Tanári szakdolgozat – Tanulmány

Számírások és műveletek különböző ókori kultúrákban

Tapasztalatok felhasználása a számfogalom fejlesztésében

Készítette: Kisics István

tanári mesterszakos hallgató,

matematika, multikulturális nevelés tanára

Témavezető: Munkácsy Katalin (főiskolai docens)

ELTE TTK Matematikai Intézet

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Budapest, 2014.

Tartalomjegyzék

Előhang

A matematika tanulásának folyamatában nagyobb a szerepe van a megértésnek és az összefüggések átlátásának. A matematika megértésében az alapokon van a hangsúly, és éppen ezért ez az, amivel először ismerkedünk meg a tanórákon. Az első legfontosabb fogalom az aritmetikában a számok fogalma. Ezzel kezdjük a tanulást a családunkban is: számolunk az ujjainkon szinte kisgyermek korunk óta. Ezt követik a különböző műveletek, melyekkel a már megismert, megtanult számokat struktúrába rendezzük.

A tanári képzésem végén, az egyéni szakmai gyakorlaton volt szerencsém olyan diákokkal is foglalkozni, akiknek a tanulmányaik, köztük a matematika is, zátonyra futottak. Itt, a Dobbantóban, a matematika modulban 15-25 éves, 7-8. osztályos tanulók csoportjának kellett a római számok írását megtanítanom. Ezeknek a gyerekeknek néhol egy összeadás is nehézséget okozott, így már a IV=5-1=4 megtanulása sem ment gördülékenyen. Egy átlagos osztályban nem okoz komoly gondot a római számok írása, megértése. Elgondolkodtató viszont, hogy az összeadás, és a kivonás után a szorzást hogyan végezhetnénk el római számokkal. Ezt a nehézsége miatt nem is részletezem, és a számolótábla használatának bemutatása sem célom (bár akár lehetne is). Inkább egy olyan „programot" szeretnék végiggondolni, amelynek segítségével játékosan ismerkedhetnek meg a diákok a római számokkal, és a számok teljesen additív írásmódjával.

Az általános iskolai tanítványaimnál észrevettem, hogy komoly kihívást jelent a szorzás és az osztás, különösképp az írásbeli szorzás, osztás többjegyű számmal. Hiába a sok begyakorolt, egy kaptafára húzható feladat, a nyolcadik osztályban és a középiskolában is egyre többször találkozom ezekkel a hiányosságokkal. Gimnáziumban tartott óráim és tapasztalataim szerint az algebrai kifejezéseknél szintén problémát hoz a számokról betűkre térés, a műveletek általános értelmezése, továbbvitele.

Mindezeket továbbgondolva és összegezve, mint tanár több kérdés is fölmerült bennem:

- Meg lehet-e könnyíteni a számfogalom elsajátítását, megértését különböző kultúrák számírásának megismertetésével?
- Esetleg más kultúrák számolási technikájának, műveleti algoritmusainak feltérképezése segíti-e, segítheti-e egy átlagos, vagy egy lemorzsolódott diák matematikai tanulmányait.
- Van-e olyan számolási mód, amely könnyítheti, kiegészítheti, élménnyé teheti az általános iskolában tanult mechanikus számolásokat?
- Van-e olyan aritmetikai algoritmus, amelynek a tárgyalása szerepet kaphat a tehetséggondozás területén?

Ezen kérdések boncolgatására hívom a dolgozatommal a kedves Olvasót.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani Munkácsy Katalin tanárnőnek, akinek megjegyzései és az értékelései mindig előre vittek és erőt adtak, segítsége nélkül nem készülhetett volna el ez a dolgozat.

Köszönet illeti Vásárhelyi Éva tanárnőt, aki akkor is bízott bennem és meglátta a lehetőségeket, amikor már csak nagyon kevesen.

Végül nagyon szeretném megköszönni a családomnak, hogy ilyen jól viselték a hiányomat, és ilyen sokat segítettek a dolgozat elkészítésében a javaslataikkal és a bíztatásukkal.

És köszönöm mindazoknak, akik bíztak abban, hogy ez a nap is eljön…

1. Bevezetés

A szakdolgozatomban különböző ókori kultúrák által használt matematikai jelöléseket, technikákat, interpretációkat vizsgálok. Az adott kor matematikai hátterének felépítésével nem foglalkozom részletesen, inkább kiragadok egy-egy problémát, mozzanatot, amire az adott kultúra, a saját matematikai koncepciójával egyszerűbb, frappáns megoldást ad. Nem csak a matematika történetét szeretném tanítani, hanem egy-egy régi technikával könnyíteni, vagy épp „nehezíteni”, kihívás elé állítani a diákokat.

Ezzel felkelthetem és fenntarthatom a motivációjukat, ami óriási lehetőség, mert, a gondolkodási sémák sokszínűsége az órán előkerülő témák monotonitásának megtörésére jól használható. Azok a diákok, akik elfelejtettek gondolkodni, akikből az oktatási rendszer már réges-rég kinevelte, ahogy Ken Robinson is állítja, a kreativitást, most felfedezhetik azokat a területeket, amiből kiválaszthatják a hozzájuk közel állókat.

A szakirodalmi áttekintés során megemlítem, hogy kik voltak azok, nemzetközi és hazai szinten, akik közelebb hozták az iskolai matematikához a matematikatörténetet. Hazai szinten az ELTE kutatásait néztem meg Munkácsy Katalin és Gosztonyi Katalin eredményei alapján. Az oktatási rendszerünk alapdokumentuma, a NAT vizsgálata sem hiányozhat a tervezési folyamat során. A multikulturális nevelés tanára második modulom miatt a kulturális determináció felelevenítése, és enyhítése is célként fogalmazódik meg. Természetesen a kockázatok és a veszélyek felmérésére is időt kellett szakítanom.

Az ókori kultúrák kidolgozásánál mindig megtalálható egy rövidebb helyzetelemezés, ahol megmutatom, hogy mely matematikai mozzanattal szeretnék foglalkozni. A történeti áttekintés után a matematikai háttér kidolgozásával folytatom, melyben az elvégzett művelet, a leírt számok tulajdonsága, a matematikai fogalom mikéntjéről írok, Végezetül pedig egy kis feladatsort, feladat-lehetőséget vázolok fel, aminek a megoldásában az elemzett momentum segítséget nyújthat, könnyítést, vagy kihívást jelenthet, A függelékben nem matematikatörténeti alapokhoz kapcsolódó feladatokat gondolok tovább, hogy az érdeklődést felkeltsem, vagy a műveletvégzést megkönnyítsem.

Legyen itt szó az egyiptomiak ismételt kettőzéseiről, a tízes átlépésről és a természetes törtjeikből fakadó alternatív megoldásaikról. Meg fogom vizsgálni, hogy milyen lehetőségektől fosztotta meg az egyiptomiakat a helyi érték hiánya.

Nem maradhat ki a babiloni helyi értékes hatvanas számrendszer. Itt még meg kell említeni, milyen problémákat vet fel az, hogy nem létezik náluk tizedesvessző, valamint nulla. A becslést megkönnyítendő bemutatnám még Ptolemaiosz becslési módszerét is.

Érintjük a görögök 24+3 betűjének számokként való használatát, és a könnyebb számolás érdekében alkalmazott számrendszerváltások előnyeit. A betűk számokként való használata nem engedi, hogy a függelékben ne beszéljünk egy kicsit nevek, szavak és számok kapcsolatáról.

Nem mehetünk el szó nélkül a római számírás és annak problematikája mellett sem. A szigorúan additív, archaikus jelölés mindennapi életben való megjelenését is érdemesnek tartom kutatni.

Célomnak tekintem a szorzás és osztás megkönnyítését az általános iskola felső tagozatán, így az indiai-arab számjegyek használatának könnyítő aspektusait is vizsgálnám az írásbeli szorzás esetében. Végül pedig Varga Tamás művének tükrében vizsgálnám meg az írásbeli osztás megkönnyítésének lehetőségeit (lásd: Függelék).

A feladatok legtöbbször csak saját példák, amiből ötleteket tudunk meríteni a munkánk megkönnyítéséhez, valamint diákjaink problémáinak, nehézségeinek megoldásához.

2. Szakirodalmi áttekintés

A történeti áttekintés, és az ókori kultúrák feltárásánál van der Waerden, és Sain Márton műveire támaszkodtam. A matematikatörténet iskolai felhasználásához szakirodalmi alapvetésként segítségül hívtam Gosztonyi Katalin és Munkácsy Katalin, az Eötvös Lóránd Tudományegyetemen Vásárhely Éva tanárnő segítségével végzett, kutatásainak eredményét

Elsőként egy idézettel indítok, mely hűen tükrözi a dolgozatom célját és motivációját. „Arra kell törekednünk, hogy minden tanulót, akár többre, akár kevesebbre jut a matematikában, meggyőzzünk arról, hogy a matematika hasznos, érdekes és szép; nem rábeszélő úton, hanem azzal, hogy megmutatjuk a hasznát, érdekességét és szépségét" (Varga Tamás – A matematika tanítása, p. 5.)

Az utóbbi években, valamint az elmúlt évtizedben egyre nagyobb lett az érdeklődés az iránt, hogy a matematikatörténet mennyiben járul hozzá a matematika tanításának és tanulásának javításához. Pedagógusok – szerte a világban – megfogalmaztak kérdéseket és végre is hajtottak kísérleteket arról, hogyan lehet használni a matematikatörténetet a matematika oktatásában.

2.1. Nemzetközi kutatások, eredmények

A barcelonai ICMI Tanulmány (1997 - 2000), amely a matematikatörténet iskolai szerepkörét vizsgálja, kérdései és eredményei közül azokat emelném ki, melyek ezt a szakdolgozati témát is komolyabban érintik:

- A matematikatörténet különösen fontos szerepet játszhat a tanárképzésben, valamint a továbbképzések során. A történeti elemek bevonása a tanórákon más megvilágításba helyezi a matematikát. Ez a megközelítés segítheti a tanárokat és a diákokat egyaránt, felkelti az érdeklődést, fenntartja a lelkesedést.
- Fejleszti a készségeket mely nem csak a matematikában, hanem a többi tantárgy, de még a valós élet folyamán is segítségükre lehet. Ilyen például a bizonyítási, érvelési készség.
- „A matematikatörténet jelenti hagyományosan a hidat a matematika és a társadalomtudományok között, különösen a matematikatörténetnek azon ága, amely nem a kronologikus leírást, a prioritási kérdések eldöntését, hanem a problématörténeti

vizsgálatokat tűzi ki célul.” (Munkácsy Katalin - A matematika tanulásának társadalmi meghatározottsága, in Iskolakultúra 2006/4, p. 87.)

