Az informatikus lineáris algebra dolgozat A részének főbb témái, pár mintafeladata

Az alábbiakban – tájékoztató jelleggel – fölsoroljuk a vizsgadolgozat A részében szereplő **főbb témaköröket** *néhány mintafeladattal, azok megoldásával és esetenként részletesebb magyarázattal. Ez a rész a szemléltetést szolgálja: a dolgozatban általában nem pont ezek a kérdések fognak szerepelni. A feladatok nehézségét szimbólumok jelzik. Ahol egy definíciót vagy tételt kell közvetlenül alkalmazni, ott ♘ a jel. Ha a fogalom már nehezebb, vagy több lépést kell tenni, több fogalmat összekapcsolni, nemtriviális átalakítást kell végezni, ott ♖ szerepel. A ♕ azt jelzi, hogy a feladat témája kifejezetten nehéz, vagy pedig ötlet kell a megoldáshoz.*

(1) Vektorok koordinátavektora

1/1. ♘ A $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ vektorhalmaz bázis a $V \leq \mathbb{R}^n$ altérben. Határozzuk meg a $\mathbf{v} = 2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3$ vektor koordinátavektorát a $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázisban.

$$[\mathbf{v}]_{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

1/2. ♖ Legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázis a $V \leq \mathbb{R}^n$ altérben. Egy $\mathbf{v} \in V$ vektornak a $\{\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_3\}$ bázisban fölírt koordinátavektora $[\mathbf{v}]_{\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_3,\mathbf{b}_3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$? Mi $\mathbf{v}$ koordinátavektora a $\mathcal{B}$ bázisban?

$$[\mathbf{v}]_{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1/3. ♖ A $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ vektorhalmaz bázis a $V \leq \mathbb{R}^n$ altérben. Ebben a bázisban a $\mathbf{v}$, illetve $\mathbf{w}$ vektorok koordinátorvektora $[\mathbf{v}]_{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ és $[\mathbf{w}]_{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Írjuk föl a $\mathbf{v}+2\mathbf{w}$ vektort a $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ vektorok lineáris kombinációjaként.

$$\mathbf{v} + 2\mathbf{w} = 7\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3$$

1/4. ♕ Tegyük föl, hogy a $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ vektorhalmaz bázis a $V \leq \mathbb{R}^n$ altérben. Mi lesz ezen $\mathbf{b}_i$ bázisvektorok $\mathbf{v}$-vel jelölt összegének a koordinátavektora a $\{\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázisban?

$$[\mathbf{v}]_{\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Az első két feladat vektor bázisban vett koordinátavektorának fogalmát kéri számon. Az elsőnél a vektorból kell kiszámítani a koordinátáit. A második feladat már kétlépéses. Először a feladat szövegében megadott koordinátavektort írjuk át a bázisvektorok lineáris kombinációjává:

$$\mathbf{v} = 1 \cdot (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) + 1 \cdot (\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3) + 0 \cdot (\mathbf{b}_3) = 1 \cdot \mathbf{b}_1 + 2 \cdot \mathbf{b}_2 + 1 \cdot \mathbf{b}_3\,,$$

majd az így kapott lineáris kombinációt koordinátavektorrá. A harmadik feladat két fogalmat kérdez: hogyan kell a koordinátákból kiszámítani a vektorokat, de még azt is tudni kell, hogy hogyan kell koordinátavektorokkal műveleteket végezni. Tehát először a két koordinátavektor megfelelő lineáris kombinációját számoljuk ki: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$*, majd az így kapott oszlopvektort átírjuk a bázisvektorok lineáris kombinációjává. De megtehetjük azt is, hogy először a* $\mathbf{v}$

és $\mathbf{w}$ *vektorokat írjuk fel a bázisvektorok lineáris kombinációjaként, majd ebből számítjuk ki a* $\mathbf{v}+2\mathbf{w}$*-t. A negyedik feladat esetében az a kérdés, hogy a* $\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_3 = \lambda_1(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)+\lambda_2\mathbf{b}_2+\lambda_3\mathbf{b}_3$ *felírásban mennyi a* λ_i *ismeretlenek értéke. Ezekre úgy kapunk lineáris egyenletrendszert, hogy a* $\mathbf{b}_i$ *bázisvektor együtthatóját az egyenlet két oldalán összehasonlítjuk. Azonnal látszik, hogy*

$$\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 = 1 \cdot (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) + 0 \cdot \mathbf{b}_2 + 1 \cdot \mathbf{b}_3$$

megfelelő felírás, és ezért ezek az együtthatók adják a keresett koordinátavektort. Ennek a problémának a megoldását az általános esetben az elemi bázistranszformációról szóló tétel szolgáltatja.

(2) Alterek alaptulajdonságai

2/1. ♖ Konkrét vektorokat megadva mutassuk meg, miért nem alkot alteret $\mathbb{R}^3$-ben azon vektorok halmaza, ahol az első két komponens szorzata nulla.

Pl. $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ benne vannak az altérben, de az összegük, $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ nincs.

2/2. ♕ Konkrét mátrixokat megadva mutassuk meg, miért nem alkot alteret $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben a nulla determinánsú mátrixok halmaza.

Pl. $\det\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix} = 0$, ugyanakkor $\det\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right) = 1 \neq 0$.

2/3. ♖ Tekintsük azoknak az $\mathbb{R}^3$-beli $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ vektoroknak a halmazát, amelyek az alábbi feltételnek tesznek eleget. Mely eset(ek)ben kapunk alteret?
(A) $x_1 = x_2 + 2x_3$; (B) $x_1 = x_2 + 2$;
(C) $x_1x_2 = 0$; (D) $x_1^2 = 0$.

