TDK szeminárium

2015. június 29.

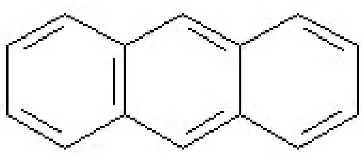
1. Bernáth Attila

1.1. Fullerének Clar-száma

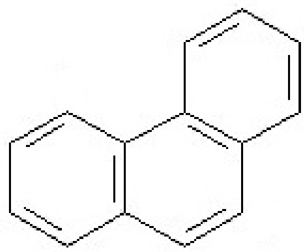
Motivációnk a kémiai gráfelmélet, ezen belül a policiklusos aromás szénhidrogének. Ezek lerajzolva egy síkbarajzolható gráfot alkotnak (ami gyakran 3-összefüggő), a gráf paraméterei kapcsolatban állnak a molekula tulajdonságaival.

Benzenoid hydrocarbons: csak hatszögek (kondenzált aromás szénhidrogének)

Például:



antracén



fenantrén

A fulleréneket 1985-ben fedezték fel, hatszögek és ötszögek alkotják, egészen pontosan 12 db ötszög és valahány hatszög. Pl. a C_{20} a dodekaéder, C_{60} a focilabda (azaz csonkolt ikozaéder, 12 ötszög lapja és 20 hatszög lapja van.)

1. Definíció. *Legyen G 2-összegüggő síkbarajzolt gráf (rögzített síkbarajzolással) $\mathcal{F}$ a lapjainak halmaza. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ Clar-halmaz, ha páronként pontdiszjunkt páros lapokat tartalmaz és $G - \cup_{C \in \mathcal{C}} V(C)$-ben van teljes párosítás.*

2. Definíció. *a G gráf Clar-száma, $Cl(G)$ a maximális Clar-halmazának mérete.*

Például Cl(antracén)=1, Cl(fenantrén)=2.

1. Tétel (Abeledo-Atkinson). *Ha G-nek csak páros lapjai vannak, akkor a Clar-száma polinom időben meghatározható.*

2. Tétel (Bernáth et al). *Ha G-nek vannak páratlan lapjai, akkor a Clar-szám meghatározása NP-nehéz.*

Legyen k előre rögzített. Pl $k = 2$ és $k = 12$ érdekes lehet.

3. Kérdés. *Ha G-nek legfeljebb k db páratlan lapja van, meghatározható-e Clar-száma polinom időben?*

1.2. Minimális vágás/kör matroidokban

Matriodokkal kapcsolatos definíciók:
Adott egy S véges halmaz és részhalmazainak egy $\mathcal{F}$ rendszere. Az $M = (S, \mathcal{F})$ párt matroidnak nevezzük, ha fennáll a következő három tulajdonság.
$(I1)$ $\emptyset \in \mathcal{F}$.
$(I2)$ Ha $X \subseteq Y \in \mathcal{F}$, akkor $X \in \mathcal{F}$.
$(I3)$ Minden $X \subseteq S$ részhalmazra az $\mathcal{F}$-nek X-ben fekvő, X-ben legbővebb tagjai azonos elemszámúak.

Az $\mathcal{F}$ tagjait szokás *független* halmazoknak nevezni, míg S többi részhalmazát *függőnek*.
Az S alaphalmaz egy maximális független részhalmazát a matroid *bázisának* hívjuk.
Egy $M = (S, \mathcal{F})$ matroid valamely $X \subseteq S$ részhalmazát körnek nevezzük, ha X függő részhalmaz, de X-nek bármely valódi részhalmaza független.
A matroid *vágásán* olyan tartalmazásra nézve minimális halmazt értünk, amely metsz minden bázist.
Legyen $\mathcal{B}$ az M matroid bázisainak halmaza. Az M *duálisán* azt az M^* matroidot értjük, ahol $\mathcal{B}^*$ az M matroid bázisainak halmaza és $\mathcal{B}^* := \{X : S \setminus X \in \mathcal{B}\}$.

