EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMíTÁSA

BÁTKAI ANDRÁS

Ennek a jegyzetnek az elsődleges célja, hogy a matematika tanárszakos analízis előadást kísérje és a vizsgára készülést segítse. A jegyzet gépelési hibákat tartalmazhat, kérem értelemmel kezelni és nekem jelezni. Az esetleges hibák nem mentenek fel senkit a vizsgán.

1. Differenciálszámítás, függvényvizsgálat

1.1. *Példa.* Tekintsük a sebességfogalom kérdését a fizikában. Egyenes vonalú egyenletes mozgás esetén a sebesség a megtett út és az eltelt idő hányadosa,

$$v = \frac{s}{t}.$$

Hasonlóan értelmezhető időben változó mozgás esetén az átlagsebesség t_0 és t időpillanat között, azaz

$$v(t_0, t) = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0},$$

ahol $s(t)$ jelöli a t idő alatt megtett utat. Ésszerűnek látszik, hogy a pillanatnyi sebesség fogalmát a t_0 időpillanatban a következőképp értelmezzük: Vegyünk a t_0 időponthoz közeli t időpontokat, határozzuk meg az átlagsebességet a $[t_0, t]$ időintervallumon, majd közelítsük t-t t_0-hoz. Matematikailag precízen megfogalmazva, legyen

$$v(t_0) := \lim_{t \to t_0} v(t_0, t) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0},$$

persze amennyiben ez a határérték létezik.

1.2. *Példa.* Legyen adva a koordinátarendszerben egy függvény grafikonja (görbéje) és vizsgáljuk, hogy adott pontjához hogyan lehetne érintőt húzni. Mivel adott $(x_0; f(x_0))$ ponton át ismert meredekségű egyenest középiskolás ismereteink alapján meg tudunk rajzolni, ezért a feladat az érintő meredekségének meghatározása.

A függvény grafikonjának egy másik, $(x, f(x))$ pontján is áthaladó szelő meredeksége

$$m(x_0, x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Az érintő meredekségét (amennyiben egyáltalán létezik érintő) úgy kaphatjuk meg, hogy az x pontot közelítjük az x_0 ponthoz, azaz

$$m(x_0) := \lim_{x \to x_0} m(x_0, x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

1.3. **Definíció.** Legyen $x_0 \in D(f)$ az értelmezési tartomány belső pontja, azaz $x_0 \in \operatorname{int} D(f)$. Azt mondjuk, hogy f *differenciálható* (deriválható) az x_0 pontban, ha létezik

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

A fenti határértéket az f függvény x_0 ponbeli *differenciálhányados*ának vagy *derivált*jának mondjuk. További lehetséges jelölések:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{df}{dx}|_{x=x_0}.$$

1.4. *Megjegyzés.* Az előző definíció értelmezhetőségéhez nyilván nem szükséges $x_0 \in \operatorname{int} D(f)$, hanem elég lenne $x_0 \in D(f) \cap D(f)'$. Tekintettel arra, hogy azokhoz a vizsgálódásokhoz, amiket mi folytatunk, nincs szükség erre az általánosságra, ezért a differenciálhatóság definícióját is ennek megfelelően mondtuk ki.

Date: September 8, 2005.

e-mail: `batka@cs.elte.hu`.

1.5. *Megjegyzés.* Nyilvánvaló módon definiálhatóak a féloldali deriváltak (differenciálhányadosok). Pl. a jobboldali deriválthoz tegyük fel, hogy található $\varepsilon > 0$, hogy $[x_0, x_0 + \varepsilon) \subset D(f)$ és legyen

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

A továbbiakban, ha azt mondjuk, hogy $D(f) = [a, b]$ és f differnciálható az a (b) pontban, akkor azt értjük ez alatt, hogy a megfelelő féloldali differenciálhányados létezik.

1.6. *Megjegyzés.* Az előző definíció segítségével adott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényhez készíthetünk egy új függvényt a következő módon. Ezt f *deriváltfüggvény*ének nevezzük és f' jelöli,

$$D(f') := \{x_0 \in D(f) \,:\, \exists\, f'(x_0)\},$$
$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

1.7. **Állítás.** *Ha f differenciálható $x_0 \in \operatorname{int} I$-ben, akkor folytonos is.*

Bizonyítás.

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

□

1.8. *Példa.* Az előző állítás nem megfordítható, hiszen ha $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$, akkor

$$f'_+(0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0+} (1) = 1,$$
$$f'_-(0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0-} (-1) = -1,$$

azaz nem létezik $f'(0)$.

Megmutatható, hogy létezik (nagyon sok) mindenhol definiált folytonos függvény, amely értelmezési tarományának egyetlen pontjában sem differenciálható. Például a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n x\}}{10^n}$$

képlettel, ahol $\{y\}$ az y szám törtrészét jelöli, egy ilyen függvényt adtunk meg.[1]

1.9. *Példa.* Meghatározzuk néhány elemi függvény differenciálhányadosát.

(1) Legyen $f(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}$. Ekkor ha $x \neq x_0$,

$$\frac{x^m - x_0^m}{x - x_0} = x^{m-1} + x^{m-2}x_0 + \ldots + x_0^{m-1} \to m x_0^{m-1}, \qquad \text{ha } x \to x_0.$$

(2) Legyen $g(x) = \sin x$, gyakorlatokon szerepelt, hogy $g'(x_0) = \cos x_0$.
(3) Legyen $h(x) = a^x$, $a > 1$. Szintén gyakorlatokon szerepelt, hogy $h'(x_0) = a^{x_0} \ln a$, ahol $\ln = \log_e$.

1.10. *Példa.* A következőkben a műveleti azonosságokat fogjuk vizsgálni. Egyszerű példa a következő. Legyen $f(x) = g(x) = x$, ekkor $f'(x) = g'(x) = 1$, $(fg)(x) = x^2$, $(fg)'(x) = 2x$, azaz

$$(fg)'(x) \neq f'(x) \cdot g'(x).$$

Tehát, bár a szorzatfüggvény deriválható, kiszámítása nem olyan egyszerű.

[1] lsd. pl. Szőkefalvi-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok, III.1.1. (88-89. old.)

1.11. **Tétel.** *Legyen* $D(f) = D(g) = I$ *intervallum,* $x_0 \in \operatorname{int} I$ *belső pont, melyben legyen* f *és* g *differenciálható. Ekkor* $f \pm g$, αf $(\alpha \in \mathbb{R})$, fg *és, ha* $g(x_0) \neq 0$, *akkor* $\frac{f}{g}$ *differenciálható* x_0*-ban és*

$$\begin{aligned}
(f \pm g)'(x_0) &= f'(x_0) \pm g'(x_0), \\
(\alpha f)'(x_0) &= \alpha \cdot f'(x_0), \\
(fg)'(x_0) &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0), \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.
\end{aligned}$$

Bizonyítás. (1) Kezdjük az összeadással, a kivonás hasonlóan történhet.

$$\frac{[f(x) + g(x)] - [f(x_0) - g(x_0)]}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0) + g'(x_0), \quad \text{ha } x \to x_0.$$

(2) A számmal szorzás:

$$\frac{(\alpha f)(x) - (\alpha f)(x_0)}{x - x_0} = \alpha \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to \alpha f'(x_0), \qquad \text{ha } x \to x_0.$$

(3) A szorzás:

$$\begin{aligned}
\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0), \text{ ha } x \to x_0.
\end{aligned}$$

Itt használtuk azt is, hogy az f függvény folytonos az x_0 pontban.

