TANÁRI SZAKDOLGOZAT

Wintsche Gergely

BUDAPEST
2013

Tanári szakdolgozat

Tanulmány

A valószínűségszámítás tanítása

Wintsche Gergely

matamatikatanár MA

levelező

ELTE PPK

Témavezető: Vásárhelyi Éva

2013

Tartalomjegyzék

Bevezető

Véletlen összetevőket már az emberré válás kezdetén is mérlegeltek őseink, szerencsejátékokat pedig már az ókorban is játszottak az emberek. Életünk során mi is számtalanszor kerülünk olyan helyzetbe, amikor valószínűségi alapon hozunk döntéseket. Az egyik leghétköznapibb eset az, amikor mérlegeljük, hogy cipeljünk-e egész nap egy esernyőt magunkkal, vagy kockáztassuk meg azt, hogy nem visszük magunkkal és nem foglaljuk el táskánk egy részét ezzel a haszontalan holmival. Ekkor azonban van némi esély arra, hogy bőrig ázunk. Agyunk ilyen esetekben számtalan dolgot értékel ki. Milyen idő van most? Milyen idő volt tegnap? Mit olvastunk az időjárásjelentésben? Mennyi egyéb holmit kell még belepréselnünk a táskába? Számtalan összetevője lehet a kérdésnek, de előbb utóbb mindenki döntésre jut. Vannak olyan információk, amelyek segítenek a kérdés eldöntésében. Londonban például nem sokszor hibázhatunk, ha minden nap cipelünk magunkkal egy esernyőt, de ugyanez Athénban már megkérdőjelezhető.

Ilyen, illetve ehhez hasonló helyzettel mindenki találkozott már, de oly természetesnek tűnnek, olyannyira hozzátartoznak mindennapjainkhoz, hogy nem is gondoljuk végig, hogy ilyenkor valószínűségű döntéseket hozunk. Nem csak mi nem szoktunk erre gondolni. Törvényeket keresni a véletlenben olyannyira furcsa gondolatnak tűnik, hogy évezredeken keresztül nem próbálkoztak a valószínűségi jelenségek matematikai leírásával. Annak ellenére nem foglalkoztak ezzel, hogy számtalan ember halt meg, amiért nem tudta megfizetni adósságait, melyek valamilyen szerencsejátékból fakadtak. Az ő esetükben persze eléggé ironikus szerencsejátékra hivatkozni, jobb lenne inkább balszerencse-játéknak, vagy pechjátéknak hívni. Ki menne azonban be egy játékterembe, ha azzal reklámoznák magukat, hogy „Ez az a hely, ahol inged-gatyád elveszítheted". E helyett reklámjaik jó szórakozásról és mesés nyereményekről szólnak. Ez igaz is lehet. Ha valaki élvezi a feszültséget, akkor jó helyen jár. Nem túl sok pénz befektetésével végigszórakozhatja az estéjét. Ha az a célja, hogy jól érezze magát, akkor a pénzéért ezt meg is kapja a kaszinóktól. Sőt, mindig akad néhány ember, aki még nyer is valamennyi pénzt. A klasszikus mondás szerint:

– *Hogy lehet egy kisebb vagyonnal kijönni egy kaszinóból?*

– *Egy nagyobb vagyonnal kell betérni.* A véletlentől függő események logikai, matematikai hátterével csak a 17. században kezdtek foglalkozni. A tudományok fejlődése, különösen a fizika és a kémia előretörése tette szükségessé a valószínűség mint tudomány újragondolását. A matematikusként, fizikusként és filozófusként is elismert Henri Poincaré a 19. század végén így érvel könyvében [HP]: „Már maga a név: valószínűség-számítás, látszólagos képtelenség, mert a valószínűség a bizonyossal szemben olyasvalami, a mit nem tudunk; hogyan lehet már most azt, a mit nem tudunk kiszámítani? Mégis sok kiváló tudós foglalkozott e számítással és tagadhatatlan, hogy a tudomány némi hasznot húzott belőle."

A dolgozat első fejezetében áttekintem a valószínűségszámítás oktatásának didaktikai, pedagógiai vonatkozásait. Kitérek a nem túl régre visszanyúló történeti előzményekre, és beillesztem a matematika egészének oktatásába.

A második fejezetben egyes feladatok kapcsán felmerült konkrét módszertani kérdésekkel foglalkozom. Rámutatok a tanulók lehetséges és valóban elkövetett hibáira, fogalmi különbségekre és azok tisztázására. Igyekszem a feladatokat olyan köntösben tárgyalni, hogy azok megfeleljenek a ma modernnek tartott és általánosan elfogadott igényeknek.

A dolgozat mindkét fejezete tartalmaz részeket a megjelenés alatt álló módszertani és didaktikai jegyzetből, melynek én is szerzője vagyok.

1. fejezet

A matematika, és azon belül a valószínűségszámítás tanítása

1.1. Matematikatanítási irányzatok

A tanár tanítási stílusát elsősorban az adott tárggyal kapcsolatos, ebben az esetben a matematikáról és matematika tanításáról alkotott elképzelései és saját egyénisége határozzák meg. Fontos, hogy a matematika módszertani tanulmányok során többféle lehetséges tanítási módszer előkerüljön, mintegy lehetőséget teremtve arra, hogy a különböző tanítási elképzelések beépüljenek az egyénileg kialakuló tanítási stílusba.

A tanítási stílusokban a következő részben leírt főbb irányzatok érvényesülnek, amelyek egymástól elég jól elkülöníthetők. Leggyakrabban a következő irányzatokat említik a matematika tanításával kapcsolatban: hagyományos oktatás, problémamegoldó oktatás, gyakorlatorientált oktatás, realisztikus matematikaoktatás, projektorientált oktatás, New-Math vagy formalista-strukturalista irányzat ([AA]. Az alábbiakban röviden összefoglalom azokat a főbb vonásokat, amelyek alapján összehasonlíthatók és el is különíthetők a különböző oktatási elképzelések.

1.1.1. A hagyományos tanítási irányzat

Magyarországon leginkább elterjedt tanítási stílusok a hagyományos és a problémaorientált tanítási stílus. A hagyományos oktatás, ahogy a neve is mutatja inkább a hagyományokon, a lassan változó, jól bevált régi módszereken alapul, a klasszikus poroszos oktatási elvekből eredeztethetően.

Az ismeretelsajátítás a szokásos menet szerint történik: új anyag ismertetése, közvetlen alkalmazás, gyakorlás, további alkalmazások és összetettebb feladatok; A tanár elsődlegesen „tanítja” a tanulókat, így elsősorban a bemutatott anyag utánzására ösztönzi őket, miközben a tantervi anyag elsajátítására koncentrál. Meg van győződve arról, hogy a tanulók (csak) azt tanulják meg matematikából, amit megtanítanak nekik. A feladatok a tananyag feldolgozásához illeszkednek, különböző, tananyaggal kapcsolatos célok elérését segítik elő, általában egymástól függetlenek és kis lépésekben vezetik a tanulót. A gyakorlás a későbbiekben számon kérendő ismeretekre helyezi a hangsúlyt. A feladatok megoldásait általában gyorsan lehet „jó”-nak vagy „rossz”-nak értékelni, mivel a tanulók egyéni elgondolásai, esetlegesen különféle eredményre vezető megoldási módok nem kerülnek elő. A tanuló igyekszik tökéletes megoldásokat készíteni és elveti azokat az ötleteket, amelyek ehhez nem segítik hozzá. Hozzászólásaiban inkább a teljes megoldás ismertetésére szorítkozik (ha szerinte tud ilyet). A tanulók inkább egyénileg dolgoznak a jobban teljesítők időnként további feladatot kapnak, de az osztály leginkább együtt dolgozik; a megoldásokat is közösen beszélik meg; a jó megoldást leginkább saját eredményüknek tartják.

1.1.2. A problémamegoldó stílus

A problémamegoldó módszer Pólya György tanítási elképzelésén alapul, melynek fő gondolata a feladatok, témák problémacentrikus tárgyalása, nagy hangsúlyt helyezve a problémamegoldás folyamatára, a problémamegoldó gondolkodás fejlesztésére ([PGY], [AA]).

Az ismeretelsajátításban központi helyen van a felvetett probléma, amelynek megoldásához ismeretrendezésre, problémamegoldó stratégiák kiválasztására van szükség és nem maradhat el a talált, lehetőleg többféle megoldási mód vizsgálata (reflexió) sem. Definíciók, megjelölések itt is előzetes közlésre kerülnek, ám a fogalmakat, tételeket problémába ágyazva tárgyalják.

A tanár inkább a tanulói aktivitást igyekszik elősegíteni, így az önálló felfedezést, a rendezett „kutatást” ösztönzi, elsősorban a megfelelő tanulói tevékenységre koncentrál. Meg van győződve arról, hogy a tanulóknak is vannak megfelelő matematikai ötleteik, és hogy ezek beépíthetők ismereteikbe.

A feladatok általában összefüggnek egymással, közöttük gyakoriak a „nagy lépések” és a differenciálásra is lehetőséget teremtenek.

Leginkább elmélyítő, kiegészítő gyakorlófeladatok szerepelnek.

A tanulók egyéni, esetleg különböző eredményre vezető elképzelései megvitatásra kerülnek.

A tanuló igyekszik tökéletes megoldásokat készíteni, de azokkal az ötletekkel is foglalkozik, amelyek nem vezetnek ilyenekhez és ezeket a feladat megbeszélésekor megemlíti.

A tanulók leginkább párokban vagy különböző szempontok szerint szervezett csoportokban dolgoznak (ezek szervezése függ az adott feladattól, és történhet például a tanulók teljesítménye alapján); és gyakran átélik, hogy órai munkájuk eredménye az egész osztály együttes munkájának köszönhető. Ugyanakkor nem lehet figyelmen kívül hagyni a legújabb kutatásokat, melyek szerint maga a gondolat egyéni alkotás, annak előkészítése, illetve értékelése lehet a csoport feladata.

A gyakorlatban a tanárok egyéniségüknek, tanításról alkotott elképzelésüknek, tapasztalataiknak megfelelően alkalmazzák leginkább e két stílus valamilyen elegyét. Így *inkább hagyományosnak vagy inkább problémamegoldónak* mondható stílus szerint tanítanak.

Ahhoz, hogy egyrészt minél jobban érzékelni lehessen a kétféle tanítási stílus közötti különbséget, illetve, hogy a két stílus jegyeiből tudatosan is beépíthessünk elemeket saját stílusunkba, érdemes „stílusgyakorlatok”-at végezni. Ez azt jelenti, hogy érdemes megpróbálni egy-egy téma tanításához adott stílusú feldolgozást elképzelni.

A továbbiakban röviden bemutatunk néhány további tanítási stílust azok közül, amelyek hatással voltak, illetve vannak a magyar matematikaoktatásra.

1.1.3. A New-Math vagy strukturalista irányzat

A New Math irányzatát megelőzte a Bourbaki csoport matematikusainak munkássága [HaP], akik a második világháború előtt publikálták munkáikat. Céljuk a modern matematika egységesítésének, szintézisének megvalósítása volt. Az ehhez kapcsolódó matematikatanítási elgondolás mely a matematikát szigorú szabályok által felépített rendszernek tekintette „Új Matematika” angolul a „New Math”, előtérbe került a XX. század közepén az úgynevezett „Szputnyiksokk” hatására, melyet 1957-ben az akkori Szovjetunió által fellőtt szputnyik váltott ki.

Az irányzat képviselői a matematikát, mint tudományt hangsúlyozták. Három matematikai alapstruktúrát, a rendezési, az algebrai, és a topológiai struktúrát emelték ki és ezek köré rendezték az ismereteket.

A tanításban eszerint fontos szerepet kapott a matematikai szaknyelv precíz használata, a tananyag a matematika deduktív jellegét tükrözte, előtérbe kerültek a halmazelméleti definíciók, a halmazokra épülő felépítés.

A tanítási irányzat jellemzője a teljesítményorientáltság, vagyis a teljesítményre és a sikerre való törekvés.

A tanítási irányzat kritikája az a tapasztalat, hogy, ez a tanítási módszer és a formalista felfogás nem felel meg a tanulók életkori, tanulási sajátosságainak. Ezen kívül fontos megemlíteni, hogy háttérbe szorította a problémamegoldó gondolkozásmódot és a matematika gyakorlati alkalmazását, a tartalmi, tárgyi vonatkozású gondolkodási módokat, az általános pedagógiai, érzelmi és a szociális célokat.

Az oktatásban általában nem hozott sikert az irányzat. Ellenpontként jelent meg a „Back to Basics" mozgalom, vagyis „vissza az alapokhoz", és ugyancsak a formalista irányzat hatására jelent meg a problémamegoldó tanítási módszer és a gyakorlatorientált matematikaoktatás.

1.1.4. Post-New Math – Varga Tamás tanítási irányzata

Az Új matematika tanítási irányzata Magyarországon is hatást gyakorolt az oktatásra. Mivel a módszer hibái már elég hamar érzékelhetőek voltak, a tapasztalatok felhasználásával dolgozta ki Varga Tamás az általa Post-New Math-nak nevezett Komplex matematikatanítási módszert.

Elméletének lényege, hogy a matematikatanításnak a tanuló aktív részvételével kell történnie és a gondolkodását formáló folyamatnak kell lennie a tényszerű ismeretek mechanikus tanítása helyett. A tanulók ismeretei az életkori sajátosságaikat figyelembe vevő tapasztalatszerzési folyamat során növekednek. A tanulói felfedezés által fejlődik a problémamegoldó gondolkodásuk, kreatívabbá válnak.

Ennek alapján 1963-ban Budapesten egy általános iskolában elkezdődött a komplex matematikatanítás bevezetése Varga Tamás vezetésével. A kísérlet célja az volt, hogy a különböző szinteken levő tanulók mindegyike a neki megfelelő matematikaoktatást kapja, a leggyengébb és a legjobb tanuló is megfelelő szintű tananyagot tanulhasson. Az 1978-ban bevezetett új általános iskolai tantervet már Varga Tamás irányításával folyó komplex kísérletre alapozták [VT].

A komplex matematikatanítás céljai alapján a tananyag és a tanítási módszerek fejlesztését irányozta elő. Az addigi, hetedik osztályig csak számtan-mértan tanítás helyett első osztálytól bevezették a matematikatanítást. Megváltozott tehát a tananyag, megváltoztak a tanítás kereteit és szervezési formái is. A tananyag legjelentősebb hányada a számtan az algebrával együtt és a geometria lett, ezek kiegészültek a halmazok és a logika, függvények, sorozatok, kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika témakörökkel. A tanításban használt eszközök köre kibővült, így a hagyományos tankönyveken kívül használtak a munkalapokat, feladatlapokat, különböző új szemléltető eszközöket is. A frontális oktatás mellett megjelent a tanulók páros és csoportos munkája is.