Alter(ek): (A), (D)

2/4. ♕ Mely alábbi halmaz(ok) alkot(nak) alteret a 2×2-es valós mátrixok halmazában mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben:
(A) $\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det A = 0\}$; (B) $\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det A \neq 0\}$;
(C) $\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A = A^T\}$; (D) $\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A^2 = I_2\}$

Alter(ek): (C)

2/5. ♕ Mutassunk egy olyan H részhalmazt $\mathbb{R}^2$-ben (azaz a síkon), mely zárt a vektorok szokásos összeadására, mégsem alkot alteret $\mathbb{R}^2$-ben.

Pl. $\{[a\ b]^T \in \mathbb{R}^2 \mid a, b > 0\}$

Itt az alterek zártsági tulajdonságaira kérdezünk rá. Ez eleve nehéz téma, ezért nincs ♘ minősítésű feladat, és még nehezebb akkor, ha nem oszlopvektorokkal, hanem általános vektorterek elemeivel, például mátrixokkal kell dolgozni. A negyedik feladatban pl. azt kell megvizsgálnunk, hogy a megadott halmazok zártak-e az összeadásra, ill. a skalárral való szorzásra: az (A) kérdésben nulla determinánsú mátrixok összege könnyen lehet nem nulla determinánsú, s hasonlóképpen nem nulla determinánsú mátrixok összege lehet nulla determinánsú a (B)-ben (de érvelhetünk azzal is, hogy a nullmátrix nem ilyen); a szimmetria megőrződik mátrixok összeadásánál, ill. skalárral való szorzásánál (ez mutatja, hogy a (C) feladatban alterünk van), az pedig hogy a (D) feladatban nem kapunk alteret, kiderül pl. abból is, hogy a nullmátrix nem teljesíti az adott feltételt. A második feladat a negyedik (A) részének indoklása, az utolsó feladat pedig arra mutat rá, hogy altereknél mindkét műveletre való zártságot meg kell követelnünk: erre érdemes már a fölkészülés során is példát keresnünk, hogy jobban megérthessük a fogalmat.

(3) Bázis, lineáris függetlenség, generálás, dimenzió, rang kapcsolata

3/1. ♘ Alkalmas együtthatók megadásával mutassuk meg, hogy a $\{\mathbf{v}, \mathbf{0}, \mathbf{w}\}$ vektorok rendszere lineárisan összefüggő.

$0 \cdot \mathbf{v} + 1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0}.$

3/2. ♘ Alkalmas együtthatók megadásával mutassuk meg, hogy az $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v}+2\mathbf{w}\}$ vektorok rendszere lineárisan összefüggő.

$0 \cdot \mathbf{u} + 1 \cdot \mathbf{v} + 2 \cdot \mathbf{w} + (-1)(\mathbf{v} + 2\mathbf{w}) = \mathbf{0}.$

3/3. ♘ Legyen $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$ és $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 & c \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$. Mely valós c szám(ok)ra lesz $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ lineárisan összefüggő?

$c = 3$

3/4. ♖ Mely $c \in \mathbb{R}$ valós számokra lesznek lineárisan függetlenek az $[1 \ \ 0 \ \ c]^T$, a $[2 \ \ 2 \ \ 2]^T$ és a $[4 \ \ 2 \ \ 3]^T$ vektorok?

$c \neq 1/2$

3/5. ♖ Legyen $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$. Adjunk meg olyan $\mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_3$ vektorokat $\mathbb{R}^3$-ban, melyekre igaz, hogy a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vektorrendszer lineárisan összefüggő, de közülük bármely két vektor lineárisan független.

Pl. $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$

3/6. ♘ Egy $U \leq \mathbb{R}^2$ altérben $[2 \ \ 3]^T$ generátorrendszert alkot. Adjunk meg U-ban egy háromelemű generátorrendszert.

Pl. $[2 \ \ 3]^T$, $[4 \ \ 6]^T$, $[0 \ \ 0]^T$

3/7. ♖ Egy $U \leq \mathbb{R}^5$ altérben van olyan $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ háromelemű lineárisan összefüggő vektorhalmaz, mely generátorrendszer U-ban. Hány eleme lehet U egy bázisának?

Bázis elemszáma lehet: $1, 2$

3/8. ♖ Ha egy $U \leq \mathbb{R}^9$ altérben van 5 elemű lineárisan összefüggő generátorrendszer is, meg 3 elemű lineárisan független vektorrendszer is, akkor mik $\dim U$ lehetséges értékei?

$\dim U$ lehet: 3 vagy 4

3/9. ♘ Legyenek $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ lineárisan független vektorok. Adjuk meg a $\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\}$ által generált altér egy bázisát.

Pl. : $\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2\}$

3/10. ♕ Adott egy ötelemű vektorrendszer, melynek a rangja 3. Eltávolítunk a rendszerből két vektort. Mik az új rendszer rangjának lehetséges értékei?

A rang lehet: 1, 2 vagy 3

3/11. ♕ Legyen $U = \{[x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 2x_2 = 3x_3\}$ az $\mathbb{R}^3$ altere. Hány olyan bázisa van az U altérnek, mely tartalmazza a $\mathbf{v} = [6, 3, 2]^T$ vektort?