(4) A hányados:

$$\begin{aligned}
\frac{(\frac{f}{g})(x) - (\frac{f}{g})(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{f(x)g(x_0) - g(x)f(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\
&= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left(g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0)\frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \right) \\
&\to \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}, \text{ ha } x \to x_0.
\end{aligned}$$

Itt használtuk azt is, hogy a g függvény folytonos az x_0 pontban.

□

1.12. **Tétel** (kompozíció differenciálhatósága)**.** *Legyen* $D(f) = I$, $D(g) = J$, I, J *intervallum,* $R(g) = g(J) \subset I$, $x_0 \in J$ *belső pont,* g *differenciálható* x_0*-ban,* f *differenciálható* $g(x_0)$ *pontban. Ekkor* $f \circ g$ *differenciálható* x_0*-ban és*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Bizonyítás. Esetszétválasztást végzünk, két esetet vizsgálunk meg.

(1) Az első eset az, amikor található $\delta > 0$, hogy bármely $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ számra $g(x) \neq g(x_0)$. Ez garantáltan teljesül, ha mondjuk g injektív (szigorúan monoton).

Ekkor

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

ha $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap (x_0, x_0 + \delta)$. Mivel g folytonos, ezért ha $x \to x_0$, akkor $g(x) \to g(x_0)$. Másrészt feltétel szerint $g(x) \neq g(x_0)$, így

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \to f'(g(x_0)), \qquad \text{ha } x \to x_0$$

a kompozíció határértékére vonatkozó Tétel (2. változat)[2] szerint. Másrészt g differenciálhatóságából következik, hogy

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \to g'(x_0), \qquad \text{ha } x \to x_0.$$

(2) A második eset az, amikor található (x_n) sorozat, melyre $x_n \to x_0$, és $g(x_n) = g(x_0)$. Ekkor

$$\frac{g(x_n)-g(x_0)}{x_n-x_0} = 0 \to 0 = g'(x_0)$$

a függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv alapján.

Legyen $z_n \in J$, $z_n \to x_0$. Azt kell megmutatnunk, hogy az

$$y_n := \frac{f(g(z_n)) - f(g(x_0))}{z_n - x_0} = \begin{cases} 0, & \text{ha } g(z_n) = g(x_0), \\ \frac{f(g(z_n))-f(g(x_0))}{g(z_n)-g(x_0)} \frac{g(z_n)-g(x_0)}{z_n-x_0} & \text{ha } g(z_n) \neq g(x_0) \end{cases}$$

sorozatra $y_n \to 0$. Három alesetet vizsgálunk meg.

(a) Ha véges sok olyan n index van, hogy $g(z_n) \neq g(x_0)$, akkor $y_n = 0$ majdnem minden indexre, így $y_n \to 0$.

(b) Ha véges sok olyan n index van, hogy $g(z_n) = g(x_0)$, akkor (1) eset alatt tárgyaltakhoz hasonlóan látszik, hogy $y_n \to f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) = 0$.

(c) Ha mindkettőből végtelen sok index van, akkor szét tudjuk bontani a (z_n) sorozatot egy (z_{m_k}) és egy (z_{l_k}) részsorozatra, ahol az egyik esetben $g(z_{m_k}) = g(x_0)$ és a másik esetben $g(z_{l_k}) \neq g(x_0)$. Így a (2a) és (2b) pontokban tárgyaltak alapján $y_{m_k} \to 0$ és $y_{l_k} \to 0$. Mivel az m_k és az l_k indexsorozatok lefedik a természetes számok halmazát, ezért a múlt félévben a részsorozatokról tanultak alapján $y_n \to 0$.

□

1.13. **Tétel** (inverz differenciálhatósága). *Legyen $D(f) = I$ intervallum, f legyen szigorúan monoton. Legyen továbbá $x_0 \in \operatorname{int} I$ és tegyük fel, hogy f differenciálható az x_0 pontban. Ekkor f^{-1} differenciálható $\eta = f^{-1}(x_0)$ pontban és*

$$\left(f^{-1}\right)'(\eta) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(\eta)\right)}.$$

Bizonyítás. Legyen $y_n \in D(f^{-1}) = R(f) = f(I)$, $y_n \to \eta$, $y_n \neq \eta$. Ekkor található olyan $x_n \in D(f) = I$, hogy $f(x_n) = y_n$. A az inverz függvény folytonosságára vonatkozó tétel[3] szerint f^{-1} folytonos, így $x_n = f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(\eta) = x_0$.

Tehát

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(\eta)}{y_n - \eta} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)}, \qquad \text{ha } n \to \infty.$$

□

1.14. *Példa.* (1) $f(x) = \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, azaz

$$f'(x) = \sin'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\sin x$$

(2) $f(x) = \ln x$, ahol is $\ln = \exp^{-1}$. Így

$$f'(\eta) = \frac{1}{e^{x_0}} = \frac{1}{\eta}, \qquad \text{ahol } \eta = e^{x_0}.$$

(3) $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $(D(f) = \mathbb{R}^+)$. Ekkor $f(x) = e^{\alpha \ln x}$, így

$$f'(x) = \left(e^{\alpha \ln x}\right)\left(\frac{\alpha}{x}\right) = \alpha \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

(4) $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, így

$$f'(x) = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

[2] Egyváltozós függvények folytonossága és határértéke c. jegyzet 1.41 Tétel

[3] Egyváltozós függvények folytonossága és határértéke c. jegyzet 2.33 Tétel

1.15. **Tétel.** *Legyen $D(f) = I$ intervallum, $x_0 \in \operatorname{int} I$ belső pont. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az x_0 pontban, ha találhatóak $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ számok és $r : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ függvény, melyre*

$$\frac{r(h)}{h} \to 0, \qquad \text{ha } h \to 0$$

teljesül, és bármely $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ esetén

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + r(h).$$

Ekkor $f'(x_0) = a$.

Bizonyítás. ($\Leftarrow$):

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a + \frac{r(h)}{h} \to a, \qquad \text{ha } h \to 0,$$

így ilyenkor f differenciálható x_0-ban és $f'(x_0) = a$.

($\Rightarrow$): Ha f differenciálható x_0-ban, akkor legyen

$$\rho(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \to 0, \qquad \text{ha } h \to 0.$$

Így

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + h\rho(h).$$

Az $a := f'(x_0)$ és $r(h) = h \cdot \rho(h)$ választással az állítás következik. □

1.16. **Definíció.** Az $x_0 \in D(f)$ pont *lokális maximumhely*, ha található $\delta > 0$, hogy bármely $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D(f)$ esetén $f(x) \le f(x_0)$.

Az $x_0 \in D(f)$ pont *lokális minimumhely*, ha található $\delta > 0$, hogy bármely $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D(f)$ esetén $f(x) \le f(x_0)$.

1.17. **Tétel** (szélsőérték szükséges feltétele)**.** *Legyen $D(f) = I$ intervallum, $x_0 \in \operatorname{int} I$ belső pont és legyen f differenciálható x_0-ban. Ha $x_0 \in \operatorname{int} I$ lokális maximumhely, akkor $f'(x_0) = 0$.*

Bizonyítás. Használjuk, hogy $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

$$\text{Ha } x > x_0, \text{ akkor } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0 \;\Rightarrow\; f'_+(x_0) \le 0,$$
$$\text{ha } x < x_0, \text{ akkor } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0 \;\Rightarrow\; f'_-(x_0) \ge 0.$$

Így csak $f'(x_0) = 0$ lehetséges. □

1.18. *Megjegyzés.* Hasonlóan, ha $x_0 \in \operatorname{int} D(f)$ lokális minimumhely, akkor $f'(x_0) = 0$.