Mivel a módszer bevezetésére a szakemberek szerint a kívánatosnál korábban került sor, így a megfelelő, elsősorban személyi feltételek még nem voltak adottak. A módszer a bevezetés óta többször módosult formában máig is jelentős hatással van a magyar matematikatanításra.

Ezt az elvet és ideológiát igyekezett folytatni középiskolai szinten Nemetz Tibor [NT1], majd később ebbe a munkába kapcsolódtam be én is [NTWG].

1.1.5. A kompetencia alapú matematikatanítás

A elnevezés megosztja az oktatáspolitikában érdekelteket, de ennek oka valószínűleg félreértés. A mozgalom mögött a Varga Tamás által szorgalmazott fejlesztő tanítás felfogása áll. A hosszú út elve szerint nem iparkodunk mindenáron a magaslatokba, hanem körülnézünk azon a szinten, amelyen éppen vagyunk. Megnézzük, hogy mire jó az a mégoly csekély ismeret, eljárás, ..., amit éppen felfedeztünk, megismertünk. Az adott szinten kompetens (szakértő, mester) módon bánunk az (esetleg teljesen új) ismerettel.

A matematikai kompetencia A matematikai kompetencia matematikai ismeretek, matematika-specifikus készségek és képességek, általános készségek és képességek, valamint motívumok és attitűdök együttese. A fogalom pontos tartalma a matematikai kompetencia komponensrendszerként való értelmezésével írható le.

Készségek	Gondolkodási képességek	Kommunikációs képességek	Tudásszerző képességek	Tanulási képességek
számlálás számolás mennyiségi következtetés becslés, mérés mértékegység-váltás szöveges-feladat-megoldás	rendszerezés kombinativitás deduktív következtetés induktív következtetés valószínűségi következtetés érvelés, bizonyítás	reláció-szókincs szövegértés, szöveg-értelmezés térlátás, térbeli viszonyok ábrázolás, prezentáció	probléma-érzékenység probléma-reprezentáció eredetiség, kreativitás probléma-megoldás metakogníció	figyelem rész-egész észlelés emlékezet feladat-tartás feladat-megoldási sebesség

1.1. táblázat. A matematikai kompetencia komponensrendszere

1.1.6. A realisztikus matematikaoktatás

A hagyományos értelemben vett alkalmazások tanítása mint említettük, általában nem a gyerekek saját világából való példákon történik, és az így közvetített világkép inkább statikusnak mondható, szemben a gyerekek világával, ami dinamikus. De Lange [DL] szerint jelenleg az alkalmazott matematika tanításának az a fő feladata, hogy integrálja a matematikaoktatásban a gyerekközeli világ dinamikáját. Freudenthal elképzelése, mely szerint a valóságot használjuk a matematizálás kiindulásaként, a Van Hiele által megfogalmazott tanulási szintekkel együtt adja a realisztikus matematikatanítás elméleti alapját. A tanulási folyamat szintjei Van Hiele szerint a gyerek akkor éri el a gondolkodás első szintjét, amikor már képes általa ismert séma (minta) ismert jellemzőivel dolgozni (1. szint). Amikor már képes dolgozni a jellemzők egymás közötti kapcsolataival is, elérte a 2. szintet. A 3. szintet akkor éri el, amikor elkezd dolgozni e kapcsolatok belső jellemzőivel

A hagyományos tanítás De Lange szerint gyakran kezdődik a második vagy harmadik szinten. A természetes és hatékony eljárás azonban az, ha valamilyen matematikai tartalom valóságbeli megjelenését vizsgáljuk, majd ebből fejlesztjük ki a formális operációkat a második, illetve harmadik szinten.

A realisztikus matematikaoktatási irányzatot Freudenthal irányításával Hollandiában dolgozták ki az Utrechti Egyetemen. Az irányzat szerint az iskolának hozzá kell ahhoz járulnia, hogy a tanulók megértsék a matematikának a társadalomban és saját életükben betöltött szerepét. Ugyancsak fontosnak tartja a tanulók matematikához való pozitív hozzáállásának kialakítását.

Jellemző vonásai, hogy hangsúlyozza

– a matematikai alkotómunkát a tényszerű ismeretekkel szemben;

– a technikák helyett az elvek fontosságát;

– sok lehetőséget biztosít matematikai problémák megoldására.

A realisztikus matematikaoktatás didaktikai alapelvei:

(a) Matematika kontextusokban

A tanulók matematikai aktivitása egy konkrét kontextusban megy végbe. A cél olyan intuitív fogalmak összegyűjtése a kontextus alapján, amelyekben az adott matematikai elmélet, struktúra lényeges szempontjai tükröződnek. Ez a konkrét szituáció az alapja a konkrét elmélet megalkotásának. A tanulás kezdeti szakaszában szükséges egy konkrét orientációs bázis a kialakítandó fogalommal kapcsolatban. Lényeges, hogy a matematikai elméletek kiindulópontjai és alkalmazási területei is valóságbeli kontextusok.

(b) Horizontális és vertikális matematizáció

Az intuitív, informális, kontextusfüggő szintről a reflexív, formális szisztematikus szintre való áttérés vizuális modellek, modell-szituációk, különböző anyagok, sémák, diagramok, segítségével történik meg. Ez a horizontális matematizáció folyamata. A vertikális matematizáció a szisztematikus, formális ismeretek kiépítését jelenti.

(c) A tanulók saját produktumainak fontossága

A tanulóknak lehetőséget kell kapniuk arra, hogy a matematikai elveket, koncepciókat a valóságból vett problémák megoldása révén maguk fejlesszék ki. Ez igen fontos alapelv. Az is lényeges, hogy a tanulók lehetőséget kapjanak saját megoldási stratégiáik alkalmazására.

(d) Szociális vonatkozás, interakciók

A tanulók saját eredményeiket összehasonlítják, ütköztetik társaikéval. Ez lerövidítheti a tanulási folyamatot, hiszen ennek során a tanulóban tudatosulnak a saját eredmények hibái, előnyei. A csoportosan végzett elemzések a saját gondolatok megfelelő bemutatása, a különböző eredmények értékelése, és ezek összevetése a tanár magyarázatával mind ezt segítik. Fontos, hogy a tanulás nem egyéni aktivitás, hanem adott társadalomban történik.

(e) Összefüggések, kapcsolatok

Az új eredményeket a meglévő ismeretrendszerbe kell beilleszteni. A különböző területek globális kapcsolatainak észrevétele, fejlesztése alapvetően fontos.

1.1.7. A gyakorlatorientált matematikaoktatás

Bár a gyakorlatorientált matematika-oktatás és a realisztikus matematikaoktatás nem különül el élesen egymástól, érdemes felhívni a figyelmet arra a lényegi különbségre, hogy az előbbi esetén a tantervbe beépülő, alkalmazási problémák feldolgozásáról van szó, míg ez utóbbi esetben az egész matematikaoktatás valóságközeli problémák feldolgozásán alapul, mint azt az előző részben láttuk. Az alkalmazási problémák más tantárgyakból és a mindennapi életből is származhatnak.

A gyakorlatorientált matematikaoktatás céljai:

- A mindennapi élet azon összefüggéseinek mélyebb megértése, amelyek matematikai ismeretek nélkül csak részben lenne lehetséges.
- A matematika jelentőségének felismerése a mindennapi élet szempontjából.
- A matematika alkalmazásai más tudományterületeken (tantárgyakban).
- A „matematizálás” tanítása (problémák matematikai megfogalmazása, modellalkotás...).

Sokan úgy vélik, hogy az alkalmazások tanítása a matematikában nem csodaszer, amely egycsapásra megold mindenféle oktatási, transzfer és motivációs problémát. Nézetük szerint a helyes álláspont az, ha a matematikatudás felépítésében az alkalmazások és a valós világra vonatkozó összefüggések a matematikai ismeretekkel egyenlő rangra emelkednek. Az alkalmazásorientált oktatáshoz azonban az alapvető matematikai ismeretek alapos tudása nélkülözhetetlen, hiszen különben csak trivialitások vagy (és) spekulációk színterévé változik a matematikaóra.

1.1.8. A projektorientált oktatás

A projekt népszerű és divatos kifejezés. Mivel rövid és frappáns, és persze nem utolsó sorban kellőképpen idegen hangzású, már a köznapi élet kisebb nagyobb összefüggő feladathalmazainak megjelölésére is használják (pl. ezt az utazásprojektet inkább elhalasztom, a tanulásprojekt következik), s ha belegondolunk, sok esetben jogosan. Az oktatás területén alig több, mint 100 éve jelent meg, de az utóbbi idők változásait figyelve komoly karrierre számíthat ezen a területen is.

A projekt módszer tiszta alkalmazása, vagyis a csak projektekkel történő tanítás sok nehézségbe ütközik és a tanárok részéről is nagy az ellenállás. Helyette az úgynevezett „projektorientált” oktatás használatos inkább. Ebben az esetben a szaktanár a hangsúlyt a matematikára helyezi, s bár más tantárgyak is szerephez jutnak a projekt megvalósításánál, legfeljebb tanácsért fordul más tantárgyakat tanító kollégákhoz. Még gyakoribb az a megoldás, hogy a gyerekek közreműködésével gyűjtik össze és alkalmazzák a más tantárgyakból szükséges ismereteket [AA].

A projektorientált oktatás főbb jellemzői:

– A környező világ problémáira koncentrál.

– Több tantárgy ismereteit is használja a problémák megoldásához.

– A tanulók érdeklődése, szükséglete, a tanulók által elfogadott, őket motiváló cél központi helyet kapnak.

– Nem a matematikai képességek fejlesztése az elsődleges cél, hanem a környező világ problémáinak megértése.

– Hangsúlyt kap a tanulói autonómia. A hagyományos matematikaoktatásban sok esetben tanul olyat a diák, melynek szükségességét nem tudja indokolni a tanár. A projekt esetében kívánatos, hogy a tanulók beleszólhassanak a témaválasztásba, lehetőleg ők dönthessenek arról, milyen téma, milyen céllal szerepeljen.

– Fontos a tanulók teljesítményének közös, kritikus értékelése.

– A pedagógus szerepe tanácsadó, szervező, segítő, a főszereplő a diák.

– A kidolgozásnál előtérbe kerül a csoportmunka.

– Az ismeretszerzés alapja a tevékenység, az új ismeretek legfőbb forrása a tapasztalat.

– Alkotó jellegű, a végeredmény bemutatható.

1.2. Matematikadidaktikai alapelvek

1.2.1. A fogalmak tanításának alapkérdései, a fogalmak tanításával kapcsolatos módszerek, eljárások, feladattípusok

A fogalom lényegét tekintve logikai szempontból valamely objektum lényeges elemeit magában foglaló gondolategység. A következőkben rövid vázlatot talál a fogalmak tanításával kapcsolatos főbb kérdések áttekintéséhez.

1. Absztrakció és osztályba sorolás – szempontok

2. Fogalmak kapcsolata

   – Empirikus és teoretikus fogalomképzés

- Fogalom tartalma és terjedelme
- Fölérendelt, alárendelt és mellérendelt fogalom

3. Fogalmak fajtái (de más felosztás is lehet)
   - Tárgyi fogalmak
   - Reláció-fogalmak
   - Műveleti fogalmak
4. Fogalmak osztályozása (Egy fogalom terjedelmének részhalmazokra bontása adott feltételek mellett)
   - A felosztás egy meghatározott lényeges tulajdonság, jegy alapján történik.
   - A részhalmazok közül bármely kettőre teljesül, hogy nincs közös elemük.
   - A kapott részhalmazok egyesítése az eredeti halmaz (a fogalom terjedelme).
   - A fogalom az osztályozás során keletkezett fogalmak legközelebbi fölérendelt fogalma. Például a konvex négyszögek osztályozása.
5. A definíciók szerkezete, a definíciók fajtái
   - Definiálás a (legközelebbi) fölérendelt fogalom és a megkülönböztető tulajdonság(ok) alapján
   - Genetikus definíció (a fogalom keletkezése alapján)
   - Rekurzív definíció
   - Konvencionális definíciók (szimbólumokkal)
   - Közvetett definiálás axiómák segítségével
   - Leírás, magyarázat, példákon keresztüli absztrakció
6. Tartalmi követelmények definíciókkal szemben
   - Teljesség
   - Ellentmondásmentesség
   - Nem lehet körbenforgó

– Pontos, egyértelmű
– A meghatározó részben csak már (alapfogalmak és) definiált fogalmak szerepelhetnek
– A definíció (lehetőleg) ne tartalmazzon felesleges elemeket
– A definiált objektum egyértelmű legyen.
– A definícióban szerepelnie kell a meghatározandó fogalomnak (A definíció rendszerint egy olyan mondat, melynek állítmánya az, hogy „nevezzük".)

7. Módszertani követelmények definíciókkal szemben: Skemp 2005 felhívja a figyelmet a matematikai és a matematika tanulása közben használt definíciók közötti különbségre, figyelmeztet az életkori sajátosságok figyelembevételére.

   – Definíció segítségével senkinek nem közvetíthetünk az általa ismerteknél magasabb rendű fogalmakat, hanem csakis oly módon, hogy megfelelő példák sokaságát nyújtjuk.
   – Minthogy a matematikában az előbb említett példák majdnem mind különböző fogalmak, ezért mindenekelőtt meg kell győződnünk arról, hogy a tanuló már rendelkezik ezekkel a fogalmakkal.
   – A tanulók életkori sajátosságainak megfelelően tisztázni kell a definícióban szereplő elemek jelentését és jelentőségét.
   – A tanulók életkori sajátosságainak megfelelően tudatosítani kell a szereplő szavak köznapi jelentésével való kapcsolatot.

8. Fogalmak tanításának stratégiái

   – Induktív út, előnyök, hátrányok
   – Deduktív út, előnyök, hátrányok
   – Analógia segítségével (Pólya, Gy.)

9. A fogalom megerősítése, rögzítése

   – A szkéma eszközként szolgál új ismeret elsajátításához, olyan struktúra, amely integrálja a meglevő tudást az egyén tudásrendszerében (Skemp 2005).

- Az új ismeretek beépülése ebbe a rendszerbe asszimiláció és akkomodáció által lehetséges.
- A fogalom megerősítéséhez, rögzítéséhez hozzájárul például az ismétlés, az alkalmazás, az eltérő, elterelő környezetben való szerepeltetés. Ez nehezíti a fogalom elkülönítését, ezért túl korai szakaszban nem tanácsos szerepeltetni).