A szerzők elsősorban a diákokkal, a tanárokkal készített interjúk és az ott megfogalmazott vélemények alapján vizsgálták a megvalósított kísérleteket. Megállapították, hogy a középiskolai diákoknak a matematikához való hozzáállása jelentősen, pozitív irányba változott a matematikatörténet órai alkalmazása során.

2.2. Hazai kutatások

A hazai kutatásokat figyelve több nevet és vizsgált területet is említhetünk ennek a témakörnek a megismerése közben: Ambrus András és Deák Ervin kutatásait, Sain Márton matematikatörténetét, de Kántort Tünde és Filep László a matematikatörténet iskolai alkalmazásához, felhasználásához kapcsolódó kutatásait. Nem maradhat ki a sorból Hajnal Imre neve sem, hiszen igazán az ő tankönyveiben találhattunk először történeti utalásokat. Szerencsére ma már szinte minden tankönyvben megjelennek hosszabb-rövidebb matematikatörténeti vonatkozások is. Varga Tamásról, a matematikadidaktika meghatározó alakjáról sem feledkezhetünk meg. A későbbiek folyamán a különböző kultúrák egy-egy problémára adott megoldási stratégiáit szeretném az ő matematikához való hozzáállásának tükrében is vizsgálni.

Kevés az iskolai felhasználást fókuszba állító szakirodalom. Az előbbi felsorolásban a matematikatörténeti munkáknak nem elsődleges célja az iskolában való felhasználásnak az elemzése és megvitatása, hanem a történeti feltárás. Szerencsére itthon is egyre többen teszik fel a kérdést, és foglalkoznak mélyebben azzal, hogy a diákok hogyan tudnák ezt a tanulmányaik során kamatoztatni. Ilyen gondolatébresztő munkái vannak Munkácsy Katalin tanárnőnek és Gosztonyi Katalinnak. Az ő munkásságuk nagyon inspiráló ebben a témában.

2.2.1. Matematika és pedagógia kapcsolata

„A matematika a legalsó szinttől a legfelsőig tapasztalatokból nő ki: próbálkozásokból, sejtésekből és ellenőrzésükből, elvetésükből vagy megerősítésükből. Mégis az emberi szellem szabad alkotása. Híd a »két kultúra« között. Tele van játékossággal, esztétikummal: művészet is.”(Varga Tamás)

Hazánkban az oktatást elsősorban a nemzeti alaptanterv határozza meg, ami fontos etikai alapelveket, nevelési célokat tartalmaz. Ez kimondja, hogy a különböző területeken keresztül, a matematika segítségével is, hatást gyakorolunk más területekre és azok fejlesztésére is. Ez azt jelenti, hogy minden területnek, tantárgynak önmagán túl kell mutatnia. A matematika adhatja az olyan készségek elsajátításának oroszlánrészét, mint a gondolkodási, a kommunikációs, a tanulási és a tudásszerző készségek. Miként lehet ez „a matematika mindenkié”? Varga Tamás gondolatai és a matematikatanításra vonatkozó koncepciója komoly hatással volt a NAT-ra, és a kerettantervek elkészítésére.

Nézzük meg közelebbről mit és hogyan fejleszthet a matematika

- A matematikai gondolkodás adja a hétköznapi gondolkodásunk, valamint a kommunikációnk alapját is. Segíti a pontos fogalmazást, logikát, érvelést, bizonyítást.
- A szöveges feladatok értelmezése, megoldása hozzájárul az önálló tanulás kialakításához.
- Az alapvető matematikai ismeretek, valamint a fogalmak megtanulása fejleszti az emlékező képességet, akaraterőt, és a tanulásban való kitartást.

3.2.2. A jelenlegi oktatás nehézségei

Több komponense is van az aktuális matematikaoktatás nehézségeinek. Soroljuk fel ezeket a hátráltató tényezőket.

2.2.2.1. Társadalmi hátrány

Munkácsy Katalin tanárnő kutatását hoznám itt példaként, mely a matematikatanulás társadalmi meghatározottságáról szól. Ez a tanulmány bemutatja, milyen problémákkal kell szembenéznünk.

- Egyértelműen kimutatható, hogy az alacsony társadalmi státusz, a kirekesztettség és a szegénység korrelál a rossz tanulmányi eredményekkel.

- Sokszor már a szülők és a diákok sem értik, miért kell a számolást mindenkinek megtanulni és sajnos a közvélemény ezt nem is várja el. Lényeges azonban megértenünk ennek a fontosságát:
    - A bizonyítási képesség, és az érvelési-logika mindenki számára elengedhetetlenek az életben
    - A felsőoktatás szinte minden területén megjelenik a matematika. Erre tanárként is nagyon oda kell figyelnünk, hiszen a diákok nem látják előre, hogy az alapok az iskolai matematikában rejlenek. Ha ezeket az alapokat nem sajátítják el, akkor a későbbiek folyamán egyáltalán nem, vagy csak nagy küzdelmek, nehézségek árán tudnak boldogulni.
- Általánosságban is elmondható a diákok mai hozzáállásról, hogy a tanulmányi eredményeiknek nem tulajdonítanak nagy jelentőséget.
- A szülők nem tudnak segítséget nyújtani a gyermekeiknek az iskolai feladatok teljesítésében, valamint egyre nehezebb segíteniük a helyes tanulási szokások kialakításában.
- Az iskolai hiányzások, lemorzsolódások szintén kapcsolatba hozhatók a tananyagban való lemaradással. Ennek hátterében szintén a család szocioökonómiai státusza, valamint az otthon kialakult problémák állhatnak.

Az előbbiek miatt ezek a tanulók kevesebb eséllyel kerülnek a gimnáziumokba, a felsőoktatásba, mint szerencsésebb társaik. Ennek a társadalmi meghatározottságnak az enyhítésére lehet jó támpont a matematika tanulásában a matematikatörténet.

2.2.2.2. Tanári „felkészületlenség”

A tanárképzés során sok gyakorlat van ugyan, mégis a leendő tanárokat nem készítik fel arra, hogy miként kezeljék az felmerülő problémákat, és nem rendelkeznek kellő módszertani készlettel, és ismerettel, hogy az eredményeiket és kudarcaikat a tanítási körülményekhez viszonyítva értékelni tudják. Ezért van az is, hogy a matematikatörténet megjelenése a tanórákon, mely egyébként jó lehetőséget kínál az érdeklődés, motiváció kialakításához, fenntartásához, pedagógusfüggő, és csak alkalomszerű.

2.2.2.3. A „kivételesek többen vannak”

Varga Tamás is említi a mentális kor normális eloszlását, miszerint a kivételesek vannak többen. Ez csak annyit tesz, hogy hiába van előírva melyik órának miről, hogyan kell szólnia, figyelembe kell vennünk, hogy sokan le vannak maradva. Ha ezzel nem foglalkozva tovább haladunk a tantervek szerint, a szakadék csak nő… Emellett a tehetséges tanulókról sem feledkezhetünk meg, hisz a szórás ebbe az irányba is terjed. Ha nem oldjuk meg valamiképp, hogy számukra is érdekes és kihívás maradjon a matematika, unottak, motiválatlanok lesznek, pedig a motiváció az alapja mindennek.

Miért fontos ez a számunkra? A dolgozatom azt is szeretné megvizsgálni, mivel tudjuk az egyes lemorzsolódott tanulókat visszahúzni, miként tudjuk motiválni, segíteni. Mindezt úgy, hogy a matematikatörténetre, a matematika fejlődésének egy-egy fontos állomására fókuszálunk.

2.3.3. Matematikatörténet előnyei

A kultúrtörténetnek része a matematika is. Segíti kialakítani a matematikához való pozitív hozzáállást, ha bemutatjuk egyes elemeinek – ad absurdum – a művészetekben való alkalmazását. A motivációs bázis kialakításában is komoly segítség lehet a matematikatörténet egy-egy mozzanatának megismertetése,

A matematikához való pozitív hozzáállást nagyban segítheti az, ha a tanulás során a gyerekek megtapasztalhatják saját képességeik, tudásuk növekedését: „én is értem, én is képes vagyok rá”.

A matematikatörténet tanórákon való megjelenése segíthet rávilágítani a kulturális sokszínűségre. A mai hagyományos matematika terminusai, amelyeket ma is használunk, alapvetően az antik görög hagyományokra épülnek. Más társadalmakban, kultúrákban a matematika fejlődése is különböző lehet, más tárgyakkal foglalkozik, és eltérő eszközöket használ. Ez a multikulturális lehetőség izgalmasabbá teheti az órákat, valamint árnyaltabbá teheti a diákok tudáshoz, és eltérő kultúrájú társaikhoz való hozzáállását.

A matematikatörténet segítségével rávilágíthatunk arra is, miként kapcsolódnak össze a különböző témakörök, valamint hogyan jelenik meg a természettudományokban, a gazdaságban, a filozófiában és akár a vallásban is. Ezzel elősegítjük tehát, hogy a matematikára a diákok ne csak egy „merev” tantárgyként tekintsenek, hanem mint egy élő tudományágra, melyet a saját életük mindennapjaiban is használni tudnak. Ez szintén hatalmas motiváló erő lehet.

„A matematikatörténet tanulmányozása a matematikai tevékenység természetének mélyebb megértéséhez vezetheti a tanárt; új magyarázatokkal, példákkal, alternatív megközelítési módokkal gazdagíthatja didaktikai eszköztárát; és segítheti, hogy megértse, értékelje az egyes problémák megoldását akkor is, ha azok nem a modern matematikában elvárt nyelven és formában fogalmazódnak meg.” (Gosztonyi Katalin – A matematikatörténet felhasználásának lehetőségei a matematikaoktatásban, p. 7.)