1.19. *Megjegyzés.* Az $f'(x_0) = 0$ feltétel nem elégséges a lokális szélsőérték létezéséhez, amint azt az $f(x) = x^3$ függvény mutatja az $x_0 = 0$ pontban. Ugyanis $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$, viszont $x_0 = 0$ nem lokális szélsőértékhely, hiszen f szigorúan monoton nő.

1.20. *Megjegyzés.* Fontos az a feltétel is, hogy $x_0 \in \operatorname{int} I = \operatorname{int} D(f)$, hiszen ha $f(x) = x^2$, $D(f) = [1, 2]$, akkor $x_0 = 1$ minimumhely, $x_0 = 2$ maximumhely, viszont $f'(1) = f'_+(1) = 2 \ne 0$ és $f'(2) = f'_-(2) = 4 \ne 0$. Az előző bizonyítás megfelelő módosításával bizonyítható a következő.

1.21. **Következmény.** *Legyen $D(f) = [a, b]$, f differenciálható az a és a b pontokban (tehát a féloldalas deriváltak léteznek). Ha az a pont lokális minimumhely (maximumhely), akkor $f'_+(a) \ge 0$ ($f'_+(a) \le 0$). Ha a b pont lokális maximumhely (minimumhely), akkor $f'_-(b) \ge 0$ ($f'_-(b) \le 0$).*

1.22. **Tétel** (Rolle tétele)**.** *Legyen $D(f) = I = [a, b]$ folytonos, f differenciálható az $\operatorname{int} I = (a, b)$ intervallumban és legyen $f(a) = f(b)$. Ekkor található olyan $x_0 \in (a, b)$, melyre $f'(x_0) = 0$.*

Bizonyítás. Ha f konstans, akkor az állítás nyilvánvaló, minden $x_0 \in (a, b)$ pontban a $f'(x_0) = 0$.

Ha f nem konstans, akkor a Weierstraß tétel szerint létező maximum- és minimumhelyek különbőzőek, azaz legyen $x_1 \in [a, b]$ minimumhely és $x_2 \in [a, b]$ maximumhely, ekkor, mivel f nem konstans, ezért $f(x_1) < f(x_2)$. Tehát legalább az egyik az pont intervallum belsejében van, mert $f(a) = f(b)$. Viszont az előző állítás szerint ekkor vagy $f'(x_1) = 0$ (ha $x_1 \in (a, b)$) vagy $f'(x_2) = 0$ (ha $x_2 \in (a, b)$). □

1.23. *Megjegyzés.* Michel Rolle [1652-1719] francia matematikus, a Párizsi akadémia tagja.

1.24. *Megjegyzés.* A Rolle tételnél fontos, hogy az intervallum végpontjában féloldalas differenciálhatóságot sem teszünk fel. Így a feltételeket teljesítik a $D(f) = D(g) = [0,1]$, $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ függvények.

1.25. **Tétel** (Lagrange középértéktétel)**.** *Legyen $D(f) = I = [a,b]$ folytonos, f differenciálható az $\operatorname{int} I = (a,b)$ intervallumban. Ekkor található $x_0 \in (a,b)$, hogy*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bizonyítás. Legyen $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Könnyen ellenőrizhető, hogy g teljesíti a Rolle tétel feltételeit, hiszen $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$. Tehát található olyan $x_0 \in (a,b)$, melyre $g'(x_0) = 0$, azaz $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

1.26. *Megjegyzés.* Joseph Louis Lagrange [1736-1813] francia matematikus, csillagász, fizikus. A francia forradalom alatt részt vett az új mértékegységrendszer kidolgozásában, mely a mai SI rendszer alapja. Ő adott először magyarázatot arra, miért fordítja a Hold mindig ugyanazt az oldalát a föld felé. Jelentősek az algebrában és a számelméletben elért eredményei is.

1.27. **Következmény.** *Legyen $D(f) = D(g) = I$ intervallum, f, g folytonos és az intervallum belsejében differenciálható, valamint legyen $f'(x) = g'(x)$ minden $x \in \operatorname{int} I$ pontra. Ekkor található olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy*

$$f(x) = g(x) + c.$$

Bizonyítás. Legyen $h(x) = f(x) - g(x)$, azt kell igazolni, hogy h konstans. Ekkor $h'(x) = 0$ minden $x \in \operatorname{int} I$ pontban. Legyen $x_1 < x_2$, x_1, $x_2 \in \operatorname{int} I$. Ekkor Lagrange középértéktétel szerint található $x_0 \in (x_1, x_2)$, hogy

$$h(x_2) - h(x_1) = h'(x_0)(x_2 - x_1) = 0,$$

hiszen feltétel szerint $h'(x_0) = 0$. Tehát h konstansfüggvény. □

1.28. **Következmény.** *Legyen $D(f) = I$, f folytonos és differenciálható $\operatorname{int} I$-ben, valamint legyen f' korlátos. Ekkor f Lipschitz-folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $L := \sup |f'|$, $x, y \in I$, $x < y$. A Lagrange középértéktétel szerint található $x_0 \in (x,y) \subset \operatorname{int} I$, hogy

$$|f(x) - f(y)| = |f'(x_0)(x-y)| \leq L|x-y|,$$

azaz f Lipschitz folytonos és a Lipschitz konstans L. □

1.29. **Tétel** (monotonitás elégséges feltétele)**.** *Legyen $D(f) = I$ intervallum, f folytonos és differenciálható $\operatorname{int} I$-ben. Ha minden $x \in \operatorname{int} I$ pontban*

$$\begin{aligned}
f'(x) &\geq 0, &&\textit{akkor} && f \textit{ monoton nő},\\
f'(x) &> 0, &&\textit{akkor} && f \textit{ szigorúan monoton nő},\\
f'(x) &\leq 0, &&\textit{akkor} && f \textit{ monoton fogy},\\
f'(x) &< 0, &&\textit{akkor} && f \textit{ szigorúan monoton fogy}.
\end{aligned}$$

Bizonyítás. Vizsgáljuk például az első esetet, a többi hasonlóan történhet. Tegyük fel, hogy minden $x \in \operatorname{int} I$ pontban $f'(x) \geq 0$ és legyen $x < y$, $x, y \in I$. Lagrange középértéktétel szerint található $x_0 \in (x,y) \subset \operatorname{int} I$, hogy

$$f(y) - f(x) = f'(x_0)(y - x) \geq 0.$$

□

1.30. **Tétel** (szélsőérték elégséges feltétele). *Legyen $D(f) = I$ intervallum, f differenciálható* $\operatorname{int} I$*-ben, $x_0 \in \operatorname{int} I$ és legyen $f'(x_0) = 0$. Az f függvénynek az x_0 pont lokális maximumhelye, ha található $\delta > 0$, hogy*

$$\begin{aligned} \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) : \qquad & f'(x_0) \geq 0 \text{ és} \\ \forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta) : \qquad & f'(x_0) \leq 0. \end{aligned}$$

Hasonlóan, az f függvénynek az x_0 pont lokális minimumhelye, ha található $\delta > 0$, hogy

$$\begin{aligned} \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) : \qquad & f'(x_0) \leq 0 \text{ és} \\ \forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta) : \qquad & f'(x_0) \geq 0. \end{aligned}$$

Bizonyítás. A maximumhelyre vonatkozó állítást bizonyítjuk, a minimumhelyre vonatkozó hasonlóan következik. Tegyük fel, hogy a feltétel teljesül és legyen $x_0 < x < x_0 + \delta$ tetszőleges. A Lagrange középértéktétel szerint található $x_1 \in (x_0, x)$, hogy

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_1)(x - x_0) \leq 0,$$

hiszen $f'(x_1) \leq 0$ és $x - x_0 > 0$. Tehát ha $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, akkor $f(x) \leq f(x_0)$.