1.3. Az iskolai matematika keretrendszere és segédeszközei

Az iskolai matematika keretrendszerét a NAT és a kerettanterv adja, amely szerint „Összességében

- A matematikai tanulmányok végére a matematikai tudás segítségével önállóan tudjanak megoldani matematikai problémákat.
- Kombinatív gondolkodásuk fejlődésének eredményeként legyenek képesek többféle módon megoldani matematikai feladatokat.
- Fejlődjön a bizonyítási, diszkussziós igényük olyan szintre, hogy az érettségi után a döntési helyzetekben tudjanak reálisan dönteni.
- Feladatmegoldásokban rendszeresen használják a számológépet, elektronikus eszközöket.
- Tudjanak a síkban, térben tájékozódni, az ilyen témájú feladatok megoldásához célszerű ábrákat készíteni.
- A feladatmegoldások során helyesen használják a tanult matematikai szakkifejezéseket, jelöléseket.
- A tanulók váljanak képessé a pontos, kitartó, fegyelmezett munkára, törekedjenek az önellenőrzésre, legyenek képesek várható eredmények becslésére.
- A helyes érvelésre szoktatással fejlődjön a tanulók kommunikációs készsége.
- A középfokú matematikatanulás lezárásakor rendelkezzenek a matematika alapvető kultúrtörténeti ismereteivel, ismerjék a legnagyobb matematikusok felfedezéseit, legyen rálátásuk a magyar matematikusok eredményeire."

Ideillesztem a valószínűségszámítás oktatásáról kialakított tételt, amelyet a tanárszakosok számára dolgoztam ki.

10. Valószínűségszámítás és matematikai statisztika az iskolai tananyagban. A véletlen esemény fogalma. Kombinatorikus és geometriai módszerek. Valószínűségszámítási szemléltetések (fa diagram, kettős fa diagram). Statisztika és valószínűségszámítás kapcsolata. Leíró statisztika alapvető céljai.

A valószínűségszámítás és matematikai statisztika tanítása az első négy osztályban folyó számolási-számítási, elemi gondolati, logikai kompetenciák megalapozása után, az ötödik osztályban kezdődik (tulajdonképpen már előbb is, véletlen a játékokban, adatgyűjtés, strigulázás a mindenkori tanterv függvényében már alsóban is szerepelhetnek). Természetesen az életkori sajátosságok figyelembevételével a gyakorlathoz és a mindennapi élethez kapcsolódó tevékenységekkel, feladatokkal kapcsolatban merülnek fel először azok az ismeretek, amelyek ehhez a témakörhöz tartoznak. A statisztika valamint a valószínűségszámítás felépítése egyre absztraktabb szinteken keresztül a 12. évfolyam végéig tart.

A téma az iskolai és az egyetemi tananyagban:

1. Az 5.-8. osztályban a tanulóknak az alábbi ismeretanyaggal kell találkozniuk:

   Adatok, gyűjtése a tanulók közvetlen környezetéből, illetve 7.-8.-ban egyéb forrásokból, azok rendszerezése, táblázatba foglalása, ábrázolása. Lényegtelen, hogy a gyerekek saját fél- vagy egyperces szívverésüket számlálják, vagy a tanterem előtt adott időegység alatt elhaladó piros autókat, vagy fehér libákat. A lényeg az, hogy saját maguk gyűjtsenek adatokat, azokat valamilyen logikus elrendezés szerint rögzítsék és az osztályban – a tanár vezetésével – közösen feldolgozzák. Ebben az időszakban jelenik meg a gyakoriság, a relatív gyakoriság, a rendezett halmaz, a rendezett minta, valamint a középértékekre jellemző mérőszámok, azaz az átlag, a medián és a módusz. Ezek kiszámítása csak kevés számú adat esetén feladat. A továbbhaladási feltételek szerves részét képezi az adatok megjelenítése grafikonok, diagramok segítségével. Fontos téma a grafikonokkal történő manipulációk megismerése. A tanárnak ennél az anyagrésznél lehetősége nyílik a nagyon mély tantárgyi koncentráció megvalósítására, hiszen a történelem, földrajz, biológia ... tantárgyakban számolatlanul sok lehetőség nyílik táblázatok, grafikonok statisztikák használatára és elemzésére. Az egyes oszlop-, vonal- vagy pontdiagramok készítése elemi feladat, később a százalékszámítás megjelenése után pedig kör- és szalagdiagramokat is kell készíteni. Lényeges elem, hogy ne a tanulókat hidegen hagyó (Ausztrália GDP-jének alakulása a 60-as években) adatokból, hanem az ő érdeklődésüket is felkeltő, életkori sajátosságaikhoz igazodó adatokkal dolgozzunk az órákon.

(SAJÁT PÉLDA)

A relatív gyakoriság alapos megismerése után a tanulók elemi példákon keresztül becslik, illetve kiszámítják egyes elemi események valószínűségeit (kockadobások, sorsolások, leszámlálásos feladatok). Hasznos olyan esteket választani, amelyeknél valami logikával ki tudjuk számolni a valószínűséget, s ezt összevethetjük a relatív gyakoriság alakulásával.

(SAJÁT PÉLDA)

Ezekhez a fogalmakhoz az első 4-5 valószínűségszámítás előadás anyaga kapcsolódik szervesen, amikor a valószínűség axiomatikus bevezetése után belátjuk, hogy a Bernoulli-törvény értelmében (a nagy számok törvényének valószínűségekre vonatkozó alakja) egy A esemény bekövetkezésének relatív gyakorisága sztochasztikusan konvergál az adott esemény $P(A)$ valószínűségéhez. A statisztika témakörben az egyetemi kurzusokon elhangzik a medián, a módusz és az átlag definíciója is, mint jellemző középértékek, sőt megismerkedünk a várható érték fogalmával és kiszámítási módjával is, kezdetben csak diszkrét valószínűségi változókra. Az elemi leszámlálásos feladatmegoldásokat kombinatorikus meggondolásokkal, illetve statisztikai döntésekkel támaszthatjuk alá.

(SAJÁT PÉLDA).

2. A 9.-12. osztályban a tanulóknak az alábbi ismeretekkel kell találkozniuk:

   Kezdetben, azaz a 9. osztályban csak az 5.-8. osztályban tanultak újragondolása, ismétlése és nagyobb adathalmazokra alkalmazása a feladat. Itt fontos szerepet kaphat a számítógép vagy a grafikus kalkulátor. Újra alkalmazzuk a mediánt, a móduszt és az átlagot, most már nem csak a számtani, hanem a súlyozott számtani közép esetében, valamint egyes esetekben megjelenik, mint jellemző érték a mértani közép. Említhető a harmonikus és a négyzetes közép is. Ezek megjelennek az egyetemi tananyagban általánosan, mint a várható érték tetszőleges függvényei, illetve mint egy valószínűségi változó függvényének várható értékei. Ismétlésre kerül még a diagramkészítés és ezzel együtt a valószínűségek arányokkal, illetve százalékokkal történő megadása. Módszertani szempontból ezeket a témaköröket is – mint minden hasonló esetben – a párhuzamosan futó tantárgyakkal, illetve a fiatalokat érintő-érdeklő adatokkal összefüggésben érdemes bemutatni.

(SAJÁT PÉLDA)

Ebben az évben, csakúgy, mint a korábbiakban, jelentős szerepe van a valószínűségi kísérletek végrehajtásának, azok valóságos kivitelezésének. Érdemes és tanulságos az egyes tanulók vagy tanulói csoportok eredményeinek összesítése, ahol a tanulók érezhetik, hogy eredményeikkel mennyire járulhatnak hozzá az osztály összességének eredményeihez, mekkora hatással vannak az átlagra.

(SAJÁT PÉLDA)

A 10.-11. osztályban bevezetésre kerül a terjedelem, majd az átlagtól való eltérés mérésének szükségessége, néhány ilyen mérőszám, köztük a szórás és megjelenik a valószínűségi kísérletek elvont végrehajtása, tehát amikor nem feltétlenül hajtunk végre kísérleteket, hanem azokat teoretikusan, idealizált körülmények között végezzük el. A tanulók megismerkednek a „klasszikus" valószínűségi modellel, tehát amikor minden elemi esemény (csak véges sok!) egyenlő valószínűséggel következik be. Ekkor alkalmazni lehet a valószínűség meghatározására a mindenki által jól ismert $\text{valószínűség} = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}}$ formulát. Nem keverendő a hasonló relatív gyakoriság formulával. Az egyes események valószínűségeinek meghatározása már nem csak leszámlálással, hanem kombinatorikus formulák segítségével is történhet. Sok-sok példán keresztül el kell sajátítani a binomiális eloszlásra vezető visszatevéses mintavételből származó egyes események valószínűségeinek kiszámítási módját. Ennek az eloszlásnak a fontossága a nagy számok törvényében csúcsosodik ki, mivel az egymásután végzett kísérletek modelljeként vezethető be. Más eloszlások, mint az egyenletes, illetve a visszatevés nélküli mintavételezésből származó hipergeometriai eloszlás is megjelennek, illetve egyéb kombinatorikus úton kiszámítható valószínűségek. Érdemes felhívni a figyelmet a feladatkitűzők által igen kedvelt „sztenderd" megoldási eljárásokra: ilyenek az egyes esetek osztályokba sorolása, párokba rendezése, valamint az esemény tagadásának (komplementerének) meghatározása.

(SAJÁT PÉLDA)

12. osztály: A szórás kiszámításának különböző módjai, azok értelmezése, különböző konkrét eloszlások esetén, valamint a binomiális (és a hipergeometriai) eloszlás szórása általános esetben (utóbbi csak kiegészítő anyag!). További kitekintésként megjelenhetnek a folytonos eloszlások közül a normális eloszlás, különösen akkor, ha más tárgyakhoz köthető grafikonokat is elemeznek az órákon.

(SAJÁT PÉLDA)

3. Az iskolai tananyag megalapozása az egyetemi előadásokon

   Az egyetemi előadások és gyakorlatok jelentős mennyiségű elméleti hátteret adnak diszkrét állapotterű stacionárius átmenet-valószínűségű Markov-láncokhoz, valamint egyéb folytonos eloszlású valószínűségi változókhoz. Részletesen tárgyalja az előadó és a gyakorlatvezető a következő eloszlásokat: karakterisztikus, egyenletes, binomiális, hipergeometriai, Poisson, negatív binomiális, illetve a folytonos eloszlások közül az egyenletes, exponenciális, gamma és normális eloszlásokat. Bevezetésre kerül a várható érték és a szórás elméleti fogalma, azok kiszámítási módjai és tulajdonságai. Része még az anyagnak a korreláció, a lineáris regresszió, a Markov-, Csebisev-egyenlőtlenség, a nagy számok gyenge törvényei, a Moivre-formula, valamint statisztikából a becsléselmélet és a hipotézisvizsgálat alapjai. Ezek – hasonlóan a többi egyetemi kurzushoz – azt szolgálják, hogy a tanárnak átfogóbb, mélyebben kiterjedő tudása legyen, melynek magasságából jobban átlátja a tárgy struktúráját, felépítésének lépéseit.

1.3.1. Alapfeladatok és kompetenciák

A valószínűségszámítási, statisztikai feladatok megoldása során fejlesztendő a diákok rendszerezőképessége. Az általános iskolai képzés végére a tanulók legyenek képesek adatsokaságot jellemezni, ábrákról adatsokaság jellemzőit leolvasni. Szisztematikus esetszámlálással tudják meghatározni egy adott esemény bekövetkezésének esélyét.

1.3.2. A kerettanterv elvárásai

Alsó tagozat

- Adatokról megállapítások megfogalmazása.
- Tapasztalati adatok lejegyzése, táblázatba rendezése. Táblázat adatainak értelmezése.
- Adatgyűjtés, adatok lejegyzése, diagram leolvasása.
- Valószínűségi játékok, kísérletek értelmezése. Biztos, lehetetlen, lehet, de nem biztos tapasztalati ismerete.

Felső tagozat

- Egyszerű diagramok készítése, értelmezése, táblázatok olvasása.
- Néhány szám számtani közepének kiszámítása.
- Valószínűségi játékok, kísérletek során adatok tervszerű gyűjtése, rendezése, ábrázolása.
- Valószínűségi kísérletek eredményeinek értelmes lejegyzése, relatív gyakoriságok kiszámítása.
- Konkrét feladatok kapcsán a tanuló érti az esély, a valószínűség fogalmát, felismeri a biztos és a lehetetlen eseményt.
- Zsebszámológép célszerű használata statisztikai számításokban.
- Néhány kiemelkedő magyar matematikus nevének ismerete, esetenként kutatási területének, eredményének megnevezése.

Középiskola

- Adathalmaz rendezése megadott szempontok szerint, adat gyakoriságának és relatív gyakoriságának kiszámítása.
- Táblázat olvasása és készítése; diagramok olvasása és készítése.
- Adathalmaz móduszának, mediánjának, átlagának értelmezése, meghatározása.

- Véletlen esemény, biztos esemény, lehetetlen esemény, véletlen kísérlet, esély/valószínűség fogalmak ismerete, használata.
- Nagyszámú véletlen kísérlet kiértékelése, az előzetesen „jósolt” esélyek és a relatív gyakoriságok összevetése.
- Statisztikai mutatók használata adathalmaz elemzésében.
- A valószínűség matematikai fogalma.
- A valószínűség klasszikus kiszámítási módja.
- Mintavétel és valószínűség.
- A mindennapok gyakorlatában előforduló valószínűségi problémákat tudják értelmezni, kezelni.
- Megfelelő kritikával fogadják a statisztikai vizsgálatok eredményeit, lássák a vizsgálatok korlátait, érvényességi körét.

2. fejezet

Valószínűségszámítás, statisztika

Ebben a fejezetben célunk az, hogy összefoglaljuk és megvilágítsuk azokat a gondolkodási folyamatokat, eljárásokat, amelyek segíthetik a hallgatókat a feladatok megoldásában, azok megértésében. Nem azt tűztük ki célul, hogy nehezebbnél nehezebb feladatokat adjunk fel és oldjunk meg, hanem a saját gyakorlatunkból merítve, a felmerülő gondolkodási folyamatokra, a megoldási módszerek ismertetésére akarunk koncentrálni.