A matematikatörténet tanulmányozása tehát új perspektívákat nyithat a tanítás során. Segít rávilágítani azokra a mozzanatokra, amelyek a tanulókat az egyes módszerek megértésében és alkalmazásában akadályozzák. Így könnyebben tudnak segítséget és magyarázatot nyújtani a diákok számára. Előfordulhat olyan eset is, hogy a matematikatörténet az órán nem jelenik meg, viszont az előbb feltárt okok miatt áttételesen mégis segíti a tanítási-tanulási folyamatot.

A dolgozatban egy-egy ilyen mozzanatot szeretnék majd kiragadni, és órákra, szakkörökre, vagy korrepetálásokra kidolgozni.

2.3.4. Mire kell figyelnünk, hogyan kell használnunk

Ahogy a NAT-ban is szerepel, a tanári szerepkör kibővült. Nem korlátozódhat tehát csak az információközlésre, mert legalább akkora szerepet kap a fejlesztés és a nevelés is. Fontos tudatosítanunk, magunkban és a diákokban, az oktatás folyamán, hogy a matematika sohasem öncélú. Nem csak a már elsajátított, betanult folyamatok monoton elvégzéséről szól, hanem mindenki számra örömszerző, és alkotó tevékenységnek kell lennie. Sokan kiemelik, hogy a történeti megközelítés szintén segítheti a tanárokat, hogy átlépve saját korlátaikat új módszertani elemeket csempésszenek a tanórákra. Ráadásul, így az információközvetítő szerepkörből is könnyebb kilépni, ezáltal egyszerűbb a tanulást alkotó, és örömszerző tevékenységnek megőrizni.

Már nagyon korán elkezdődik a személyiség, a világról alkotott kép, és a világhoz való hozzáállás kialakulása. A matematika tanítása közben sokszor adódik a lehetőség, a különböző új témáknál, az alapok lerakására, elrendezésére. Ez a legfontosabb rész. Ha az alapok biztosak lesznek, és sikerül a matematika órákba esetleg egy kis játékosságot és élményt csempészni, akkor sokkal könnyebb lesz tanulni, és tanítani is. Az elkövetett számolási hibák sokszor az alapok bizonytalanságából, hiányosságából erednek, nem pedig komplex összefüggések és bonyolult műveletek miatt következnek be.

Lényeges mozzanat, hogy a tanítás-tanulás folyamán mindig a tanulók szempontjából közelítsünk meg egy problémakört. Minden diák, minden osztály különböző. Látnunk kell tehát, mi akadályozza őket egy-egy matematikai feladat megoldásában. Meg kell értenünk, hogyan képesek a diákok új ismereteket szerezni, miként tudják azokat elmélyíteni, összekapcsolni, alkalmazni. Ehhez a legjobb út a gyerekek szemszögéből való közelítés.

A tanulók számára a leginkább kedvelt időtöltés a játék, így a matematika tartalmú játékok és a matematikához kapcsolódó érdekes problémák és feladványok a legalkalmasabbak a fejlesztéshez, neveléshez. Így a tanórákon is, ha játékosan tudunk egy-egy problémát feltárni, ezzel tudjuk leginkább megfogni a diákok figyelmét. A matematika története igen sok érdekességgel és tanulsággal szolgál. Ezeknek a motívumoknak a tanórán való alkalmazása tehát jó lehetőség erre.

Az ok, amiért ezeket a szempontokat kiemeltem, nem más, minthogy a dolgozatom során, mint már említettem, arra keresek választ, és arra szeretnék példát mutatni, hogyan lehet a matematikát mindenki számára, a saját képességeinek a legmegfelelőbben megtanítani. Legyen szó itt a lemorzsolódott, lemaradt, vagy épp a tehetségesebb tanulókról egyaránt.

Számos veszélyre hívja fel a figyelmünket a matematikatörténet órán való alkalmazásáról Gosztonyi Katalin:

- Nem szabad elkövetnünk azt a hibát, hogy történeti ismereteket adunk csak át az órán, mert az érdeklődést felkelthetik, de nem vezet mélyebb megértéshez.
- Ha a történeti ívet követjük, és fölöslegesen hosszadalmas kitérőket teszünk, akkor könnyen összezavarhatjuk a diákokat, és nem érjük el a célunk.
- Mindig tudnunk kell tehát, hogy egy adott történeti momentummal, mit és hogyan akarunk megvalósítani.

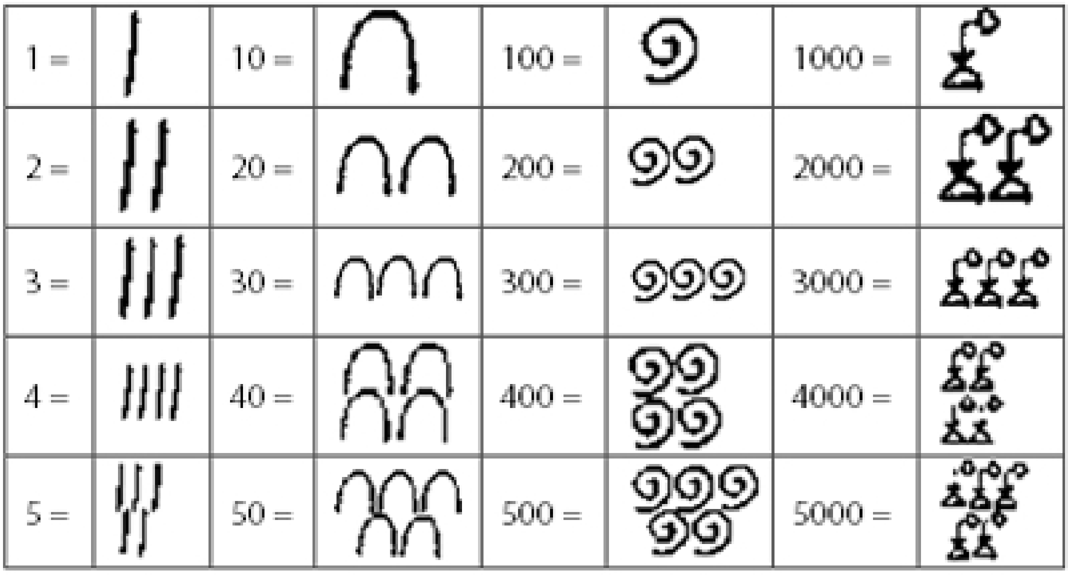
3. Különböző ókori kultúrák

A további alfejezetekben egyes kultúrák matematikai struktúrájának lényegesebb mozzanatait vizsgálom meg, és végiggondolom az órai felhasználhatóságát. Ezeket a fontos momentumokat megragadva egy-egy foglalkozás, több feladat vázlatát tervezem meg, így törekszem az érdeklődés felkeltésére és az élményszerzés lehetőségére.

3.1. Egyiptomi matematika

Kezdetben beszélünk pár szót magáról az egyiptomi matematikáról, és ebből a kultúrából az ismételt kettőzést, a tízes átlépést, majd pedig a természetes törtjeikből fakadó alternatív megoldásokat gondolnánk át kicsit részletesebben.

Az egyiptomiak helyiérték nélküli tízes számrendszerben pálcikákkal, kapukkal és más formákkal jelölték a nagyobb egységeket, amire beváltották a kisebbeket:



3.1.1. Az egyiptomi számírás és az ismételt kettőzés

Az egyiptomiak nem ismerték a helyi érték fogalmát, és nem tettek különbséget a négy alapművelet között. Mindent, a szorzást és az osztást is, az összeadásra vezettek vissza. Ha belegondolunk, ez már a kétjegyű szorzás esetén is rengeteg időt vesz igénybe. A folyamat lerövidítésének érdekében kialakult a folyamatos kétszerezés, tehát az ismételt kettőzés használata. Így nem kell 12 darab összeadásként felírni a $12 \cdot 12$ -t, hanem az ismételt kettőzéssel már megkapott összegek felhasználásával jutottak az eredményhez.

Azért végezhetjük el a szorzást így, mert bármelyik számnak, tényezőnek egyértelmű a kettes számrendszerbeli alakja, ami megadja a kettőhatványok egy lineáris kombinációját, ami persze a számmal egyenlő. A másik tényező többszöröseivel és ugyanazokkal az együtthatókkal vett lineáris kombináció pedig pont a szorzatot adja meg. Ez, mármint a lineáris kombináció, a összeadás szorzásra vett disztributivitásán múlik.

Nézzük akkor a Rhind papirusz 32. feladatát, a $12 \cdot 12$ szorzatot. Ezt a szemléltető példát a következőképp számították ki:

$$
\begin{aligned}
1 \cdot 12 &= 12 \\
2 \cdot 12 &= 24 \\
4 \cdot 12 &= 48 \quad / \\
8 \cdot 12 &= 96 \quad /
\end{aligned}
$$

Amikor a számoló az ismételt kettőzéssel idáig eljutott, akkor észrevette, hogy a szorzat felírható a következő összegként:

$$12 \cdot 12 = 4 \cdot 12 \; + \; 8 \cdot 12 = 48 + 96 = 144$$

A gyakorlatban ezt nem írták ilyen részletesen, hanem a kétszerezés közben megjelölték (a dolgozatomban a továbbiakban /-lel jelölöm) az alkalmas szorzatokat, és azokat összeadták.

Tehát a művelet elvégezhetősége két tulajdonságon múlik. a másik pedig a számok kettes számrendszerbeli alakjának létezése, valamint az összeadást és a szorzást összekapcsoló disztributivitás,.

Ez a momentum, ahogyan az egyiptomiak a szorzásra tekintettek, alkalmazható a szorzás bevezetésénél, valamint jól használható a műveletek összefüggéseinek, a disztributivitás feltárásának során. Varga Tamás maga is említi, hogy a szorzás megértésének, elmélyítésének a lényege a disztributivitáson keresztül valósulhat meg, és az írásbeli szorzás technikája a disztributivitás többszörös alkalmazásán alapszik. Nagyon szépen látszik az egyiptomi gondolkodásmódban, hogy miként és hogyan lehet egy összeadást csoportosítva lerövidíteni. Segítség lehet ez tehát a szorzás kialakulásának és lényegének megértésében.