Bázisok száma: 1

Az első két feladatban lineáris összefüggőséget kell bizonyítanunk. Fontos tudnunk, hogy ehhez olyan együtthatókat kell megadnunk, amelyek nem mindegyike nulla (és nem olyanokat, hogy egyik sem nulla). Ha tehát a rendszerben látunk néhány összefüggő vektort, akkor a többinek nyugodtan adhatunk nulla együtthatót. A harmadik feladatban arra érdemes emlékeznünk, hogy két nem nulla vektor akkor és csak akkor lineárisan összefüggő, ha egymás skalárszorosai. A negyedik feladatot megoldhatjuk a szokásos homogén lineáris egyenletrendszer vizsgálatával (ha a megoldások száma nagyobb, mint 1*, akkor a vektorrendszer összefüggő). Másik lehetőség annak a tételnek az alkalmazása, hogy a megadott vektorok pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha a belőlük mint oszlopvektorokból képzett mátrix determinánsa nem* 0*. Mivel*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ c & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4c + 2\,,$$

ezért a válasz $c \neq 1/2$*. Az ötödik feladatban segít, ha tudjuk, hogy mit jelent az összefüggőség a lineáris függés nyelvén: a feltételek azt jelentik, hogy a vektorok egyike sem skalárszorosa a másiknak, de az egyik vektor a másik kettőnek a lineáris kombinációja. A hatodik feladatban azt az állítást használjuk, hogy generátorrendszer kibővítve is generátorrendszer marad, de vigyáznunk kell, hogy az új vektorokat is az altérből vegyük. A hetedik kérdés megválaszolásához az a tény segít, hogy minden generátorrendszerből kiválasztható bázis, az azonban lineárisan független. Így a háromelemű halmazból legalább egyet el kell távolítanunk, hogy bázist kaphassunk. Mivel az altérben van legalább három vektor, ezért az nem lehet* 0 *dimenziós. A nyolcadik feladat gondolata ugyanez, de hozzá kell tennünk, hogy független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint az altér dimenziója. A kilencedik feladathoz jó arra emlékezni, hogy ha egy* U *altér egy generátorrendszeréből kiválasztunk olyan vektorokat, amelyek egyrészt függetlenek, másrészt* U *adott generátorai már kifejezhetők velük (vagyis ez egy maximális független rendszer* U *adott generátorrendszerében), akkor ez a kiválasztott független rendszer bázis lesz* U*-ban. A tizedik feladathoz tudni kell, hogy a rang a generált altér dimenziója. Ha tehát egy háromdimenziós altér ötelemű generátorrendszeréből eltávolítunk két vektort, akkor a maradék vektorrendszer által generált altér még mindig legalább egydimenziós (hiszen még egy háromelemű független rendszerből is maximum kettőt távolíthattunk el), de maradhatott is háromdimenziós (ha pl. a két „fölösleges" vektort dobtuk ki.) Végezetül a 11. feladatban egy egydimenziós alterünk van,* *s ebben bármely nem nulla vektor egyúttal bázis is. Ha a tér dimenziója nagyobb lenne, akkor – hivatkozva arra a tételre, mely szerint független rendszer kiegészíthető bázissá – máris megváltozna a helyzet: ilyenkor bármely, a dimenziószámnál kisebb elemszámú vektorhalmaz végtelen sok módon egészíthető ki bázissá.*

(4) Bázis megadása, dimenzió

4/1. ♘ Álljon az U altér az $\mathbb{R}^3$ azon $\mathbf{v}$ vektoraiból, ahol a második és a harmadik komponens egyenlő. Adjunk meg egy bázist U-ban.

Pl. $[1\ \ 0\ \ 0]^T$, $[0\ \ 1\ \ 1]^T$

4/2. ♘ Legyen $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázis egy U altérben. Hány dimenziós alteret generál $\{\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2\}$?

Az altér dimenziója: 2

4/3. ♖ Hány dimenziós azon $\mathbb{R}^n$-beli vektoroknak az altere, melyekben a komponensek összege 0?

A dimenzió: $n - 1$

4/4. ♖ Hány dimenziós azon $\mathbb{R}^n$-beli vektoroknak az altere, melyekben a komponensek négyzetösszege 0?

A dimenzió: 0

4/5. ♕ Hány dimenziós alteret alkotnak $\mathbb{R}^{3\times 3}$-ban azok az A mátrixok, amelyekre teljesül, hogy $A^T = -A$?

A dimenzió: 3

4/6. ♖ Hány négydimenziós altér van $\mathbb{R}^4$-ben mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben?

Alterek száma: 1

4/7. ♕ Hány olyan altér van $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben, mely tartalmazza az összes 2×2-es szimmetrikus mátrixot?