Példák matroidokra :

1. $G = (V, E)$ gráf, $S = E$, $\mathcal{F}$=körmentes élhalmazok. Ezt hívjuk *grafikus* matroidnak.
2. $G = (V, E)$ gráf, $S = E$, $\mathcal{F}$=élhalmazok amik k erdővel lefedhetők
3. $S = \{v_1 v_2 \dots v_n\}$ vektorok. $\mathcal{F}$=lineárisan függetlenek. Ennek a neve *lineáris* matriod. Abban a spec esetben ha a vektorok a 2 elemű test felett vannak, akkor *bináris* matroidról beszélünk.

4. Feladat. *Keressünk egy matroidban minimális méretű kört/ minimális méretű vágást.*

5. Tétel. *A minimális kör feladat NP-nehéz. Pl transzverzális matroidban vagy bináris matroidban*

Legyen w egy súlyozás S elemein.

6. Feladat. *Keressünk egy matroidban minimális súlyú kört/ minimális súlyú vágást.*

Mik a polinomiális időben megoldható esetek? Pl a 2. példának mutatott matroid esete még nyitott:

7. Feladat. *Adott $G = (V, E)$ és $w : E \to \mathbb{R}$ súlyozás.*
Oldjuk meg a $\min\{w(H) : H \subseteq E, G - H\text{-ban nincs } k \text{ éldiszjunkt feszítőfa}\}$ *feladatot.*

2. Frenkel Péter: A komplex palánk-tételhez kapcsolódó kérdések

Egy régi KöMaL-feladat volt az alábbi, A. 526. kicsit módosítva:

8. Feladat. *A síkban nevezzük* sávnak *az olyan tartományokat, amelyeket két párhuzamos egyenes határol. Egy sáv* szélessége *legyen a határoló egyenesek távolsága. Igazoljuk, hogy ha egy egység átmérőjű körlapot lefedünk véges sok sávval, akkor ezek szélességének összege legalább 1.*

Két szép bizonyítás is van a feladatra, az egyiket már Tarski is ismerte 1932-ben.

Magasabb dimenziós általánosítás: Legyen $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ az egységsugarú n-dimenziós gömb.

Egy palánk két párhuzamos hipersík közötti része az n-dimenziós térnek. A P palánk vastagsága, $d(P)$, a két hipersík távolsága.

9. Kérdés. *Igaz-e hogy ha B^n-t lefedjük palánkokkal, akkor ezek vastagságának összege, $\sum d(P_i) \geq 2$?*

10. Tétel (Bang, 1951). *Igaz.*

Most a gömb helyett vegyünk egy $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex testet. A K test minimális szélessége, $d(K)$, a minimális vastagsága egy olyan palánknak, amely K-t egymagában lefedi.

11. Kérdés. *Igaz-e hogy ha K-t lefedjük palánkokkal, akkor ezek vastagságának összege, $\sum d(P_i) \geq d(K)$?*

12. Tétel (Bang, 1951). *Igaz.*

13. Kérdés (Bang, 1951). *Igaz-e hogy ha K-t lefedjük palánkokkal, akkor ezek relatív vastagságának összegére*

$$\sum \frac{d(P_i)}{d_{P_i}(K)} \geq 1$$

teljesül? Itt a nevező a legszűkebb, P_i-vel párhuzamos, K-t tartalmazó palánk vastagságát jelenti.

14. Tétel (Keith Ball, 1991). *A válasz igenlő, ha K centrálszimmetrikus.*

3. Definíció. *Az n-dimenziós térben A tengelyű, r sugarú k-*henger*nek nevezzük egy $n-k$ dimenziós A affin altér r sugarú környezetét.*

15. Kérdés (Bezdek Károly). *Igaz-e, hogy ha B^n-t lefedjük a $P_1, \ldots, P_j$ k-hengerekkel, akkor ezek sugarának k-adik hatványösszegére $\sum r_i^k \geq 1$ tejesül?*

Vegyük észre, hogy ennek a $n = 2$, $k = 1$ esete az eredeti körlefedős feladat. Tetszőleges n és $k = 1$ esetén pedig Bang fenti 10. tételét kapjuk.

