ÖSSZEFÜGGÉSEK A KOMBINATORIKUS OPTIMALIZÁLÁSBAN
II. SZUBMODULÁRIS OPTIMALIZÁLÁS ÉS POLIÉDERES KOMBINATORIKA

FRANK ANDRÁS[1]

Tartalom

Bevezetés

A dolgozat első részében olyan konkrét gráfelméleti optimalizációs feladatokat tekintettünk át, melyekre létezik jó karakterizáció vagy min-max tétel (más szóval $\mathbf{NP} \cap \text{co-}\mathbf{NP}$-ben vannak) továbbá létezik polinomiális futásidejű megoldó algoritmus is. A második részben magasabb szintre lépve bemutatjuk azokat az eszközöket, melyek megvilágítják, hogy mi is áll ezen eredmények hátterében. Miért működik a mohó algoritmus fákra és miért nem működik párosításokra? Mi a közös magja Egerváry maximális súlyú párosításokra vonatkozó 1.3.4. tételének, illetve Fulkerson legolcsóbb fenyőkről szóló, meglehetősen távolállónak tűnő 1.2.5. tételének? Mi kapcsolja össze Nash–Williams 3.4.2. irányítási tételét Lucchesi és Younger 2.2.3. tételével, amely egyirányú vágások minimális fedéséről szól? Mi teszi lehetővé a lánctulajdonság időnkénti meglétét?

[1] Készült az OTKA K60802 sz. pályázata valamint az Ericsson Hungary támogatásával.

Két fontos megközelítési módot mutatunk be. Az egyik a poliéderes kombinatorika, amely a lineáris programozás eszközeit használja diszkrét optimalizálási környezetben, a másik a szub- és szupermoduláris függvények széleskörű alkalmazhatóságára épül.

A poliéderes kombinatorika alapgondolata a következő. Tegyük fel, hogy bizonyos kombinatorikus objektumok (fák, utak, párosítások, Hamilton-körök, stb.) közül akarjuk a legjobbat kiválasztani. Ennek érdekében tekintjük ezen objektumok incidencia vektorainak konvex burkát. A lineáris programozás egyik alaptétele miatt $\mathbf{R}^n$ véges sok pontjának konvex burka mindig megadható véges sok féltér metszeteként, vagyis egy lineáris egyenlőtlenség rendszer megoldás halmazaként. Így ha a szóbanforgó egyenlőtlenségeket sikerül explicit alakban felírnunk, akkor a lineáris programozás dualitás tétele min-max tételt szolgáltat a kérdéses objektum maximális (vagy minimális) súlyára. Az ebből kiolvasható optimalitási feltételek pedig megállási szabályt jelentenek egy direkt algoritmus részére.

Látni fogjuk például, hogy a $G = (S, T; E)$ páros gráf teljes párosításainak konvex burka éppen az $R := \{x \in \mathbf{R}^E : Qx = 1,\ x \geq 0\}$ poliéder, ahol Q a páros gráf pont-él incidencia mátrixa. Ennek alapján Egerváryнak az I. részben látott 1.3.4. tétele teljes párosítások maximális súlyáról rögvest kiadódik a lineáris programozás dualitás tételből. Annak igazolása pedig, hogy a konvex burok épp az R poliéder azon múlik, hogy a Q mátrix teljesen unimoduláris (TU). Ilyenkor ugyanis egész korlátozó vektor esetén mindig létezik egészértékű optimum. Ez a megközelítési mód minden olyan esetben eredményesen működik, amikor a lineáris program feltételi mátrixa teljesen unimoduláris. A dualitás tételt és/vagy a Farkas lemmát TU mátrixokra alkalmazva valóságos tétel-gyárat nyerhetünk. Kiderül, hogy az I. rész 1. fejezetének megannyi tétele és azok kiterjesztései megkaphatók ily módon (például az 1.5.1. max-folyam min-vágás tétel, Gallai 1.1.2. tétele, Hoffman 1.5.3. tétele vagy a minimális költségű folyamokra vonatkozó 1.5.5. tétel).

A TU mátrixok ilyen irányú használhatósága már ismert volt a múlt század ötvenes éveiben. J. Edmonds átütő felismerése volt, hogy a fenti megközelítés általánosabb esetekben is eredményes lehet. Ennek révén sikerült például algoritmikusan is megoldania a súlyozott párosítási problémát nem páros gráfra (ami nem témája a jelen dolgozatnak), vagy a súlyozott matroid metszet problémát, amit viszont ismertetni fogunk.

A matroidokkal el is értünk a szubmoduláris függvényekhez, mivel egy matroid rangfüggvénye ilyen. Látni fogjuk, hogy az I. részben bemutatott eredmények jelentős részének hátterében egy általánosabb, szub- (vagy szuper)moduláris optimalizálási probléma áll. Ez a felismerés teszi lehetővé, hogy algoritmikusan kezelni lehessen olyan konkrét gráf feladatokat, mint például a vegyes gráf k-élösszefüggővé irányítása, vagy egy digráf legolcsóbb gyökeresen k-összefüggő részgráfjának megtalálása, vagy egy (di)gráf legolcsóbb k-élösszefüggővé növelése pontindukált költségfüggvény esetén. A szubmoduláris függvények rendkívül hatékony eszközt jelentenek (amúgy) nehéz tételek rövid, egyszerű bizonyítására.

Ismert, hogy a folytonos optimalizálásban mennyire központi szerepet játszanak a konvex függvények. Több jel is arra mutat, hogy a szubmoduláris függvények hasonló szerepet töltenek be a diszkrét optimalizálásban. Valójában a két függvényosztály között szoros formai és tartalmi analógia van. A tárgyalást ennek bemutatásával kezdjük.

7. Matroidok és szubmoduláris függvények

7.1. Konvex és szubmoduláris függvények

Legyen S véges alaphalmaz. Az alábbiakban az S-en értelmezett halmazfüggvényekről automatikusan feltesszük, hogy egészértékűek és az üres halmazon az értékük 0. A $b: 2^S \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ halmazfüggvényről azt mondjuk, hogy **teljesen szubmoduláris**, vagy röviden szubmoduláris, ha

$$b(X) + b(Y) \geq b(X \cap Y) + b(X \cup Y) \tag{7.1}$$

fennáll minden $X, Y \subseteq S$ halmazra. Belátható, hogy ha b teljesíti a szubmodularitási egyenlőtlenséget minden olyan X-re és Y-ra, amelyre $|X - Y| = |Y - X| = 1$, akkor b teljesen szubmoduláris. Egy $p: 2^S \to \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$ halmazfüggvény **teljesen szupermoduláris,** ha $-p$ teljesen szubmoduláris. Egy h halmazfüggvény **monoton növő,** ha $X \subseteq Y \subseteq S$ esetén, amennyiben $h(X)$ véges, úgy $h(X) \leq h(Y)$. Egy véges-értékű, monoton növő, teljesen szubmoduláris függvényt **polimatroid függvény**nek hívunk. A véges-értékű m halmaz függvény **moduláris,** ha $m(X) + m(Y) = m(X \cap Y) + m(X \cup Y)$ fennáll minden $X, Y \subseteq S$-re. Ilyen függvényt, (ha $m(\emptyset) = 0$) az egyelemű halmazokon felvett értékei meghatároznak: $m(X) = \sum \big[m(s) : s \in X\big]$. Belátható, hogy egy b véges-értékű szubmoduláris függvény akkor és csak akkor moduláris, ha $b(v) + b(S - v) = b(S)$ minden $v \in S$ elemre.

Például egy $(S, T; E)$ páros gráfban az S részhalmazain definiált $b(X) := \big|\Gamma(X)\big|$ függvény polimatroid függvény, ahol $\Gamma(X)$ jelöli az $X \subseteq S$ halmaz T-beli szomszédainak halmazát. Egy irányítatlan gráf éleinek egy részhalmazához hozzárendelve az általa fedett pontok elemszámát polimatroid függvényt kapunk. Egy digráfban a ϱ befok függvény szubmoduláris.

Szubmodularitás és konvexitás között több ponton is érdekes analógia mutatkozik. Közismert, hogy egy differenciálható függvény pontosan akkor konvex, ha a deriváltja monoton növő. Ennek egyfajta diszkrét analogonja a következő könnyű eredmény.