Alterek száma: 2

Az első feladatban föl kell írni az altér egy általános elemét és lineáris kombinációra bontani. A második feladat kapcsolódik a rang fogalmához is: a generált altér dimenziójának kiszámításához maximális független rendszert kell keresni a generátorok között (azaz olyat, amiből a többi generátor már kifejezhető). Az adott példában $\{\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2\}$ *ilyen. De bázist alkot ebben az altérben* $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ *is, hiszen* $\mathbf{b}_1 = (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) - \mathbf{b}_2$ *is eleme az altérnek. A harmadik feladatra (ez a 4. gyakorlat 7/g feladatának* $y = 0$ *speciális esete) gondolhatunk úgy, hogy egy homogén lineáris összefüggésünk van: az, hogy az elemek összege nulla, és ez eggyel csökkenti* $\mathbb{R}^n$ *dimenzióját. (Valójában egy homogén lineáris egyenletrendszer szabad változóit számoltuk meg. Bázist alkotnak azok a vektorok, melyekben az első* $n-1$ *komponens egyike* 1*, az utolsó komponens* -1*, a többi komponens pedig* 0*, de ezt megadni ♕ szintű feladat lenne az általános* n *miatt. Próbálkozhatunk a triviális bázis elemeinek „utánzásával”, de ellenőrizni kell a függetlenséget.) A negyedik feladat mutatja, mennyire gondosnak kell lennünk az előző feladat megoldási elvének alkalmazásakor. Ha ugyanis a komponensek közötti összefüggés nem lineáris, akkor egész más* *lehet az eredmény: itt csak a nullvektor van benne az altérben. Sőt, nem lináris összefüggéssel megadott vektorok általában nem is alkotnak alteret. Az ötödik feladat is hasonló jellegű, csak itt sokkal több homogén lineáris összefüggés van a komponensek között. Az ilyen mátrixokban a főátló minden eleme* 0*, a főátlóra szimmetrikus elemek pedig egymás ellentettjei. Ezért pl. a főátló fölötti elemeket szabad változónak tekintve a mátrix elemei már egyértelműen meg vannak határozva, ezért a dimenzió a szabadon választható mátrixelemek száma, azaz* 3*. (Itt is érdemes gyakorlásul egy bázist fölírni.) A hatodik feladatban azt kell tudni, hogy* $\mathbb{R}^n$ *egy valódi alterének dimenziója határozottan kisebb, mint* $\mathbb{R}^n$*-é. A hetedik feladat is hasonló jellegű, először azt kell észrevenni, hogy a* 2×2*-es szimmetrikus mátrixok terének a dimenziója mindössze* 1*-gyel kisebb, mint a* $\mathbb{R}^{2\times 2}$ *téré, így a szimmetrikus mátrixok altere és az egész tér között nincs más altér.*

(5) Lineáris egyenletrendszerek, megoldásszámuk

5/1. ✍ Adjunk meg egy olyan lineáris egyenletrendszert, melyben két egyenlet van, három ismeretlen, és az egyenletrendszernek nincs megoldása.

Pl.: $\begin{aligned} x+y+z&=2\\ x+y+z&=3 \end{aligned}$

5/2. ✍ Adjunk meg egy olyan inhomogén lineáris egyenletrendszert, melyben három egyenlet van, két ismeretlen, és az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.

Pl.: $\begin{aligned} x+\ \ y&=1\\ 2x+2y&=2\\ 3x+3y&=3 \end{aligned}$

5/3. ✍ Mi lehet a megoldások száma egy olyan valós együtthatós lineáris egyenletrendszernél, melyben az egyenletek száma 3, az ismeretlenek száma pedig 5?

0 vagy végtelen

Lineáris egyenletrendszerek megoldásszámára egy nagyon fontos összefüggés van: ha több ismeretlen van, mint egyenlet, akkor nem lehet egyértelmű a megoldás (erre kérdez rá a harmadik feladat). Vagyis ha az egyenletrendszerben nincs elég egyenlet – nem tudunk eleget az ismeretlenekről –, akkor ugyan lehet ellentmondásos (ehhez már két egyenlet is elég, mint az első feladatban, sőt az egyetlen $0\cdot x+0\cdot y=1$ *egyenlet is), de ha nem ellentmondásos, azaz van megoldás, akkor biztosan egynél több megoldás van. Valós és komplex együtthatós egyenletrendszerek esetében ilyenkor a megoldások száma végtelen. Az egyenletek számát szaporíthatjuk úgy, hogy a megoldások halmaza ne változzon: ehhez a rendszerbe már bent lévő egyenletek lineáris kombinációját kell bevenni (mint a második feladatban). Fontos, hogy homogén lineáris egyenletrendszernek – amikor az egyenletek jobb oldalán mindenütt* 0 *áll – mindig van megoldása: a triviális megoldás, amikor minden ismeretlen értéke nulla.*

(6) Mátrixműveletek, inverz

6/1. ✍ Legyen $A \in \mathbb{R}^{k\times\ell}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times r}$ és $C \in \mathbb{R}^{t\times u}$. Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy értelmes legyen az $AB^T + C$ mátrixkifejezés.

$\ell = r,\ k = t,\ p = u$

6/2. ✍ Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Adjunk meg egy olyan 2×2-es, egész elemű, a nullmátrixtól különböző B mátrixot, amelyre igaz, hogy $AB = \mathbf{0}$.

Pl. $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

6/3. ✍ Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & c \end{bmatrix}$. Mely $c \in \mathbb{R}$ számokra van olyan 2×2-es, valós elemű, a nullmátrixtól különböző B mátrix, amelyre igaz, hogy $AB = \mathbf{0}$?

$c = 9$

6/4. ✍ Adjunk meg egy olyan 2×2-es egész elemű, a nullmátrixtól különböző A mátrixot, amelyre igaz, hogy van olyan $\mathbf{0} \neq B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, melyre $AB = \mathbf{0}$.

Pl. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

6/5. ✍ Adjuk meg az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét.

$\begin{bmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 4/5 & -1/5 \end{bmatrix}$

6/6. ✍ Adjuk meg az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ sormátrix egy jobb oldali inverzét.

Pl.: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

6/7. ✍ Hány olyan jobb oldali inverze van az $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ sormátrixnak, melyben minden elem egyenlő?

Számuk: 1

6/8. ♛ Az alábbi mátrixok közül melyeknek **nem lehet** jobb oldali inverze a valós paraméterek semmilyen választására sem (azonos betűk azonos számokat jelölnek)?

(A) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$; (B) $\begin{bmatrix} a & b & b \\ c & d & d \end{bmatrix}$;

(C) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$; (D) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & a \end{bmatrix}$.