Hasonlóan, legyen $x_0 < x < x_0 + \delta$ tetszőleges. Lagrange középértéktétel szerint található $x_2 \in (x, x_0)$, hogy

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_2)(x - x_0) \leq 0,$$

hiszen $f'(x_1) \geq 0$ és $x - x_0 < 0$. Tehát ha $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, akkor $f(x) \leq f(x_0)$.

Összefoglalva, minden $x \in B(x_0, \delta)$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$, azaz x_0 lokális maximumhely. □

1.31. *Megjegyzés.* Az előző tétel feltétele nem szükséges, könnyen lehet példát mutatni olyan függvényre, amelyre nem teljesülnek a tétel feltételei egy x_0 pontban, mégis lokális minimuma van ott[4].

1.32. **Definíció.** Legyen $D(f) = I$ intervallum, $x_0 \in \operatorname{int} I$. Az f függvény az x_0 *pontban lokálisan monoton nő (fogy)*, ha található $\delta > 0$, hogy

$$\begin{aligned} \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) : \qquad & f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)), \\ \forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta) : \qquad & f(x) \geq f(x_0) \quad (f(x) \leq f(x_0)). \end{aligned}$$

Azt mondjuk, hogy az f függvény az x_0 pontban *előjelváltó*, ha $f(x_0) = 0$ és f az x_0 pontban lokálisan monoton.

1.33. *Megjegyzés.* Tehát a szélsőérték elégséges feltétele úgy fogalmazható, hogy: ha f' az x_0 pontban előjelváltó, akkor f-nek x_0 pontban lokális szélsőértékhelye van.

1.34. *Megjegyzés.* A pontban vett lokális monotonitás nem jelenti, hogy lenne olyan intervallum, ahol f monoton, erre is lehet példát mutatni[5].

1.35. **Állítás.** *Az f függvény az $x_0 \in \operatorname{int} D(f)$ pontban pontosan akkor nő lokálisan, ha található $\delta > 0$, hogy bármely $x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ esetén*

$$g(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Bizonyítás. Ha $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, akkor $(x - x_0) > 0$, így pontosan akkor teljesül $g(x) \geq 0$, ha $f(x) \geq f(x_0)$. Hasonlóan, ha $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, akkor $(x - x_0) < 0$, így pontosan akkor teljesül $g(x) \geq 0$, ha $f(x) \leq f(x_0)$. □

A folytatáshoz szükségünk van a következő egyszerű állításra, melyhez hasonlót már Bolzano tételének tárgyalásakor[6] már láttunk. Bizonyítása is hasonlóan történik.

1.36. **Segédtétel.** *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D(f)'$, létezik* $\lim_{x_0} f = a$ *határérték. Ha $a > 0$ ($a < 0$), akkor található $\delta > 0$, hogy bármely $x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ esetén $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).*

[4] lsd. T. Sós Vera. Analízis I/1 jegyzet 15.13.M. megjegyzést.

[5] lsd. T. Sós Vera. Analízis I/1 jegyzet 15.4.M. megjegyzést.

[6] Egyváltozós függvények folytonossága és határértéke c. jegyzet 2.13 Segédtétel

Bizonyítás, első változat. Indirekt, tegyük fel, hogy minden $\delta > 0$ számhoz található olyan $x = x(\delta) \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$, hogy $f(x) \leq 0$. Így $\delta = \frac{1}{n}$-hez is található x_n a fenti tulajdonsággal. Erre a sorozatra $x_n \to x_0$, a határérték definíciója miatt $f(x_n) \to a$, a határérték és rendezés tételei miatt $a \leq 0$ kellene, hogy legyen, ami ellentmondás. □

Bizonyítás, második változat. A határérték $\varepsilon - \delta$ megfogalmazását használjuk. Az $\varepsilon = |a|$-hoz található olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ számra $f(x) \in B(a, \varepsilon) = (0, 2a)$, azaz $f(x) > 0$. □

1.37. **Következmény.** *Legyen $D(f) = I$ intervallum, f differenciálható az $x_0 \in \operatorname{int} I$ pontban és legyen $f'(x_0) > 0$. Ekkor f lokálisan szigorúan monoton nő az x_0 pontban.*

Bizonyítás. $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$, így 1.36 Segédtétel szerint található $\delta > 0$, hogy bármely $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ számra $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$. Az állítás 1.35 Állítás felhasználásával következik. □

1.38. **Tétel** (szélsőérték feltétele második deriválttal)**.** *Legyen $D(f) = I$ intervallum, f differenciálható $\operatorname{int} I$-ben, $x_0 \in \operatorname{int} I$ és $f'(x_0) = 0$. Ha f' differenciálható x_0-ban és*

$$\begin{aligned} f''(x_0) &< 0, \qquad \textit{akkor } x_0 \textit{ lokális maximumhely,} \\ f''(x_0) &> 0, \qquad \textit{akkor } x_0 \textit{ lokális minimumhely.} \end{aligned}$$

Bizonyítás. Ha $f''(x_0) < 0$, akkor f' az x_0 pontban lokálisan szigorúan monoton fogy, azaz található $\delta > 0$, hogy

$$\begin{aligned} \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) : &\qquad f'(x_0) \geq 0 \text{ és} \\ \forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta) : &\qquad f'(x_0) \leq 0, \end{aligned}$$

amiből 1.30 Tétel felhasználásával az állítás első része következik. A minimumhelyre vonatkozó állítás hasonlóan bizonyítható. □

A 1.30 Tétel ellenpróbáját, azaz elégséges feltételt arra, hogy egy x_0 pont, melyben $f'(x_0) = 0$ ne legyen szélsőértékhely, a következő módon adhatjuk meg.

1.39. **Állítás.** *Legyen $D(f) = I$ intervallum, f differenciálható $\operatorname{int} I$-ben, $x_0 \in \operatorname{int} I$, $f'(x_0) = 0$. Ha található $\delta > 0$, hogy bármely $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$ esetén $f'(x) > 0$, akkor f az x_0 pontban lokálisan szigorúan monoton nő.*

Bizonyítás. legyen $x_0 < x < x_0 + \delta$ tetszőleges. Lagrange középértéktétel szerint található $x_1 \in (x_0, x)$, hogy

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_1)(x - x_0) > 0,$$

hiszen $f'(x_1) > 0$ és $x - x_0 > 0$. Tehát ha $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, akkor $f(x) > f(x_0)$.

Hasonlóan, legyen $x_0 < x < x_0 + \delta$ tetszőleges. Lagrange középértéktétel szerint található $x_2 \in (x, x_0)$, hogy

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_2)(x - x_0) < 0,$$

hiszen $f'(x_1) > 0$ és $x - x_0 < 0$. Tehát ha $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, akkor $f(x) < f(x_0)$. □

1.40. *Példa.* (a) Legyen $f(x) = x^2$, ekkor $f'(x) = 2x$ és $f''(x) = 2$. $f'(x) = 0$, ha $x = 0$. Mivel $f''(0) = 2$, ezért ez minimumhely.