16. Tétel (Bezdek és Litvak). *Ha $k = n - 1$, akkor az állítás igaz.*

Egyszerű példával megmutatható, hogy ha $3 \leq k \leq n/2$, akkor az állítás nem igaz. A $k = 2$ eset még nyitott, de részeredmények vannak.

17. Tétel (Keith Ball, 2001, komplex palánk-tétel). *Ha $n = 2m$ páros, és az n-dimenziós valós teret a szokásos módon azonosítjuk az m-dimenziós komplex térrel, s ebben csak olyan (valós) 2-hengereket engedünk meg, amelyek tengelye $m - 1$ komplex dimenziós, komplex lineáris altér, akkor az állítás igaz.*

18. Kérdés. *Írhatunk-e a 17. tételben lineáris altér helyett affin alteret?*

19. Kérdés. *Fedjük le egy véges dimenziós komplex Banach-tér egységgömbjét*

$$\{|f_i - c_i| \leq r_i\}$$

alakú halmazokkal, ahol f_i 1 normájú lineáris funkcionál, c_i komplex konstans. Következik-e ebből, hogy $\sum r_i^2 \geq 1$?

Az igenlő válasz Ball 14. tételének komplex megfelelője volna. Hilbert-tér esetén a 18. kérdést kapjuk vissza.

3. Csikvári Péter: Homomorfizmusok fák között.

Adottak a H és G gráfok. $\Phi : V(H) \to V(G)$ egy homomorfizmus H és G között (Jelölés: $\Phi \in \mathrm{Hom}(H,G)$) ha minden $uv \in E(H)$ él esetén $\Phi(u)\Phi(v) \in E(G)$.

$|Hom(H,G)| = \hom(H,G)$ és $t(H,G) = \frac{\hom(H,G)}{|V(G)|^{|V(H)|}}$ ami azt mutatja hogy az összes leképezés mekkora része homomorfizmus.

20. Sejtés (Sidorenko). *Ha H páros gráf m élen akkor $t(H,G) \geq t(K_2,G)^m$, ahol K_2 a 2 csúcsú teljes gráf.*

Ez a sejtés rengeteg gráfosztályra igaz, köztük fákra, körökre. Szegedy Balázs definiált egy nagy gráfosztályt ami tartalmazza az összes olyan gráfot, amire eddig bizonyították a Sidorenko-sejtést. A jelenlegi legkisebb gráf amire nem ismert a sejtés az $K_{5,5}$ minusz egy Hamilton-kör.

Könnyebb a helyzetünk ha $H = T$ egy fa, ekkor $\hom(T,G)$ rekurzióval meghatározható: A fában jelöljünk ki egy v gyökeret, és G csúcsait számozzuk 1-től n-ig. Legyen

$$a_i(T,v) = |\{\Phi \in \mathrm{Hom}(T,G) : \Phi(v) = i\}|.$$

Ekkor $\sum a_i(T,v) = \mathrm{Hom}(T,G)$. Ha v levél T-ben legyen az egyetlen szomszédja w. Ekkor $a_i(T,v) = \sum_{j:ji\in E(G)} a_j(T-v,w)$. Ha v nem levél, vágjuk v-nél a fát T_1 és T_2 részfákra. Ekkor $a_i(T,v) = a_i(T_1,v)a_i(T_2,v)$.

A továbbiakban legyen T_n egy n csúcsú fa, S_n az n csúcsú csillag, P_n az n csúcsú út.

21. Tétel (Sidorenko). *Bármely G gráfra $\hom(T_m,G) \leq \hom(S_m,G)$.*

Az alábbi táblázat jónéhány matematikus erőfeszítéseit összegzi fák homomomorfizmusairól: Sidorenko, Bollobás-Tyomkyn, Csikvári-Lin.