2.1. Leszámlálással (is) megoldható feladatok

Nagyon gyakran előfordul, hogy a diákok nem találnak rá arra a helyes, – esetleg nem is létező – kombinatorikus alakra, ami az adott feladathoz könnyen megadja a keresett esemény valószínűségét. Bizonyos esetekben ilyenkor célravezető arra bíztatni őket, hogy nosza, írják fel a lehetséges összes esetet, majd vizsgálják meg, hogy azok egyenlő valószínűségűek-e. Ha kiválogatják közülük a keresett eseménynek megfelelőket, akkor már meg is oldották a példát. Sokszor nagyságrendekkel könnyebben lehetett felíratni a hallgatókkal az eseteket, mint megkerestetni a logikai hibát valamely kombinatorikus formulában, amelynek ismerete sokkal absztraktabb tudást feltételez. A további általános megjegyzések helyett álljon itt néhány példa az esetek bemutatására.

2.1. Feladat *Három kockát feldobunk. Mi a valószínűsége annak, hogy van köztük hatos, ha mindegyik dobás különböző.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Gyakran előfordul, hogy egy csoporton belül több megoldást is hoznak a hallgatók. Ezek néha jók, néha kicsit tévesek, néha rosszak. Ilyenkor érdemes feltenni a kérdést a tanulóknak: „Fel tudnátok sorolni az összes lehetséges esetet?” A lustábbak zúgolódni szoktak, hogy – ne már, az iszonyú sok –, de mindig van aki neki áll. Ők nyernek. A táblán összesítve szépen rendezetten az alábbi számhármasok jelennek meg, félkövérrel szedve azok, amelyekben van hatos:

123	124	125	**126**	134	135	**136**	145	**146**	**156**
234	235	**236**	245	**246**	**256**	345	**346**	**356**	**456**

Ezek után kacagtatóan egyszerű megszámolni, hogy 10 esetben van hatos, az összesen 20 számhármas között. Ha még azt is hozzáteszi valaki, hogy mindegyik eset egyforma valószínűségű, akkor máris megkapjuk a keresett $1/2$ valószínűséget.

Igen, a hallgatók fele tudja, hogy fel lehet írni a megoldást sokféleképpen kombinatorikusan is. A mellett, hogy őket megdicsérjük, az is célunk kell legyen, hogy azok számára is világosságot gyújtsunk, akik a feladatot nehezebben látják át.

A sztenderd hibás megoldások a következők szoktak lenni:

Kell dobnom egy hatost. Erre egy lehetőségem van. A következő dobásom ötféle, a harmadik pedig négyféle lehet, ez összesen $1 \cdot 5 \cdot 4 = 20$ lehetőség. Az összes lehetőség persze $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$, így a keresett valószínűség $\frac{20}{120} = \frac{1}{6}$.

Ilyenkor mindig érdemes a tanulókat megkérdezni, hogy mi az ő véleményük, hol a hiba? Mindig előkerül a jó válasz. Amit korábban lefelejtettek, az egy hármas szorzó. Az egyetlen hatos nem csak az első, hanem a második, illetve a harmadik helyen is előfordulhat, azaz a kijavított módon ők is a helyes eredményt kaphatják:

$$\frac{1 \cdot 5 \cdot 4 + 5 \cdot 1 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 1}{120} = \frac{3 \cdot 20}{120} = \frac{1}{2}. \tag{2.1}$$

Egy másik nagyon gyakori tévedés, hogy a tanuló keveri az egyes leszámlálási módokat. Egy ilyen megoldás, ami gyakran előkerül, a következő. Válasszunk egy hatost és két különböző számot a maradék ötből. Erre $\binom{5}{2} = 10$ lehetőségünk van, ez lesz a kedvező esetek száma. Ugyanekkor a nevezőben az összes eset számánál sokan a $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ formulával számolnak, amiből a hibás $\frac{10}{120} = \frac{1}{12}$ eredmény adódik. Persze ezt is könnyen lehet korrigálni, ha vagy a számlálót vagy a nevezőt módosítjuk. Most is célszerű a tanulókkal megkerestetni a hibát, mert tipikus, hogy a klasszikus

$$P = \frac{\#\{\text{kedvező esetek}\}}{\#\{\text{összes eset}\}}$$

formulában más és más logika alapján következtetnek a számlálóra és a nevezőre. Ha a számlálót javítanánk, akkor a már korábban ismertetett alakú törtet kapnánk, javítsuk hát most a nevezőt. Az összes eset száma $\binom{6}{3} = 20$, azaz a keresett valószínűség most is

$$\frac{\binom{5}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}. \tag{2.2}$$

Egy másik hasonló jellegű feladat a következő:

2.2. Feladat *A Mancehester United focicsapata kétkapus edzést tart. Az első csapat keretéből éppen 20 játékos van jelen, akik sorsolással két 10 fős csapatot alkotnak. Mi a valószínűsége, hogy Ryan Giggs és Wayne Rooney egy csapatba kerül? (A játékosok neve a kor előrehaladtával tetszőlegesen frissíthető.)*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

A tanulók persze erre a feladatra is sokféle megoldást szoktak hozni. A két leggyakoribb a

$$\frac{\binom{10}{8}}{\binom{20}{10}}, \tag{2.3}$$

illetve a

$$\frac{2 \cdot \binom{10}{8}}{\binom{20}{10}} \tag{2.4}$$

volt. Hogyan döntsünk, ha elvi alapon egyik csoportnak sem sikerült meggyőznie a másikat és nem akarjuk hatalmi szóval eldönteni a dolgot. Lehetne most is megoldás az összes eset felírása? Teoretikusan igen, de gyakorlatilag nyilván nem. Az összes eset nagy száma miatt nem embernek való kihívás azok felírása. Hogyan lehetne egyszerűsíteni az életet? Oldjunk meg egy egyszerűbb problémát, ahol kisebbek a számok és gondolkodjunk analóg módon. Legyen például csak 4 ember, akik 2-2 fős csapatokba szerveződnek véletlenül. Legyenek ők F, G, Q, R. (G = Giggs, R = Rooney) Írjuk fel az összes lehetséges 2-2 főből álló csapatpárt:

FG	QR
FQ	GR
FR	GQ

Látjuk hogy Giggs és Rooney a lehetséges 3 esetből egy esetben kerül egy párba, tehát ekkor a keresett valószínűség 1/3, ami megfelel a $\frac{2 \cdot \binom{2}{0}}{\binom{4}{2}}$ formulának.

Ez alapján kijelenthetjük, hogy $\frac{2 \cdot \binom{10}{8}}{\binom{20}{10}}$ a helyes válasz. Az esetek felsorolásából látszik, hogy módszertani szempontból inkább

$$\frac{\binom{10}{8}}{\binom{20}{10}/2} \tag{2.5}$$

alakba kellett volna írni a megoldást, ha a két csapatot nem különböztetjük meg.

2.2. Lehetetlen és biztos események

Egy feladattal azt szerettem volna ellenőrizni, hogy a tanárok körében mennyire különül el a lehetetlen esemény és a kicsi, gyakorlatilag 0 valószínűségű esemény közötti különbség. Korábbi oktatási gyakorlataim során középiskolásoktól, de még egyetemi hallgatóktól is gyakran kaptam azt a tapasztalat szülte választ, hogy „ez már annyira kicsiny valószínűségű, hogy lehetetlen". Ez természetesen tökéletesen összhangban van a tapasztalati szinten levont következtetésekkel, de tanároktól illetve tanárnak készülő egyetemi hallgatóktól elvárható lenne az absztrakciónak az a foka, mely pontosabb megfogalmazást ad, érzékelteti a gyerekekkel a lehetetlen és a csekély valószínűségű esemény közötti különbséget. Némely tankönyvben vannak ugyan logikai feladatok, és ezeket a tanulók is jól oldják meg, de a szóhasználatuk ennek ellenére következetlenségeket tartalmaz.

A konkrét példa egy Mendel szabály szerinti öröklődést tárgyaló feladat:

2.1. Feladat *Volt egy csomó piros és sárga paradicsomunk. Ezeknek két generációját vizsgáltuk, és a következő eredményeket kaptuk.*

	első generáció	második generáció
I.	piros · piros	61 piros
II.	piros · piros	47 piros, 16 sárga
III.	piros · sárga	58 piros
IV.	sárga · sárga	64 sárga
V.	piros · sárga	33 piros, 36 sárga

Melyik szín a domináns fenotípus?

Melyek a lehetséges és mik a valószínű fenotípusok a táblázatban megadott 5 keresztezésben?

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Az első alapvető probléma, ami a biológia feladatok kapcsán felmerül, hogy gyakran tisztázni kell a probléma megértéséhez szükséges körülményeket, fogalmakat. Habár minden érettségizett ember találkozott a feladatban szereplő öröklődéstani fogalmakkal, mégis szükséges volt az öröklődés Mendel által megfogalmazott szabályait és a témakör szóhasználatát feleleveníteni. Például a következő kérdések szoktak elhangzani:

- Az egyes sorokban más-más utódokat kapunk-e?
- Ugyanaz a szabály érvényes mindegyik sorban?
- Lehet egy paradicsom egyik fele sárga a másik piros?

Megbeszéltük a domináns-recesszív öröklődés tulajdonságait, valamint a heterozigóta és homozigóta tulajdonságokat. Sokak szerint ez „nem is matematika". További megbeszélés után felírtuk a táblára az öröklődési arányokat az egyes fenotípusok esetében. Tisztáztuk, hogy ha a domináns allél a sárga és a recesszív a piros (sztenderd módon a domináns allélt nagy- a recesszív allélt kisbetűvel jelöljük: S és p), akkor az első sor biztosan igaz, hiszen a keresztezési tábla alapján csak piros utódokat kaphatunk, azaz az első sor ebben az esetben biztos lenne. Valaki azt javasolta, hogy nézzük meg a negyedik sort, ahol két sárga paradicsomot kereszteztünk, és csak sárga utódokat kaptunk. Kapva kaptam az alkalmon és végigelemeztük a lehetséges szituációkat. Megállapítottuk, hogy csak a 4., 5. és 6. keresztezési tábla jöhet szóba és azt is sikerrel állapítottuk meg, hogy a 4. és az 5. tábla esetében az utódok mind sárgák lesznek. Némi rávezetés és számolgatás után azt mondták, hogy az utódok körülbelül negyede piros kellene legyen a 6. esetben, szóval ez lehetetlen. Gyakorlatilag igazuk volt, de szerencsére volt néhány ember a csoportban, akik azonnal fel tudták írni annak valószínűségét, hogy 64 sárga utód jön létre, ha mindkét szülő heterozigóta ($0,75^{64} \approx 10^{-8}$), ami nem nulla, azaz logikailag nincs jogunk kizárni ezt az esetet sem.

1.	p	p
p	pp	pp
p	pp	pp

2.	S	p
p	Sp	pp
p	Sp	pp

3.	S	S
p	Sp	Sp
p	Sp	Sp

4.	S	S
S	SS	SS
p	Sp	Sp

5.	S	S
S	SS	SS
S	SS	SS

6.	S	p
S	SS	Sp
p	Sp	pp

2.1. táblázat. Keresztezési táblák: a sárga (S) szín a domináns a piros (p) felett

Egy másik hallgató azt javasolta, hogy a második sor alapján döntsünk, mert ebben az esetben biztosan nem keletkezhetnek sárga utódok. Ezt az érvelést a többiek is hamar elfogadták, tehát elvethettük a sárga szín dominanciáját, azaz biztosak lehettünk abban, hogy a piros a domináns és sárga a recesszív tulajdonság. (Ezt persze az a tapsztalati tény is megerősíti, hogy a piacokon sokkal több piros paradicsomot kapni, mint sárgát.)

1.	P	P
P	PP	PP
P	PP	PP

2.	P	s
P	PP	Ps
P	PP	Ps

3.	s	s
P	Ps	Ps
P	Ps	Ps

4.	s	s
P	Ps	Ps
s	ss	ss

5.	s	s
s	ss	ss
s	ss	ss

6.	P	s
P	PP	Ps
s	Ps	ss

2.2. táblázat. Keresztezési táblák: a piros (P) szín domináns a sárga (s) felett

A kezdeti nehézségek után már viszonylag gyorsan ment a feladat megbeszélése. Először a negyedik sorról állították, hogy akkor ez biztosan igaz, majd a második sorról állapították meg, hogy egyetlen eset van: mindkét szülő heterozigóta. Ezek voltak a sárga szín dominanciájának feltételezésénél tárgyalt sorok. Kicsivel később megszületett a válasz az ötödik sorra is. Ha az egyik szülő sárga és a másik piros, akkor csak a 3. és 4. keresztezési tábla lehetséges, de a 3. esetben csak piros utódokat kapnánk. Ezért ekkor az egyik szülő (ss), a másik (Ps) típusú. Már csak az első és a harmadik sor volt hátra, de nemsokára ezekre is születtek megoldások. „Az első esetben az 1., 2. és 6. táblák alapján jöhettek létre az utódok, és az első két esetben mind pirosak, ezek jók. A 6. tábla esetében azonban az utódok negyede sárga lenne, ez rossz.” A hallott mondatok tökéletesen tükrözik a gyakorlati szempontok érvényesülését és alapvetően igaz állítások. Kizárhatjuk-e a 6. tábla szerinti öröklődést? – kérdeztem. Most már rutinosan válaszoltak hogy nem, csak iciri-piciri a valószínűsége, azaz ha felteszem hogy mindkét szülő heterozigóta, akkor is csak $0,75^{61} \approx 2,4 \cdot 10^{-8}$ az esélye az utódok ilyen eloszlásának. Ebben az esetben tehát biztosat nem állíthatunk, csak azt hogy nagyon nagy valószínűséggel legalább az egyik szülő (PP) típusú allélekkel rendelkezik. Már csak a 3. sor volt hátra, ahol is megállapították, hogy az egyik szülő biztosan (ss) allélekkel, a másik pedig nagy valószínűséggel (PP) allélekkel rendelkezik, de nem zárhatjuk ki a (Ps) esetet sem, csak elhanyagolható az esélye. Összefoglalva a feladat végén mindenki láthatóan különbséget tudott tenni a közel 0 valószínűségű és a lehetetlen, illetve a közel 1 valószínűségű és a biztos esemény között. Matematikai logikai és valószínűségszámítási fogalmaik tisztábbak lettek, jobban tudtak figyelni saját állításik megfogalmazására. Kifejezéseik precízebbek lettek, és különösen azt élvezték egy idő után, hogy ezt a biológia egy olyan területen tették, amelyről azt gondolták, hogy már réges-régen elfelejtették.

A hallgatók gyakran bonyolódnak bele a feltételes valószínűség csapdájába. A következő egyszerű feladatot három különböző módon is megoldjuk.

2.2. Feladat *Egy városban ugyanannyi nő van mint férfi. Minden* 100 *férfi közül* 5 *és minden* 10000 *nő közül* 25 *színtévesztő. Ha a színtévesztők közül választunk egyet, akkor mi a valószínűsége, hogy az férfi?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Rögtön három lehetséges megoldást mutatunk.