Az iskolában a szorzás tanítását, ismétlését leggyakrabban szintén azzal a gondolattal indítjuk, hogy a szorzás az iterált összeadás rövidítése. Ki is adjuk feladatnak ezt az ismételt összeadást, hogy számoljanak ki egy szorzatot csupán a már ismert művelet, az összeadás segítségével.

Sokszor van lehetőségünk megragadni az alkalmat, hogy a tanulókat kihívás elé állítsuk. Oldják meg az ismételt kettőzést használva ugyanazokat a szorzási feladatokat

Végezzük el a $31 \cdot 32$ szorzást. Számoljuk ki a szorzat eredményét az ismételt kettőzés segítségével is!

$$31 \cdot 32 = (1 + 2 + 4 + 8 + 16) \cdot 32 =$$
$$= 1 \cdot 32 + 2 \cdot 32 + 4 \cdot 32 + 8 \cdot 32 + 16 \cdot 32 = 16 \cdot 32 =$$
$$= 32 + 64 + 128 + 256 + 512 = 992,$$

vagy a $32 \cdot 31$-et számoljuk ki a 31 ismételt kettőzésével (a duplázást a $\rightarrow$ jelöli):

$$31 \rightarrow 62 \rightarrow 124 \rightarrow 248 \rightarrow 496 . \rightarrow 992 /$$

Így a hatodik részeredmény ez esetben a végeredmény is lesz, ehhez persze jó tudni előre, hogy $2^5 = 32$. Ennél a pontnál elszakadhatunk a történeti hűségtől, és a különbség szorzását is megmutathatjuk.

Ekkor a $31 \cdot 32$ szorzatot a következőképp alakíthatjuk:

$$31 \cdot 32 = (32-1) \cdot 32 = 32 \cdot 32 - 32 = 1024 - 32 = 992,$$

Ehhez a 32-t nem ötször, hanem hatszor duplázzuk meg, és így lesz a kisebbítendő 1024. Egy kivonás után pedig megvan az eredmény.

Megkérdezve a diákokat a feladat elvégzése után, valószínűleg nehezebbnek és lassabbnak fogják érezni ezt a fajta megoldást, hiszen többet kell gondolkodniuk rajta és kicsit többet is kell számolniuk vele. Azonban biztosak lehetünk abban, hogy élmény és tapasztalatszerzés szintjén ez sokkal többet jelent majd a számukra.

Kettes számrendszerben minden szám egyértelműen felírható, így az adott 2-hatványok segítségével bármelyik tényezőt fel tudjuk majd írni az ismételt kettőzés segítségével. Így a részletszorzatok közül mindig meg tudjuk találni a megfelelő kombinációt. Így a számrendszerek tanításánál is segítségül hívhatjuk a duplázást.

Írjuk fel a kettes számrendszerbeli alakját a következő számokat: 15; 17, majd végezzük el a $15 \cdot 17$ szorzást az ismételt kettőzés segítségével!

$$\begin{array}{rl} 15 & |1 \\ 7 & |1 \\ 3 & |1 \\ 1 & |1 \end{array} \uparrow \;\Rightarrow 15 = 1111_2 \text{, és}$$

$$\begin{array}{rl} 17 & |1 \\ 8 & |0 \\ 4 & |0 \\ 2 & |0 \\ 1 & |1 \end{array} \uparrow \;\Rightarrow 17 = 10001_2$$

Felmerül a kérdés, melyik számot duplázzuk, hogy kevesebb összeadást kelljen elvégeznünk. Duplázni is könnyebb, és a kevesebb összeadás miatt is érdemesebb a 15-t kétszereznünk:

$$15/ \rightarrow 30 \rightarrow 60 \rightarrow 120 \rightarrow 240/.$$
$$1 \quad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 1_2$$

A 17 kettes számrendszerbeli alakjából egyértelműen látszik, hogy a duplázás során létrejövő részeredmények közül melyiket kell megjelölnünk. Így a szorzat már csak egy összeadás:

$$17 \cdot 15 = (1+16) \cdot 15 = 15 + 240 = 255$$

Az egyiptomiak a műveletek meggyorsítása érdekében az ismételt kettőzés mellett sokszor használták a számok tízszeresét és a felét is. Ilyenkor egy számnak a tízszeres szorzatát, valamint ennek a felét, tehát az ötszörös szorzat eredményét is felhasználták. Ebből merítve, szintén remek példa lehet a tanulók számára, hogy a duplázás, valamint a tízszeres és ötszörös szorzat segítségével minél kevesebb részösszegből írjanak fel egy szorzatot.

Lássuk ez alapján az előző példát, $17 \cdot 15$:

$$1 \cdot 17 = 17$$
$$10 \cdot 17 = 170 /$$
$$5 \cdot 17 = 85 \quad /$$

Mindezek segítségével a számolás a továbbiakban így alakul:

$$17 \cdot 15 = 17 \cdot (10+5) = 17 \cdot 10 + 17 \cdot 5 = 170 + 85 = 255$$

Szükségünk van a disztributivitás mélyebb feltárására ahhoz, hogy ezt jobban megértessük a gyerekekkel. Ezért fordulok most Varga Tamáshoz, és hozom A matematika tanításából a következő példát. Az írásbeli szorzás technikája, és az ismételt kettőzés is, a disztributivitás többszörös alkalmazásán alapszik a kommutativitás és az asszociativitás mellett. „Aki nem ismerkedett meg tapasztalati úton a disztributivitással, az eleve nem lehet tisztában azzal, hogy mi jogon szoroz úgy, ahogy tanulta.” Az, hogy valaki el tudja mondani, hogyan szorzunk összeget egy számmal, az már egy erős absztrakciót kívánó megfogalmazás és a túl korai erőltetése könnyen vezethet értelem nélküli tudásra. És akkor nézzük a 21. századra adaptált feladatokat:

- A németországi kiránduláson „7 képes levelezőlapot vettem”, darabját 1 euro 60 centért, mindegyikhez 1 euro 40 centnyi bélyeget is vettem. Mennyit fizettem?
- A győri menetjegypénztárban 9 db 2520 Ft-os menetjegyet és 9 db 480 Ft-os pótjegyet adott el a pénztáros. Mennyit fizettek az utazásért a Budapestre utazók?

Látható a fokozatosság, az első példában természetes az a gondolat, hogy a két szorzat összeadása helyett egy összeget szorozhatunk, hisz a képeslapokra mindjárt rá is ragaszthatjuk a bélyegeket. A második feladatban ezzel szemben előnyt jelent az első feladat ötlete. „Ilyenféle, alkalmasan összeválogatott feladatok útján elérhetjük, hogy a tanulók előtt lassan felderengt a kétféle számítási mód kapcsolata, és az, hogy a szövegtől függetlenül mindig rajtuk áll, melyik számítási módot alkalmazzák.” A tartalmi és a formai változatosságot elérhetjük az ismételt kettőzés tanításával.

Meg kell említenünk még itt, hogy a mi helyi értékes számírásunkból fakadóan a kétszerezés nem okoz komoly problémát. Az egyiptomi számírásnál a sok kupac pálca, kapu, stb. leírása bizony komoly gondot is okozhatott. Az egyiptomiak az osztásra a szorzás ellentettjeként tekintettek, még nehezebb volt tehát ennek az elvégzése. A számolásuk azért fejlődhetett erre a magasabb fokra, mert tízesével csoportosították a kisebb egységeket és beváltották nagyobb formákra. Ez a tízes átlépés gyakorlatilag már megfelel a mai tízes számrendszerünk alapjának.

3.1.2. A természetes törtekkel való számolás lehetőségei

Az egyiptomiaknak a törtekhez való hozzáállása szintén érdekes lehet számunkra. Minden „törtet”, még a számolás előtt felbontottak egység számlálójú, azaz természetes törtek, törzstörtek összegére. Ők csak ezeket ismerték, kivéve persze néhány egyszerűbb, gyakran előforduló törtet, mint $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$. Ennek hátterében az áll, hogy nem az osztástól jutottak a törtek értelmezéséhez, hanem mint az egység valahányad részeként tekintettek a törtekre. Ebből is adódik, hogy bár a törtekkel való számolást ez nagyban lelassítja, mégis vannak olyan feladatok, melyeknél a természetes törtek alkalmazása jelenti az egyszerűbb, frappáns megoldást.

A „törteknek" természetes törtek összegeként való előállítását táblázatokkal könnyítették. Előre sejthető, hogy az egységtörtekkel nehézkesebb a számolás, mint a mai, számlálóval rendelkező törtekkel, de akadnak olyan feladatok, amelyeknél az egyiptomi módszer hozza a „szebb" megoldást.

Az egyik fennmaradt papirusz klasszikus példája: hét kenyeret nyolc ember között egyenlőképpen kell elosztani.

Könnyen jön a gondolat, hogy mind a hét kenyeret nyolc-nyolc egyenlő részre szeljük, és mindenki kap hét ilyen szeletet. Ki tudja ennél kevesebb vágással elosztani a kenyereket?

Az egyiptomi számoló szerint viszont egy ember része:

$$\frac{7}{8} = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8},$$

Így elegendő 4 kenyeret félbevágni, 2 kenyeret negyedekre, és egy kenyeret nyolcadokra szelni, tehát a kenyér szétosztása most kevesebb, 49 helyett 4+6+7, azaz 17 vágással hajtható végre. (Sain Márton – Nincs királyi út, p. 51.)

