogy $\{a, b\} = \{1, 2\}$ esetet már vizsgáltuk is: ez volt a 2.5.1 feladat. Az előző K_p p-klikkmentes esettel szemben azt tapasztaljuk, hogy az élszám nagyságrendje ilyenkor kisebb, mint n^2.

3.3.1. FELADAT. *Egy gráf csúcsainak fokszámai* $d_1, d_2, \dots d_n$. *Hány 2-hosszú út (népszerűbb nevén cseresznye) van a gráfban?*

3.3.2. FELADAT. *Mutasd meg, hogy ha egy gráfban nincsen 4 csúcsú kör (vagyis* $K_{2,2}$*-mentes), akkor* $e \leq \frac{n^{3/2}}{2} + \frac{n}{4}$*!*

3.3.3. FELADAT. *(a) Tegyük fel, hogy egy* n *csúcsú gráfban nincs háromszög. Mutasd meg, hogy legfeljebb* $e(n-2)/2$ *cseresznye lehet benne.*
(b) Bizonyítsd be, hogy egy e *élű,* n *csúcsú gráfban legalább* $\frac{4e^2 - en^2}{3n}$ *háromszög van.*

Vegyük észre, hogy ez Mantel tételének egyfajta általánosításaként értelmezhető: ha az élszám meghaladja a bűvös $n^2/4$-es határt, akkor hirtelen a fenti képlet szerinti mértékben kezd növekedni a háromszögek száma a gráfban.

3.3.4. FELADAT. *[9] (a)* K_n *éleit pirosra és kékre színeztük úgy, hogy minden csúcsra pontosan* k *kék él illeszkedik. Bizonyítsd be, hogy az egyszínű háromszögek száma*

$$\binom{n}{3} - \frac{n \cdot k \cdot (n-k-1)}{2}.$$

(b) Mutassuk meg, hogy ha K_n *éleit tetszőlegesen színezzük két színnel, akkor az egyszínű háromszögek száma legalább*

$$\frac{n(n-1)(n-5)}{24}.$$

3.3.5. FELADAT. 10 *ember teniszversenyt rendez, mindenki mindenkivel játszik. Az i-edik ember* x_i *ellenfél ellen győzött és* y_i *ellenfél ellen vesztett. Bizonyítsd be, hogy*

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = \sum_{i=1}^{10} y_i^2.$$

3.3.6. FELADAT. *Egy 10 csúcsú gráfban nincs háromszög és négy hosszú kör. Mutasd meg, hogy legfeljebb* 15 *éle van!*

3.3.7. FELADAT. *Egy* n *csúcsú gráfban nincs* $K_{3,3}$. *Mutasd meg, hogy legfeljebb* $2n^{5/3}$ *éle van.*

A feladat részletes megbeszélése után a címben szereplõ tételt is kitûzhetjük, de legalább is kimondhatjuk:

3.3.8. TÉTEL (Kõvári-Sós-Turán [17]). *Ha $a \leq b$ egynél nagyobb egészek, és a G egy n-csúcsú, $K_{a,b}$-mentes gráf, akkor*

$$e(G) \leq \frac{1}{2}\sqrt[a]{b-1} \cdot n^{2-\frac{1}{a}} + an.$$

3.3.9. FELADAT. *Adott n pont a síkon, melyek közül semely három nincs egy egyenesen. Mutasd meg, hogy legfeljebb n^2 egyenlőszárú háromszög választható ki, melyeknek a csúcsai az adott pontok közül kerülnek ki!*

3.3.10. FELADAT. *Adott n pont a síkon. Mutasd meg, hogy minden távolság maximum $n^{3/2}$-szer fordulhat elő.*

3.4. Megoldások, módszertani megjegyzések és tapasztalatok összegzése

3.3.1 Számoljuk meg őket a száruknál fogva! Az eredmény $\sum_{i=1}^{n}\binom{d_i}{2}$.

3.3.2 Számoljuk meg a cseresznyéket a gyümölcsök felől! Minden csúcspárra legfeljebb 1 cseresznye illeszkedik ha nincs C_4 a gráfban, ezért $\sum_{i=1}^{n}\binom{d_i}{2} \leq \binom{n}{2}$. Felhasználva a $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2e$ összefüggést és a d_i számokra vonatkozó számtani és négyzetes közepek közti egyenlőtlenséget, $\frac{(2e)^2}{2n} - e \leq \frac{n(n-1)}{2}$, innen e-re egy másodfokú egyenlőtlenséget kapunk, amiből adódik, hogy e kisebb, mint a másodfokú egyenlet nagyobbik gyöke:

$$e \leq \frac{2n + \sqrt{4n^2 + 16n^2(n-1)}}{8} \leq \frac{n^{3/2}}{2} + \frac{n}{4}.$$

3.3.3 (a) Vegyünk egy tetszőleges xy élet. Nem lehet közös szomszédjuk, mert nincs K_3 a gráfban, ezért az xy-t tartalmazó cseresznyék száma maximum

$(n-2)$. Összegezzük ezt minden élre, ezzel megszámoltunk kétszer minden cseresznyét (mindkét száránál), azaz az állítás teljesül.
(b) A cseresznyék száma éppen a háromszögek t_3 számának háromszorosából, és a háromcsúcsú kétélű részgráfok y számának összegéből adódik. y-t szeretnénk felülről becsülni. $y \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i(n-d_i-1)}{2}$. Valóban, így minden háromcsúcsú két vagy egyélű részgráfot kétszer számoltunk. Innen kapjuk, hogy

$$3t_3 \geq \sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} - \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i(n-d_i-1)}{2} =$$

$$= \frac{\sum_i d_i^2 - d_i}{2} - \frac{\sum_i d_i(n-d_i-1)}{2} \geq \frac{4e^2}{n} - ne,$$

ami az állítással ekvivalens.

3.3.4 (a) Vonjuk le az összes lehetséges háromszögek számából a nem egyszínű háromszögek számát! Utóbbiakat úgy kapjuk, hogy összeszámoljuk az egy csúcsra illeszkedő eltérő színű élpárok számát - így minden ilyen háromszöget kétszer vettünk, ebből adódik a képlet.
(b) Az (a) feladatrész gondolatát visszük tovább. Általánosan felírható, hogy az egyszínű háromszögek pontos száma

$$\binom{n}{3} - \sum_{i=1}^{n} \frac{d(i) \cdot (n-d(i)-1)}{2},$$

ha $d(i)$-vel jelöljük az i csúcsba futó kék élek számát. A $d(i) \cdot (n-d(i)-1) \leq (\frac{n-1}{2})^2$ becslést minden i-re alkalmazva kapjuk a feladat állítását.

3.3.5 Vegyük észre, hogy $\sum_i x_i = \sum_i y_i$ a meccsek száma, emiatt a bizonyítandó ekvivalens azzal, hogy

$$\sum_i \binom{x_i}{2} = \sum_i \binom{y_i}{2}.$$

Tournamentben ábrázolva a meccsek kimeneteleit (a győztesektől a vesztesek felé irányítva az éleket), azt kell látnunk, hogy közös csúcsból kifelé vezető élekből képezhető párok száma a befelé vezető élpárok számával egyezik meg. Ez valóban igaz, hiszen irányított háromszög $0-0$-val, vagy $1-1$-gyel növeli a kétféle kifejezés értékét annak függvényében, hogy egyirányú kört határoznak meg az élei vagy nem.

3.3.6 Minden csúcspárra, amely élet feszít, 0 cseresznye (közös szomszédos csúcs) illeszkedhet a K_3 mentesség miatt, egyébként pedig legfeljebb 1 a C_4-mentesség miatt. Ebből adódóan $\sum_{i=1}^{n}\binom{d_i}{2} \le \binom{n}{2} - e$. A korábbiakhoz hasonlóan a számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenségből kapjuk, hogy $\frac{(2e)^2}{2n} \le \frac{n(n-1)}{2}$, amiből $e \le n\frac{\sqrt{n-1}}{2}$ következik, $n = 10$-re a feladat állítását igazolva.