1. Megoldás:

Csak logikai úton végiggondolva. Ha ugyanannyi nő lakik a városban mint férfi, akkor vegyünk mindkét nemű lakosból ugyanannyit. Ekkor 20-szor annyi férfi lesz színtévesztő mint nő, azaz a keresett valószínűség $\frac{20}{21}$.

2. Megoldás:

Készítsünk kis táblázatot. Mivel a valószínűség nyilván nem függ a lakosság lélekszámától, tegyük fel, hogy 20000 ember lakik a városban. Közülük 10000 férfi és 10000 nő.

	férfi	nő	
színtévesztő	500	25	525
nem színtévesztő			
	10000	10000	20000

Töltsük ki a táblázatunk egyes sorait a megadott arányok segítségével. Észrevehetjük, hogy most nem is kell mindegyik sor, elég az első. A keresett valószínűség a konkrét számok alapján $\frac{500}{525} = \frac{20}{21}$.

3. Megoldás:

Kicsit rövidítsük a szöveget, jelöljük azt, hogy valaki férfi F-fel, azt hogy nő N-nel, azt hogy színtévesztő Sz-szel. A feladatban megadták a következő valószínűségeket:

$$P(F) = \frac{1}{2} \quad P(N) = \frac{1}{2} \quad P(Sz|F) = \frac{5}{100} \quad P(Sz|N) = \frac{25}{10000}$$

Keressük a $P(F|Sz)$ valószínűséget. A Bayes-tétel alapján

$$P(F|Sz) = \frac{P(Sz|F) \cdot P(F)}{P(Sz|F) \cdot P(F) + P(Sz|N) \cdot P(N)} = \frac{\frac{5}{100} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{100} \cdot \frac{1}{2} + \frac{25}{10000} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{20}{21} \tag{2.6}$$

Ebben a feladatban egyszerű volt áttekinteni az eseteket. A következőben is csak egy kicsivel lesz nehezebb dolgunk.

2.3. Feladat *Ma Magyarországon a felnőtt lakosság harmada dohányzik és a dohányosok $12,5\%$-a tüdőrákban hal meg. Ez az arány a teljes népességen belül mindössze 5%. Mennyi a valószínűsége, hogy egy nem dohányzó ember tüdőrákban hal meg? Ha Káin nem tüdőrákban halt meg, akkor mi a valószínűsége, hogy nem dohányzott?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Ismét több megoldási út kínálkozik.

1. Megoldás: Van a feladatban harmad, nyolcad, huszad, tehát ha 600 fős alapsokaságot veszünk fel, akkor nagyot nem tévedhetünk. A megadott adatok alapján a táblázat kitöltve

	dohányzó	nem dohányzó	
tüdőrák	25	5	30
nem tüdőrák	175	395	570
	200	400	600

Ezek alapján a válaszok

$$P(\text{egy nem dohányzó ember tüdőrákban hal meg}) = \frac{5}{400} = \frac{1}{80} = 0,0125$$

illetve

$$P(\text{nem dohányzott}|\text{nem tüdőrákban halt meg}) = \frac{395}{570} = \frac{79}{114} \approx 0,693.$$

2. Megoldás: Értelem szerinti rövidítésekkel felírva tudjuk, hogy

$$P(D) = \frac{1}{3} \quad P(TR|D) = 0,125 \quad P(TR) = 0,05.$$

Ezek alapján

$$P(\overline{D}) = \frac{2}{3} \quad P(TR|D) = 0,125 \quad P(\overline{TR}) = 0,95$$

A teljes valószínűség tétele alapján

$$P(TR|D)P(D) + P(TR|\overline{D})P(\overline{D}) = P(TR) \tag{2.7}$$

behelyettesítve

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}+P(TR|\overline{D})\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{20}\qquad\Rightarrow\qquad P(TR|\overline{D})=\frac{1}{80}\tag{2.8}$$

Ezt az eredményt felhasználva, felírhatjuk, hogy $P(\overline{TR}|\overline{D})=1-P(TR|\overline{D})=\frac{79}{80}$. A Bayes-tétel alapján

$$P(\overline{D}|\overline{TR})=\frac{P(\overline{TR}|\overline{D})\cdot P(\overline{D})}{P(\overline{TR}|\overline{D})\cdot P(\overline{D})+P(\overline{TR}|D)\cdot P(D)}=\frac{\frac{79}{80}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{79}{80}\cdot\frac{2}{3}+\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{79}{114}\approx 0,693\tag{2.9}$$

Mindenki kiválaszthatja, hogy neki melyik megoldás szimpatikusabb.

2.3. Vertikális és horizontális kapcsolatok

2.1. Feladat *Káin és Ábel sorsot húznak, hogy ki írja meg a német fogalmazást, de csak egy dobókockájuk van kéznél. Nem lelkesedtek a feladatért, ezért Káin azt javasolta, hogy dobjanak fel egy kockát addig, amíg egyikük páros számot dob, és az menjen leckét írni. Már nyújtotta is a kockát Ábelnek, hogy kezdjen ő. Mekkora valószínűséggel megy Káin, illetve Ábel leckét írni?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Arra gyorsan rá szoktak jönni a tanulók, hogy ez a kezdőnek előnytelen, hiszen már az első lépésben 1/2 annak valószínűsége, hogy neki kell leckét írnia. Pár perc alatt egy komplett mértani sort is felírnak:

$$P(\text{A kezdő veszít})=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\cdots=\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{4^i}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}\tag{2.10}$$

Ez egy minden szempontból elfogadható és tökéletes megoldás, amely sok más esetben is alkalmazható.

Jussunk el másképp is a megoldáshoz: Jelöljük annak a valószínűségét, hogy a soron következő játékos veszít p-vel. Ekkor annak valószínűsége, hogy a másik veszít, nyilván $1-p$, mert könnyen látható, hogy a játék 0 valószínűséggel tart örökké. Nem tudjuk mekkora p, de felírhatunk rá egy egyenletet. Két eset van. Annak valószínűsége, hogy a soron következő játékos rögtön veszít 1/2, ha viszont nem veszít, akkor a rákövetkező játékban nem ő a soron kövekező játékos, és akkor $1/2\cdot(1-p)$ eséllyel veszít, ezért

$$p=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-p)\qquad\Rightarrow\qquad p=\frac{2}{3}\tag{2.11}$$

Szemmel láthatóan ugyanarra az eredményre jutotottunk mint az előbb, csak nem kellett végtelen mértani sort összegeznünk. Elég volt egy darab egyismeretlenes elsőfokú egyenletet megoldani.

Barátkozzunk tovább az ilyen jellegű feladatokkal.

2.2. Feladat *Ábel az előző feladatban említett túlzott esély miatt másik javaslatot tett: Az menjen német leckét írni, aki először dob egyest vagy kettest, és kezdjen Káin! Mekkora valószínűséggel megy német leckét írni Káin, illetve Ábel?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Az előző feladathoz teljesen hasonlóan felírhatjuk egy végtelen mértani sor segítségével, hogy a kezdő megy német leckét írni. A sor csak a kezdeti valószínűség miatti szimmetriáját veszíti el, de ettől még ugyanolyan jellegű marad.

$$P(\text{A kezdő veszít}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \cdots =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^i = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{3}{5} = 0,6 \tag{2.12}$$

Ismételjük meg az előző feladat gondolatmenetét. Miben módosul? Nyilván csak a valószínűségek változnak, ha tehát most is p-vel jelöljük annak valószínűségét, hogy a kezdő gyerek megy leckét írni, akkor a

$$p = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1-p) \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{3}{5} = 0,6 \tag{2.13}$$

Ez természetesen megegyezik a végtelen sor összegeként kapott eredménnyel.

Talán még jobban megérezhetjük a módszer erejét, ha tanulmányainkat felhasználva megpróbáljuk megoldani a következő nem egyszerű feladatot.

2.3. Feladat *Egy-egy cédulára felírtuk az 1, 2, 3, illetve 4 számokat. Anna kihúz egy cédulát a négy közül, majd visszateszi a többi közé. Ezután Zsófi húz ki egy cédulát, utána visszateszi, majd ismét Anna következik stb. A kihúzott számot mindig hozzáadják az addig kihúzott számok összegéhez. Az nyer, akinek a húzása után először lesz az összeg osztható 3-mal. mennyi a valószínűsége annak, hogy Anna nyer? (Az 1997-1998 évi matematika OKTV 4. feladat.)*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Amit az első próbálkozások után észrevehetünk, az az a sajnálatos tény, hogy a feladat készítői elrontották a korábbi feladatokban fennálló szimmetriát. Esélytelenné vált közönséges mértani sor segítségével felírni az egyes eseteket. Ha tovább keresgélünk az egyetemen tanult ismeretek között, akkor olyan dolgok kell hogy eszünkbe jussanak mint átmenetvalószínűségek, Markov-láncok stb. A három lehetséges maradék nyilván 0, 1 illetve 2, s ezek valószínűségei $P(m = 0) = \frac{1}{4}$, $P(m = 1) = \frac{2}{4}$ illetve $P(m = 2) = \frac{1}{4}$. Miután sokszor kell még hivatkoznunk rá, jelöljük az $(\frac{1}{4}; \frac{2}{4}; \frac{1}{4})$ sorvektort $\mathbf{m}$-mel.

Jelölje továbbá a szokásoknak megfelelően az átmenetvalószínűség mátrixot

$$P = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

ahol például a_{12} annak valószínűsége, hogy most az összeg maradéka 2, feltéve, hogy az előző maradék 1 volt. Ez úgy lehetséges, ha a soron következő lány éppen 1 maradékú számot tartalmazó cetlit húz, aminek a valószínűsége $\frac{1}{2}$. Hasonlóan sorra véve az egyes átmenetek valószínűségeit kapjuk a következő mátrixot:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Emlékezhetünk korábbról, vagy itt és most gyorsan meggondolhatjuk, hogyan lehet két lépés után eljutni az 1 maradékot adó esetből a 2 maradékú esetbe. Nyilván három lehetőség van, amelyek közül csak kettő lesz nem 0 valószínűségű. Az első lépés után kaphatunk 0, 1 vagy 2 maradékot és ezekből léphetünk tovább a 2 maradékot adó esetbe. A keresett valószínűség a teljes valószínűség tétele szerint

$$P(\text{két lépésben jutok 1-ről 2-re} = a_{10} \cdot a02 + a_{11} \cdot a12 + a_{12} \cdot a22.$$

Ha minden esetet összegyűjtünk, akkor mátrix alakban is felírhatjuk, hogy két lépés után milyen valószínűséggel kapjuk az egyes maradékokat. Jelöljük ezt a mátrixot $P^{(2)}$-vel.

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{16} & \frac{3}{16} & \frac{4}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{2}{16} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}.$$

Annak a valószínűsége, hogy Anna az első lépésben győz $\frac{1}{4}$, hogy a harmadik lépésben győz, az az $\mathbf{m}P^2$ első eleme, hogy az ötödik lépésben győz az $\mathbf{m}P^4$ első eleme, azaz összesen

$$\mathbf{m}I + \mathbf{m}P^2 + \mathbf{m}P^4 + \cdots = \mathbf{m}(I + P^2 + P^4 + \dots) = \mathbf{m}(I - P^2)^{-1} \tag{2.14}$$

első eleme.

$$\mathbf{m}(I-P^2)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{16} & \frac{13}{16} & -\frac{4}{16} \\ -\frac{3}{16} & -\frac{2}{16} & \frac{13}{16} \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{77}{161} & \frac{208}{161} & \frac{64}{161} \\ \frac{49}{161} & \frac{32}{161} & \frac{208}{161} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{23} \\ \frac{16}{23} \\ \frac{12}{23} \end{pmatrix}.$$

Azaz annak a valószínűsége, hogy Anna nyer $\frac{13}{23}$.

Nyilvánvaló, hogy ha ez egy középiskolások számára kitűzött OKTV feladat volt, akkor nem az előbb látott, mátrixokkal teletűzdelt megoldást várták el tőlük. Mit tanultunk az előző két feladatból? Ott két játékos esetén egyetlen ismeretlen bevezetése elegendő volt. Három játékos esetén kettő ismeretlenre lesz szükségünk. Mint a korábbi feladatokban, most is fel lehet írni egy megfelelő egyenletrendszert. Szinte változtatás nélkül közöljük a javítókulcsban megjelent mintamegoldást:

A játék 1 valószínűséggel véget ér véges sok lépésben, hiszen legfeljebb $(3/4)^n$ annak a valószínűsége, hogy a játék n lépésen belül még nem fejeződött be, és ez az érték 0-hoz tart, ha n tart a végtelenhez.

Tegyük fel, hogy egy adott pillanatban az addig kihúzott számok összege $3k+1$ alakú, és jelölje γ annak a valószínűségét, hogy ekkor a soron következő játékos fogja (valamikor majd) a játékot megnyerni. Hasonlóan jelölje δ egy $3k+2$ alakú összegről a soron következő játékos valamikori nyerési esélyét. (A γ és δ valószínűségek valóban léteznek: ha γ_n annak a valószínűsége, hogy a soron következő játékos legfeljebb n lépésben nyer, akkor γ_n monoton növő sorozat és a (monotonitás miatt szükségképpen létező) határértéke éppen γ.)

Egy $3k+1$ alakú összegről indulva $1/4$ valószínűséggel a (a 3-as cédulát húzva) lesz az összeg ismét $3k+1$ alakú, $1/2$ valószínűséggel lesz $3k+2$ alakú és $1/4$ valószínűséggel $3k$ alakú. Az első esetben a húzást végrehajtó játékos nyerési esélye a húzás után $1-\gamma$ lett (hiszen ezután a másik játékos következik és az nyer γ valószínűséggel), a második esetben a nyerési esélye $1-\delta$ lett, a harmadik esetben pedig megnyerte a játékot. Innen a

$$\gamma = \frac{1}{4}(1-\gamma) + \frac{1}{2}(1-\delta) + \frac{1}{4}\cdot 1 \tag{2.15}$$

egyenlőséget kapjuk.

A $3k+2$ alakú összegről indulva ugyanígy a

$$\delta = \frac{1}{4}(1-\gamma) + \frac{1}{4}(1-\delta) + \frac{1}{2}\cdot 1 \tag{2.16}$$

összefüggés adódik.

A két egyenletből $\gamma = \frac{12}{23}, \delta = \frac{16}{23}$.

