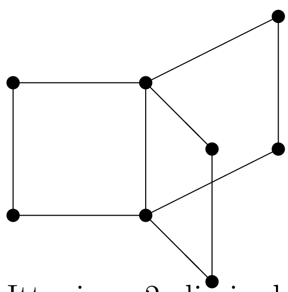
# 3. TDK Szakkör

2011. november 21.

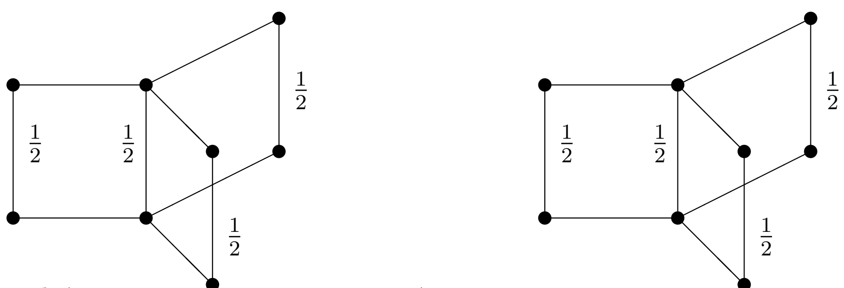
**Feladat 1.** *(ismétlés) G páros gráf, létezik benne teljes párosítás. Minimális számú élet szeretnénk törölni belőle hogy már ne legyen teljes párosítása.*

Megoldási kísérletek a feladatra:
Ez a feladat megfogalmazható lefogási feladatként is: minden élhez rendelünk egy 0-1 változót (töröljök-e), úgy hogy minden teljes párositást lefogjunk.
$x(e) \in \{0,1\} \quad \forall e \in E$
$\sum_{e \in P} \geq 1 \quad \forall P$ teljes párosításra.
Cél: $\min \sum x(e)$.

Ennek a feladatnak az LP-relaxáltja a törtlefogási feladat: legyen minden élre $0 \leq x(e) \leq 1$, de nem kell egésznek lennie. Hogyan viszonyul a tört optimum az egész optimumhoz? Ha azt sejtjük törtlefogással az optimum $\sum x(e) = k$, akkor egész esetben $\lceil k \rceil$ éllel megoldható a feladat, ez a sejtés nem igaz. Tekintsük az alábbi gráfot:



Itt nincs 2 diszjunkt teljes párositás, mégsem lehet 1 éllel lefogni. Minden max párosítás 4 vagy 2 függőleges élet tartalmaz. Ha kettőt veszünk a gráfból, az optimális törtlefogás:




Tehát a törtoptimum 3, az egész optimum 4.

Más módszer: Egy páratlan-páratlan vágáson minden teljes párosítás átlóg, így a min páratlan vágás alsó becslés (de ez se pontos)

Megfogalmazhatjuk folyamfeladatként is. Ha a páros gráf $G = (S, T, E)$ akkor vegyünk hozzá egy új $s$ forrást, amit összekütönk minden $S$-belivel, és egy $t$ nyelőt, amit összekötünk minden $T$-belivel. A páros gráf éleit $S$-ből $T$-be irányítjuk. Célunk kapacitást csökkenteni az éleken, hogy a folyamérték $m$-ről $m-1$-re csükkenjen. (Ahol most $m$ a teljes párosítás mérete.)

**Feladat 2** (Attila). *Két matroid közös bázisait akarjuk minél kevesebb ponttal lefogni.*

Ez általában NP-teljes, ennek spec esete az 1. feladat. (Kérdés, már az is NP-teljes-e?)
Másik spec eset: Az összes minimális súlyú fenyőt fogjuk le. (min számú/összsúlyú éllel) Ezt a feladatot Bernáth Attila és Pap Gyula megoldották.
Irányítatlan gráfban: Min költségű feszítőfákat fogjuk le. (Kristóffal megoldották)

**Feladat 3** (Bárász Mihály). *$G = (V, A)$ irányított gráf, $S \subseteq V$ és $T \subseteq V$ nemüres, diszjunkt terminálhalmazok. Azt mondjuk $F \subseteq T$ független, ha vezet $S$-ből $S$-be $k$ darab teljesen diszjunkt út. Belátható, hogy $T$-ben a független halmazok matroidot alkotnak, ezt nevezzük gammoidnak.*
*Adott egy gammoid $T$, tudjuk, hogy létezik hozzá gráf, de az a gráf nagyon nagy is lehet (pl $|T| = 5, |V| = 1000000$) Szeretnénk hozzá kicsi gráfot keresni, ami ugyanezt a matroidot adja, de a csúcsszám polinomiális $|T|$-ben.*

Ismétlés:
Egyenletes színezések:

**Állítás 4.** *Adott egy $G$ irányítatlan gráf, és $k$ egész szám. Éleket meg tudjuk színezni $k$ színnel úgy, hogy ha $d_i(v)$ a $v$ csúcsból induló $i$ színü élek száma, akkor*

$$\left\lfloor \frac{d(v)}{k} \right\rfloor \le d_i(v) \le \left\lceil \frac{d(v)}{k} \right\rceil$$

**Feladat 5** (M. Goemans). *Van egy $G$ irányítatlan gráf, és $k$ egész szám.*
*Legyen $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k \ge 0$, $\sum \lambda_i = 1$. Van-e olyan színezésre a gráfnak, hogy bármely színosztályra*
*csúcsból induló $i$ színü élek száma, akkor*

$$\lfloor d(v)\lambda_i \rfloor \le d_i(v) \le \lceil d(v)\lambda_i \rceil$$

Ha $k = 2$, egy folyam-feladatra vezethető vissza,
ha $k > 2$ akkor csak a $\lambda_i = \frac{1}{k}$-ra tudjuk a megoldást.