7.1.1. tétel. *Egy b halmazfüggvény akkor és csak akkor szubmoduláris, ha az S alaphalmaz minden s elemére a $b(X + s) - b(X)$ különbség függvény az $S - s$ részhalmazain monoton csökkenő, azaz $X \subset Y \subseteq S - s$ esetén*

$$b(X + s) - b(X) \geq b(Y + s) - b(Y). \tag{7.2}$$

Ennél tartalmasabb kapcsolatot mutat az alábbi. Tetszőleges $b: 2^S \to \mathbf{R}$ halmazfüggvény, amelyre $b(\emptyset) = 0$, kézenfekvő módon kiterjeszthető n-dimenziós vektorokra, ahol $n = |S|$, a következőképpen. Adott $c \in \mathbf{R}^n$ vektorra indexeljük S elemeit úgy, hogy $c(s_1) \geq \cdots \geq c(s_n)$ és legyen $S_i := \{s_1, \ldots, s_i\}$. Definiáljuk $\hat{b}(c)$-t a

$$\hat{b}(c) := c(s_n)b(S_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \big[c(s_i) - c(s_{i+1})\big] b(S_i) \tag{7.3}$$

képlettel. Látszik, hogy tetszőleges $Z \subseteq S$ halmazra $b(Z) = \hat{b}(\chi_Z)$, ahol χ_Z jelöli a Z halmaz karakterisztikus függvényét, (amelynek értéke tehát a Z elemein 1, míg az $S - Z$ elemein 0). Azt mondjuk, hogy $\hat{b}$ a b halmazfüggvény **lineáris kiterjesztése**. A fogalom és a következő megfigyelés Lovász [52]-es munkájában tűnik fel.

7.1.2. tétel (Lovász, 1983)**.** *A b halmazfüggvény akkor és csak akkor szubmoduláris, ha $\hat{b}$ konvex.*

7.1.3. tétel. *Ha b szubmoduláris, akkor $\hat{b}$* ***szubadditív,*** *azaz tetszőleges $c_1, c_2, \ldots, c_l \in \mathbf{R}^S$ vektorokra*

$$\sum_i \hat{b}(c_i) \geq \hat{b}(\sum_i c_i). \tag{7.4}$$

Speciálisan, tetszőleges $X_1, X_2, \ldots, X_m \subseteq S$ halmazokra

$$\sum_i^m b(X_i) \geq \hat{b}(\sum_i^m \chi_{X_i}). \tag{7.5}$$

A tétel érdekessége, hogy Lovász az 1968-as Schweitzer verseny [48] egyik valószínűségszámítási feladatának megoldásában vette észre és igazolta a (7.5) egyenlőtlenség egy ekvivalens alakját. Bizonyításában tűnik fel a kikeresztezési eljárás, amelynek másik forrása D. Younger [58] dolgozata.

Az analógia persze nem tökéletes. Két konvex függvény minimuma konvex, de két szubmodulárisé általában nem szubmoduláris. Bizonyos esetekben azonban mégis csak az.

7.1.4. tétel (Lovász)**.** *Legyenek b_1 és b_2 szubmoduláris függvények, melyekre $b_1 - b_2$ monoton növő. Ekkor a*

$$b(X) := \min\big\{b_1(X), b_2(X)\big\} \tag{7.6}$$

formulával definiált b függvény szubmoduláris.

Speciális esetként kapjuk, hogy egy monoton növő szubmoduláris és egy monoton csökkenő szubmoduláris függvény minimuma is szubmoduláris.

Végül egy olyan szituációt említünk, ahol az analógia ismét csak nagyon szoros. Közismert, hogy egy g konvex és egy f konkáv függvény elválasztható lineáris függvénnyel, ha $f \leq g$. Ennek diszkrét megfelelője a következő eredmény [25].

7.1.5. tétel (Diszkrét szeparációs tétel, 1984)**.** *Legyen S alaphalmaz, $p : 2^S \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ szupermoduláris függvény és $b : 2^S \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ szubmoduláris függvény, melyekre $p(\emptyset) = b(\emptyset) = 0$. Akkor és csak akkor van olyan m moduláris függvény, amelyre $p \leq m \leq b$, ha*

$$p \leq b, \tag{7.7}$$

azaz ha $p(X) \leq b(X)$ fennáll minden $X \subseteq S$ halmazra. Ha p és b egészértékű és $p \leq b$, akkor az elválasztó m is választható egészértékűnek.

A tétel első része Lovász fenti 7.1.2. tétele nyomán közvetlenül adódik a konvex/konkáv szeparációs tételből, fő tartalma azonban a második rész, amely egészértékű elválasztást biztosít és így kombinatorikai következtetéseket tesz lehetővé.

Nagyon speciális példaként levezetjük a Kőnig–Hall féle 1.3.2. tételnek nemtriviális irányát. Legyen $(A, B; E)$ páros gráf, amelyre $|A| = |B|$. Az E élhalmaz F részhalmazain jelölje $b(F)$ az F által (legalább egyszer) fedett A-beli pontok számát, míg $p(F)$ az F által teljesen fedett B-beli pontokét. Ekkor b szubmoduláris, míg p szupermoduláris. A $p \leq b$ egyenlőtlenség épp a Hall-féle feltétellel ekvivalens (ami szerint A minden j elemű részhalmazának legalább j szomszédja van B-ben). Ezért ha a Hall feltétel fennáll, akkor létezik egy $m : E \to \mathbf{Z}$ egészértékű szeparáló függvény, amely szükségképpen $0-1$ értékű, hiszen $0 \leq p(e) \leq b(e) \leq 1$ minden e élre. Az $M = \big\{e \in E : m(e) = 1\big\}$ halmaz olyan, hogy minden B-beli v pontot fed, hiszen a v-vel szomszédos élek F halmazára $1 = p(F) \leq m(F) = d_M(v)$. Hasonlóképp, minden A-beli u pontra az u-val szomszédos élek H halmazára $1 = b(H) \geq m(H) = d_M(u)$. Ebből és $|A| = |B|$-ből következik, hogy M teljes párosítás.

Természetesen a Hall-tételre megannyi sokkal egyszerűbb és direkt bizonyítás ismeretes, e levezetés csupán azt kívánta érzékeltetni, hogy a Hall-tétel a diszkrét szeparációs tétel speciális eseteként interpretálható.

K. Murota a diszkrét szeparációs tételt nagymértékben továbbfejlesztve teljes elméletet épített ki diszkrét konvex függvényekről [54].

7.2. Matroidok

A fenti szép analógia konvex és szubmoduláris függvények között még egy helyen megmutatkozik. Ismeretes, hogy konvex függvény lokális minimum helye egyúttal globális is. Ennek egyfajta diszkrét ellenpárjának tekinthető az I. rész 1.2.3. tétele, ami szerint egy élsúlyozott gráfban egy F feszítő fa akkor és csak akkor minimális súlyú, ha lokális cserével nem lehet javítani, azaz ha minden e nem-fa él súlya legalább akkora, mint az $F + e$ alapköréből vett bármely él súlya. Ez viszont lényegében ekvivalens a Kruskal féle mohó algoritmus helyességével. Kiderül, hogy vannak más szituációk is, amikor egy Kruskal típusú mohó algoritmus helyes eredményre vezet. Igazolható például, hogy ha egy mátrix minden oszlopának adott a súlya, akkor maximális össz-súlyú lineárisan független oszlopokat a mohó algoritmus segítségével kereshetünk meg (támaszkodva a Gauss eliminációra).

A lényeg az, hogy mind egy gráf részerdői, mind egy mátrix oszlopainak lineárisan független részhalmazai matroidot alkotnak. Legyen S véges halmaz és $\mathcal{F}$ az S részhalmazainak egy rendszere, melynek tagjait **független**nek hívjuk. Az $(S, \mathcal{F})$ párt **matroid**nak nevezzük, ha *(a)* az üres halmaz független, *(b)* független halmaz részhalmaza független, és *(c)* minden $Z \subseteq S$ részhalmazra a Z-be eső, Z-ben már tovább nem bővíthető független halmazok elemszáma ugyanaz a csupán Z-től függő $r(Z)$ szám (amely számot a Z részhalmaz **rang**jának neveznek). A harmadik tulajdonság azzal ekvivalens, hogy a mohó algoritmus minden $0-1$-es súlyfüggvényre maximális súlyú független halmazt szolgáltat. A maximális elemszámú független halmazok a matroid **bázisa**i, míg egy halmaz **generátor**, ha tartalmaz bázist. Igazolható, hogy a generátorok komplementereiből álló halmazrendszer kielégíti a függetlenségi axiómákat. Az így nyert M^* matroidot az M duálisának hívják. A név onnan van, hogy $(M^*)^* = M$, azaz duális duálisa az eredeti matroid. Az M függetlenjeinek komplementerei éppen az M^* generátorai.