A kezdő lépésnél Anna $\frac{1}{4}$ valószínűséggel nyer azonnal, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel húz 1-et vagy 4-et, amivel a nyerési esélye $1-\gamma$ lesz, és $\frac{1}{4}$ valószínűséggel húz 2-t, amivel a nyerési esélye $1-\delta$ lesz. Innen Anna nyerési esélye

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(1-\gamma) + \frac{1}{4}(1-\delta) = \frac{13}{23} \tag{2.17}$$

2.4. Átlag, várható érték

Minden középiskolában ki szoktak számolni 5-ös lottóval kapcsolatos feladatokat, mert közöttük sok viszonylag egyszerűen megfogalmazható és egyszerűen megválaszolható kérdés akad. Matematikatanár szakos hallgatóknak ugyanilyen okokból várható értékre vonatkozó feladatokat szoktunk feladni az 5-ös lottó témaköréből. Az egyik kérdés, amire mindenki pillanatok alatt válaszolni szokott az, hogy mennyi a kihúzott számok átlaga $(45,5)$.

A húzás után a számokat nagyság szerint rendezik, és így teszik közzé. A második kérdés az szokott lenni, hogy mennyi a középső szám átlaga. Persze erre is sokan rávágják a helyes választ, $45,5$. Gyakran feladom, hogy nézzenek utána annak, mi az első, második, harmadik, negyedik, ötötödik szám átlaga az eddigi húzások során. Letölthető táblázatok az eddigi húzásokról a következő címen találhatók: http://www.szerencsejatek.hu/otoslotto

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
15,0565	29,9394	45,6992	60,6667	75,5992

2.3. táblázat. Az 5-ös lottón 2012.02.10-ig kihúzott legkisebb (x_1), ... legnagyobb (x_5) számok átlagai

Ezek után szoktam feladni azt a feladatot, hogy

2.1. Feladat *Számítsuk ki az 5-ös lottón kihúzott számok maximumának várható értékét.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Azon esetek száma, amikor a legnagyobb kihúzott szám k, $(5 \leq k \leq 90)$ éppen annyi, mint ahányféleképpen a nála kisebb $k-1$ szám közül négyet ki tudunk választani, ez pedig nyilván $\binom{k-1}{4}$. Így a keresett valószínűség korábbi jelöléseinkkel $P(x_5 = k) = \frac{\binom{k-1}{4}}{\binom{90}{5}}$. A feladatban kérdezett várható érték pedig

$$E = \sum_{k=5}^{90} k \cdot P(x_5 = k) = \sum_{k=5}^{90} k \cdot \frac{\binom{k-1}{4}}{\binom{90}{5}} \tag{2.18}$$

Alakítsuk át a kifejezést, ekkor

$$E = \sum_{k=5}^{90} k \cdot \frac{\binom{k-1}{4}}{\binom{90}{5}} = \sum_{k=5}^{90} \frac{5\binom{k}{5}}{\binom{90}{5}} = \frac{5\binom{91}{6}}{\binom{90}{5}} = 5\frac{91}{6} \approx 75,8333 \tag{2.19}$$

A kapott érték meglehetősen jól egyezik a táblázatban látható tapasztalati átlaggal.

2.2. Feladat *Mennyi a (90-ből 5-ös) lottóhúzás második legnagyobb számának a várható értéke? [Várható érték: az összes lehetséges lottóhúzás mindegyikében kiválasztjuk a második legnagyobb számot, és ezeknek a számtani közepét képezzük (egy adott értéket természetesen „annyiszorosan” kell figyelembe venni, ahány lottóhúzásban ez az érték második legnagyobb számként fellép). (2001-2002 III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok Első – iskolai – forduló 5. feladat.)*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Legyen $4 \leq k \leq 89$, és jelöljük h_k-val azoknak a lottóhúzásoknak a számát, ahol k a második legnagyobb szám. Mivel a legnagyobb számot ekkor $(90-k)$-féleképpen, a három legkisebb számot pedig $\binom{k-1}{3}$-féleképpen választhatjuk, ezért $h_k = (90-k)\binom{k-1}{3}$. Ennek alapján a keresett várható értéket E-vel jelölve

$$\binom{90}{5} E = \sum_{k=4}^{89} k \cdot h_k = \tag{2.20}$$

$$= \sum_{k=4}^{89} k(90-k)\binom{k-1}{3} = \sum_{k=4}^{89} k(91-(k+1))\binom{k-1}{3} = \tag{2.21}$$

$$= 91\sum_{k=4}^{89} k\binom{k-1}{3} - \sum_{k=4}^{89}(k+1)k\binom{k-1}{3} = \tag{2.22}$$

$$= 91 \cdot 4\sum_{k=4}^{89} \binom{k}{4} - 5 \cdot 4\sum_{k=4}^{89} \binom{k+1}{5} = \tag{2.23}$$

$$= 4 \cdot 91 \cdot \binom{90}{5} - 4 \cdot 5 \cdot \binom{91}{6} \tag{2.24}$$

Az első és az utolsó sort rendezve kapjuk, hogy

$$E = 4 \cdot 91 - 4 \cdot 5 \frac{\binom{91}{6}}{\binom{90}{5}} = 4 \cdot 91 - 4 \cdot 5 \cdot \frac{91}{6} = 4 \cdot \frac{91}{6} \tag{2.25}$$

A számolás után kicsit elgondolkoztathatjuk a hallgatókat. Az előbb $5 \cdot \frac{91}{6}$, most meg $4 \cdot \frac{91}{6}$ jött ki. Nem lehetett volna gyorsabban megkapni ezeket az eredményeket? Hogyan helyezkedhetnek el az átlagok, hogyan kapták meg a középső számok átlagát?

A középső számok átlaga $45,5$, amire a szimmetria miatt mindenki gyorsan rá szokott jönni. ezt írhatjuk akár $3 \cdot \frac{91}{6}$ alakba is. Az elvi indoklás ezek uán lehet például a következő. A kihúzott és nagyság szerint rendezett számok átlagai egyenletesen fognak elhelyezkedni az 1 és a 90 számok között, a végpontokat is beleértve. Ezért ezek az átlagok hat egyforma részre osztják az 1..90 halmazt, tehát minden részbe $15\frac{1}{6}$ szám kell essen, azaz az i-dik osztópont éppen $i \cdot \frac{91}{6}$.

2.5. Problémamegoldás

A középiskolákban szinte minden tanuló megszokja, hogy bizonyos rendezési tulajdonságok érvényben vannak a gyakran használt alaphalmazokon. Ilyen tulajdonság például a $(A < B$ és $B < C) \Rightarrow A < C$. Ebben az alfejezetben néhány olyan feladatot ismertetünk, amelyek ezt a megszokást próbálják megkérdőjelezni. Lássuk az elsőt.

2.1. Feladat *Káinnak van három üres lapú dobókockája. Az elsőre felírja az 1, 4, 4, 4, 4, 4 számokat, a másodikra a 2, 2, 2, 5, 5, 5 számokat, a harmadikra pedig a 3, 3, 3, 3, 3, 6 számokat. A kockák közül Ábel választhat egyet, azután pedig Káin választ a maradék kettő közül. Mindketten dobnak a saját kockájukkal. Az megy német leckét írni, aki kisebbet dob. Kinek kedvez ez a játék?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Számozzuk meg a kockákat, hogy kényelmesebben tudjunk róluk beszélni. Legyen

$$\text{I. kocka} = \{1, 4, 4, 4, 4, 4\}$$

$$\text{II. kocka} = \{2, 2, 2, 5, 5, 5\}$$

$$\text{III. kocka} = \{3, 3, 3, 3, 3, 6\}$$

Írjuk fel annak valószínűségét, hogy az I. kockával kisebbet dobunk mint a II. kockával. Az eseteket figyelembe véve

$$P(\text{I.} < \text{II.}) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{21}{36} > \frac{1}{2}$$

Leszűrhetjük a következtetést, a II. kocka kicsivel „jobb" mint az I. kocka, azaz a kettő közül inkább azt érdemes választani.

Hasonlóan írhatjuk fel annak valószínűségét, hogy a II. kockával kisebbet dobunk, mint a III. kockával.

$$P(\text{II.} < \text{III.}) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}$$

A III. kocka „jobb" mint a II.

Már csak be kell zárnunk a kört. Írjuk fel a III. és az I. kocka párosát.

$$P(\text{III.} < \text{I.}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36} > \frac{1}{2}$$

Itt van az, ami miatt az egészet végigszámoltuk. Bármely kockánál lehet „jobbat" választani, azaz Káin már megint undok volt. Hiába választ akármilyen kockát Ábel, Káin tud a maradék kettőből olyat választani, amelyikkel 1/2-nél nagyobb valószínűséggel nagyobbat dob mint Ábel.

Ez néhány hallgatónak meg szokta feküdni a gyomrát, ezért más, hasonló jellegű feladatot is meg szoktunk oldani az órákon.

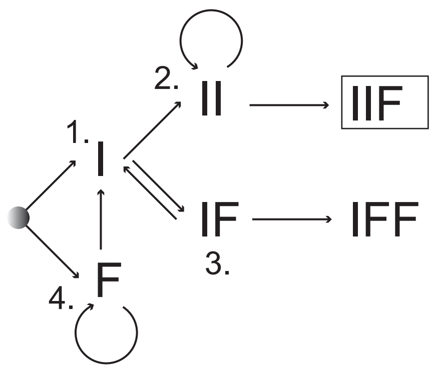
Ilyen például néhány fej-írás sorozat. Az egyik legkönnyebben végiggondolható eset a következő. Dobáljunk fel háromszor egymás után egy szabályos érmét. Mi lesz annak a valószínűsége, hogy az FFF sorozatot kapjuk? A válasz nyilvánvalóan 1/8. És mi a valószínűsége, hogy az IIF sorozatot kapjuk? Nyilván ez is 1/8, ugyanúgy ahogy tetszőleges rögzített három hosszúságú F-I sorozat valószínűsége.

Ilyenkor szoktam feltenni a kérdést a tanulóknak: Ha elkezdjük feldobálni az érmét, vajon melyik sorozat fog előbb felbukkanni? Miután kap az ember néhány választ, érdemes néhány dobássorozatot végigcsináltatni a tanulókkal. Pár perc alatt láthatják, hogy az egyik sorozat kezd elhúzni egy kicsit, mintha több IIF fordulna elő.

2.2. Feladat *Készítsünk egy fej-írás (F-I) sorozatot, amíg az IIF vagy az IFF hármas meg nem jelenik. Határozzuk meg az egyes sorozatok előfordulásának a valószínűségét.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Közösen szoktuk felrajzolni a lehetséges esetek ábráját, hogy mindenki egyformán követhesse az eseményeket. A kiindulási helyzetet szürke pötty jelöli, ahonnan egy-egy nyíl vezet az I illetve az F helyre, majd tovább. Az egyes nyilak a következő lehetséges helyzeteket jelölik. Mivel az érme szabályos, minden átmenet 1/2 valószínűségű. Jelöljük p_i-vel annak valószínűségét, hogy az i-dik állapotból indulva az IIF következik be.



2.1. ábra. Az IIF vagy az IFF sorozat fordul elő korábban?

Ekkor az alábbi egyenletrendszert írhatjuk fel.

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_3 \\
p_2 &= \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \\
p_3 &= \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2} \cdot 0 \\
p_4 &= \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_4
\end{aligned} \tag{2.26}
$$

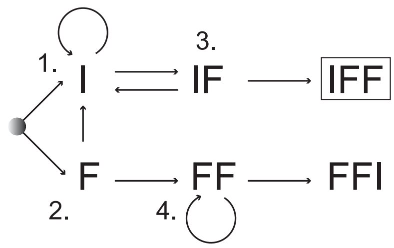
Az egyenletrendszert megoldva a $p_1 = \frac{2}{3}$, $p_2 = 1$, $p_3 = \frac{1}{3}$, $p_4 = \frac{2}{3}$ eredményeket kapjuk, amiből akár ránézésre, akár számolással ($\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_4 = \frac{2}{3}$) a $\frac{2}{3}$ eredményt kapjuk, azaz pont kétszer valószínűbb, hogy először az IIF jön ki, mint az IFF.

Hasonlítsuk most össze az IFF és az FFI sorozatokat is.

2.3. Feladat *Készítsünk egy fej-írás (F-I) sorozatot, amíg az IFF vagy az FFI hármas meg nem jelenik. Határozzuk meg az egyes sorozatok előfordulásának a valószínűségét.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Az előző feladathoz hasonlóan most is elkészíthetjük az egyes eseteket tartalmazó ábrát.



2.2. ábra. Az IFF vagy az FFI sorozat fordul elő korábban?

Ha p_i most annak valószínűségét jelöli, hogy az i-dik helyről indulva az IFF be jutunk, akkor a következő egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_3 \\ p_2 &= \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_4 \\ p_3 &= \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \\ p_4 &= \frac{1}{2}p_4 + \frac{1}{2} \cdot 0 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Az egyenletrendszer megoldása helyett ésszel is meggondolhatunk egyes dolgokat, például $p_4 = 0$.

Akár logikai úton oldjuk meg, akár mechanikusan, azt kapjuk, hogy $p_1 = 1$, $p_2 = \frac{1}{2}$, $p_3 = 1$, $p_4 = 0$. Mivel $\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 = \frac{3}{4}$, ezért $\frac{3}{4}$ eséllyel az IFF-ben és $\frac{1}{4}$ eséllyel az FFI-ben kötünk ki. (Kihasználtuk, hogy annak valószínűsége, hogy a végtelenségig dobálunk az 0.)

Ha tovább folytatjuk a hármasok vizsgálatát, akkor láthatjuk, hogy az FFI és az FII aránya $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$, valamint az FII és az IIF aránya $\frac{3}{4} : \frac{1}{4}$. Ezzel azonban a kígyó a saját farkába harapott, hiszen

$$\text{IIF} \succ \text{IFF} \succ \text{FFI} \succ \text{FII} \succ \text{IIF}$$

Ezzel ezt a nem tranzitív példát befejeztük. Figyeljünk arra, hogy óvatosan fogalmazzunk meg állításokat, legyünk körültekintők. Felhívnám a figyelmet a módszer hatékonyságára, mellyel számtalan hasonló jellegű feldatot oldhatunk meg.

2.5.1. Öröklődés, bilógia

A hallgatók már általában túl vannak a feltételes valószínűség és a Bayes-tétel megismerésén. Ennek ellenére nagyon gyakran fordul elő, hogy a matematika szakos hallgatók egy része nem mindig tud megbírkózni azzal a helyzettel, amikor egy biológia feladat kapcsán kell alkalmazni matematikai ismereteket. Ugyanakkor a biológia szakos hallgatók zöme elbír az ilyen típusú feladatokkal, mert már korábban hozzájuk szokott. Tekintsük a következő feladatot:

2.4. Feladat *Autoszómás recesszív betegség öröklődését vizsgáljuk az alábbi családfán. Genotípusát tekintve egy személy lehet beteg (aa), egészséges hordozó (Aa), ill. egészséges, aki nem hordozza a hibás allélt (AA). Tudjuk, hogy az egészséges felnőtt lakosság 10%-a hordozó.*

(a) Mi a valószínűsége annak, hogy a születendő (11) gyermek beteg (aa), hordozó (Aa), illetve nem hordozó (AA)?