(A), (C)

Az első feladat arra kérdez rá, hogy mikor végezhető el a mátrixok összeadása, szorzása, illetve mik a transzponált mátrix méretei. Két mátrix szorzatának oszlopaiban a bal oldali mátrix oszlopainak lineáris kombinációi állnak. Ezért az $AB = \mathbf{0}$ akkor tud teljesülni nem nulla B mátrixszal, ha A oszlopai lineárisan öszefüggenek. Speciálisan ha A négyzetes mátrix, akkor ez azzal ekvivalens, hogy A determinánsa nulla. Ezzel a tétellel könnyű megválaszolni a harmadik feladatot, illetve keresni megfelelő mátrixot a negyedik feladatban. Kétszer kettes mátrix esetében érdemes megjegyezni az inverz képletét: inverz akkor létezik, ha a mátrix d determinánsa nem nulla, és ekkor az inverz mátrixot úgy kapjuk, hogy az eredeti mátrixban a főátló két elemét kicseréljük, a mellékátló elemeit ellentettjükre változtatjuk, végül a mátrix minden elemét elosztjuk d-vel (így kaptuk az ötödik feladat eredményét). Nem feltétlenül négyzetes mátrixra is érvényes, hogy pontosan akkor van jobb oldali inverze, ha rangja megegyezik a sorainak a számával, azaz ha a sorai lineárisan függetlenek. Erre a tételre a hatodik és a hetedik feladat megoldásában nincs szükség, mert azok megoldása közvetlen számolás (a hetedik feladatban az egyetlen megfelelő vektor $\begin{bmatrix}1/3 & 1/3 & 1/3\end{bmatrix}^T$). A nyolcadik feladatban viszont ezt a tételt alkalmazzuk. Az (A) rész két sora nyilván összefügg, a (C) esetében ez azért igaz, mert $\mathbb{R}^2$ dimenziója 2, és így bármely három vektor összefüggő. A (B)-ben például az $a = d = 1$ és $b = c = 0$ két független vektort ad, a (D) esetben meg a három sor független lesz ha $a \neq 9$, hiszen ekkor a determináns értéke nem nulla.

(7) Permutációk, inverziók, determinánsok

7/1. ♘ Az $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mátrix determinánsának kiszámolásakor mennyi lesz az $a_{31}a_{24}a_{53}a_{15}a_{42}$ szorzathoz tartozó permutációban az inverziók száma?

7

7/2. ♖ Az $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mátrix determinánsának kiszámolásakor az $a_{11}a_{2i}a_{33}a_{45}a_{5j}$ szorzatot (-1)-gyel szorozva kellett figyelembe venni. Határozzuk meg i-t és j-t.

$i =$ 2
$j =$ 4

7/3. ♕ Az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ számoknak hány olyan sorbarendezése (permutációja) van, melyben az inverziók száma 1?

Ilyenek száma: 4

7/4. ♕ Az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ számok $i2jk\ell$ típusú sorbarendezései (azaz permutációi) között mennyi lehet az inverziók maximális száma?

Max. inverziószám: 8

7/5. ♘ Legyenek $A, B, C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ olyan valós mátrixok, melyekre $\det A = 2$, $\det B = 3$ és $\det C = 4$. Mennyi lesz $2A^2C^{-1}B$ determinánsa?

$2^3 \cdot 2^2 \cdot (1/4) \cdot 3 = 24$

7/6. ♖ Legyen $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $B = \begin{bmatrix} d & a & g+d \\ e & b & h+e \\ f & c & i+f \end{bmatrix}$, és tegyük föl, hogy $\det A = 5$. Mennyi lesz $\det B$?

$\det B =\ -5$

A determináns definíciójában a tagok előjelezését a következőképpen kell kiszámolni. A szorzatot rendezzük át úgy, hogy az a_{ij}-k első indexei növekedjenek 1-től n-ig. Ezek után a második indexek által alkotott permutációban számoljuk meg az inverziókat (vagyis azokat a párokat, amelyekben az elöl szereplő szám a nagyobb). Ha ezek száma páros, akkor az előjel $+$, különben $-$. Az első feladatban a kapott sorrend 54123. Ha n elemet permutálunk, akkor az inverziók maximális száma $\binom{n}{2}$; ezt a számot az elemek monoton fogyó sorbarendezése produkálja, 0 inverziója pedig csak a természetes, monoton növő sorbarendezésnek van. Két elemet megcserélve, a permutáció paritása (előjele) mindig megváltozik. A második példában i és j csak 2 és 4 lehet valamelyik sorrendben, ezt a két permutációt kell kipróbálni. A harmadik feladatban csak két szomszédos elemet cserélhetünk meg az alapsorrendhez képest. A negyedik feladatban az az ötlet, hogy a 2 után legalább két, 2-nél nagyobb számnak kell lennie, ez két nem-inverziót elront, és így maximum 8 inverzió lehet. Az 52431 sorrend ezt elő is állítja. Az ötödik feladat a determinánsok szorzástételének egyszerű alkalmazása (amiből következik, hogy egy mátrix inverzének a determinánsa az eredeti mátrix determinánsának a reciproka). A hatodik feladatban az eredeti mátrixot transzponáltuk, megcseréltük az első két oszlopot, majd az új első oszlopot adtuk a harmadikhoz. A középső lépésnél a determináns előjelet vált, a másik kettőnél nem változik.

(8) Jobb oldali sajátértékek és sajátvektorok, diagonalizálhatóság

8/1. ♘ Mik az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrix sajátértékei?

> 1, 4, 6

8/2. ♘ Írjunk föl egy olyan mátrixot, amelynek karakterisztikus polinomja $(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$.