(b) Legyen $f(x) = x^3$, ekkor $f'(x) = 3x^2$ és $f''(x) = 6x$. $f'(x) = 0$, ha $x = 0$. Mivel $f''(0) = 0$, ezért nem használhatóak a második deriváltra vonatkozó feltételek. Viszont mivel ha $x \neq 0$, akkor $f'(x) > 0$, ezért 1.39 Állítás szerint 0 nem szélsőértékhely.

(c) Legyen $f(x) = x^4$, $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$. $f'(x) = 0$, ha $x = 0$. A második deriváltra vonatkozó feltételek ismét használhatatlanok, viszont könnyen látható, hogy ha $x < 0$, akkor $f'(x) < 0$, és ha $x > 0$, akkor $f'(x) > 0$, így $x_0 = 0$ minimumhely.

1.41. **Tétel** (Cauchy középértéktétel)**.** *Legyen $D(f) = D(g) = [a, b]$ intervallum, f és g folytonos, továbbá differenciálható az (a, b) intevallumon. Ekkor található $x_0 \in (a, b)$, hogy*

$$(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0).$$

Ha $g'(x_0) \neq 0$, akkor

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Bizonyítás. Legyen $h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$, azt kell megmutatnunk, hogy található $x_0 \in (a, b)$, hogy $h'(x_0) = 0$. Viszont h teljesíti a Rolle tétel feltételeit, hiszen

$$h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(a) - g(b)f(a) + g(a)f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a),$$
$$h(b) = f(b)g(b) - f(a)g(b) - g(b)f(b) + g(a)f(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a).$$

Így tényleg található olyan $x_0 \in (a, b)$, hogy $h'(x_0) = 0$, azaz

$$(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0).$$

□

1.42. **Következmény** (l'Hospital szabály, egyszerűbb alak)**.** *Legyen $D(f) = D(g) = I$ intervallum, f, g differenciálható $\operatorname{int} I$-ben, $x_0 \in \operatorname{int} I$, $f(x_0) = g(x_0) = 0$ és $g(x) \neq 0$ ha $x \neq x_0$. Ha létezik*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in \overline{\mathbb{R}},$$

akkor létezik

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha.$$

Bizonyítás. Mivel $f(x_0) = g(x_0) = 0$, ezért bármely $x \in I$, $x \neq x_0$ esetén $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$, így alkalmazva a Cauchy középértéktételt,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \alpha,$$

hiszen ha $x \to x_0$, akkor a Cauchy középértéktétel szerint választott $x_1 \to x_0$. □

1.43. *Megjegyzés.* Guillaume François Antoine Marquis de l'Hospital [1661-1704] francia matematikus, mestere Johann Bernoulli. Ő írta az első differenciálszámítás tankönyvet „Analyse des infiniment petits" címen, melyben szerepel a róla elnevezett tétel. A l'Hospital szabályt valójában Bernoulli használta először, így az elnevezés kissé téves.

1.44. **Tétel** (l'Hospital szabály)**.** *Legyen $D(f) = D(g) = (a, b)$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Legyen f, g differenciálható (a, b)-n, és tegyük fel, hogy bármely $x \in (a, b)$ számra $g'(x) \neq 0$. Teljesüljön továbbá vagy*

(A1) $$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0,$$

vagy

(A2) $$\lim_{x \to a+} g(x) = +\infty \text{ vagy } -\infty.$$

Ekkor

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

amennyiben a jobboldali határérték létezik.

Hasonló állítás teljesül az $x \to b-$ határértékre.

Bizonyítás. Három lépésben végezzük. Jelölje $\eta := \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

a.) Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor $\eta \in [-\infty, +\infty)$. Legyen $y_0 > \eta$ tetszőleges. Megmutatjuk, hogy található olyan $x_0 \in (a, b)$, hogy bármely $x \in (a, x_0)$ esetén

$$\frac{f(x)}{g(x)} < y_0. \tag{1}$$

Legyen $y_0 > y_1 > \eta$, ekkor legyen $x_1 \in (a, b)$ olyan, hogy bármely $x \in (a, x_1)$ esetén

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < y_1.$$

Ha $x, u \in (a, x_1)$, akkor Cauchy középértéktétel szerint található olyan $\xi \in (a, x_1)$, hogy

$$\frac{f(x) - f(u)}{g(x) - g(u)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < y_1. \tag{2}$$

- Ha az (A1) feltétel teljesül, akkor a (2) egyenlőtlenségből $x \to a+$ határátmenettel

$$\frac{f(u)}{g(u)} \leq y_1 < y_0 \qquad \forall\, u \in (a, x_1). \tag{3}$$

- Ha az (A2) feltétel teljesül, akkor rögzítsük az $u \in (a, x_1)$ pontot. Legyen $x_2 \in (a, x_1)$ olyan, hogy bármely $x \in (a, x_2)$ esetén

$$\begin{aligned} g(x) &> \max\{0, g(u)\}, && \text{ha } \lim_{x\to a+} g(x) = +\infty, \\ g(x) &< \min\{0, g(u)\}, && \text{ha } \lim_{x\to a+} g(x) = -\infty. \end{aligned}$$

  Mind a két esetben bármely $x \in (a, x_2)$ esetén

$$\frac{g(x) - g(u)}{g(x)} > 0.$$

  Végigszorozva (2) egyenlőtlenséget ezzel a számmal kapjuk, hogy

$$\frac{f(x) - f(u)}{g(x)} < y_1 \frac{g(x) - g(u)}{g(x)},$$

  azaz

$$\frac{f(x)}{g(x)} < y_1 - y_1 \frac{g(u)}{g(x)} + \frac{f(u)}{g(x)}. \tag{4}$$

  Mivel a (4) egyenlőtlenség jobb oldala (rögzített u mellett) y_1-hez tart, ha $x \to a+$, így található y_0-hoz $x_3 \in (a, x_2)$, hogy bármely $x \in (a, x_3)$ számra

$$\frac{f(x)}{g(x)} < y_0. \tag{5}$$

b.) Ha $\eta \in (-\infty, +\infty]$, akkor az előző gondolatmenetet szó szerint megismételve kapjuk, hogy bármely $\tilde{y}_0 < \eta$ számhoz található $\tilde{x}_0 \in (a, b)$, hogy minden $x \in (a, \tilde{x}_0)$ számra

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \tilde{y}_0. \tag{6}$$

c.) Az elvégzett előmunka után megmutatjuk, hogy teljesül a tétel állítása.

- Ha $\eta = -\infty$, akkor az a.) pont és (1) alapján bármely $y_0 \in \mathbb{R}$ számhoz található $x_0 \in (a, b)$, hogy minden $x \in (a, x_0)$ szám esetén

$$\frac{f(x)}{g(x)} < y_0,$$

  azaz definíció szerint

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

- Hasonlóan, ha $\eta = +\infty$, akkor b.) pont és (6) alapján bármely $\tilde{y}_0 \in \mathbb{R}$ számhoz található $\tilde{x}_0 \in (a,b)$, hogy minden $x \in (a, \tilde{x}_0)$ szám esetén
$$\frac{f(x)}{g(x)} > \tilde{y}_0,$$
azaz
$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$
- Ha $\eta \in \mathbb{R}$, akkor az a.) és b.) pontok alapján bármely $\varepsilon > 0$ esetén található $\hat{x}_0 \in (a,b)$, hogy minden $x \in (a, \hat{x}_0)$ esetén
$$\eta - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \eta + \varepsilon,$$
azaz
$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \eta.$$

□

1.45. *Példa.* (1)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha \cdot e^{\alpha x}}{1} = +\infty$$
bármely $\alpha > 0$ számra. Ebből következik, hogy bármely α, $\beta > 0$ számra
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty.$$

(2)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha \cdot x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha \cdot x^\alpha} = 0$$
bármely $\alpha > 0$ valós számra. Ebből következik, hogy bármely α, $\beta > 0$ számra
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0.$$

(3)
$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\cos x}{1} = 1,$$
$$\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to0} \frac{e^x}{1} = 1,$$
viszont ennek ellenére fontos, hogy az úgynevezett nevezetes határértékekre legyen a differenciálhányados fogalmát nem használó levezetésünk. Ez azért van így, mert a fenti határértékeket használtuk ahhoz, hogy meghatározzuk az exponenciális, szinusz stb. függvények deriváltfüggvényét.