A gráf körmatroidja (amelyben a független halmazok a részerdők) és a mátrixmatroid (ahol a függetlenség a lineáris függetlenség) mellett egyszerű, de fontos osztályt alkotnak a partíciós matroidok. Ebben egy halmaz független, ha az alaphalmaz egy adott partíciójának minden osztályába legfeljebb egy előre adott számú elemmel metsz bele.

Egy matroid rangfüggvénye a definícióból adódóan nemnegatív, egészértékű, szubkardinális (azaz $r(X) \leq |X|$ minden $X \subseteq S$ részhalmazra és monoton növő ($r(X) \leq r(Y)$, ha $X \subseteq Y$). Könnyen belátható továbbá, hogy a rangfüggvény szubmoduláris. Megfordítva, érvényes, hogy egy ilyen tulajdonságokkal bíró halmazfüggvény egy matroid rangfüggvénye. (Röviden a matroid rangfüggvénye egy szubkardinális polimatroid függvény.)

Rokon fogalom a matroid t **ko-rang függvény**e: $t(X)$ az X és egy bázis metszetének minimális elemszáma. Fennáll az egyszerű $t(X) = r(S) - r(S - X)$ összefüggés, ami miatt t szupermoduláris.

7.2.1. Mohó algoritmus

Tegyük fel, hogy az M matroid S alaphalmazán adott egy $c: S \to \mathbf{R}$ súlyfüggvény. A maximális súlyú bázis előállításához a mohó algoritmus egymás után választ elemeket a következő szabály szerint. Az első lépésben kiválasztja az egyik maximális súlyú elemet, amely nem hurok. Az általános lépésben az addig kiválasztott F független halmazról eldönti, hogy bázis-e. Ha igen, az eljárás a kapott bázis kiadásával véget ér. Ha nem, akkor megnöveli F-t egy olyan maximális súlyú $x \in S - F$ elemmel, amelyre $F + x$ független. A fákra vonatkozó mohó algoritmust általánosítja a következő.

7.2.1. tétel (Edmonds, 1971)**.** *A fenti mohó algoritmus maximális súlyú bázist szolgáltat.*

A mohó algoritmus segítségével explicit kifejezhető a c súlyozásra vonatkozó maximális súlyú bázis súlya.

7.2.2. tétel (Edmonds, 1971). *Az $M = (S, r)$ matroidban tetszőleges $c : S \to \mathbf{R}$ súlyozásra a maximális bázis súlya $\hat{r}(c)$, ahol $\hat{r}$ az r rangfüggvénynek a* (7.3) *formulával definiált lineáris kiterjesztése.*

Matroidok segítségével azonban sokkal bonyolultabb optimalizálási kérdések is megválaszolhatók. Néhányat említünk. Mikor lehet és miképp egy gráfban k élidegen feszítő fát találni? Ha létezik k élidegen feszítő fa, hogyan lehet úgy meghatározni őket, hogy az összköltségük minimális legyen? Hogyan lehet egy irányított gráfnak olyan minimális költségű részgráfját meghatározni, amelyben egy megadott gyökérpontból minden más csúcsba vezet k élidegen (vagy pontidegen) út?

7.2.2. Matroid metszet

Nemcsak Kruskal mohó algoritmusa terjeszthető ki matroidokra, hanem a párosításokra vonatkozó Kőnig–Hall-tétel is. Legyen $G = (S, T; E)$ egyszerű páros gráf, M az S-n lévő matroid. G egy párosítását akkor nevezzük M**-független**nek, ha az általa fedett S-beli pontok halmaza független M-ben. $X \subseteq T$ halmazra jelölje $\Gamma(X)$ az X szomszédainak halmazát, azaz $\Gamma(X) := \{v \in S : v\text{-nek van szomszédja } X\text{-ben}\}$. A Hall-tétel matroidos általánosítása R. Radotól [56] származik.

7.2.3. tétel (Rado, 1942). *Legyen adva a $G = (S, T; E)$ páros gráf S pontosztályán egy $M = (S, r)$ matroid. Az olyan párosítás maximális elemszáma, amely S-ben a matroid egy független ponthalmazát fedi egyenlő a $\min_{X\subseteq T} \big\{r\big(\Gamma(X)\big) + |T - X|\big\}$ értékkel. Speciálisan, akkor és csak akkor létezik T-t fedő M-független párosítás, ha minden $X \subseteq T$ esetén teljesül a Rado-féle feltétel:*

$$r\big(\Gamma(X)\big) \geq |X|. \tag{7.8}$$

A kombinatorikus optimalizálás egyik központi eredménye J. Edmonds [9] metszet-tétele, amely tartalmilag ekvivalens ugyan a Rado-tétellel, de általánosabb megfogalmazása miatt alkalmazásokban jobban használható.

7.2.4. tétel (Edmonds, 1970). *Az S alaphalmazon adott két matroid, melyek rangfüggvénye r_1 és r_2. A közös független halmazok maximális elemszáma egyenlő a*

$$\min_{X\subseteq S} \big\{r_1(X) + r_2(S - X)\big\} \tag{7.9}$$

értékkel.

Edmonds bizonyítása [15] algoritmikus és az alternáló utas módszer kiterjesztésének tekinthető. A metszet-tétel egy ekvivalens megfogalmazása szerint az M_1 és M_2 matroidnak, melyekre $r_1(S) = r_2(S) = k$ akkor és csak akkor van közös bázisa, ha minden $X \subseteq S$-re $t_2(X) = k - r_2(S - X) \leq r_1(X)$ vagy tömören $t_2 \leq r_1$, ahol t_2 az M_2 ko-rangfüggvénye. Ez viszont nem más, mint a diszkrét szeparációs tétel a szupermoduláris t_2 és szubmoduláris r_1 függvényekre, hiszen az ezeket szeparáló egészértékű moduláris függvények $0-1$-értékűek, így pontosan a közös bázisok karakterisztikus vektorai.

A következő, matroid metszethez kapcsolódó eredmény egyik érdekessége, hogy ismét feltűnik a lánctulajdonság. A tétel nem más, mint a fokszámkorlátos feszítő fa létezéséről szóló 3.2.3. tétel matroidos kiterjesztése.

7.2.5. tétel. *Adott az S alaphalmazon egy r rang- és t ko-rangfüggvényű M matroid valamint S-nek egy $\mathcal{P}$ partíciója. M-nek akkor és csak akkor létezik olyan B bázisa, amelyre*

(i) $|X \cap B| \leq g(X)$ *minden $X \in \mathcal{P}$-re, ha minden $Z \in \mathcal{P}^*$ halmazra fennáll*

$$g(Z) \geq t(Z), \text{ vagy ekvivalensen } g(Z) + r(S - Z) \geq r(S), \tag{7.10}$$

(ii) $|X \cap B| \geq f(X)$ *minden $X \in \mathcal{P}$-re, ha minden $Z \in \mathcal{P}^*$ halmazra fennáll*

$$f(Z) \leq r(Z) \tag{7.11}$$

(iii) $f(X) \leq |X \cap B| \leq g(X)$ *minden $X \in \mathcal{P}$-re, ha külön-külön létezik* (i)*-t kielégítő és* (ii)*-t kielégítő bázis, azaz minden $Z \in \mathcal{P}^*$ halmazra mind* (7.10)*, mind* (7.11) *fennáll.*

7.2.3. Súlyozott matroid metszet

Egy páros gráf maximális súlyú teljes párosítási valamint egy digráf legolcsóbb feszítő fenyő feladatának közös általánosításaként Edmonds [9] megoldotta két matroid maximális súlyú közös bázisának problémáját is. Egyrészt egy lineáris programozáson alapuló min-max formulát adott a maximális súlyú közös bázis súlyára (lásd később a 10.1.5. tételt), másrészt egy polinomiális algoritmust is leírt [15] ennek kiszámítására.

Létezik azonban az eredetinél áttekinthetőbb min-max tétel [23], amely sokkal egyszerűbb súlyozott matroid metszet algoritmus leírásást tette lehetővé. Mindezek Egerváry 1.3.4. tételének és Kuhn Magyar módszerének közvetlen kiterjesztéseként interpretálhatók. A [31] magyar nyelvű összefoglaló pedig rövid bizonyítást is tartalmaz, amely Egerváry eredeti bizonyításának közvetlen általánosítása.