(b) Mi lenne a valószínűsége annak, hogy (4) hordozó, ha még nem születtek volna gyermekei?

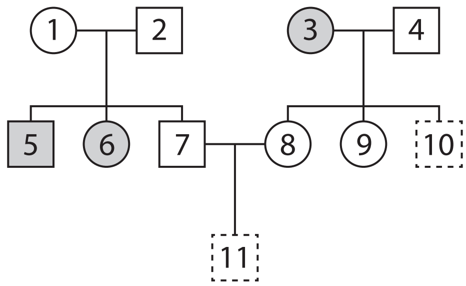
(c) Mi a valószínűsége annak, hogy (4) hordozó? (Annak ismeretében, hogy (3), aki beteg, két egészséges gyermeket szült neki.)

(d) Mi a valószínűsége annak, hogy (4) hordozó, ha két gyermek után újabb egészséges gyermeket szült neki (3)?

(e) Mi a valószínűsége annak, hogy (4) hordozó, ha harmadikként beteg gyermekük született?

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Válaszoljuk meg sorban a kérdéseket. A válaszok során ki fogunk térni azokra a részekre, amik a tapasztalatunk szerint problémát okoztak a feladat megoldása során.



2.3. ábra. Családfa diagram (a szürkével jelölt egyedek betegek, a szaggatott szélűek a még meg nem születettek)

(a) Általában segít a hallgatóknak, ha nem biológiai, hanem logikai feladatként tekintenek a problémára. Mivel az (1)-es és a (2)-es párnak született beteg és egészséges gyermeke is, ezért mindketten hordozók. A (7)-es gyermek egészséges, tehát vagy AA vagy Aa alléleket hordoz. Felidézve a keresztezési táblát, ennek valószí-

	A	a
A	AA	Aa
a	aA	–

2.4. táblázat. Keresztezési tábla, ha tudjuk, hogy a gyermek egészséges.

nűsége $P(7 \text{ hordozó}) = P(7 \text{ h}) = \frac{2}{3}$ és $P(7 \text{ egészséges homozigóta}) = P(7 \text{ e}) = \frac{1}{3}$, mivel meg volt adva, hogy (7) nem beteg.

A (8)-as utód csak egészséges hordozó lehet, mert a (3)-as szülő beteg, tehát tőle csak a allélt kaphatott.

A születendő (11)-es gyerek beteg, ha mindkét szülő hordozó és tőlük a beteg a allélt örökli. Ennek valószínűsége

$$P(11 \text{ beteg}) = P(11 \text{ b}) = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

A születendő (11)-es gyerek hordozó, ha legalább az egyik szülő hordozó és tőle a beteg a allélt örökli. Erre két lehetőség van, (7) egészséges és (8) hordozó vagy (7) és (8) is hordozó.

$$P(11 \text{ hordozó}) = P(11 \text{ h}) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

A születendő (11)-es gyerek egészséges, ha mindkét szülőtől az egészséges A allélt örökli. Erre két lehetőség van, (7) egészséges és (8) hordozó vagy (7) és (8) is hordozó.

$$P(11 \text{ hordozó}) = P(11 \text{ h}) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{6}$$

A feltételes valószínűségekkel történő felírást most mellőzzük.

(b) Ha feltesszük, hogy minden allél minden alléllel ugyanolyan eséllyel áll párba, akkor annak valószínűsége, hogy valaki beteg lesz p^2, hogy hordozó az $pq+qp=2pq$ és hogy egészséges az q^2. Ekkor a

$$\text{beteg} : \text{hordozó} : \text{egészséges} = p^2 : 2pq : q^2$$

ahol p és q a megfelelő allélek gyakoriságát jelentik $(p+q=1)$. A hordozók aránya az egészségesek között

$$\frac{2pq}{2pq+q^2} = 0,1 \tag{2.28}$$

$$\frac{2p}{p+1} = 0,1 \tag{2.29}$$

$$p = \frac{1}{19} \tag{2.30}$$

amiből $2pq = P(\text{hordozó}) = \frac{36}{361} \approx \frac{1}{10}$

(c) Most is két lehetőség van. A (4)-es szülő lehet hordozó $\frac{1}{10}$, illetve egészséges $\frac{9}{10}$ valószínűséggel.

Ha a (4) szülő hordozó, akkor $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ valószínűséggel lesz két egészséges gyermeke.

Ha a (4) szülő egészséges, akkor 1^2 valószínűséggel lesz két egészséges gyermeke.

Összesítve a (4)-es szülőnek $\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{10}\cdot 1^2 = \frac{37}{40}$ valószínűséggel lesz két egészséges gyermeke. Ebből $\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{40}$ az az eset, ha a papa hordozó volt, tehát arány $\frac{\frac{1}{40}}{\frac{37}{40}} = \frac{1}{37}$.

Ezt felírjuk a Bayes-tétel segítségével is. A két egészéges gyermeket 2E-vel jelöljük.

$$P(h|2\mathrm{E}) = \frac{P(2\mathrm{E}|h)\cdot P(h)}{P(2\mathrm{E}|h)\cdot P(h) + P(2\mathrm{E}|e)\cdot P(e)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{10}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{10} + 1^2\cdot\frac{9}{10}} = \frac{1}{37}$$

(d) Az előző formula csak a számokban változik meg, azaz

$$P(h|3\mathrm{E}) = \frac{P(3\mathrm{E}|h)\cdot P(h)}{P(3\mathrm{E}|h)\cdot P(h) + P(3\mathrm{E}|e)\cdot P(e)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{10}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{10} + 1^3\cdot\frac{9}{10}} = \frac{1}{73}$$

(e) Ez a kérdés a beugrató feladatok közé tartozik, mert sajnos sokan mindenféle feltételes valószínűséget kezdenek el számolgatni . Szerencsére sokan fel is ocsúdnak és megadják a helyes választ. Ez ekkor biztos esemény, azaz a valószínűsége 1.

A másik téma, ami gyakran szóba kerül, az a biológusok által Hardy-Weinberg szabály néven ismeretes.

(lásd például http://hu.wikipedia.org/wiki/Hardy-Weinberg-törvény)

Ez olyan ideális populációkra vonatkozik, amelyekben kizárjuk a mutációt és egy csomó egyéb, a valóságban esetleg fellépő hatást. Ekkor azt állítjuk, hogy egy populáción belül nemzedékről nemzedékre a relatív allélgyakoriság változatlan marad. Igazából könnyebb belátni mint gondolnánk.

Írjunk fel egy teljes keresztezési táblát. Az egyes allélpárok valószínűségei legyenek rendre p, q és r. Ekkor az a allél gyakorisága éppen $q+2r$, mert a q valószínűségű hordozókban 1 darab, az r valószínűségű betegekben 2 darab van belőlük. A következő táblázat megadja az egyes utódokat és azok valószínűségeit.

	AA (p)	Aa (q)	aa (r)	
	p^2	$\frac{1}{2}pq$	0	$\rightarrow$ AA
AA (p)	0	$\frac{1}{2}pq$	pr	$\rightarrow$ Aa
	0	0	0	$\rightarrow$ aa
	$\frac{1}{2}pq$	$\frac{1}{4}q^2$	0	$\rightarrow$ AA
Aa (q)	$\frac{1}{2}pq$	$\frac{1}{2}q^2$	$\frac{1}{2}qr$	$\rightarrow$ Aa
	0	$\frac{1}{4}q^2$	$\frac{1}{2}qr$	$\rightarrow$ aa
	0	0	0	$\rightarrow$ AA
aa (r)	pr	$\frac{1}{2}qr$	0	$\rightarrow$ Aa
	0	$\frac{1}{2}qr$	r^2	$\rightarrow$ aa

Szedjük össze, hogy az a allél milyen gyakorisággal fordul elő a keresztezés után. Egyszer kell figyelembe venni az Aa típusú utódoknál és kétszer az aa típusúaknál. Soronként haladva

$$\frac{1}{2}pq + pr + \frac{1}{2}pq + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}qr + 2\frac{1}{4}q^2 + 2\frac{1}{2}qr + pr + \frac{1}{2}qr + 2\frac{1}{2}qr + 2r^2 =$$

$$q^2 + qr + pq + 2qr + 2r^2 + 2pr = q(q + r + p) + 2r(q + r + p) = q + 2r$$

Ekkor persze a A allél gyakoriságára is automatikusan teljesül, hogy $2p + q$.

Sokkal gyorsabban célhoz érhettünk volna, ha közvetlenül az allélek gyakoriságát jelöljük p-vel (az A allél gyakorisága), illetve q-val (az a allél gyakorisága). Mivel feltételeztük, hogy minden párosodás véletlenszerű és független, valamint az egyes nemekben is ugyanezek az arányok, ezért az utódokban megjelenő allélek eloszlása a következő:

Az AA csak A allélt adhat, az Aa pedig fele-fele arányban ad A és a allélt, ezért az A allél gyakorisága $p^2 + pq = p(p + q) = p$.

	A (p)	a (q)
A (p)	AA (p^2)	Aa (pq)
a (q)	Aa (pq)	aa (q^2)

Így egy kicsit gyorsabb belátnia a tételt, csak ügyelni kell a megfogalmazásra. Jó ha a középiskolai tanárok teljesen tisztában vannak ezekkel a formulákkal, mert az elmúlt években minden biológia érettségiben szerepelt valamilyen öröklődéshez kapcsolódó logikai vagy valószínűségszámítási feladat.

2.5.2. Statisztikai következtetések

Sajnos a tanulók, sőt az egyetemi hallgatók egy része is úgy éli le az életét, hogy soha nem vett részt valódi statisztikai adatok gyűjtésében és azok értékelésében. Vannak ugyan tankönyvi példák ezekre, de a tanárok egy része kihagyja, mert időrablónak és feleslegesnek érzi, holott az elvégzett és elemzett kísérletek nagyban hozzájárulhatnak a gyerekek valószínűségről alkotott fogalmainak tisztázásához. Az elvi különbség tulajdonképpen a megközelítésben rejlik. Vannak olyanok, akik ragaszkodnak ahhoz, hogy a logikai és matematikai úton kapott valószínűségi értékeket támasszuk alá statisztikai adatokkal. A másik nézőpont szerint a statisztikai adatok maguk a valóság, tehát ez alapján kell felépítenünk az elméleti valószínűségszámítást. Itt és most nem óhajtunk lándzsát törni egyik nézet mellett vagy ellen sem. Az iskolai oktatásban mindkettőnek lehet szerepe az ismeretek értő elsajátítása során.

Az egyik tankönyv rajzszögek feldobálását javasolja, és annak megszámlálását, hogy hányszor esik heggyel felfelé, illetve lefelé a rajzszög. Egy másik könyv gyufaskatulyákat pöcköltet a gyerekekkel, és azt számoltatja velük, hogy hányszor és melyik oldalára esik a gyufaskatulya. Ezeket a feladatokat csak részben tartom szerencséseknek.

Közös és nagyon jól használható bennük az, hogy olyan összetett fizikai jelenség áll a hátterükben, amelyet nem lehet egyszerűen modellezni, így a valószínűségek meghatározására nem kínálkozik jobb mód, mint a kísérletek nagyszámú végrehajtása, az adatok összegyűjtése és azok elemzése.

Ugyanakkor ezeknek a kísérleteknek vajmi kevés közük van a gyakorlati élethez. Miért lennénk kíváncsiak a rajzszögek hullására? (Gyufaskatulyás pöckölgetésekre szoktak ugyan fogadásokat kötni, de nem igazán elterjedt.)

Sokkal szerencsésebbnek tartom, ha olyan valódi adatokat kell gyűjteni a gyerekeknek, amelyek valóban hasznosak lehetnek. Ilyenek például a forgalomszámláláshoz kapcsolódó adatok, amelynek az is szerencsés vonzata, hogy kiadható házi feladatnak, azaz az adatok gyűjtése nem vesz el időt az oly rövid tanórából, ahol aztán az összegyűjtött adatokat elemezhetjük. Lehet például feladat, hogy a gyerekek utazzanak végig egy buszon és számlálják meg az egyes megállókban le- illetve felszálló utasok számát. Ha több gyerek is utazik a vonalon, akkor már értékelhető adatsorokat kaphatunk. Városi környezetben meg is lehet fordítani a feladatot, egyetlen megállóban állva figyelhetjük a buszok követési idejét (összevethetjük a menetrendi adatokkal), és rögzíthetik a le- illetve felszálló utasok számát. Természetesen tetszőleges a gyerekeket érintő adatsorral lehet foglalkozni (a telefonálási gyakoriságoktól kezdve a letöltési szokásokig bármivel).

Statisztikai adatgyűjtések segíthetnek döntést hozni olyankkor is, ha valamely ismert jelenség leírására több különböző kombinatorikus modellt is ajánlanak a gyerekek. A legegyszerűbb és egyben leggyakoribb példa az, amikor két érmét feldobunk és azt vizsgáljuk, hogy mi a valószínűsége a két fej, két írás, egyfej egy írás eseményeknek. Meggyőző tud lenni, ha az osztály minden tanulója csak hússzor végzi is el a kísérletet és az adatokat közösen összesítjük.

Néhány tapasztalati sorozat a következő volt:

FF	FI	II
25	48	26
17	57	25
26	47	26

Egy másik ilyen gyakori probléma, hogy ha két kockát feldobok, akkor 21 vagy 36 eset lesz-e. Hosszú órákat töltöttem el az életemből azzal, hogy megpróbáltam elmagyarázni, a szemléletbeli eltéréseket és a „kényelmes" számolás felé vezetni a tanulókat. Ugyanakkor megfelelő (az előző példához képest jelentősen több) kísérletet végeztetve a csoporttal fel lehet ismertetni a kívánt összefüggéseket.