(4) Legyen $f(x) = e^x + e^{-x}$ és $g(x) = e^x - e^{-x}$. Ekkor a $\lim_{+\infty} \frac{f}{g}$ határérték kiszámítására a l'Hospital szabály nem használható, hiszen $\frac{f'}{g'}$ határértéke $\frac{+\infty}{+\infty}$ típusú (és hasonló lesz a további deriváltak hányadosa), viszont
$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} \to 1 \qquad \text{ha } x \to +\infty.$$

(5) Vizsgáljuk a
$$\lim_{x\to0+} \frac{x^2 \cos\frac{1}{x}}{\sin x}$$
határértéket.
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x\cos\frac{1}{x} + x^2(\sin\frac{1}{x})\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\cos x} = \frac{2x\cos\frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\sin\frac{1}{x}}{\cos x},$$
aminek nincs határértéke 0-ban. Viszont
$$\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} \cdot x \cdot \cos\frac{1}{x} \to 0 \qquad \text{ha } x \to 0+.$$

(6) Legyen $f(x) = x + \sin x \cos x$, $g(x) = f(x)e^{\sin x}$. Ekkor

$$f'(x) = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x,$$

$$g'(x) = 2\cos^2 x \cdot e^{\sin x} + (x + \sin x \cos x)e^{\sin x}\cos x = \cos x \cdot e^{\sin x}(x + 2\cos x + \sin x \cos x).$$

Így

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{e^{\sin x}} \cdot \frac{2\cos x}{x + 3\cos x + \sin x \cos x} \to 0, \qquad \text{ha } x \to +\infty.$$

Viszont nem létezik az

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{e^{\sin x}}$$

függvénynek határértéke $+\infty$-ben. Itt nem teljesülnek a l'Hospital szabály feltételei.

1.46. **Definíció.** Legyen $D(f) = I$ intervallum. Az f függvény *konvex* (*konkáv*), ha bármely x_1, $x_2 \in I$ pontpárra és bármely $q \in (0,1)$ számra

$$f((1-q)x_1 + qx_2) \le (1-q)f(x_1) + qf(x_2).$$
$$(\ge)$$

A függvény szigorúan konvex (konkáv), ha a fenti egyenlőtlenségben $<$ ($>$) szerepel.

1.47. **Állítás.** *Legyen $D(f) = I$ intervallum, f folytonos, az I belsejében differenciálható. Ha f' monoton nő (fogy), akkor f konvex (konkáv).*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f' monoton nő, $x_1 < x_2$, x_1, $x_2 \in I$, $q \in (0,1)$ és legyen $x := (1-q)x_1 + qx_2$.

Azt kell megmutatnunk, hogy

$$(1-q)f(x) + qf(x) = f(x) \le (1-q)f(x_1) + qf(x_2), \tag{7}$$

azaz, ekvivalens módon,

$$(1-q)[f(x) - f(x_1)] \le q[f(x_2) - f(x)].$$

A Lagrange középértéktétel szerint található olyan $\xi_1 \in (x_1, x)$ és $\xi_2 \in (x, x_2)$, hogy

$$f(x) - f(x_1) = f'(\xi_1)(x - x_1),$$
$$f(x_2) - f(x) = f'(\xi_2)(x_2 - x).$$

Tehát a bizonyítandó (7) egyenlőtlenséget átalakítottuk az

$$(1-q)(x - x_1)f'(\xi_1) \le q(x_2 - x)f'(\xi_2) \tag{8}$$

egyenlőtlenséggé. Vegyük észre, hogy

$$(1-q)x + qx = x = (1-q)x_1 + qx_2,$$

így

$$(1-q)(x - x_1) = q(x_2 - x) > 0.$$

Felhasználva ezt és ennek megfelelően átalakítva (8) egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy a bizonyítandó (7) egyenlőtlenség ekvivalens a

$$f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$$

egyenlőtlenséggel, ami viszont teljesül, hiszen $\xi_1 < \xi_2$ és f' monoton nő. □

A derivált előjele és a monotonitás viszonya alapján az előző állításból nyilvánvaló a következő.

1.48. **Következmény.** *Legyen $D(f) = I$ intervallum, f folytonos és I belsejében kétszer differenciálható. Ha bármely $x \in \operatorname{int} I$ pontban*

$$f''(x) \ge 0, \qquad \textit{akkor } f \textit{ konvex},$$
$$f''(x) \le 0, \qquad \textit{akkor } f \textit{ konkáv}.$$

1.49. **Definíció.** Legyen $D(f) = I$ intervallum, f folytonos és $\operatorname{int} I$-ben kétszer differenciálható. Az $x_0 \in \operatorname{int} I$ pont *inflexiós pont*, ha f'' az x_0 pontban előjelet vált, azaz $f''(x_0) = 0$ és az x_0 pontban f'' lokálisan monoton.

1.50. **Definíció.** Legyen $+\infty \in D(f)'$. Azt mondjuk, hogy az $y = mx+b$ egyenletű egyenes az f függvény *aszimptotá*ja, ha

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (mx+b)) = 0.$$

Hasonlóan értelmezhető a $-\infty$-ben vett aszimptota.

1.51. *Megjegyzés.* Az aszimptota létezése szemléletesen azt jelenti, hogy a függvénygrafikon hozzásimul az adott egyeneshez. Az aszimptota létezéséhez szükséges (de nem elégséges!) feltétel, hogy létezzen

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m.$$

1.52. *Példa.* (1) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ függvénynek $y = x$ egyenes aszimptotája.
(2) $f(x) = x + \sin x$ függvénynek nincs aszimptotája, viszont $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{\sin x}{x} \to 1$.

1.53. *Megjegyzés.* A függvényvizsgálat szempontjai:
(1) Értelmezési tartomány ($D(f)$).
(2) Tengelymetszetek.
(3) Folytonosság, (féloldali) határértékek a szakadási helyeken és az értelmezési tartomány határpontjaiban, esetleges aszimptoták.
(4) Monotonitás, lokális szélsőértékek.
(5) Konvexitás, inflexiós pont.
(6) Táblázat, a függvénygrafikon vázlatos megrajzolása.
(7) Értékkészlet.

1.54. **Tétel** (Darboux tétele)**.** *Legyen $D(f) = I$ intervallum, $a, b \in \operatorname{int} I$, $a < b$. Ha $y \in \mathbb{R}$ olyan, hogy vagy $f'(a) < y < f'(b)$, vagy $f'(b) < y < f'(a)$, akkor található $u \in (a, b)$, hogy $f'(u) = y$.*

Bizonyítás. Ha f' folytonos, akkor az állítás nyilvánvaló következménye a Bolzano tételnek.
Legyen $g : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = f(x) - y \cdot x \qquad \text{ha } f'(a) < f'(b),$$
$$g(x) = y \cdot x - f(x) \qquad \text{ha } f'(a) < f'(b).$$

Ekkor g differenciálható és $g'(a) < 0$, $g'(b) > 0$. Azt kell megmutatnunk, hogy található $u \in (a, b)$, hogy $g'(u) = 0$.