22. Tétel. *Az alábbi egyenlőtlenségek igazak.*

$$\begin{array}{ccccc}
\hom(P_m,P_n) & \leq & \hom(P_m,T_n) & \leq & \hom(P_m,S_n)\\
\rotatebox{90}{$\leq$} & & X & & \rotatebox{90}{$\leq$}\\
\hom(T_m,P_n) & \overset{(*)}{\leq} & \hom(T_m,T_n) & X & \hom(T_m,S_n)\\
\rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$}\\
\hom(S_m,P_n) & \leq & \hom(S_m,T_n) & \leq & \hom(S_m,S_n)
\end{array}$$

A fenti táblázatban az X azt jelenti, hogy az állítás általában nem igaz. Ennek ellenére a két X-szel jelölt egyenlőtlenség státusza nagyon különböző. A

$$\hom(T_m,T_n) \leq \hom(T_m,S_n)$$

egyenlőtlenség teljesen menthetetlenül hamis. Ezzel szemben a

$$\hom(P_m,T_n) \leq \hom(T_m,T_n)$$

egyenlőtlenségre csak meglehetősen sporadikus ellenpéldák vannak. Például tetszőleges G gráfra van olyan $\varepsilon(G)$ pozitív konstans, hogy minden m-re és T_m fára

$$\varepsilon(G) \cdot \hom(P_m, G) \leq \hom(T_m, G),$$

és az is igaz, hogy van olyan $\ell(G)$ konstans, hogy ha T_m-nek több, mint $\ell(G)$ levele van akkor

$$\hom(P_m, G) \leq \hom(T_m, G),$$

Alább egy meglehetősen optimista verziója van a kérdésnek:

23. Kérdés. *Igaz-e hogy ha T_m fának legalább 4 levele van, akkor minden G gráfra*

$$\hom(P_m, G) \leq \hom(T_m, G)?$$

Egy másik verziója a fenti problémának ami valószínűleg sokkal könnyebb a következő:

24. Kérdés. *Igaz-e hogy tetszőleges G gráfra van olyan $m_0 = m_0(G)$ konstans, hogy ha $m \geq m_0(G)$ akkor*

$$\hom(P_m, G) \leq \hom(T_m, G)?$$

A fenti tételben még magyarázatra szorul a $*$-gal jelölt egyenlőtlenség. A

$$\hom(T_m, P_n) \leq \hom(T_m, T_n)$$

egyenlőtlenség mindig igaz kivétel esetleg a következő eset: $T_n = P'_n$, ahol P'_n az a fa melyben pontosan három levél van és két levélnek van közös szomszédja, másként egy $n-1$ csúcsú út második csúcsához illesztünk egy levelet. Ha n páratlan akkor ez se lehet kivétel: $\hom(T_m, P_n) \leq \hom(T_m, P'_n)$ tetszőleges T_m fára. Meglepő módon ha $n = 4$ akkor létezik olyan T_m fa melyre $\hom(T_m, P_4) \geq \hom(T_m, P'_4)$. (Ekkor $P'_4 = S_4$.) A sejtés az, hogy más kivétel nincsen:

25. Sejtés. *Ha $n \geq 6$ páros akkor* $\hom(T_m, P_n) \leq \hom(T_m, P'_n)$*. Következésképpen $n \geq 5$ esetén tetszőleges T_m és T_n fákra*

$$\hom(T_m, P_n) \leq \hom(T_m, T_n).$$

Az érdeklődőknek a [1, 2] cikkeket tudom figyelmébe ajánlani, ezek a cikkek tartalmaznak néhány hasznos trükköt, ötletet és további kérdéseket.

Hivatkozások

[1] P. Csikvari and Z. Lin: Graph homomorphism between trees, Electronic Journal of Combinatorics 24(4) (2014), P 4.9, `http://math.mit.edu/~csikvari/graph_homomorphism_between_trees_EJC.pdf`

[2] P. Csikvari and Z. Lin: Homomorphisms of trees into a path, SIAM J. Discrete Mathematics, közlésre elfogadva, `http://math.mit.edu/~csikvari/tree_hom2_V3.pdf`