Néhány tapasztalati sorozat a következő volt (az adatok alapján látszik, hogy 120 dobás nem ad elegendő alapot az általunk kívánt következtetéshez):

	1	2	3	4	5	6
1	7	3	1	3	3	2
2	3	3	2	2	2	2
3	5	1	3	3	5	5
4	3	3	6	6	1	5
5	2	4	2	2	5	2
6	2	5	4	6	4	3

	1	2	3	4	5	6
1	2	4	4	4	2	2
2	5	5	3	1	6	0
3	1	3	5	2	2	2
4	3	1	2	4	3	5
5	4	2	5	4	2	5
6	6	6	3	3	5	4

A következő feladat kapcsán a statisztikai következtetéseket, azok logikáját ismételjük át. Azért tartom szükségesnek, mert a tanár szakos hallgatók tradicionálisan a félév utolsó két-három óráján találkoznak csak hasonló jellegű fogalmakkal és indoklásokkal, ami egyben azt is jelenti, hogy a gyakorlaton igen ritkán kerülnek szóba hasonló feladatok. Egyetlen példa alapján persze lehetetlen mindenre kitérni, de az alapvető fogalmakat áttekintjük.

2.5. Feladat *Az egyik gimnázium 12a osztályának egyik felébe 13 gyerek járt. A 2002-es és a 2003-as tanulmányi átlagaikat táblázatba rendeztük. Állíthatjuk-e ez alapján, hogy javult a gyerekek tanulmányi eredménye? Ha igen, milyen valószínűséggel? Ha nem, miért nem? Mit állíthatunk biztosan?*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
tavalyi átlag	3,9	3,8	2,1	2,1	3,0	3,1	2,7	2,1	4,8	2,6	2,6	3,3	2,2
idei átlag	4,8	3,6	3,0	3,5	2,5	4,1	3,6	3,9	4,1	3,2	4,2	2,5	4,1

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Sokféle módon járhatunk el. Az egyik kézenfekvő dolog az lenne, ha gyerekről gyerekre végignéznénk a tanulmányi eredmény változását. Ha csak azt vizsgálnánk, hogy az egyes gyerekek eredménye romlott vagy javult, akkor elég lenne azt nézni, hogy a változás pozitív vagy negatív-e? Egészítsük ki a táblázatot két sorral. Az elsőbe a változást írjuk be, a másodikba csak annak előjelét.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
tavalyi átlag	$3,9$	$3,8$	$2,1$	$2,1$	$3,0$	$3,1$	$2,7$	$2,1$	$4,8$	$2,6$	$2,6$	$3,3$	$2,2$
idei átlag	$4,8$	$3,6$	$3,0$	3,5	$2,5$	$4,1$	$3,6$	$3,9$	$4,1$	$3,2$	$4,2$	$2,5$	$4,1$
növekedés	$0,9$	$-0,2$	$0,9$	$1,4$	$-0,5$	$1,0$	$0,9$	$1,8$	$-0,7$	$0,6$	$1,6$	$-0,8$	$1,9$
előjele	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$

Először vizsgáljuk meg mi annak a valószínűsége, hogy 9 gyerek javítson és 4 rontson? Az első kérdés ami felmerül az, hogy honnan vegyünk ilyen valószínűségeket? Az egyik lehetőség, hogy nagyszámú korábbi statisztikai adat elemzésére támaszkodhatunk. A másik lehetőség az, hogy valamilyen előzetes feltevéssel élünk, és ezen feltétel mellett számoljuk ki a valószínűségeket. Ha a feltétel mellett a most megfigyelt események bekövetkezése kicsiny valószínűségű, akkor a feltételt elvetjük, más szavakkal nem fogadjuk el. Ezt a kezdeti feltételt gyakran nullhipotézisnek nevezik és H^0-lal jelölik. Viszonylag kényelmesen számolható valószínűségeket kapunk, ha azt feltételezzük, hogy

H_0: A gyerekek tanulmányi eredménye ugyanolyan eséllyel javult mint romlott, azaz mindkét irányú változás valószínűsége 1/2.

H_1: A gyerekek tanulmányi eredménye javult, azaz a valószínűség nagyobb, mint 1/2.

A szokásos eljárás az, hogy előre rögzítünk egy általában α-val jelölt valószínűséget: a mostani esetben és sok más példában is az $\alpha = 5\%$, vagy más szavakkal az $\alpha = 0,05$ értéket választjuk. Ha az adott H_0 feltétel mellett az adott minta bekövetkezésének valószínűsége a rögzített α-nál kisebb, akkor azt mondjuk, hogy ez olyan valószínűtlen esemény, hogy nyugodtan feltehetjük, hogy a feltétel hamis. Ezt úgy szokták mondani, hogy elvetjük a H_0 hipotézist, vagy ami ezzel egyenértékű, elfogadjuk a H_1 hipotézist.

Számoljunk. Hány gyereknek kellene javítani a 13 közül, hogy elvessük a H_0 hipotézist?

$P(13 \text{ gyerek javít})$	$\binom{13}{13} \cdot 0,5^{13} \cdot 0,5^0$	$\approx 0,000122$
$P(12 \text{ gyerek javít})$	$\binom{13}{12} \cdot 0,5^{12} \cdot 0,5^1$	$\approx 0,001587$
$P(11 \text{ gyerek javít})$	$\binom{13}{11} \cdot 0,5^{11} \cdot 0,5^2$	$\approx 0,009521$
$P(10 \text{ gyerek javít})$	$\binom{13}{10} \cdot 0,5^{10} \cdot 0,5^3$	$\approx 0,034912$
$P(9 \text{ gyerek javít})$	$\binom{13}{9} \cdot 0,5^{9} \cdot 0,5^4$	$\approx 0,087280$

A táblázatban a vonal feletti valószínűségek összege 0, 046143, a következő értéket is hozzáadva pedig már 0, 133423, ami sokkal sokkal több mint az elfogadási határnak állított 5%. Döntési stratégiánk tehát a következő. Ha a társaságban 13, 12, 11 vagy 10 gyerek javított, akkor elvetjük a H_0 hipotézist. Mivel a mi osztályunkban „csak” 9 gyerek javított, ezért el kell fogadnunk a feltételünket, azaz ezen vizsgálat és döntési eljárás alapján nem állíthatjuk, hogy jegyeik változásánál a véletlenen kívül más is befolyásolta volna a gyerekek jegyeinek csoportját. Tömörebben szólva el kell fogadnunk a H_0 hipotézist.

Az előző feltevés és teszt során egy csomó hasznos információt elhanyagoltunk, cserébe viszont egy könnyen számolható és könnyen ellenőrizhető kritériumot kaptunk.

Mi történne, ha nem csak a változások előjelét, hanem a nagyságát is figyelembe vennénk? Példánkban az átlagos változás $0,7$ volt. Természetesen feltesszük, hogy a gyerekek teljesítménye egymástól független volt, és a változás normális eloszlást követ. Hipotéziseink most a következők lesznek:

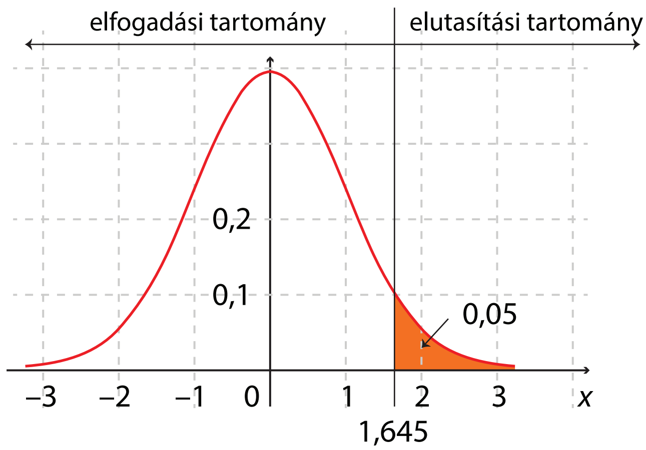
H_0: A gyerekek tanulmányi eredménye átlagosan nem változott. $(m = 0)$

H_1: A gyerekek tanulmányi eredménye átlagosan javult. $(m > 0)$

Az egyszerűség kedvéért maradjunk most is az $\alpha = 5\%$ elfogadási illetve elutasítási szintnél és az egyszerűbb számolás kedvéért tegyük fel, hogy ismert a teljes sokaság elméleti szórása, $\sigma = 1,2$.

Vizsgáljuk meg az átlag eloszlásának várható értékét és szórását. A H_0 hipotézis alapján $m = 0$, az átlag szórása pedig $\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,2}{\sqrt{13}} \approx 0,3328$. A normális eloszlás táblázata alapján az $\alpha = 5\%$-os szinthez az $x = 1,645$ tartozik. Ezek szerint, ha ennél nagyobb érték jön ki, akkor ennek valószínűsége kisebb mint 5%. Az adatokat sztenderdizálva

$$\frac{\overline{x} - 0}{\sigma_{\overline{x}}} = \frac{0,7 - 0}{0,3328} \approx 2,0339 > 1,645$$



2.4. ábra. Elfogadási és elutasítási tartomány sztenderd normális eloszlás esetén $(\alpha = 5\%)$

Ebből az következik, hogy most elutasítjuk a H_0 hipotézist. Azaz két különböző statisztika, két különböző becslés, két különböző döntést eredményez ugyanolyan hibavalószínűség mellett. Vigyáznunk kell, ha megfogalmazunk valamit. Arról és csak arról tudunk nyilatkozni, amit éppen kiszámoltunk, és még arról is csak bizonyos valószínűséggel.

Gyakori, a hallgatók által elkövetett hibák lehetnek a feladat megoldása során:

- Rosszul, vagy hibásan fogalmazunk meg feltételezéseket.
- Olyankor is ki akarunk számolni valamit egy korábban tanult teszt segítségével, ha annak feltételei nem teljesülnek.
- A végrehajtás után hibás következtetésre jutunk.
- Olyan dolgot is állítunk, amiről a végrehajtott eljárás nem mond semmit.

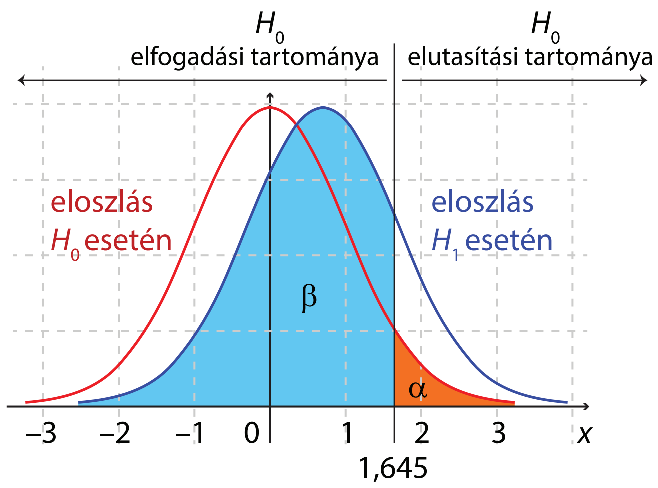
Vizsgáljuk meg egy kicsit azt, ami minden előadássorozatban elhangzik, minden statisztika könyvben benne van, de mégis csak a hallgatók 50%-a érti meg és tudja alkalmazni. Milyen hibákat hordoz a döntési eljárásunk, milyen pontosak a következtetéseink?

Előfordulhat, hogy ugyanilyen adatok mellett a H_0 hipotézis mégis fennáll. Ennek valószínűsége azonban korlátozott, ezt rögzítettük $\alpha = 0,05$-ban (elsőfajú hiba). Ezen kívül egy másik hibázási lehetőség is előfordulhat. Lehet, hogy a valóságban a H_1 hipotézis áll fenn, de most épp olyan adatokat kaptunk véletlenül, melyek ezt nem támasztják alá. Ez is egy lehetséges hiba, melynek nagyságát nem mindig ismerjük és általában β-val jelöljük (másodfajú hiba). Ezek leírása rengeteg helyen megtalálható, de sokan szokták a közösségi lapokon kezdeni, például:

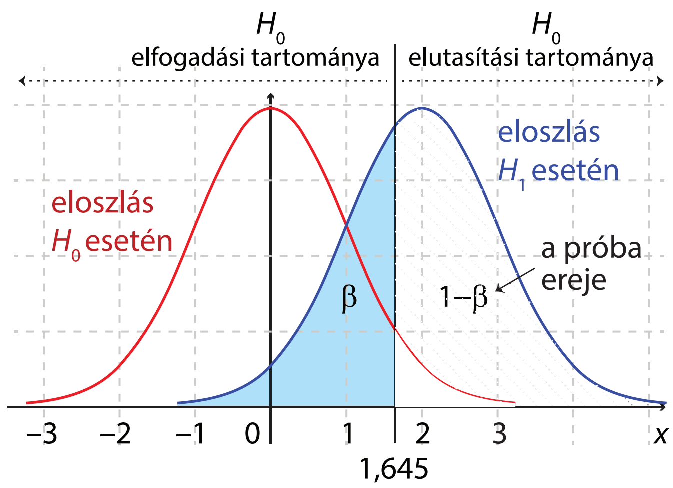
http://hu.wikipedia.org/wiki/Elsőfajú_és_másodfajú_hiba

Látható, hogy ha α nő, akkor β csökken és fordítva. A β valószínűség nagyságáról általában nincs közvetlen információnk, de nyilván szeretnénk, ha viszonylag kicsi lenne, illetve ha $1 - \beta$ nagy lenne. Ezt az $1 - \beta$ kifejezést a próba erejének hívjuk.

Célszerű a hallgatóknak két-három különböző grafikont is felrajzolni, és velük ábrázoltatni az $1 - \beta$ kifejezés változását a H_1 hipotézisben megfogalmazott átlag függvényében. Öt-hat különböző csoportra bontva a hallgatókat és velük különböző értékre végigszámolva, majd az eredményeiket összegezve szépen kirajzolódik a próba erejének görbéje.



2.5. ábra. Az α és a β hibavalószínűségek



2.6. ábra. Az α és a β hibavalószínűségek

Irodalomjegyzék

[AA] Ambrus, A. 1995. Bevezetés a Matematikadidaktikába. *Eötvös Kiadó*, javított kiadás 2004.

[HaP] Halmos P. 1998. Egy matematikatörténeti unikum: Nicolas Bourbaki. *Természet Világa* III., (matematika) különszám, 111–114.

[DL] De Lange, J. 1996. Using and Applying Mathematics in Education. *Kluwer Academic Publishers*, 49–97.

[NT1] Nemetz, T. 1995. Valószínűségszámítás. Budapest. *Tankönyvkiadó*

[NTWG] Nemetz, T., Wintsche, G., 1999. Valószínűségszámítás mindenkinek. Szeged.*Poligon*

[HP] Poincaré, H. 1908. Tudomány és föltevés. Budapest. *Kir. Magyar Természettudományi Társulat* pp. 163–185.

[PGY] Pólya, Gy. 1977. A gondolkodás iskolája. *Gondolat Kiadó*

[VT] Varga, T. 1972. Játszunk matematikát! I-II. Budapest. *Móra*