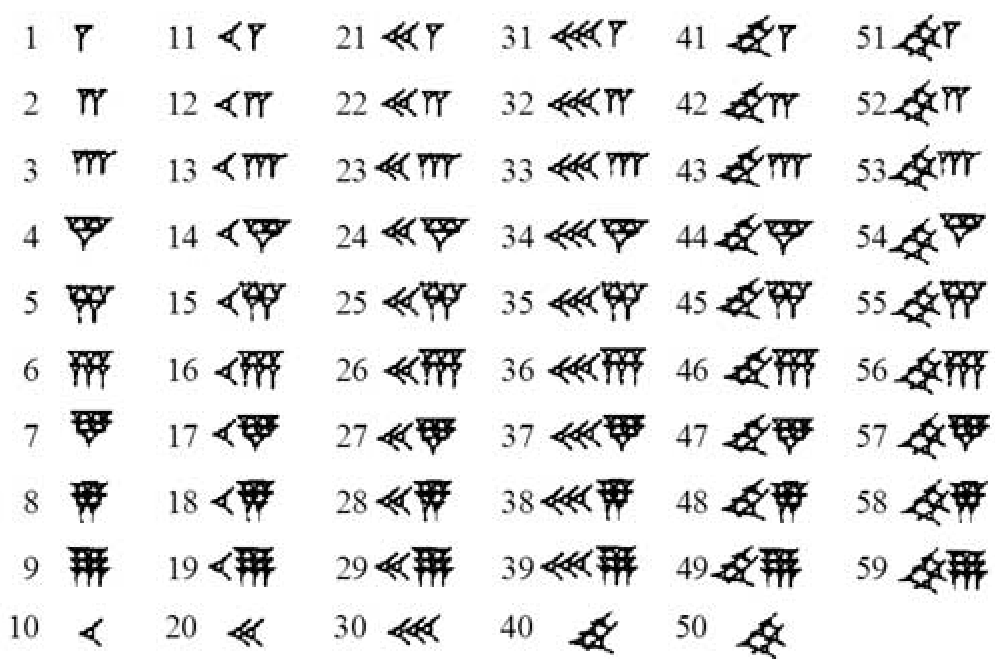
Úgy gondolom, közelebb hozhatjuk számukra ezt a példát 6 db almával. Szemléltessük, hogyan lehet három almát elosztani 4 diák között. Először negyedeljük el mindhárom almát. Osszuk el 3 diák között.

Keressünk megoldást az egyiptomi módszert alkalmazva, úgy, hogy természetes törtek segítségével írjuk fel a három negyedet, amit egy diák kapott. Vágjuk fel a maradék három almát a számításaink alapján.

A törtek bevezetésénél mi is azt a gondolatot vesszük elő, hogy egy tört az egység valahányad része. A törtek második értelmezésénél, miszerint nem a negyedekből veszünk hármat, hanem a három egészet négy egyenlő részre osztjuk, ez nagyon hasznos lehet. Ilyenkor tényleg az életből hozunk konkrét példákat, és ez kedvezően hat a motivációra is.

3.2. Babiloni matematika

A babiloni matematika több szempontból is jellegzetes. A hatvanas számrendszert használják, melyben már megjelenik a helyi érték fogalma, ami a nulla, és a tizedesvessző hiányában nem tökéletes, de nagyon jól használható. Ennek a témának az ismertetése során lehetőségünk nyílik gyakoroltatni a diákokkal a fogalmak megalkotását, valamint rávilágítani az egyszerű, háttérben megbújó összefüggésekre.



3.2.1. A hatvanas számrendszer és a helyi érték

A matematika olyan mértékben fejlődött itt, hogy érdemes ennek a történetét átbeszélni. A végiggondolásra egy szövegértési, fogalomalkotási foglalkozást képzeltem el és terveztem meg.

A babiloniaknál a magas alapszám miatt, mint a fenti képen látjuk, a számokat 1-től 59-ig különböző jelsorozatokkal, nagyjából különböző alakú és helyzetű ékekkel, jelölték. A 60 leírására természetesen ugyanazt a jelet használták, mint az 1 jelölésére. Tehát 1-től 59-ig a mai, de nem helyi értékes, tízes számrendszer nyoma fedezhető fel náluk.

- Elsőként meg kell fogalmazni mit is jelent az előző mondat! Miben hasonlít az általunk használt tízes számrendszerre?

A hasonlóság az „átlépésben” rejlik. Ahogy mi a 9-es számjegy után, úgy a babiloniak az 59-es érték leírása után kezdik ismételni azokat a jelöléseiket, amiket az 1-től használtak. Náluk azért nem beszélhetünk 59-ig helyi értékről, mert különböző éksorozatok jelölik a számaikat.

- Figyeljük meg a következő szöveget és fogalmazzuk meg saját szavainkkal ezek alapján, mit jelent a helyi érték, és vizsgáljuk meg mennyire volt célszerű ez a jelölés.

> Az egyes helyi értékeket kezdetben kis hézaggal különítették el egymástól. Némi zavart okozhatott az, hogy az üres helyi értékeket nem jelölték. Amint a 0 jel hiánya, ugyanúgy az egyesek helyének nem-jelölése is problémákat jelentett a szám leolvasása során, melyet csak a feladathoz tartozó szöveges megfogalmazás enyhített valamelyest. Innen kellett következtetni a számok nagyságrendjére. Minden jel értéke attól függött, hogy hol foglal helyet a szám leírásában. Elől álltak a 60-nak a magasabb hatványai, végén az alacsonyabbak. Így alakult ki a helyi érték használata, s innen ered maga az elnevezés is.

A helyi érték azt jelenti, hogy egy számjegy értékét az elhelyezkedése, a betöltött helye határozza meg. A különböző helyi értéken álló „számjegyek” elkülönítésére kis hézagokat használtak a babiloniak.

- Miért volt erre szükség? mi mit használunk helyette?

Nem létezett még a nulla, és a tizedesvessző. A hatvan, valamint az egy jelölésénél ugyanaz a karakter szerepelt, így könnyen össze lehetett keverni őket. Mi a nullát használjuk arra, hogy megmondjuk melyik hatványnál, hányadik helyen áll egy adott számjegy.

A babiloniak szorzása sokkal könnyebben és gyorsabban ment, mint más addigi kultúrában, sőt a görögöknél, és a rómaiaknál is, hiszen itt már létezett a helyi értéknek a fogalma. A babiloniaknak „csak” egy táblázatra volt szükségük, melyben meg voltak adva az egyes szorzatok eredményei. Ezután ugyanúgy működött a szorzás, mint ma nálunk a tízes számrendszerben.

- Ha nekünk a szorzótáblát a tízes számrendszer miatt az $1 \cdot 1$-től a $9 \cdot 9$-ig kell ismernünk, mekkora lehetett a babiloni szorzótábla?

  Az $1 \cdot 1$-től az $59 \cdot 59$-ig tartott, hiszen ők a hatvanas számrendszert használták. Ez 81 szorzat helyett $59 \cdot 59 = 3481$ szorzatot jelent, ha a szorzás kommutativitását nem vesszük figyelembe. Ezeket táblázatokból keresték elő, sőt készítettek olyan táblázatokat is, mely a gyakran szereplő számok többszöröseit tartalmazta.

A nulla jel, valamint a tizedesvessző hiánya szintén problémákat okozott, ez hosszú idő alatt, Ptolemaiosznál, megoldódni látszott. Bár a babiloniak csak későn használták a tizedesvesszőt, a hatvanados törtjeikkel ugyanúgy tudtak szorozni, mintha egész számok lennének. A helyi érték-rendszer miatt nem is kellett ezzel törődni a művelet elvégzése során. Mi is ezt tesszük: és csak a számolás végén írjuk ki a tizedesvesszőt.

- Végezetül fogalmazzuk meg saját szavainkkal, mit jelent a számrendszer, és hogy mikor beszélünk 2-es, 10-es, vagy épp 60-as számrendszerről.

  A számrendszer alapszáma (2, 10, 60, etc.) megmutatja, hogy hány különböző karaktert használunk az adott rendszerben, azaz tartalmazza a használt számjegyek sorozatát. Ha már megadtuk a sorozatban az alaki értékeket, akkor ezek valódi nagyságát a helyi érték határozza meg.

A babiloni számírás ismertetése során tehát lehetőségünk van interaktívvá tenni az órát. Segítségünkre lehet ez a téma olyan matematikai fogalmak megalkotásában és elmélyítésében, mint a helyi érték és a számrendszerek. Mikor a diákok egyedül, vagy csoportokban gyakorolják az egyes kifejezések megfogalmazását, kialakulnak az önálló gondolkodás pillérei. Ez a csoportoknál is igaz, hiszen lehet, hogy nem mindenki tudja magától megfogalmazni az egész kifejezést, azonban a csoportban minden ötlet összeadódik. Egy-egy megfogalmazás során így lehetőséget kapnak a gyengébb tanulók is, hogy bekapcsolódjanak a feladat megoldásába. Egy fogalom megalkotása, akkor is, ha az egy olvasott/hallott szöveg értelmezése alapján készül is el, fejleszti a kifejező képességet, mindemellett segít az összefüggések keresése felé terelni a tanulókat. Ha ezt ráadásként más kultúrák, módszerek kapcsán tudjuk elérni, akkor lehetőségünk nyílik az összehasonlításra, mely a mélyebb megértéshez vezethet. Ilyenkor a tanuló a különbségek, hasonlóságok felfedezése során juthat el a teljes megértése.

3.2.2. Becslés

A babiloni kultúra kapcsán szeretném bemutatni még Ptolemaiosz becslési módszerét. Ő nagy virtuóza volt a babiloni számok szorzásának és osztásának.

Ma a számológépek elterjedésével egyre kisebb szerepet kapnak az írásbeli műveletek, valamint a becslés is. Ennek ellenére nem maradhatnak ki az oktatásból, csak azért mert van olyan eszköz, amely helyettünk elvégzi ezeket. A becslésnek igenis nagy szerepe lehet a mai életünk során is, nem beszélve arról, hogy fejleszti a gondolkodásmódot, valamint alakítja a világhoz való hozzáállásunkat. Ha megérezzük, hogy a matematikát az egyszerű hétköznapjainkban milyen sok mindenre tudjuk használni, máris több kedvvel vágunk bele a tanulásába.

Az osztási példát mi így kezdjük megoldani: $360 : 114 \approx$ körülbelül 3 lesz azért, mert $114 \cdot 3 = 342$, és $342 < 360$, tehát a részeredményünk helyes.

Ptolemaiosz nem szoroz vissza mikor egy ilyen osztást végez: $360 : 114 \approx$ körülbelül 3 lesz, mert ő a részhányadossal újra oszt, ekkor $360 : 3 = 120$, és $120 > 114$, tehát a részeredmény helyes.