Legyen adott az S alaphalmazon két matroid, M_1 és M_2, továbbá egy $c: S \to \mathbf{Z}$ egészértékű (!) súlyfüggvény. Tegyük fel, hogy az M_1 és M_2 matroidoknak van közös bázisa, melynek elemszámát jelölje k. Valamely $x: S \to \mathbf{Z}$ súlyfüggvényre jelölje $\hat{r}_i(x)$ az M_i matroidban a maximális x-súlyú bázis súlyát (lásd a 7.2.2. tételt).

7.2.6. tétel (Frank, 1981). *Az M_1 és M_2 matroidok közös bázisainak maximális c-súlya egyenlő a*

$$\min\left\{\hat{r}_1(c_1) + \hat{r}_2(c_2) : c_1 + c_2 = c, \ c_i \text{ egészértékű}\right\} \tag{7.12}$$

értékkel. Egy B közös bázis akkor és csak akkor maximális c-súlyú, ha létezik c-nek egy egészértékű $c_1 + c_2$ felbontása úgy, hogy B egyrészt az M_1-nek maximális c_1-súlyú bázisa, másrészt az M_2-nek maximális c_2-súlyú bázisa.

A tételben megfogalmazott optimalitási kritérium teremt lehetőséget egy viszonylag egyszerű erősen polinomiális súlyozott matroidmetszet algoritmus megkonstruálására ([23], magyarul: [47]).

7.2.4. Matroidok összege

A matroid metszet-tételhez hasonlóan fontos a matroid partíciós tétel. Legyen adott az S alaphalmazon k matroid. Nevezzünk egy $X \subseteq S$ halmazt **partícionálható**nak, ha előáll az egyes matroidokból vett (összesen k darab) független halmaz uniójaként.

7.2.7. tétel (Edmonds és Fulkerson, 1965)**.** *A partícionálható halmazok egy matroid független halmazait alkotják. Az S legnagyobb partícionálható részhalmazának r_Σ elemszáma egyenlő a*

$$\min_{X \subseteq S} \left\{ |S - X| + \sum_i r_i(X) \right\} \tag{7.13}$$

értékkel.

Egyszerű konstrukciók segítségével kimutatható, hogy a metszet-tétel és a matroid partíciós tétel egymással ekvivalens. A partícionálható halmazok matroidját a k matroid **összeg**ének nevezik. A tételből kiolvasható, hogy az alaphalmaz mikor fedhető le k bázissal és hogy mikor létezik k páronként diszjunkt bázis.

7.2.8. tétel (Edmonds, Nash–Williams: fedő bázisok tétele)**.** *Adott az S alaphalmazon k matroid, melyek rangfüggvénye $r_1, \dots, r_k$. S akkor és csak akkor bomlik fel k halmaz egyesítésére úgy, hogy az i-edik halmaz független az i-edik matroidban, ha*

$$\sum_i r_i(X) \geq |X| \tag{7.14}$$

fennáll minden $X \subseteq S$ részhalmazra.

7.2.9. tétel (Edmonds: diszjunkt bázisok tétele)**.** *Adott az S alaphalmazon k matroid, melyek rang-függvénye r_i és ko-rang függvénye t_i $(i = 1, \dots, k)$. Akkor és csak akkor létezik S-nek k diszjunkt részhalmaza úgy, hogy az i-edik halmaz bázis az i-edik matroidban, ha*

$$\sum_i t_i(X) \leq |X| \tag{7.15}$$

fennáll minden $X \subseteq S$ részhalmazra, ami viszont azzal ekvivalens, hogy $\sum_i \big[r_i(S) - r_i(Y)\big] \leq |S - Y|$ fennáll minden $Y \subseteq S$ részhalmazra.

A matroidok rugalmasságát jól mutatja, hogy a 7.2.8. tételből levezethető a következő általánosítása.

7.2.10. tétel. *Az M_i matroidok I_i független halmazai ($i = 1, \dots, k$) akkor és csak akkor egészíthetők ki S-t fedő független halmazokká, ha*

$$\sum_i \bigl[r_i(X \cup I_i) - |I_i|\bigr] \geq |X| \tag{7.16}$$

fennáll minden $X \subseteq S - (\cup_i U_i)$ részhalmazra.

7.2.5. Matroidok szub- és szupermoduláris függvényekből

E tételek alkalmazhatóságát nagyban elősegíti, ha hatékony eszközök állnak rendelkezésünkre matroidok előállítására. Egy ilyen Edmondstól [9] származó eszköz azon a megfigyelésen múlik, hogy egy matroid rangfüggvénynél gyengébb tulajdonságú függvények is képesek matroidot definiálni. Nem kell például megkövetelni a szubkardinalitást vagy a monotonitást.

7.2.11. tétel (Edmonds, 1970)**.** *Amennyiben $b : 2^S \to \mathbf{Z}_+\{+\infty\}$ nemnegatív, egészértékű, teljesen szubmoduláris halmazfüggvény, úgy az $\mathcal{F}_b := \bigl\{I \subseteq S : |Y \cap I| \leq b(Y)$ minden $Y \subseteq S$-re$\bigr\}$ halmazrendszer kielégíti a függetlenségi axiómákat. A kapott $M = (S, \mathcal{F}_b)$ matroid rangfüggvénye a következő:*

$$r_b(Z) = \min\bigl\{b(X) + |Z - X| : X \subseteq S\bigr\}. \tag{7.17}$$

Ha ráadásul b monoton növő (azaz polimatroid függvény)*, akkor $\mathcal{F}_b$ definíciójában elég az $Y \subseteq I$ részhalmazokra szorítkozni, míg a* (7.17) *minimum formulában az $X \subseteq Z$-kre.*

Ráadásul, még a szubmodularitást is enyhíthetjük, és ez alkalmazásokban különösen gyümölcsözőnek bizonyul majd. A b halmazfüggvényről azt mondjuk, hogy **metsző,** illetve **keresztező szubmoduláris**, ha a 7.1 szubmodularitási egyenlőtlenség fennáll minden metsző, illetve keresztező $X, Y \subseteq S$ halmazra. (X, Y **metsző**, ha $X \cap Y$ nemüres. Ha ráadásul $X - Y, Y - X, S - (X \cup Y)$ egyike sem üres, akkor X, Y **keresztező**.)

7.2.12. tétel (Edmonds, 1970)**.** *Amennyiben $b : 2^S \to \mathbf{Z}_+\{+\infty\}$ nemnegatív, egészértékű, metsző szubmoduláris halmazfüggvény, úgy az $\mathcal{F}_b := \bigl\{I \subseteq S : |Y \cap I| \leq b(Y)$ minden $Y \subseteq S$-re$\bigr\}$ halmazrendszer kielégíti a függetlenségi axiómákat. A kapott $M = (S, \mathcal{F}_b)$ matroid rangfüggvénye a következő:*

$$r_b(Z) = \min\left\{\sum_{i=1}^{t} b(X_i) + \bigl|Z - (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_t)\bigr| : \{X_1, \dots, X_t\} \text{ részpartíciója } S\text{-nek}\right\}. \tag{7.18}$$

Alkalmazásokban néha szupermoduláris függvények szerepelnek szubmoduláris helyett. Legyen $p : 2^S \to \mathbf{Z}$ metsző szupermoduláris halmazfüggvény, amelyre $p(\emptyset) = 0$ és $p(X) \leq |X|$ minden $X \subseteq S$ halmazra fennáll.

7.2.13. tétel. *A* $\mathcal{G}^p := \big\{Z \subseteq S : |Z \cap X| \geq p(X)$ *minden* $X \subseteq S$ *halmazra*$\big\}$ *halmazrendszer egy* M^p *matroid generátorainak rendszere. A matroid ko-rangja egyenlő a*

$$\max\left\{\sum_i p(X_i) : \{X_1, \ldots, X_t\} \text{ részpartíciója } S\text{-nek}\right\} \tag{7.19}$$

értékkel.

Keresztező szupermoduláris függvények segítségével ezen a módon már nem lehet egy matroid generátorainak halmazát definiálni. A bázisait azonban igen!