Mivel g folytonos az $[a, b]$ interrvallumon, így létezik $u \in [a, b]$ minimumhely. Viszont 1.21 következmény miatt sem $a = u$, sem $b = u$ nem lehet, g az a pontban lokálisan monoton fogy, g a b pontban lokálisan monoton nő. Így $u \in (a, b)$, amiből a szélsőérték elégséges feltételére vonatkozó 1.17 Tétel szerint $g'(u) = 0$, azaz $f'(u) = y$.

□

2. Taylor polinomok

A továbbiakban annak a gyakorlatban igen fontos problémának szenteljük figyelmünket, hogy hogyan lehet differenciálható, szép függvények függvényértékeit közelítőleg kiszámolni polinomok segítségével. A konkrét szituáció, amire gondolunk, a következő: próbáljuk meg meghatározni $\sin 1$ vagy $\ln 2$ értékét tetszőleges pontossággal. Mivel számítógépek, számológépek csak az alapműveletekkel tudnak számolni, ezért próbálunk polinomokkal közelíteni. Fontos még kiemelni, hogy az előző két feladatnak megvan az a közös jellemzője, hogy mind a sin, mind az ln függvényről egy másik, nevezetesen a 0 valamint az 1 pontokban ismerjük a függvényértékeket és a deriváltak értékeit.

Fogalmazzuk meg általánosabban a feladatot. Legyen $D(f) = I$ intervallum, $a \in \operatorname{int} I$ belső pont és f legyen (legalább) n-szer differenciálható az a pontban. Keressük azt a $p_n(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$ képlettel megadott n-edfokú polinomot, amely a „lehető legjobban" közelíti az f függvényt.

Mielőtt tovább mennénk, tisztáznunk kellene, mit is értsünk a „lehető legjobb" közelítés fogalmán. Bár a közelítő polinomot később az a ponttól különböző helyeken szeretnénk használni, hogy a függvényértékeket közelítsük, mivel az f függvényt az a helyen ismerjük, kézenfekvőnek látszik, hogy olyan polinomot keressünk, ami az a helyen közelít a „lehető legjobban”, és reménykedjünk, hogy ez a közelítő polinom közeli x értékekre is jól működik.

Az a pontban vett lehető legjobb közelítésnél kétféle dologra is gondolhatunk.

- Az egyik, szemléletesen kifejezve, ha nagyítóval ránéznénk a két függvény grafikonjára, akkor azok nagyon egybesimulnak, azaz alig lehet őket egymástól megkülönböztetni. Ezt analitikusan úgy lehet megfogalmazni, hogy a deriváltak ameddig csak lehetséges megegyeznek, azaz
$$f(a) = p_n(a),\ f'(a) = p_n'(a),\ \ldots,\ f^{(n)}(a) = p_n^{(n)}(a).$$
Nyilván egy n-ed fokú polinom $n+1$-edik deriváltjára nem írhatunk elő feltételt (miért?).
- A másik, amire gondolhatunk, hogy az $f(x) - p_n(x)$ kifejezés a lehető leggyorsabban tartson nullához, ha x tart a-hoz. Pontosítsuk, hogy ez alatt mit értünk, és szorítkozzunk egy pillanatra elsőfokú polinomokra. A jó közelítéshez nyilván szükséges, hogy $f(a) = p_1(a)$. Folytonosság miatt viszont ekkor már
$$\lim_{x\to a}(f(x) - p_1(x)) = 0.$$
Nyilván a legjobban közelítő egyenestől ennél sokkal többet várunk. Valóban, korábban már láttuk[7], hogy ha $p_1(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ az érintő, azaz a legjobban közelítő egyenes, akkor nemcsak a fenti határérték 0, hanem
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - p_1(x)}{x-a} = 0.$$
Tehát $(f(x) - p_1(x))$ az $(x-a)$-nál gyorsabban tart 0-hoz.
Ennek analógiájára várhatjuk, hogy $p_n(x)$ akkor a lehető legjobban közelítő polinom, ha
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - p_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

A következő állítás azt mutatja, hogy a legjobb közelítés fogalmánál mindkét fogalom ugyanarra az eredményre vezet.

2.1. **Tétel.** *Legyen $D(f) = I$ intervallum, f (legalább) n-szer differenciálható az I intervallum belsejében, $a \in \operatorname{int} I$ belső pont és tekintsük a*
$$t_{a,n}(x) := t_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
polinomot. Ekkor

(a)
$$t_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$
(b)
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - t_n(x)}{(x-a)^n} = 0,$$
(c) és ha $p_n(x)$ olyan legfeljebb n-ed fokú polinom, melyre (b) teljesül, akkor $t_n(x) \equiv p_n(x)$.

Bizonyítás. Az (a) állítás nyilvánvaló, hiszen
$$t_n^{(k)}(x) = 0 + f^{(k)}(a) + f^{(k+1)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^n(a)}{(n-k)!}(x-a)^{n-k}.$$

A (b) állítás bizonyításához vezessünk be új jelöléseket az egyszerűsítés kedvéért. Legyen $g(x) := f(x) - t_n(x)$. Az (a) állításból következik, hogy
$$g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(n)}(a) = 0.$$
Legyen továbbá $h(x) = (x-a)^n$, erre az (a) pont alatt elvégzett számolással adódik, hogy
$$h^{(k)}(x) = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(x-a)^{n-k} \quad (0 \le k \le n),$$

[7] lsd. 1.15 Tétel.

így speciálisan $h^{(n-1)}(x) = n!(x-a)$ és

$$h(a) = h'(a) = \ldots = h^{(n-1)}(a) = 0.$$

A Cauchy középértéktétel szerint bármely $x \in I$ ponthoz található olyan $\alpha_1 \in (a, x)$ vagy $\alpha_1 \in (x, a)$, aszerint, hogy $a < x$ vagy $x < a$, hogy

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g(x) - g(a)}{h(x) - h(a)} = \frac{g'(\alpha_1)}{h'(\alpha_1)}.$$

Hasonlóan, teljes indukcióval található $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, melyekre $\alpha_{k+1} \in (a, \alpha_k)$ vagy $\alpha_{k+1} \in (\alpha_k, a)$ aszerint, hogy $a < x$ vagy $x < a$, és

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g'(\alpha_1)}{h'(\alpha_1)} = \frac{g'(\alpha_1) - g'(a)}{h'(\alpha_1) - h'(a)} = \frac{g''(\alpha_2)}{h''(\alpha_2)} = \ldots = \frac{g^{(n-1)}(\alpha_{n-1}) - g^{(n-1)}(a)}{h^{(n-1)}(\alpha_{n-1}) - h^{(n-1)}(a)}.$$

Mivel a feltétel szerint $g^{(n-1)}$ is differenciálható, így a korábban már tanult jellemzés szerint[8] található $\varepsilon > 0$ és $r : (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \to \mathbb{R}$, hogy $y \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ esetén

$$g^{(n-1)}(y) - g^{(n-1)}(a) = g^{(n)}(a)(y-a) + r(y),$$

ahol

$$\frac{r(y)}{y-a} \to 0, \qquad \text{ha } y \to a,$$

így bármely $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ esetén

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{1}{n!}\left(g^{(n)}(a) + \frac{r(\alpha_{n-1})}{\alpha_{n-1} - a}\right) \longrightarrow \frac{g^{(n)}(a)}{n!} = 0, \text{ ha } x \to a,$$

hiszen ilyenkor $\alpha_{n-1} = \alpha_{n-1}(x) \to a$ is következik.