Látszik, hogy Ptolemaiosz becslési módszere könnyebb lehet egy ilyen egyszerűnek mondható feladat esetén, és az összetettebb becsléseknél ez a második lehetőség is a segítségünkre siethet, mármint amikor a részeredményt nem egy szorzással, hanem egy osztással ítéljük helyesnek. Ez olyan, mint mikor az írásbeli kivonás ellenőrzését egy összeadással, de akár egy újabb kivonással is elvégezhetjük, amikor a kivonandó és a különbség szerepét felcseréljük. Ez csak gazdagítja a módszereink tárházát. Mi egy osztásnak a végeredményét általában úgy becsüljük meg, hogy hányadost megszorozzuk a becsült értékkel, és ez alapján következtetünk, hogy kell-e a becsült értéket nagyobb, illetve kisebb számra cserélnünk, majd ugyanezt a lépést újra elvégezzük, míg meg nem kapjuk a helyes eredményt. Ezzel szemben Ptolemaiosz a becsült értékkel osztja el az osztandót, s ha a kapott szám nagyobb az osztásban szereplő hányadosnál, akkor ez a helyes becsült érték, ha pedig kisebb, akkor az ennél kisebb szám lehet a helyes.

3.3. Görög matematika

Érintjük a görögök 24+3 betűjének számokként való használatát, és a könnyebb számolás érdekében alkalmazott számrendszerváltások előnyeit. A betűk számokként való használata nem engedi, hogy a függelékben ne beszéljünk egy kicsit nevek, szavak és számok kapcsolatáról.

Köztudott, hogy a görögök a geometria terén nagy eredményeket értek el, azonban kevés szó esik arról, hogy az alfabetikus számírásuk jelentősen hátráltatta őket az algebrai feladatok során. Az V. századtól kezdték el használni a ion betűket számírásra. Az egyeseket az első kilenc ion kisbetűvel jelölték. Ugyanúgy a tízesek és a százasok jelölésére a következő kilenc-kilenc betű szolgált. Ehhez a 24 betű kiegészítéseként még három „betű” bevezetése volt célszerű és szükséges is. A százasok fölött újra kezdték az előbb leírt módon, s hogy ne legyen kavarodás, a szám előtt (balra) lent vesszővel jelölték a nagyságrendet.

Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ϛ	Ζ	Η	Θ
α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ϙ
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90

Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω	Ϡ
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

ION ALFABETIKUS SZÁMÍRÁS

A görögök tehát már a tízes számrendszert használják, melyet ma talán a legtöbbet használunk. Ez a számírás viszont nem helyi értékes. Kézenfekvő ezért az is, hogy az egyesek, tízesek, százasok „helyén” más-más betű jelzi „ugyanazt a számjegyet”, például a 888 görög betűkkel $\eta\pi\omega$. Ez megnehezíti a számok ilyen alakjával való számolást, ezért a feladatokat nem is ebben az alakban megadott számokkal oldották meg, más esetben pedig számolótáblát, abakuszt használtak.

Remek agytorna az elvont gondolkodást fejlesztve a görög számírást gyakoroltatni. Ez a játékos hozzáállás élvezetes lehet, mert így a matematikában nem csak számokat látunk, hanem szavakat is. Ebben az esetben már a számok nem a megszokott formában jelennek meg, hanem a különböző számjegyeket betűk jelölik, ami hozzájárul az absztrakció fejlesztéséhez, fejlődéséhez. Ez segítheti a diákokat abban, hogy könnyebben megbarátkozzanak az algebrai kifejezésekkel, az egyenletekkel, egyenlőtlenségekkel, ahol az ismeretleneket szintén betűkkel jelöljük. Ráadásként itt nem csak a megfelelő betűt kell behelyettesítenünk a számjegyeink helyére, hanem a helyi értékeket is alaposan figyelembe kell vennünk. Lehetőséget kapunk arra is, hogy a matematikát más színben tűntessük fel. Ezekben a feladatokban a matematika nem lehet pusztán számolás, hiszen nem különböző összegeket, szorzatokat számíttatunk ki, hanem a különböző matematikai ismereteinket alkalmazva (helyi érték, behelyettesítés, etc.) érdekes kihívások elé állítjuk a tanulókat.

Egy számtani rejtvénnyel zárnám ezt a fejezetet, az egyik legnagyobb görög matematikust, Eukleidészt idézve:

Nehéz zsákokkal rakottan, dúsan
Szamár és öszvér haladnak nagy búsan.
Nyög a szamár, mire a társa:
„Tán fáj már uraságod háta?
Én nem nyögök, pedig ha egy zsákot
Adnál abból, ami nyomja hátad,
Kétszer annyit, mint te vinnék akkor.
De ha tőlem átvennél egy zsákot,
Egyformán szidhatnók a világot.”
Hány zsák volt az állatok hátán

3.4. Római matematika

A görögökhöz képest a rómaiaknál már könnyebb a számjegyek nyomon követése, kevesebb jelet használnak, és csak a leírás szabályaira kell figyelni. A matematika órákon és a mindennapi életben is gyakran találkozhatunk a római számokkal. Azonban ezekkel még mindig nehéz számolni, ezért nem is ilyen alakban szoroztak és osztottak. Ebből fakadóan mi is inkább a leírás mikéntjével foglalkozunk

A sorrend megkövetelése csak az újkori számírásnál ilyen jelentős, ugyanis az ősi kultúrában nem jelentett kivonást a nagyobb számjegy előtti kisebb számjegy. Náluk a számírás teljesen additív volt, azaz csak össze kellett adni a számjegyeket.

Vegyünk egy összetett, játékos példát az archaikus, additív számírásra, amiben a római számok értékének kiszámolását gyakorolhatjuk.

- Írjunk fel a római számok $(\mathrm{I}, \mathrm{V}, \mathrm{X}, \mathrm{L}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{M})$ használatával kirakható összes keresztnevet, becenevet!

Számítsuk ki ezeknek a „számoknak” az értékét, és keressük meg a legkisebb, és a legnagyobb értékűt közülük! Keressük meg azokat a párokat, melynek értéke azonos. Fogalmazzuk meg, miért lehet ez?

$\mathrm{ILI} \to 1+50+1=52$,	$\mathrm{CILI} \to 152$,	$\mathrm{ILDI} \to 552$,
$\mathrm{MICI} \to 1102$,	$\mathrm{MILI} \to 1052$,	$\mathrm{LIDI} \to 552$,
$\mathrm{LIVI} \to 57$,	$\mathrm{VILI} \to 57$,	$\mathrm{VIVI} \to 12$

A legkisebb értékű név tehát a VIVI, a legnagyobb pedig a MICI.

Egyenlő értékkel rendelkező névpárok a következőek LIVI - VILI, ILDI - LIDI.

Ezek a szavak ugyanazokat a betűket tartalmazzák, csak más sorrendben, mivel azonban a sorrend a feladatban, akárcsak az archaikus számírásban, nem meghatározó, ezek összege érthetően azonos.

A feladat megoldása során fejlesztjük a kreativitást, mivel szabad utat engedünk a nevek kirakásával az alkotásnak. Gyakoroljuk a római számok segítségével az alaki érték szerinti csoportosítást, valamint a római-arab számírás „átváltását”. Fejlesztjük az elvont gondolkodást a betűk, római számok, használata során. Ezen túl pedig ösztönözzük a diákokat, hogy meglássák a mélyebb összefüggéséket, és meg is fogalmazzák azt.

Az iskolai órákon a római számokat úgy mutatjuk be, hogy először „számjegyeket”, és adott számokat írunk fel. Megtanuljuk átírni az arab számokat rómaiba, és fordítva. És itt meg is állnék egy pillanatra. Talán ez a mozzanat, bár nem tűnik jelentősnek, mégis nagyon fontos. A diákok itt, akárcsak a görög számírásának a taglalása során, szembesülnek azzal, hogy nem az általuk megszokott módon és formában találják meg a számokat. Ez segítség lehet abban, ahogy ezt már ott is említettem, hogy ne idegenkedjenek az egyenletek és az egyenlőtlenségek során előkerülő ismeretlenektől, amit leginkább betűvel jelölünk. Gimnáziumban tartott óráim és tapasztalataim szerint az algebrai kifejezéseknél szintén problémát hoz a számokról betűkre térés: a műveletek általános tulajdonságainál, a hatványozásnál és az algebrai törtek értelmezésénél. Itt a lehetőség ezeknek a problémáknak az enyhítésére.

Mire lehet még jó a római számok mélyebb ismerete? Az egyéni szakmai gyakorlatom során alkalmam nyílt a Dobbantóban lemorzsolódott diákok oktatásába belekóstolni. Náluk problémát jelentett már az is, hogy felírják a négyes számot római számként. Egy általános osztályban az ugyanis teljesen evidens, hogy nem csak egy, hanem több számjegyet kell az arab számjegy helyére behelyettesítenünk, sőt rejtve egy műveletet is leírunk. Ezt a számot római alakban úgy tudjuk megkapni, hogy egy matematikai kifejezéssé alakítjuk az arab számot:

$$4 = 5 - 1 = -1 + 5 \Rightarrow \mathrm{IV}\,.$$

Ráadásként arra is figyelni kell, hogy a megadott betű $(\mathrm{V}, \mathrm{X}, \mathrm{L}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{M})$ előtt vagy után írjuk-e le a kérdéses „számtagot”, mert az „összeadást” és a „kivonást” a sorrend jelöli.

3.5. Indiai matematika

Célomnak tekintem a szorzás, és osztás megkönnyítését az általános iskola felső tagozatán. Így az indiai számolás könnyítő lehetőségét vizsgálnám az írásbeli szorzás esetében. Az írásbeli osztás megkönnyítését pedig Varga Tamás műve alapján gondolnám át.

Mielőtt azonban erre rátérnék, fontosnak tartom kiemelni néhány elemet az indiai kultúrából, mely a mai matematika kialakulásához elengedhetetlen szerepet játszik.

Elsőként azt a tényt emelném ki, hogy a mai számjegyeinknek az írása, melyeket csak arab számoknak hívunk, valójában az indiai kultúra számírásában gyökerezik. Az ősi kultúrákban többféle számoló táblát, „számoló-gépet” használtak a számítások elvégzésének megkönnyítésére. Többek közt az Égei-tenger vidékén elterjedt golyós számoló-gép is ide tartozik, melynek az volt a haszna, hogy szinte észrevétlenül átfogalmazta a műveleteket a helyi értékes 10-es alapú számrendszer nyelvére. Az indiai matematika sikere nagyban összefügg ezzel a ténnyel.