> Pl. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

8/3. ♖ Írjunk föl egy olyan nem diagonalizálható mátrixot, melynek karakterisztikus polinomja λ^2.

> Pl. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

8/4. ♕ Az $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix nem diagonalizálható $\mathbb{R}$ fölött. Mik c lehetséges értékei?

> $c \le 0$

8/5. ♕ Milyen $c \in \mathbb{R}$ valós értékekre lesz az $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix diagonalizálható?

> $c \neq 1$

8/6. ♕ Az $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixra $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Mennyi az $\begin{bmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{bmatrix}$ mátrix determinánsa?

> $\det \begin{bmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{bmatrix} = 0$

Egy mátrix valós sajátértékeit a karakterisztikus polinom valós gyökei adják: a főátló minden eleméből levonunk λ-t és kiszámítjuk a determinánst. Felső háromszögmátrix, speciálisan diagonális mátrix esetén a sajátértékek a főátlóból leolvashatók. A sajátvektorokat minden egyes sajátértékhez egy-egy lineáris egyenletrendszer megoldásával kaphatjuk meg. A diagonalizálhatóság feltétele az, hogy legyen „elegendő” sajátvektor, azaz a tér dimenziószámával megegyező mennyiségű lineárisan független sajátvektor. A harmadik feladat mátrixa esetében ez nem teljesül, mert a sajátvektorok $\begin{bmatrix} r & 0 \end{bmatrix}^T$ alakúak, ahol $r \neq 0$ (azaz a 0-hoz tartozó sajátaltér egydimenziós). Gyakran használt elégséges feltétel, hogy egy $n \times n$-es mátrix diagonalizálható $\mathbb{R}$ fölött, ha n különböző valós sajátértéke van. A negyedik feladat mátrixának karakterisztikus polinomja $\lambda^2 - c$. Ennek $c > 0$-ra két különböző valós gyöke van, tehát ilyenkor a mátrix diagonalizálható; $c < 0$-ra nincs valós gyök, ezért $\mathbb{R}$ fölött nem diagonalizálhatjuk a mátrixot; végül $c = 0$-ra a megoldást a harmadik feladat adja. Hasonló érvelés adható az ötödik feladatnál is. A hatodik feladat feltétele azt mutatja, hogy a -1 sajátértéke a mátrixnak, ha tehát -1-et levonunk a főátló minden eleméből, épp az $A - (-1)I_2$ mátrixot kapjuk, aminek a determinánsa 0, hiszen -1 gyöke a karakterisztikus polinomnak.

(9) Lineáris transzformációk mátrixa, sajátértékei, kép- és magtere; báziscsere

9/1. ♘ Mi a kétdimenziós valós sík, azaz $\mathbb{R}^2$ origó körüli $+90$ fokos forgatásának mátrixa az **i** és **j** bázisban?

$$[\varphi]^{\mathbf{i},\mathbf{j};\mathbf{i},\mathbf{j}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

9/2. ♖ Mi a háromdimenziós valós tér, azaz $\mathbb{R}^3$ x-y-síkra való tükrözésének a mátrixa az $\mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{i}$ bázisban? (Itt a bázisvektorok sorrendje a megszokottól eltérő.)

$$[\varphi]^{\mathbf{j},\mathbf{k},\mathbf{i};\mathbf{j},\mathbf{k},\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9/3. ♘ Mik a kétdimenziós valós sík, azaz $\mathbb{R}^2$ origóra való tükrözésének sajátértékei?

-1

9/4. ♖ Az $\mathbb{R}^2$ egy φ lineáris transzformációjára $\varphi(\mathbf{i}) = 2\mathbf{i}$ és $\varphi(\mathbf{j}) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Mik φ sajátértékei?

2 és 3

9/5. ♕ Legyen egy $\varphi \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ lineáris transzformáció mátrixa a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ bázisban fölírva $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$. Mi lesz a φ leképezés mátrixa a $B' = \{2\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázisban?

$$[\varphi]^{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

9/6. ♖ Az $\mathbb{R}^2$ egy φ lineáris transzformációjára $\varphi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{0}$ és $\varphi(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, ahol $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ a triviális bázis. Mi φ magtere?

$\{\begin{bmatrix} r & 0 \end{bmatrix}^T : r \in \mathbb{R}\}$

9/7. ♖ Az $\mathbb{R}^2$ egy φ lineáris transzformációjára $\varphi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{0}$ és $\varphi(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, ahol $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ a triviális bázis. Mi φ képtere?

$\{\begin{bmatrix} r & r \end{bmatrix}^T : r \in \mathbb{R}\}$

9/8. ♕ Egy $\varphi \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ lineáris transzformáció mátrixa egy bázisban $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg φ magterének dimenzióját.