7.2.14. tétel (Frank és Tardos, 1981)**.** *Legyen* k *pozitív egész, és* $p : 2^S \to \mathbf{Z}\{-\infty\}$ *egészértékű, keresztező szupermoduláris halmazfüggvény. Ha a* $\mathcal{B}^p := \big\{B \subseteq S : |B| = k,\ |Y \cap B| \geq p(Y)$ *minden* $Y \subseteq S$*-re*$\big\}$ *halmazrendszer nemüres, akkor egy matroid bázisainak halmazát alkotja.*

7.3. Matroidok alkalmazásai

Felbontás összefüggő részekre. A 7.2.10. tételből nemcsak a gráfok fákkal történő fedéséről szóló Nash–Williams 4.3.3. tétel vezethető le, hanem a 4.3.4. tételben megfogalmazott általánosítás is egy megkezdett fedés befejezhetőségéről. Hasonlóképp, a diszjunkt bázisok tételéből levezethető Tutte 4.2.8. tétele diszjunkt feszítő fák létezéséről. E megközelítést általánosítva Tutte tételét hipergráfokra is sikerült kiterjeszteni. Egy $H = (V, \mathcal{E})$ hipergráfot akkor nevezünk k**-partíció-összefüggő**nek, ha a V alaphalmaz bármely t-részes partíciójára a legalább két részt metsző hiperélek száma legalább $k(t-1)$. A $k = 1$ esetben röviden azt mondjuk, hogy a hipergráf **partíció-összefüggő**. Ez gráf esetén egybeesik az összefüggőség fogalmával, tetszőleges hipergráfra azonban annál erősebb: a $\big(V = \{a, b, c\}$, $\mathcal{E} = \{V\}\big)$ hipergráf összefüggő, de nem partíció-összefüggő. Ennek megfelelően Tutte diszjunkt fa tételének kétféle általánosítása is felvethető hipergráfokra annak megfelelően, hogy a hipergráf éleit úgy akarjuk k osztályba sorolni, hogy mindegyik osztály összefüggő hipergráfot határoz meg avagy partíció-összefüggőt. Kimutatható, hogy az összefüggő hipergráfokra bontás már a $k = 2$ esetben is **NP**-teljes, a második kérdésre azonban érvényes a Tutte tétel következő általánosítása [33].

7.3.1. tétel (Frank, Király és Kriesell, 2003)**.** *Egy hipergráf akkor és csak akkor* k*-partíció összefüggő, ha felbomlik* k *partíció-összefüggő részhipergráfra.*

Ahogy Tutte 4.2.8. tételéből közvetlenül kiolvasható, hogy egy $2k$-élösszefüggő gráf tartalmaz k élidegen feszítő fát, úgy a 7.3.1. tétel az alábbi következményre vezet.

7.3.2. következmény. *Ha egy* (qk)*-élösszefüggő hipergráf minden hiperéle legfeljebb* q *elemű, akkor a hipergráf felbontható* k *darab partíció-összefüggő* (és így összefüggő) *hipergráfra.*

Optimális fák. A maximális (vagy minimális) súlyú feszítő fa feladatának két nagyfokú általánosítása is megoldható a súlyozott matroid metszet algoritmus segítségével.

(A) Adott egy irányítatlan gráf élhalmazán a $c_1, \dots, c_k$ költségfüggvényekkel. Keressünk $F_1, \dots, F_k$ élidegen feszítő fákat úgy, hogy a $\sum_i c_i(F_i)$ összköltség a lehető legkisebb legyen.

(B) A $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráf pontjainak egy T stabil halmazán adott az $f_T : T \to \mathbf{Z}_+$ és a $g_T : T \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ függvény, melyekre $f_T \leq g_T$. A 7.2.5. tételből levezethető a 3.2.3. tétel, amely fokszám-korlátoknak eleget tevő feszítő fa létezéséről szólt. Amennyiben még egy költségfüggvény is adott az élhalmazon, úgy a legolcsóbb fokszámkorlátos feszítő fa is kiszámítható a súlyozott matroid metszet algoritmus segítségével. Ha minden csúcson adott egy felső korlát és nem csupán egy stabil halmaz elemein, akkor a fokszám-korlátos fa problémája NP-teljes.

Gyökeres k-összefüggőség. Ugyancsak a súlyozott matroid metszet segítségével oldható meg az alábbi feladat.

(A) Adott egy irányított gráf egy kijelölt s gyökérrel és egy c költségfüggvénnyel az élhalmazon. Keressünk minimális költségű részgráfot, amelyben s-ből minden csúcshoz vezet k élidegen irányított út. A $k = 1$ speciális esetben visszajutunk a legolcsóbb feszítő fenyő problámájához és az erre vonatkozó Fulkerson tételhez.

(B) Egy digráfban keressünk minimális költségű részgráfot, amelyben s-ből minden csúcshoz vezet k pontidegen irányított út. Az (A) feladat ezen pontidegen változatáról csak nemrégiben [36] derült ki, hogy szintén megoldható a súlyozott matroid metszet segítségével, bár itt a visszavezetés már ravaszabb.

Irányítás. A 7.2.14. tételben leírt konstrukció segítségével megmutatható [34], hogy egy gráf (sőt egy vegyes gráf) k-élösszefüggővé irányításának feladata megfogalmazható matroid metszet problémaként, hasonlóképp egy digráf egyirányú vágásainak minimális lefogásához.

Diszjunkt fenyők. Edmonds 4.2.2. diszjunkt fenyő tétele k élidegen, azonos gyökerű fenyő létezésének feltételét adta meg. Mi a helyzet, ha a gyökereknek különbözőknek kell lennie? A 7.2.13. tételből közvetlenül kiolvasható az alábbi eredmény, amely egyébként a 4.2.9. tétel speciális esete.

7.3.3. tétel. *Egy $D = (V, E)$ digráfban akkor és csak akkor létezik k élidegen feszítő fenyő, melyek gyökerei különbözőek, ha V minden $\{X_1, X_2, \dots, X_t\}$ részpartíciójára*

$$\sum_i \varrho(X_i) \geq k(t-1). \tag{7.20}$$

Digráfok forráshalmazai. Legyen $D = (V, A)$ olyan irányított gráf, amelynek legalább $k + 1$ csúcsa van és amelyben nincsenek egyirányú párhuzamos élek.

A $Z \subseteq V$ halmazra és $v \in V$ csúcsra jelölje $\kappa^+(Z, v)$ a Z-ből v-be vezető (v-től eltekintve) diszjunkt irányított utak maximális számát. Nevezzünk egy Z halmazt k**-forrás**nak, ha Z-ből minden $v \in V - Z$ csúcsba vezet k darab (v-től eltekintve) diszjunkt irányított út. Nagamochi, Ishii és Ito [55], meglehetősen bonyodalmasan, igazolták a következőt.

7.3.4. tétel (Nagamochi, Ishii, Ito, 2001)**.** *A k-források egy matroid generátorait alkotják.*

Valójában ez néhány sorban levezethető [2]. Menger tétele miatt ugyanis egy Z halmaz pontosan akkor k-forrás, ha $\left|\Gamma^-(X)\right| \geq k$ fennáll minden nemüres $X \subseteq V - Z$ halmazra, ahol $\Gamma^-(X)$ jelöli azon $V - X$-beli pontok halmazát, melyekből vezet X-be él. Jelölje V_k a legalább k befokú pontok halmazát és definiáljuk a $b : 2^{V_k} \to \mathbf{Z}$ függvényt úgy, hogy $b(X) := \left|\Gamma^-(X)\right| + |X| - k$, ha $X \neq \emptyset$. Ekkor b nemnegatív, monoton növő és metszőn szubmoduláris, így alkalmazható a 7.2.12. tétel. Az $M = (V_k, \mathcal{F}_b)$ matroidban egy $I \subseteq V_k$ halmaz pontosan akkor független, ha minden $X \subseteq I$ nemüres részhalmazra $b(X) \geq |X|$, azaz $\left|\Gamma^-(X)\right| \geq k$ fennáll, vagyis ha a $V - I$ halmaz k-forrás. Tehát a k-források az M duálisának generátorai.

Ráadásul ezen megközelítéssel az alábbi min-max formula is közvetlenül kiolvasható.

7.3.5. tétel. *A minimális k-forrás elemszáma egyenlő a*

$$(7.21) \quad |V - V_k| + \max\left\{ \sum_i \left[k - \left|\Gamma^-(X_i)\right|\right] : \{X_1, \dots, X_t\} \text{ a } V_k \text{ részpartíciója} \right\}$$

maximummal.

Merev gráfok. Tegyük fel, hogy egy G gráf csúcsait „általános helyzetben” elhelyeztük a síkon, azaz a csúcsok koordinátái között nincs algebrai összefüggés. A gráf éleit merev rudakkal, a csúcsait pedig csuklókkal valósítjuk meg, amelyek körül az élek (a síkban) elfordulhatnak. A G-t akkor nevezzük **merev**nek, ha az így kapott csuklós szerkezet merev (ami egy bizonyos változós mátrix rangjára tett kikötéssel írható le pontosan). Egy gráf **minimális merev,** ha merev, de bármely élét elhagyva már nem az. G. Laman [46] az alábbi 7.3.6. tételben jellemezte a minimális merev gráfokat.