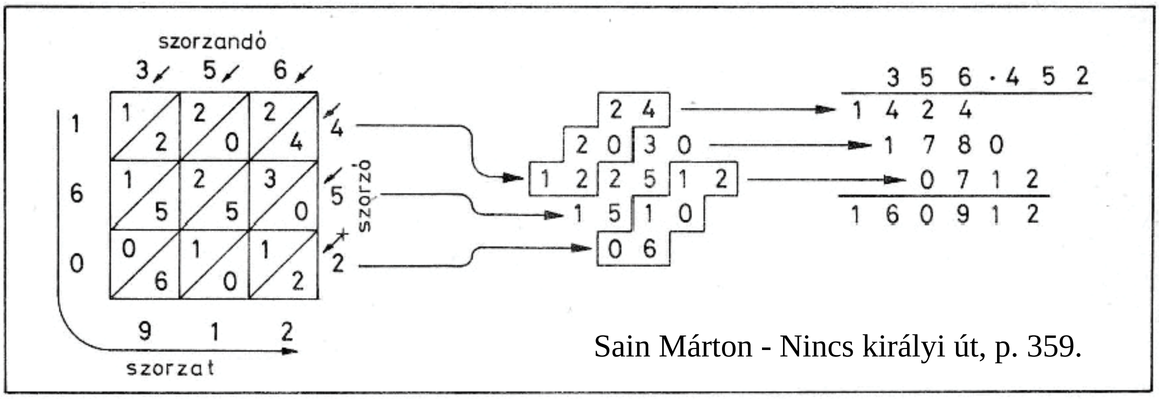
Elterjedésének és hódításának kulcsa abban rejlik, hogy egyesítették a tízes számrendszer, a helyi érték, valamint a nulla használatát. Mint láthatjuk, az írásbeli műveleteket így sokkal egyszerűbben végezhetjük el, mint a korabeli kultúrák bármelyikében.

3.5.1. Az indiai szorzás

Az indiaiaknál az írásbeli szorzásra egy számunkra szokatlan módszert alkalmaztak. Egy táblázatot használtak a többjegyű számok többjegyűvel való szorzásának elvégzésére. Ilyenkor a szorzást részleteiben végezték el, több kicsi szorzásként, csak egyjegyű szorzatokként, és nem kombinálták felváltva összeadással, ahogy mi tesszük.

Nézzük, hogyan végezték az indiaiak a többjegyű szorzást. A téglalap, és adott esetben négyzet fölé, valamint jobb oldalára felírták a két szorzandót. Elvégezték az egyjegyűek szorzását úgy, hogy a sorokat megszorozták az oszlopokkal. Majd az eredményt beírták a megfelelő helyre: a tízeseket a felső, az egyeseket az alsó háromszögbe. Végül a jobb alsó sarokból indulva a nyilak irányában összeadták a kapott eredményeket, az esetlege maradékokat a következő oszlophoz adták. Végül a bal felső sarokból indulva a nyíl mentén leolvasható a végeredmény.

Nézzünk rá a $356 \cdot 452$ példát!



Sain Márton - Nincs királyi út, p. 359.

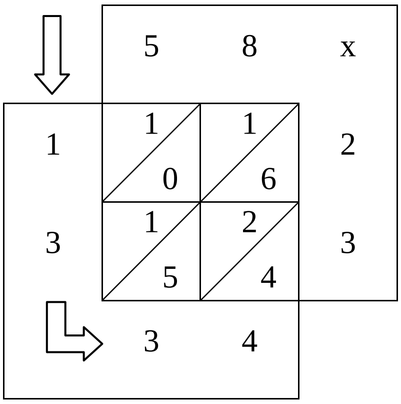
Ilyenkor nem kell foglalkozni a maradékok fejben, vagy kézen tartásával, csak a végén elvégezni a kapott szorzatok összeadását. Elsőre kicsit idegennek, és körülményesnek tűnhet ez, mégis segíthet a nehezebben haladó diákok életében.

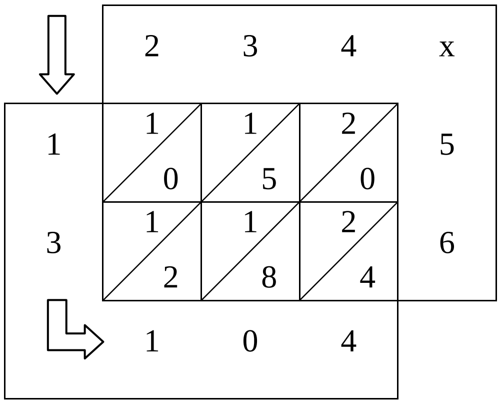
Kevésbé ijesztő számukra már maga a gondolat is, hogy a szorzást csak részleteiben, nem pedig egy nagyobb, összetettebb műveletsorként kell elvégezniük. Kevesebb a figyelmetlenségből, elszámolási vagy a tartós odafigyelésből adódó hibázási esély, hiszen, mint említettem, itt kis részletekben számolunk. Nem baj, ha egy pillanatra máshova terelődik a tanuló figyelme, a táblázat segítségével könnyen vissza tud térni, tovább tudja folytatni a feladatot, s nem kell az egész számolást az elejéről kezdenie. Könnyebb az ellenőrzés is, bár valóban hosszabb, mert lépésenként tehető meg. A végére pedig csak az összeadás marad.

Kiküszöbölhetőek ezzel tehát az elszámolási hibák, mert gyakrabban tévedünk többjegyű szorzásban, ha a maradékokat és a szorzás műveletét össze kell fűznünk. Könnyebb, ha csak egy dologra kell figyelnünk, és ebben az esetben az elején több apró szorzást kell elvégeznünk, és csak utána, az összeadás során kell a maradékokkal foglalkoznunk.

Segítség ez tehát olyan tanulók esetében, akiknél a tartós figyelem okoz gondot, vagy hajlamosak a figyelmetlenségből, elszámolásból elkövetett hibákra, vagy épp nehezen boldogulnak a többjegyű számokkal. És bár egy dolgozat, felmérés, felvételi esetén időt veszíthetnek, ami egyáltalán nem biztos, ezzel a technikával, azonban mégis lehet, hogy jobb eredményt érnek el a kevesebb hibázási lehetőség és a könnyebb ellenőrzés miatt is.

Számítsuk ki a következő szorzatokat az indai módszerrel: $58 \cdot 23$, $234 \cdot 56$





Az eredmény tehát: $58 \cdot 23 = 1334$, illetve $234 \cdot 56 = 13104$

4. Összegzés

A dolgozatom során igyekeztem bemutatni a teljesség igénye nélkül, hogy a matematikatörténet órákon való megjelenése pozitív hatásokat eredményezhet.

Természetesen a dolgozat csak néhány példát mutat arra, hogy miként lehet az egyes történeti elemeket a tanítás során bevonni. Nem egy kézikönyv mely megmutatja, mit és hogyan kell csinálni. Mindenki maga dönti el, hogy tud-e ebből merítve olyan példákat, gondolatokat tovább vinni, mely őt, valamint a diákjait segíti a tanítás-tanulás során.

Arra kell csak figyelnünk, hogy ne csak matematikatörténetet tanítsunk, hanem minden mozzanat kiemelésének meglegyen az oka és a célja is.

Néhány szempontot szeretnék így a végén még egyszer kiemelni, mert ebben a dolgozat írása során fontosnak éreztem:

Sok kutatás bizonyította, és ez a szakdolgozat is bemutatja, hogy a történetiség megjelenése az órákon **pozitív hatás**t vált ki. Megtörheti a diákok addigi negatív hozzáállását ehhez a tantárgyhoz. Bemutatja számukra, hogy a matematikának van köze a **valóság**hoz, és hogy ez nem csak betanult és rögzült cselekvésfolyamat, mely egymás utáni monoton műveletek elvégzéséből áll, hanem komoly szerepet kap benne a kreatív **gondolkodás** is.

A NAT célkitűzései között is szerepel, hogy minden tantárgynak **önmagán túlmutató**an fejlesztenie kell a diákok különböző képességeit és ismereteit. A matematika különös szerepet is kap ebben, hiszen ez adja sok tantárgy alapját. A dolgozatom is tükrözi, hogy a matematikatörténet különösképp képes ezeket a funkciókat betölteni.

Új nézőpontokat nyit meg és alakít ki mind a tanár, mind a tanulók oldaláról, tehát **motivációs bázis**t biztosít az oktatás folyamán. Segít rávilágítani a **kulturális sokszínűség**re**,** így a gyerekek nyitottságát is növelni tudjuk. Gazdagítja a tanárok **didaktikai eszköztár**át. Segít nekik, hogy **jobban megérthessék**, mi áll a diákok problémájának hátterében, ami miatt egy feladatot sorozatosan elrontanak, s ezzel lehetőséget kapnak, hogy a magyarázatuk során más oldalról közelítsék meg az adott témakört. A különböző szempontokból való közelítés **új lehetőségek**et nyit a **tehetséggondozás**ban, valamint nagy segítsé**g** a lemaradt tanulók **felzárkóztatás**ában is.

Mindez segít a **matematikai alapok**, a fogalmak és a struktúrák, bevezetésében, ismétlésében, begyakoroltatásában, feltárásában.

A különböző **számírás**ok, matematikatörténeti **mozzanat**ok, **számolástechnika**i alternatívák során bemutatom, miként lehet az egyes fogalmakat, mint a helyi érték, disztributivitás, számrendszer elmélyíteni. Egyes műveleti mechanizmusok, például az indiai szorzástábla, kiragadása az ókori kultúrákból segít ezeket megkönnyíteni.

Ezek tehát csak példák, amiből ötleteket tudunk meríteni a saját munkánk megkönnyítéséhez, valamint diákjaink problémáinak, nehézségeinek megoldásához.

5. Irodalomjegyzék

1. C. Neményi Eszter – „Legyen a matematika mindenkié”,
   in Gyermeknevelés, 2013. I. évf. 1. szám, p.129–138.
   http://epa.oszk.hu/02400/02411/00001/pdf/EPA02411_gyermekneveles_2013_1_129-138.pdf

2. Gosztonyi Katalin - A matematikatörténet felhasználásának lehetőségei a matematikaoktatásban. Matematika szakdolgozat.