3.3.7 A 3.3.2 gondolatmenetét követjük. Tetszőleges ponthármashoz legfeljebb kettő közös szomszéd tartozhat, ez alapján becslünk:

$$2\binom{n}{3} \ge \sum_{i=1}^{n}\binom{d_i}{3} > \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}(d_i-2)^3 \ge \frac{n}{6}\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i-2)}{n}^3.$$

Becsüljük a jobboldalt a köbös-számtani közép közti egyenlőtlenséggel, majd szorozzunk n^2-tel. Eszerint $2n^5 \ge (2e-2n)^3$, amiből adódik a kívánt becslés.

3.3.9 Legyen az egyenlőszárú háromszögek halmaza A. Minden háromszöghöz rendeljük hozzá (egyik) alapját. Vegyük észre, hogy minden alap legfeljebb kétszer szerepel, ellenkező esetben az alappal szemközti csúcsok mind az alap oldalfelező merőlegesére esnének. $\binom{n}{2}$ csúcspár van, azaz az egyenlőszárú háromszögek száma legfeljebb $2\binom{n}{2} \le n^2$.

3.3.10 Legyen l egy tetszőlegesen választott távolság. Kössük össze az éppen l távolságra eső pontokat. Vegyük észre, hogy az így kapott gráfban nincsen $K_{2,3}$ részgráf: ellenkező esetben volna a síkon három, egy rögzített pontpártól egyforma távolságra eső pontja. A 3.3.2 gondolatmenetét követjük : Tetszőleges pontpárhoz legfeljebb kettő közös szomszéd tartozhat. Ez alapján befejezhetjük a bizonyítást.

Irodalomjegyzék

[1] Andrásfai Béla, Ismerkedés a gráfokkal, *Tankönyvkiadó, Budapest*, 1971.

[2] Hajnal Imre, Számadó László, Békéssy Gabriella, 9-12. Matematika, *Nemzeti Tankönyvkiadó*, 2003.

[3] Hajnal Imre, dr. Nemetz Tibor, dr. Pintér Lajos, Matematika I-IV. (fakultatív B változat) *Tankönyvkiadó Budapest*, 1981-82.

[4] Hatévfolyamos speciális matematika tagzat tanrendje, *Összeállították az Árpád Gimnázium, a Berzsenyi Gimnázium, a Fazekas Mihály Gimnázium és a Szent István Gimnázium matematikatanárai valamint Pálmay Lóránt vezető szaktanácsadó.*

[5] Juhász István, Orosz Gyula, Paróczay József, Szászné Simon Judit: Matematika 9-12, Az érthető matematika, *Nemzeti Tankönyvkiadó*, 2011.

[6] Kerettanterv, *http://www.nefmi.gov.hu/kozoktatas/tantervek/gimnazium*, 2000.

[7] Kiss György, Szőnyi Tamás, Véges geometriák, *Polygon, Szeged,* 2001.

[8] Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István, Sokszínű matematika 9-12, *Mozaik,* 2004-2005.

[9] Lovász László: Kombinatorikai problémák és feladatok, *Typotex*, 2000.

[10] Nemzeti Alaptanterv, 2012.

[11] Turán Pál, Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatról, *Matematikai és Fizikai Lapok* 48, 436 - 452, 1941.

[12] M. Aigner, G. M. Ziegler, Proofs from the BOOK, *Springer-Verlag, Berlin*, 2001.

[13] N. Biggs, Algebraic graph theory, *Cambridge University Press,* 1994.

[14] P. Erdős, Some applications of graph theory to number theory, *The Many Facets of Graph Theory (Proc. Conf., Western Mich. Univ., Kalamazoo, Mich., 1968), pp. 7782.* , 1969.

[15] C. Godsil, G. Royle, Algebraic graph theory, *New York, Springer*, 2001.

[16] L. Gross, W. Tucker, Topological graph theory, *Dover Publications*, 1987.

[17] T. Kővári, V. Sós, P. Turán, On a problem of Zarankiewicz, *Colloquium Mathematicae. Vol. 3. No. 1.* 1954.

[18] L. Lovász, Large networks and graph limits, *American Mathematical Soc. Vol. 60.* 2012.

[19] E. Szemerédi, On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression, *Acta Arith 27.*, 199-245, 1975.