2

Minden lineáris transzformációhoz rögzített bázis esetén egyértelműen tartozik egy négyzetes mátrix. Ezt úgy írhatjuk föl, hogy a bázisvektorokat leképezzük a lineáris transzformációval, e képvektorokat felírjuk a megadott bázisban, és az így kapott koordinátavektorokat írjuk a mátrix oszlopaiba. Ha változtatunk a bázison, akkor változhat a mátrix is; ez kiszámítható a bázistranszformáció képletéből ($A' = S^{-1}AS$). Az ötödik feladatban a képletre nincs szükség: az első bázisvektor, $\mathbf{b}_1$ kétszeresének a képe szintén önmaga, azaz $2\mathbf{b}_1$, s így az új mátrix első oszlopában az első koordináta 1, a többi meg 0. Ugyanakkor a $\mathbf{b}_2$ és $\mathbf{b}_3$ képében fele annyit kell „vennünk” $2\mathbf{b}_1$-ből, mint $\mathbf{b}_1$-ből, tehát az első sor második és harmadik eleme a felére csökken. Egy lináris transzformáció sajátértékeit kiszámolhatjuk úgy, hogy felírjuk a mátrixát egy alkalmas bázisban, és ennek vesszük a sajátértékeit. Ez a negyedik (kétlépcsős) feladat: a mátrix a triviális bázisban $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. *Néha lehetséges közvetlenül a definíció segítségével is boldogulni: a harmadik feladatban minden vektor az ellentettjébe megy, ezért az egyetlen sajátérték a -1. A hatodik és a hetedik feladatban felírhatjuk, hogy $\varphi(\lambda\mathbf{e}_1 + \mu\mathbf{e}_2) = \mu(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$. Ez akkor nulla, azaz $\lambda\mathbf{e}_1 + \mu\mathbf{e}_2$ akkor van a magtérben, ha $\mu = 0$. A képtér elemei pedig $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ többszörösei. A nyolcadik feladatban azt is lehet használni, hogy $[\varphi(v)]_B = [\varphi]^B[v]_B$. Az $M \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}$ egyenlet megoldása: x és y tetszőleges, $z = 0$. A magtér tehát kétdimenziós. Megoldható a feladat a dimenzióösszefüggés segítségével is, amely szerint a magtér dimenziója a mátrix oszlopainak száma mínusz a mátrix rangja. Harmadik megoldásként láthatjuk, hogy két bázisvektor a nullába megy, ezért a magtér legalább kétdimenziós, de háromdimenziós nem lehet, mert a mátrix nem nulla.*

(10) Skaláris szorzat, vektorok szöge

10/1. ✍ Mennyi az $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ és az $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T$ vektorok szöge $\mathbb{R}^4$-ben, a szokásos $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^T\mathbf{b}$ skaláris szorzatra nézve?

Szögük: $120°$

10/2. ♖ Az $\begin{bmatrix} 1 & 1+i & i \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^3$ vektor $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{b}^*\mathbf{a}$ mellett merőleges az $\begin{bmatrix} 1 & 1+i & c \end{bmatrix}^T$ vektorra. Határozzuk meg $c \in \mathbb{C}$ értékét.

$c = -3i$

10/3. ♖ Álljon W az $\mathbb{R}^3$ azon vektoraiból, amelyek merőlegesek a $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ és $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ vektorok mindegyikére. Adjunk meg egy bázist W-ben.

$\{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T\}$

10/4. ♕ Mely $a, b \in \mathbb{R}$ értékekre lesz $|3a + 4b| = 5\sqrt{a^2 + b^2}$?

$[a, b] = \lambda[3, 4]$, $\lambda \in \mathbb{R}$

A szokásos skaláris szorzatot $\mathbb{R}^n$-ben az $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$ összefüggés adja meg; két vektor merőlegessége azt jelenti, hogy a skaláris szorzatuk nulla. $\mathbb{R}^n$-ben a vektorok szögét a $\cos\gamma = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}$ összefüggéssel definiáljuk, erről szól az első feladat. (A megoldáshoz érdemes átismételni a szögfüggvények értékét a nevezetes szögeken.) A második feladat esetében a skaláris szorzat kiszámításánál vigyázzunk arra, hogy a második tényező komponenseit meg kell konjugálni. A harmadik feladatnál lineáris egyenletrendszert kapunk W elemeinek komponenseire. A negyedik feladat esetében arra kell ráismerni, hogy a feladatbeli egyenlet az $\mathbf{u} = [3 \quad 4]^T$ és a $\mathbf{v} = [a \quad b]^T$ vektorokra írja föl az $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$ összefüggést, ami a Cauchy-egyenlőtlenség alapján akkor és csak akkor teljesülhet, ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ párhuzamosak.

(11) Geometriai vektorok: vektoriális és vegyes szorzat

11/1. ✍ Ha $[\mathbf{a}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ és a $[\mathbf{b}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, akkor számítsuk ki az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzatát (koordinátákkal).

$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$

11/2. ♕ Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ a nullvektortól különböző geometriai vektorok, melyek lineárisan összefüggőek. Az alábbiak közül mely állítások lesznek feltétlenül igazak:
(A) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{0}$; (B) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = 0$;
(C) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{0}$; (D) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$.

Igazak: (B), (C)

11/3. ♕ Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ olyan, a nullvektortól különböző geometriai vektorok, melyek lineárisan összefüggőek, de semelyik kettő nem párhuzamos. Döntsük el, az alábbiak közül mely állítások lesznek **feltétlenül hamisak**:
(A) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{0}$; (B) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = 0$;
(C) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq \mathbf{0}$; (D) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq 0$.

Hamisak: (A), (C)

11/4. ♕ Legyenek $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ olyan, a nullvektortól különböző geometriai vektorok, melyek lineárisan függetlenek, s legyen $\mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b}$. Döntsük el, az alábbiak közül mely állítások lesznek feltétlenül igazak:
(A) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ lineárisan összefüggők;
(B) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ lineárisan függetlenek;
(C) $\mathbf{a}$ merőleges $\mathbf{c}$-re;
(D) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ párhuzamos $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$-vel.