3. John Fauvel, Jan van Maanen University - The history of mathematics in the teaching and learning of mathematics; Discussion Document for an ICMI Study
   http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/icmihm.html

4. Módszertani példatár - Mathdid
   http://tankonyvtar.ttk.bme.hu/uj_tamop/kesz_tananyagok/74/PDF/74_modszertani_peldatar.pdf

5. Munkácsy Katalin - A matematika-tanulás társadalmi meghatározottsága
   http://epa.oszk.hu/00000/00011/00103/pdf/iskolakultura_EPA00011_2006_04_085-092.pdf

6. Munkácsy Katalin – A matematikatörténet szerepe a matematikatanításban
   http://epa.oszk.hu/00000/00011/00060/pdf/iskolakultura_EPA00011_2002_05_089-094.pdf

7. Sain Márton – Nincs királyi út, Gondolat, 1986.
   http://mek.oszk.hu/05000/05052/

8. van der Waerden, B. L. – Egy tudomány ébredése, Gondolat, 1977.

9. Varga Tamás – A matematika tanítása, Tankönyvkiadó, Budapest, 1969.
   http://old.tok.elte.hu/matek/mat_tan.pdf

6. Függelék

6. 1. Számok, nevek kapcsolata görög betűk segítségével

A görög alfabetikus számírásnál meg kell említenünk a „számmisztikát” is. Ennek alapjait Püthagoraszhoz kötik. Hamvas Bélát idézném, aki a következőképp ír erről:

Kétségtelen, hogy mint a bolygók keringését az égen, az emberek sorsát a földön a számok irányítják. Minden testnek, alaknak, formának, ábrának végső fokon valamely számviszony felel meg. Püthagorasz a számoknak a látható világban megjelenő viszonylatait kereste. Több olyan felfedezést tett, amely a matézis és a geometria közvetlen határán áll.

A mai értelemben vett „numerológia” egy olyan rendszer, mely a számok és a fizikai objektumok, vagy élő dolgok közé állít misztikus kapcsolatot. Felmerülhet a kérdés, miként is kapcsolódik ez a dolgozathoz, azonban a válasz egyszerű. Mindenkit érdekel egy kicsit a saját, és a világ sorsa. Valószínűleg örök kérdés marad az emberiségnek, hogy meg van-e írva a sorsunk számokban, csillagokban és így tovább. A diákok sem kivételek. Még, ha nem is hisznek a dolgok, események mögötti rendező erőkben, a kíváncsiságot, mint alapvető emberi beállítottságot, ők is hordozzák. Egy számmisztikai példa számukra játék, melyben szívesen és örömmel részt vesznek, s eközben észrevétlenül fejlesztik a saját gondolkodási képességüket.

Nézzünk tehát egy-két ilyen inspiráló, játékos feladatot!

- Írja le mindenki először a nevét görög betűkkel, amit egy melléklet segítségével meg is tud tenni. Ezek után keressük ki a görög ion betűk számértékét a táblázatból, s az így kapott számokat adjuk össze.

Példaként álljon itt két kitalált név:

ÁTLAG JANCSI: 1+300+30+1+3 +10+1+50+600+200+1=1167

ÁTLAG JULISKA: 1+300+30+1+3 +1+400+1+200+20+1=957

Így bármilyen más névhez, magyar és görög szóhoz társíthatunk számokat, ezzel is kiszélesíthetjük a látókörüket.

6. 2. Az írásbeli osztás az indiai szorzás után

Az előbbiek során tehát láthattuk, miként segíthet az indiai módszer a többjegyűek szorzása esetén. Kitűzött céljaim között azonban az osztás megkönnyítése is szerepel. A szorzás és osztás nagyban összefügg, azonban az ókori kultúrák közül egyikben sem találtam lényegesebb momentumot, mely az osztást megkönnyíthetné, így Varga Tamás javaslatait hoznám ide, eltekintve újra a történeti alapoktól.

Miért is őt hozom ide? Az általános iskolai tanítványaimnál észrevettem, hogy komoly kihívást jelent az osztás, különösképp az írásbeli osztás többjegyű számmal. Komoly célomnak tekintem a szorzás és osztás megkönnyítését a felsősöknél,

Az írásbeli műveleteknél általánosságban elmondhatjuk, hogy a legfőbb problémát az jelenti, hogy a diákok gondolkodás nélkül végzik ezeket. Ha azonban kiesnek a gyakorlatból, az súlyos hibákat eredményez. Ezt persze gyakorlással vissza is lehetne hozni, azonban ez csak tüneti kezelése lenne a problémának. Leginkább az osztásnál jelentkeznek a problémák, ami nem csoda, hiszen ez az a terület mindenki számára, ami talán a legnehezebben megy.

A reális megoldás a probléma valós kezelésére, ha valós életből valós problémákat hozunk, mellyel szemléltetve közelebb vihetjük a tanulókat a megértéshez. Továbbá az is segíthet, ha az osztást is, mint az indiai szorzásnál láttuk, részletekben végezzük el.

Ilyenkor a diákok a részletszorzatokat külön számítják ki, majd ezt külön vonják le a „részosztandóból". A különbséget pedig maradékként írják oda a részosztandó alá, mellyel majd a következő jegy lehozása után a leírtak szerint tovább folytatják a számolást.

Nem kell tehát fejben tartaniuk a résszorzatokat, pláne nem egyből kivonniuk az osztandóból. Így akárcsak az indiai szorzásánál, könnyebb a számolás, és az ellenőrzés is. Itt is megfigyelhető lesz, hogy kevesebb az elszámolásból, figyelmetlenségből elkövetett hibázások aránya. Könnyebb lesz a gyengébb tanulók számára is az osztást átlátni, s csak kis lépésekben elvégezni.

Tudatosítanunk kell azért azt, hogy ez egy lassabb, de nem egy korszerűtlen technika, inkább csak részekre bontja a már begyakorolt, az elfelejtett, a hibásan megtanult, a meg nem értett műveletsort. Ez a részekre bontás talán feltárja az összefüggéseket, és világosságot hoz a művelet elvégzése során, és remélhetőleg az előbb leírt előnyökhöz is eljuttat bennünket.

Lássuk akkor, hogy néz ki egy írásbeli osztás: Osszuk el az 55234-et 78-cal.

5	5	2’	3’	4’	:	7	8	=	**6**	**5**	**6**
	4	**4**	3								
		5	**3**	4							
			2	**6**							

Itt a visszaszorzást és a kipótlás egyben végezzük el, és nagyon kompakt a számolás.

Figyeljük meg, hogy mi is zajlik a művelet elvégzésének hátterében. Észrevehetjük, hogy ha a hányadost megbecsüljük, akkor a művelet a hányados mindhárom jegyére egy külön becslést, egy szorzást, és egy kivonást kell számolnunk.

Legyen akkor ugyanez a példa ezekben a részletekben is:

5	5	2	3	4	:	7	8	=	6	5	6
			2	6							

5 5 2 : 7 8 = **6**	7 8 x 6	5 5 2
4 4	5 0 8	- 5 0 8
		4 4
4 4 3 : 7 8 = **5**	7 8 x 5	4 4 3
5 3	3 9 0	- 3 9 0
		5 3
5 3 4 : 7 8 = **6**		5 3 4
2 6		- 5 0 8
		2 6

A hányados jegyeinek becslése szintén nehéz szokott lenni, talán érdemes lehet a 78 többszöröseit felírni, főleg akkor, ha több tizedes jegyig el kell végezni az osztást.

$$78 \to 156 \to 234 \to 312 \to 390 \to 468 \to 546 \to 624 \to 702$$

De akár az egyiptomi kettőzés mintájára a 2-, 4-, és 8-szoros felírása is elegendő segítség lehet

$$78 \to 156 \to 312 \to 624$$

A célunk nem az írásbeli számolás meggyorsítása, mert a gyors számolásokra ott vannak a gépeink, hanem a mögöttes tartalom és a mélyben ható tulajdonságok felismertetése, megértetése. Ezt talán el is érhetjük ezzel.

7. Mellékletek

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
PEDAGÓGIAI ÉS PSZICHOLÓGIAI KAR

EREDETISÉGNYILATKOZAT

Alulírott Kisics István, az ELTE PPK Tanár –Matematika tanár mesterszakos hallgatója büntetőjogi felelősségem tudatában nyilatkozom és aláírásommal igazolom, hogy a

Számírások és műveletek különböző ókori kultúrákban

című szakdolgozati tanulmány **saját, önálló szellemi munkám,** az abban hivatkozott, nyomtatott és elektronikus szakirodalom felhasználása a szerzői jogok általános szabályinak megfelelően történt.

Tudomásul veszem, hogy szakdolgozat/diplomamunka esetén plágiumnak számít:

- a szószerinti idézet közlése idézőjel és hivatkozás megjelölése nélkül;
- a tartalmi idézet hivatkozás megjelölése nélkül;
- más publikált gondolatainak saját gondolatként való feltüntetése.

Alulírott kijelentem, hogy a plágium fogalmát megismertem, és tudomásul veszem, hogy plágium esetén szakdolgozatom/diplomamunkám visszautasításra kerül, és ilyen esetben fegyelmi eljárás indítható.

Budapest, 2014. április 20.

....

aláírás

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

PEDAGÓGIAI ÉS PSZICHOLÓGIAI KAR

SZAKDOLGOZATI KONZULTÁCIÓ IGAZOLÓLAPJA

(Kitöltés után a szakdolgozat/diplomamunka részét képezi.)

A hallgató neve: Kisics István

A hallgató szakja: Tanár - Matematikatanár

A szakdolgozat/diplomamunka bejelentett témája:

Számírások és műveletek különböző ókori kultúrákban

A témavezető neve: Munkácsy Katalin

a konzultáció időpontja	a konzultáció témája, megjegyzések, javaslatok	a témavezető aláírása

A szakdolgozat/diplomamunka benyújtásához hozzájárulok.

Budapest, 2014. április 20.

....

a témavezető aláírása

7. 3. Témavezetői bírálat