7.3.6. tétel (Laman, 1970)**.** *Egy $G = (V, E)$ egyszerű gráf akkor és csak akkor minimális merev, ha $|E| = 2n - 3$ és*

$$(7.22) \qquad i_G(Z) \leq 2|Z| - 3 \quad \text{minden } Z \subseteq V,\ |Z| \geq 2\text{-re},$$

ahol $i_G(Z)$ a Z által feszített élek számát jelöli.

Kérdés, hogy miként lehet leírni a merev gráfokat, illetve, ha a gráf nem merev, minimálisan hány új él hozzáadásával tehető azzá? A válaszra az teremt lehetőséget, hogy a merevség mögött matroidos struktúra húzódik. Jelölje $G^* = (V, E^*)$ a teljes gráfot V-n. Az E^* élhalmazon vezessük be a b^* halmazfüggvényt a következőképpen. Legyen $b^*(\emptyset) = 0$ és $\emptyset \subset F \subseteq E^*$-ra legyen

$$b^*(F) := 2\big|V(F)\big| - 3, \tag{7.23}$$

ahol $V(F)$ jelöli az F-ben lévő élek végpontjainak halmazát. Ekkor b^* metsző szubmoduláris, így a 7.2.12. tételből kiolvasható, hogy egy merev gráf merev részgráfjai egy M_G matroid generátorait alkotják, amelynek rangfüggvényére vonatkozó a (7.18) formulából azonnal kiolvasható Lovász és Yemini [51] klasszikusnak számító tétele.

7.3.7. tétel (Lovász és Yemini, 1982)**.** *Egy $G = (V, E)$ gráf akkor és csak akkor merev, ha $r(M_G) = 2n - 3$, azaz E minden $\{E_1, \ldots, E_k\}$ partíciójára $\sum_i b^*(E_i) \geq 2n - 3$. Ha G nem merev, akkor azon élek minimális száma, melyek hozzáadásával G merevvé tehető, egyenlő a*

$$2n - 3 - \min\left\{ \sum_i b^*(E_i) : \{E_1, \ldots, E_k\} \text{ partíciója } E\text{-nek}\right\} \tag{7.24}$$

értékkel.

7.3.1. Algoritmus

A 7.2.12. tétel elvi lehetőséget kínál az $r_b(Z)$ rang kiszámítására. Ehhez egy olyan szubrutinra van szükség, amely bármely $F \subset S$ halmazra és $s \in A - F$ elemre megadja a $\beta(F, s) := \min\Big\{\big(b(Y) - |Y \cap F| - 1\big) : s \in Y \subseteq S\Big\}$ értéket és a minimalizáló Y halmazt. Ennek felhasználásával ugyanis egy rögzített sorrendben végigmegyünk a Z elemein és mohó módon kiválasztunk egy független halmazt. Az általános lépésben az eddig kiválasztott F független halmazhoz akkor vesszük hozzá a soron következő $s \in S - F$ elemet, ha $\beta(F, s) \geq 0$.

Hasonló algoritmus adható a 7.2.13. tételben szereplő matroid rangjának meghatározására. Miután mindegyik említett alkalmazásban a szükséges szubrutin valamely folyamalgoritmus segítségével előállítható, a szóbanforgó problémák algoritmikusan is kezelhetők. Így például a matroid metszet tételt (és algoritmust) használva kiszámítható egy digráf pontjainak legkisebb (költségű) olyan S részhalmaza, amelyből minden $v \in V - S$ pontba vezet k diszjunkt út és amelybe minden $v \in V - S$ pontból vezet l diszjunkt út. Hasonlóképp, egy gráfról algoritmikusan el tudjuk dönteni, hogy merev-e vagy sem. Nem ismeretes viszont sem algoritmus, sem min-max tétel a legkisebb elemszámú olyan élhalmazra, melynek elhagyása megszünteti egy gráf merevségét, és azt sem tudjuk, hogy a feladat NP-teljes volna.

7.4. Metsző szupermoduláris függvények fedése digráffal

A matroidokról szóló részben láttuk, hogy Rado 7.2.3. tétele miként általánosítja a Kőnig–Hall-tételt. Egy másirányú általánosítás Lovász [49] nevéhez fűződik:

7.4.1. tétel (Lovász, 1970). *Legyen* $p : 2^S \to \mathbf{Z}_+$ *pozitívan metsző szupermoduláris függvény, amelyre ráadásul minden* $A \subseteq S$, $v \in S - A$ *esetén*

$$p(A) + p(v) \geq p(A + v). \tag{7.25}$$

Amennyiben $G = (S, T; E)$ *egy olyan egyszerű páros gráf, amelyre* $|\Gamma_E(X)| \geq p(X)$ *minden* $X \subseteq S$ *halmazra fennáll, de* G *bármely élét kihagyva ez már nem teljesül, akkor* $d_E(v) = p(v)$ *minden* $v \in S$*-re.*

Lovász ennek segítségével igazolta Erdős egy sejtését, miszerint, ha egy hipergráfra erősen teljesül a Hall-féle feltétel, azaz bármely $j \geq 1$ hiperél egyesítése legalább $j + 1$ elemű, akkor az alaphalmaz pontjait két színnel lehet színezni úgy, hogy ne legyen egyszínű hiperél.

Kiderül azonban, hogy mind a Rado-tétel, mind Lovász tétele valójában egy általánosabb eredmény speciális esete, amely ráadásul még Vidyasankar fedő fenyőkről szóló 4.3.5. tételét is magában foglalja. Egy $D = (V, A)$ digráfban egy $X \subseteq V$ halmaz $B(X)$ bejárata a $B(X) := \{v \in X$: létezik olyan $uv \in A$ él, amelyre $u \in V - X\}$ halmaz volt. Valamely $g : V \to \mathbf{Z}_+$ függvényre legyen $\beta_g(X) := \sum [g(v) : v \in B(X)]$. Kimutatható, hogy a β_g függvény szubmoduláris, és ezen alapul a következő eredmény [27].

7.4.2. tétel (Frank és Tardos, 1989). *Legyen* $D = (V, A)$ *irányított gráf,* $g : V \to \mathbf{Z}_+$ *felső korlát függvény a csúcshalmazon. Legyen* p *pozitívan metsző szupermoduláris függvény. Akkor és csak akkor létezik olyan egészértékű* $x : A \to \mathbf{Z}_+$ *függvény, amelyre* $\varrho_x(Z) \geq p(Z)$ *minden* $Z \subseteq V$ *részhalmazra és* $\varrho_x(v) \leq g(v)$ *minden* $v \in V$ *csúcsra, ha minden* $X \subseteq V$ *halmazra*

$$p(X) \leq \beta_g(X). \tag{7.26}$$

Meglepő módon, ha a 7.4.2. tételben a pontok befokai helyett a kifokokra írunk elő felső korlátot, úgy már NP-teljes problémákhoz jutunk, ugyanis a Hamilton út probléma megfogalmazható ilyen alakban.

7.4.1. Következmények

Vidyasankar tétele újra. Megfigyelve, hogy a $p(X) := (k - \varrho(X))^+$ $(\emptyset \subset X \subseteq V - s)$ függvény pozitívan metsző szupermoduláris, valamint azt, hogy a $g(v) := p(v)$ $(v \in V - s)$ függvényre a (4.8) és (7.26) feltételek ekvivalensek, speciális esetként megkapjuk Vidyasankar 4.3.5. tételét egy digráf éleinek k darab feszítő s-fenyővel történő fedhetőségéről.

Egyirányú vágások lefogása. A Lucchesi–Younger tétel egyirányú vágások minimális lefogásával foglalkozott. Most olyan lefogás létezésére vagyunk kiváncsiak, melyben a pontok befokaira korlát adott. A következő tételben érdekes megfigyelni Tutte 1-faktor tételével való formai analógiát.

7.4.3. tétel. *Egy irányított $D = (V, A)$ gráfban akkor és csak akkor létezik olyan fenyves, amelynek élei minden irányított vágást lefognak, ha bármely nemüres $X \subset V$ halmazt elhagyva legfeljebb $|X|$ darab olyan komponens keletkezik, amelybe nem megy be él.*

A bizonyítás azon múlik, hogy a magokon értelmezett $\sigma(X)$ függvény ($D - X$ irányítatlan értelemben vett komponenseinek a száma) metsző szupermoduláris, így erre és a $g \equiv 1$ függvényre 7.4.2. alkalmazható.