A (c) állítás bizonyításához tegyük fel, hogy $p_n(x)$ egy olyan legfeljebb n-ed fokú polinom, melyre

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

Ekkor

$$\frac{f(x) - p_n(x)}{(x-a)^n} = \frac{f(x) - t_n(x)}{(x-a)^n} + \frac{t_n(x) - p_n(x)}{(x-a)^n}$$

miatt

$$\lim_{x \to a} \frac{t_n(x) - p_n(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

ami csak úgy lehetséges, hogy a számláló azonosan nulla, azaz $t_n(x) \equiv p_n(x)$. □

2.2. *Megjegyzés.* Ha valakinek az előző tétel (b) állításának a bizonyítása ismerősnek tűnt, ne lepődjön meg. A l'Hospital szabály bizonyításakor találkoztunk hasonlóval.

Érdemes meggondolni, hogy a fenti (b) állítást a l'Hosptial szabály n-szer egymás után történő alkalmazásával is bizonyítani lehet. Itt most a gondolatmenet átismétlése miatt választottuk ezt az egyébként nem sokkal hosszabb bizonyítást. A vizsgán persze bármilyen helyes gondolatmenet szerepelhet.

2.3. **Definíció.** Az f (legalább) n-szer differenciálható függvényhez tartozó

$$t_{a,n}(x) := t_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

polinomot az f függvény n-edik *Taylor polinom*jának nevezzük.

2.4. *Megjegyzés.* Brook Taylor [1685–1731] angol matematikus.

Az előzőekben tisztáztuk, hogy egy "elegendően sima" függvényt adott pontban a Taylor polinomja közelíti a legjobban. Most térjünk vissza az eredeti kérdéshez, nevezetesen ahhoz, hogyan lehet egy függvényt egy, az a ponttól különböző pontban közelíteni. Ehhez lesz szükségünk a következőkre.

[8]lsd. 1.15 Tétel.

2.5. **Tétel** (Taylor formula Lagrange féle maradéktaggal)**.** *Legyen $D(f) = I$ intervallum, f legalább $(n+1)$-szer differenciálható az I intervallum belsejében, $a \in \operatorname{int} I$. Ekkor minden $x \in \operatorname{int} I$ ponthoz található olyan $\alpha = \alpha(n,x)$ szám, melyre*

$$f(x) = t_{n,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Bizonyítás. Az előző tétel bizonyításához igen hasonló gondolatmenetet alkalmazunk. Legyen

$$h(x) = (x-a)^{n+1}$$

és

$$t_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Nyilván $h(a) = h'(a) = \ldots = h^n(a) = 0$. Mivel ismét

$$f(a) - t_n(a) = f'(a) - t_n'(a) = \ldots = f^{(n)}(a) - t_n^{(n)}(a) = 0,$$

ezért rögzített $x \in I$ esetén a Cauchy középértéktétel ismételt alkalmazásával nyerjük, hogy található olyan $\alpha_1 \in (a,x)$ vagy $\alpha_1 \in (x,a)$, aszerint, hogy $a < x$ vagy $x < a$, valamint $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, melyekre $\alpha_{k+1} \in (a, \alpha_k)$ vagy $\alpha_{k+1} \in (\alpha_k, a)$ aszerint, hogy $a < x$ vagy $x < a$, és

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-t_n(x)}{h(x)} &= \frac{f'(\alpha_1)-t_n'(\alpha_1)}{h'(\alpha_1)} = \ldots = \frac{f^{(n)}(\alpha_n)-t_n^{(n)}(\alpha_n)}{h^{(n)}(\alpha_n)} \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\frac{\left(f^{(n)}(\alpha_n)-t_n^{(n)}(\alpha_n)\right)-\left(f^{(n)}(a)-t_n^{(n)}(a)\right)}{\alpha_n - a}\end{aligned}$$

Alkalmazva a Lagrange középértéktételt az $F(t) = f^{(n)}(t) - t_n^{(n)}(t)$ függvényre kapjuk, hogy található $\alpha \in (\alpha_n, x) \subset (a,x)$ vagy $\alpha \in (x, \alpha_n) \subset (x,a)$, aszerint, hogy $a < x$ vagy $x < a$, melyre

$$\frac{f(x)-t_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}\left(f^{(n+1)}(\alpha) - t_n^{(n+1)}(\alpha)\right) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!},$$

hiszen $t_n^{(n+1)}(y) = 0$. $\square$

2.6. *Megjegyzés.* Abban a gyakori esetben, amikor az I intervallum belsejében tartalmazza a 0 számot és $a = 0$, a fenti összefüggést szokás *Maclaurin formulá*nak nevezni.

2.7. *Megjegyzés.* Colin Maclaurin [1698–1746] angol matematikus, az edinburghi egyetem professzora. A 0 középpontú Taylor sor mellett ő adta meg először az egyváltozós függvények szélsőértékének vizsgálatára vonatkozó szokásos eljárást. Az analízis mellett ábrázoló és algebrai geometriával is foglalkozott.

2.8. **Következmény.** *Legyen $D(f) = I$ intervallum és legyen f akárhányszor differenciálható az I intervallum belsejében, valamint legyen $a, x \in \operatorname{int} I$. Ha található $K \geq 0$, hogy*

$$\left|f^{(n)}(y)\right| \leq K$$

minden $n \in \mathbb{N}$ és minden $y \in (a,x)$ vagy $y \in (x,a)$ számra attól függően, hogy $a < x$ vagy $x < a$, akkor

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

A megadott végtelen sort szokás az adott f függvény *Taylor sor*ának nevezni. A következőkben megadjuk a legfontosabb elemi függvények Taylor sorát. A bizonyítások a gyakorlatokon szerepelnek és megtalálhatók Urbán J.: Határértékszámítás című könyvében is.

2.9. **Tétel.** *A következő sorfejtések érvényesek.*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad x \in (-1,1],$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad x \in J,\ (-1,1) \subset J \subset [-1,1],\ \textit{ha}\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0,\ \textit{és} \quad J = \mathbb{R}\ \textit{ha}\ \alpha \in \mathbb{N}_0$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad x \in [-1,1],$$

Index

$t_{a,n}(x)$, 14

aszimptota, 13

derivált, 1
deriváltfüggvény, 2
differenciálhányados, 1

függvény
  differenciálható, 1
  konkáv, 12
  konvex, 12

inflexió, 12

l'Hospital, Guillaume François, 9
Lagrange féle maradéktag, 16
Lagrange, Joseph Louis, 6
lokális monotonitás, 7

Maclaurin, Colin, 16
maximumhely
  lokális, 5
minimumhely
  lokális, 5

Rolle, Michel, 6

Taylor formula, 16
Taylor polinom, 15
Taylor sor, 16
Taylor, Brook, 15
Tétel
  Cauchy középérték, 9
  inverz differenciálhatósága, 4
  kompozíció differenciálhatósága, 3
  l'Hospital, 9
  Lagrange középérték, 6
  monotonitás feltétele, 6
  Rolle, 5
  szélsőérték elégséges feltétele, 7
  szélsőérték feltétele második deriválttal, 8
  szélsőérték szükséges feltétele, 5