Igazak: (A), (D)

A vektoriális szorzat koordinátáinak kiszámításához érdemes a „determinánsos” képletet használni: egy 3×3-as determináns első sorába az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ *vektorokat írjuk, a másik két sorba pedig a megadott vektorok koordinátáit, majd a determinánst (formálisan) kifejtjük az első sora szerint. Ekkor az* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ *vektorok egy lineáris kombinációját kapjuk: ez lesz a vektoriális szorzat és így a leggyorsabb megoldani az első feladatot. Ebből a képletből láthatjuk azt is, hogy a vegyes szorzat is egy olyan determináns értéke, amelynek soraiban a három megadott vektor van alkalmas sorrendben. Speciálisan három vektor akkor és csak akkor lineárisan összefüggő, azaz akkor és csak akkor vannak egy síkban, ha a vegyes szorzatuk nulla. Ez kapcsolódik a második és a harmadik feladat (B) részéhez is. Az utolsó három feladatban érdemes a derékszögű koordinátarendszerben a három tengelyirányú egységvektorra,* $\mathbf{i}$*-re,* $\mathbf{j}$*-re és* $\mathbf{k}$*-ra nézni a vektoriális szorzat hatását, ezekkel érdemes kísérletezni az utolsó három feladatban. A második feladat (A) részében könnyű látni, hogy ha* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *nem esnek egy irányba, akkor* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *merőleges lesz az általuk meghatározott síkra, s ekkor* $\mathbf{c}$ *lehet akár* $\mathbf{a}$*-val is egyenlő, az* $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ *vektoriális szorzat nem lesz a nullvektor. A (C) részben ha* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vagy* $\mathbf{b}$ *és* $\mathbf{c}$ *párhuzamosak, akkor az ő vektoriális szorzatuk* $\mathbf{0}$*, és így* $\mathbf{0}$ *lesz a teljes vektoriális szorzat is. Ha viszont egyik vektorpár sem párhuzamos, akkor mindkét esetben ugyanazt a síkot feszítik ki (hiszen* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *és* $\mathbf{c}$ *lineárisan összefüggők), és így mindkét vektorpár vektoriális szorzata a síkra merőleges lesz, vagyis ezek párhuzamos vektorok, vektoriális szorzatuk tehát biztosan* $\mathbf{0}$*. A (D) esetben pedig pl.* $\mathbf{a} = \mathbf{c} = \mathbf{i}$*,* $\mathbf{b} = \mathbf{j}$ *esetén a szorzat értéke* $\mathbf{k}$ *és* $-\mathbf{k}$ *skaláris szorzata lesz, tehát nem* 0*. Hasonló okoskodással lehet kielemezni az utolsó két feladatban szereplő állítások igazságértékét is.*

(12) Kvadratikus alakok jellege (definitsége)

12/1. ✍ Számítsuk ki az $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix által meghatározott kvadratikus alak értékét az $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ vektoron.

13

12/2. ♖ Adjunk meg egy $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ vektort, melyen az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix által meghatározott kvadratikus alak negatív értéket vesz föl.

Pl. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

12/3. ♖ Adjuk meg az $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & 1 & -2 \\ c & -2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrix által meghatározott bilineáris függvény kvadratikus karakterét (definitségét).

Indefinit.

12/4. ✍Milyen $c \in \mathbb{R}$ valós értékekre lesz az $\begin{bmatrix} 1 & c \\ c & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix által meghatározott kvadratikus alak pozitív definit?

$0 < c < 1$

Egy szimmetrikus, valós A mátrixhoz tartozó kvadratikus alak $Q(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T A\mathbf{u}$. Abban az esetben ha $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ és $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$, akkor $Q(\mathbf{u}) = ax^2 + 2bxy + dy^2$. A második feladatban tehát olyan x és y számokat kell keresnünk, amelyekre $x^2 + 4xy + y^2$ negatív. Ha észrevesszük, hogy $x^2 + 4xy + y^2 = x^2 + 4xy + 4y^2 - 3y^2 = (x + 2y)^2 - 3y^2$, akkor már könnyen találunk ilyen értékeket (de az alábbiak szerint a mátrix egyik sajátvektora is megfelelő). A kvadratikus alak jellege (karaktere, definitsége) azt mondja meg, milyen valós értékeket vesz föl a nem nulla vektorokon. Ezt a tulajdonságot le tudjuk olvasni a mátrix sajátértékeiből (amik szimmetrikus mátrix esetén mindig valósak), pontosabban azok előjeléből:

$Q(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$	sajátértékek előjele:	jelleg:
mindig pozitív	mind pozitív	pozitív definit
mindig negatív	mind negatív	negatív definit
mindig nemnegatív	mind nemnegatív	pozitív szemidefinit
mindig nempozitív	mind nempozitív	negatív szemidefinit
van pozitív is, negatív is	van pozitív is, negatív is	indefinit

Ha $\mathbf{u} = \mathbf{e}_i$ (a triviális bázis i-edik vektora), akkor $Q(\mathbf{u})$ az A mátrix főátlójának i-edik eleme. A harmadik feladatban a második és a harmadik diagonális elem pozitív, illetve negatív, s így kvadratikus alak pozitív és negatív értékeket is fölvesz, tehát biztosan indefinit. Bizonyos esetekben a következő kritérium segítségével is leolvasható a kvadratikus alak jellege. Legyen $\Delta_0 = 1$ és Δ_k a mátrix bal fölső sarkában lévő $k \times k$-as részmátrix determinánsa (ez az ún. karakterisztikus sorozat). Pl. a karakterisztikus sorozat pontosan akkor áll csupa pozitív értékből, ha a kvadratikus alakunk pozitív definit. A negyedik feladatnál ezt a feltételt használjuk: az 1×1-es részmátrixhoz tartozó tag pozitív, s a pozitív definitség azzal lesz ekvivalens, hogy a determináns, $c - c^2 = c(1 - c)$ is pozitív. Ez csak a jelzett intervallumban valósulhat meg.