Páros gráfok. A 7.4.2. tétel következő alkalmazása Rado 7.2.3. matroidos tételének és Lovász 7.4.1. tételének közös általánosítása.

7.4.4. tétel ([27]). *Legyen $G = (S, T; E)$ egyszerű páros gráf, $p : 2^S \to \mathbf{Z}_+$ pozitívan metsző szupermoduláris függvény, $g : S \to \mathbf{Z}_+$ pedig egy felső korlátként szolgáló függvény. Legyen továbbá $M = (T, r)$ egy r rangfüggvényű matroid a T alaphalmazon. Akkor és csak akkor létezik G éleinek olyan $F \subseteq E$ részhalmaza, amelyre*

$$r\big(\Gamma_F(X)\big) \geq p(X) \text{ minden } X \subseteq S\text{-re} \tag{7.27}$$

és

$$d_F(v) \leq g(v) \text{ minden } v \in S\text{-re,} \tag{7.28}$$

ha

$$p(X) \leq r\big(\Gamma_E(Y)\big) + g(X - Y) \text{ fennáll minden } Y \subseteq X \subseteq S \text{ halmazpárra.} \tag{7.29}$$

8. Szupermoduláris függvények fedése

8.1. Szupermoduláris függvényeket fedő irányítások

Meglepőnek tűnhet, de a vegyes gráfokról szóló egyszerű 3.1.2. kivételével a 3. fejezetben bemutatott valamennyi eredmény előírt tulajdonságú irányítások létezéséről egyetlen általános tételben foglalható össze.

Legyen h a V részhalmazain értelmezett halmazfüggvény, amelyet **igényfüggvény**nek nevezünk. Az alábbiakban az igényfüggvényekre automatikusan feltesszük, hogy $h(\emptyset) = h(V) = 0$. Azt mondjuk, hogy egy irányított gráf V-n **fedi** a h-t, ha $\varrho(X) \geq h(X)$ fennáll minden $X \subset V$-re. Absztrakt irányításon egy olyan irányítási feladatot értünk, amikor nem valami konkrét összefüggőség vagy fokszámkorlát elérése a cél, hanem adott h halmazfüggvényt akarunk fedni.

Valamennyi eddigi irányítási eredmény egy h igényfüggvényt fedő irányítás létezéséről szólt. Például, ha a gráf k-élösszefüggőségét kívántunk, akkor $h(X) = k$ ($\emptyset \subset X \subset V$), ha gyökeres k-él-összefüggőséget, akkor $h(X) = k$ ($\emptyset \subset X \subset V - s$)

és $h(X) = 0 \quad (s \in X \subset V)$. A pontok befokára kirótt alsó korlát nyilván ilyen alakú, de a felső korlát is megfogalmazható eképp, mert egy v csúcs befokára kirótt $g(v)$ felső korlát ekvivalens a komplementer $V - v$ részhalmaz befokára tett $h(V - v) := d_G(v) - g(v)$ alsó korlát előírással. A bevezetőben már említettük, hogy ha h-ról semmit nem kötünk ki, úgy a h-t fedő irányítási feladat már $0-1$-értékű h esetén is NP-teljes problémákat foglal magában. Ebben a részben két függvényosztályt mutatunk be, melyekre kerek válasz adható.

8.1.1. Nem-negatív keresztező szupermoduláris függvények

Nevezzünk egy h halmazfüggvényt **keresztező** G**-szupermodulárisnak**, ha $h(X)+h(Y) \leq h(X \cup Y)+h(X \cap Y)+d(X,Y)$ teljesül a V minden X, Y keresztező részhalmazára, ahol $d(X, Y)$ jelöli azon G-beli élek számát, melyek $X - Y$ és $Y - X$ között vezetnek. A következő eredmény [21] bizonyítása a 3.2.1. tételre bemutatott bizonyítási megközelítés nagymérvű továbbfejlesztésén alapult.

8.1.1. tétel (Frank, 1980)**.** *Tegyük fel, hogy h keresztező G-szupermoduláris és nemnegatív. G-nek akkor és csak akkor létezik h-t fedő irányítása, ha*

$$e(\mathcal{P}) \geq \sum h(V_i), \tag{8.1}$$

és

$$e(\mathcal{P}) \geq \sum h(V - V_i) \tag{8.2}$$

teljesül V minden $\mathcal{P} = \{V_1, \ldots, V_t\}$ partíciójára, ahol $e(\mathcal{P})$ jelöli a V_i részek között vezető élek számát.

A 8.1.1. tételnek egyfajta önerősítő jellege van, miután segítségével könnyen kiadódik a következő fokszám-korlátos kiterjesztése.

8.1.2. tétel. *Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, h nemnegatív keresztező G-szupermoduláris függvény. Adott a ponthalmazon az $f : V \to \mathbf{Z}$ alsó és $g : V \to \mathbf{Z}$ felső korlát, melyekre $0 \leq f \leq g$. Akkor és csak akkor létezik G-nek olyan h-t fedő irányítása, amelyben $f(v) \leq \varrho(v) \leq g(v)$ minden $v \in V$ csúcsra, ha*

$$i(V_0) + e(\mathcal{F}) \geq f(V_0) + \sum_{i=1}^{t} h(V_i) \tag{8.3}$$

és

$$e(\mathcal{F}) - d(V_0) \geq \sum_{i=1}^{t} h(V - V_i) - g(V_0) \tag{8.4}$$

fennáll a csúcsok minden olyan $\mathcal{F} = \{V_0, V_1, \ldots V_t\}$ partíciójára, amelyben egyedül a V_0 rész lehet üres.

Felhasználva, hogy a (8.3) feltételben g nem szerepel, míg a (8.4) feltételben f nem szerepel, a 8.1.2. tételből kiolvasható a lánctulajdonság:

8.1.3. tétel. *Legyen f és g a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf ponthalmazán egy alsó és egy felső korlát függvény* ($0 \le f \le g$). *Legyen h nemnegatív keresztező G-szupermoduláris függvény. Amennyiben létezik h-t fedő olyan irányítás, amelyben $\varrho'(v) \ge f(v)$ minden v csúcsra, és létezik h-t fedő olyan irányítás, amelyben $\varrho''(v) \le g(v)$ minden v csúcsra, úgy létezik olyan h-t fedő irányítás is, amelyre $f(v) \le \varrho(v) \le g(v)$ minden v csúcsra.* ■

A 8.1.1. tétel bizonyítás-technikáját alkalmazva levezethető az alábbi következmény, amely még k-élösszefüggő irányításokra is érdekes.

8.1.4. tétel. *Legyen G és h ugyanaz, mint a* 8.1.1. *tételben. Tegyük fel, hogy D_1 és D_2 mindegyike a G-nek egy h-t fedő irányítása. Ekkor el lehet jutni D_1-ből D_2-be irányított körök és utak egymást követő megfordításával úgy, hogy minden közbenső irányítás fedi h-t.* ■

8.1.2. Speciális esetek

Fontos speciális esetekben a 8.1.1. tételben a feltételek egyszerűsödnek.

8.1.5. következmény. (A) *Amennyiben a* 8.1.1. *tételben szereplő h függvény monoton csökkenő* (azaz $\emptyset \subset X \subset Y \subset V$ esetén $h(X) \ge h(Y)$), *akkor már a* (8.1) *feltétel elegendő.* (B) *Amennyiben a* 8.1.1. *tételben szereplő h függvény szimmetrikus* (azaz $\emptyset \subset X \subset V$ esetén $h(X) = h(V - X)$), *akkor elegendő a* (8.1) *feltételt csupán $t = 2$-re megkövetelni, ami tehát avval ekvivalens, hogy $d_G(X) \ge 2h(X)$ minden $X \subset V$ részhalmazra.*

A (B) részből $h(X) := k \quad (\emptyset \subset X \subset V)$ választással visszakapjuk Nash–Williams 3.4.2. irányítási tételét. Az (A) részből ennél általánosabb tétel nyerhető. Adott $l \le k$ nemnegatív egész számok esetén egy $D = (V, E)$ irányított gráfot akkor nevezünk (k, l)**-élösszefüggő**nek, ha D-nek létezik egy olyan s gyökérpontja, hogy s-ből minden más pontba vezet k élidegen út és minden pontból vezet s-be l élidegen út. (Azt mondjuk, hogy D az s-re nézve (k, l)-élösszefüggő.) Menger irányított gráfokra vonatkozó tételének élidegen változata alapján ez azzal ekvivalens, hogy minden s-t nem tartalmazó halmaz befoka legalább k és minden s-t tartalmazó halmaz befoka legalább l. Figyeljük meg, hogy $k = l$ esetén a (k, l)-élösszefüggőség ekvivalens a k-élösszefüggőséggel.

Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráfot akkor nevezünk (k, l)**-partíció-összefüggő**nek, ha V bármely t-részes partíciójára ($t \ge 2$) a köztes élek száma legalább $k(t - 1) + l$. Nem nehéz igazolni, hogy $l \ge k$ esetén G akkor és csak akkor (k, l)-partíció-összefüggő, ha $(k + l)$-élösszefüggő. A $(k, 0)$-partíció-összefüggőség Tutte 4.2.8. tétele szerint k élidegen feszítő fa létezésével ekvivalens. A 8.1.5 következményből rögtön kiolvasható az alábbi jellemzés.

8.1.6. tétel. *Tegyük fel, hogy $0 \le l \le k$. Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráfnak akkor és csak akkor létezik (k, l)-élösszefüggő irányítása, ha G (k, l)-partíció-összefüggő.*

A h igényfüggvény alkalmas megválasztásával nyerjük az alábbiakat.

8.1.7. tétel. *Legyen* $f : V \to \mathbf{Z}_+$. *A* $G = (V, E)$ *gráfnak akkor és csak akkor létezik olyan* k*-élösszefüggő irányítása, amelyben minden* v *csúcs befoka legalább* $f(v)$*, ha* V *minden olyan* $\mathcal{P} := \{U_0, U_1, \dots, U_q\}$ *partíciójára* ($q \geq 0$)*, amelyben egyedül az* U_0 *rész lehet üres* (és lehet $q = 0$, amikor is U_0 az egész V)*, a köztes élek* $e(\mathcal{P})$ *számára és az* U_0 *által feszített élek* $i(U_0)$ *számára fennáll, hogy*

$$e(\mathcal{P}) + i(U_0) \geq f(U_0) + kq, \tag{8.5}$$

ahol $f(X) := \sum \big[f(v) : v \in X\big]$.

Analóg eredmény írható fel, ha a befokokra alsó helyett felső korlátokat adunk, és érvényben van a láncszabály is. A $k = 1$ esetben a feltételek egyszerűsödnek és visszajutunk a 3.2.1. tételhez.

8.1.3. Metsző szupermoduláris függvények

A 8.1.1. tétel érvényét veszti, ha h nemnegativitását nem kötjük ki. Érvényes viszont a következő [19].

8.1.8. tétel (Frank, 1978)**.** *Legyen* $h : 2^V \to \mathbf{Z}$ *metsző szupermoduláris függvény. Akkor és csak akkor létezik* G*-nek* h*-t fedő irányítása, ha* V *minden* $\{V_1, \dots, V_t\}$ *partíciójára a keresztélek száma legalább* $\sum_i h(V_i)$.

E tétel speciális eseteként kiadódik az irányítatlan gráfok gyökeresen k-élösszefüggővé irányíthatóságáról szóló 3.4.4. tétel kiterjesztése vegyes gráfokra.

8.1.9. következmény. *Legyen* $M = (V, A + E)$ *a* $G = (V, E)$ *irányítatlan és a* $D = (V, A)$ *irányított gráfból összetett vegyes gráfnak* s *egy kijelölt gyökérpontja.* M*-nek akkor és csak akkor létezik gyökeresen* k*-élösszefüggő irányítása, ha* $V - s$ *minden* $\mathcal{F} := \{V_1, \dots, V_t\}$ *részpartíciójára* $e(\mathcal{F}) \geq \sum_i \big[k - \varrho_D(V_i)\big]$.

Bár az irányítatlan gráfokra vonatkozó 3.4.4. tételben és 8.1.9. következményben szereplő feltételek ugyanolyan alakúak, van egy lényeges különbség. A 3.4.5. tétel szerint irányítatlan gráf gyökeres k-élössszefüggőre irányításánál érvényben van a láncszabály. Ugyanakkor példával megmutatható, hogy vegyes gráfokra ez már nem áll.

Látjuk tehát, hogy mikor létezik egy nemnegatív, keresztező szupermoduláris függvényt fedő irányítás és mikor egy metsző szupermoduláris függvényt fedő. Továbbra is megmarad azonban kérdés, hogy mi egy keresztező szupermoduláris függvényt fedő irányítás feltétele. Speciálisan, mikor van egy vegyes gráfnak k-élösszefüggő irányítása. A választ a szubmoduláris áramokról szóló 10.2. szakasz tartalmazza majd.

8.2. Keresztező szupermoduláris függvények fedése digráffal

Amint korábban láttuk, összefüggőségekre vonatkozó irányítási problémák hátterében gyakran szupermoduláris függvények szerepeltek. A megismert növelési feladatoknál is hasonló a helyzet.

8.2.1. Fedés irányított gráffal

Foglalkozzunk először irányított gráfokkal és vizsgáljuk meg, hogy Mader 2.1.6. leemelési tétele miként fogalmazható meg absztrakt alakban. Egyszerű megfontolással látható, hogy a Mader-tétel ekvivalens az alábbi fokszám-előírt élösszefüggőség növelési tétellel.

8.2.1. tétel. *Adott $D = (U, E)$ digráf és $m_{\mathrm{be}} : U \to \mathbf{Z}_+$, $m_{\mathrm{ki}} : U \to \mathbf{Z}_+$ fokszám-előírások. Akkor és csak akkor létezik olyan $H = (U, F)$ digráf, amelyre $\varrho_H(v) = m_{\mathrm{be}}(v)$ és $\delta_H(v) = m_{\mathrm{ki}}(v)$ teljesül minden $v \in U$ pontra és $D + H$ k-élösszefüggő, ha $m_{\mathrm{be}}(U) = m_{\mathrm{ki}}(U)$,*

$$m_{\mathrm{be}}(X) \geq k - \varrho_D(X) \tag{8.6}$$

és

$$m_{\mathrm{ki}}(X) \geq k - \delta_D(X) \tag{8.7}$$

teljesül minden $\emptyset \neq X \subset U$ részhalmazra.

Legyen p nemnegatív egészértékű halmazfüggvény a V alaphalmazon, amelyre $p(\emptyset) = p(V) = 0$. Azt mondjuk, hogy p pozitívan keresztező szupermoduláris, ha teljesíti a szupermodularitási egyenlőtlenséget (azaz $p(X) + p(Y) \leq p(X \cap Y) + p(X \cup Y)$) minden olyan keresztező X, Y halmazpárra, melyekre $p(X) > 0$, $p(Y) > 0$. Azt mondjuk, hogy egy digráf fedi p-t, ha minden X halmaz befoka legalább $p(X)$. A következő eredmény [30] úgy tekinthető, mint a Mader-féle irányított leemeléssel ekvivalens 8.2.1. tétel absztrakt kiterjesztése.

8.2.2. tétel (Frank, 1994)**.** *Legyen p pozitívan keresztező szupermoduláris halmazfüggvény V részhalmazain. Legyen $m_{\mathrm{ki}} : V \to \mathbf{Z}_+$ és $m_{\mathrm{be}} : V \to \mathbf{Z}_+$ a pontok ki- és befokaira vonatkozó előírás, melyekre $\gamma := m_{\mathrm{be}}(V) = m_{\mathrm{ki}}(V)$. Akkor és csak akkor létezik olyan $H = (V, F)$ irányított gráf, amely fedi p-t és amelyben*

$$\delta_H(v) = m_{\mathrm{ki}}(v) \ \ \text{és} \ \ \varrho_H(v) = m_{\mathrm{be}}(v) \tag{8.8}$$

minden csúcsra fennáll, ha minden $X \subseteq V$-re

$$p(V - X) \leq m_{\mathrm{ki}}(X) \ \ \text{és} \ \ p(X) \leq m_{\mathrm{be}}(X) \tag{8.9}$$

fennáll.

Érdekes, hogy ha csak a kifok-vektorra (vagy csak a befok-vektorra) van előírás, akkor már részpartíciós típusú feltételre is szükség van.

8.2.3. tétel. *Legyen p pozitívan keresztező szupermoduláris függvény. Adott $m_{\mathrm{ki}} : V \to \mathbf{Z}_+$ vektor akkor és csak akkor p-t fedő kifok-vektor, ha*

$$m_{\mathrm{ki}}(Z) \geq p(V - Z) \text{ minden } Z \subset V\text{-re} \tag{8.10}$$

és

$$m_{\mathrm{ki}}(V) \geq \max\left\{\sum_i \bigl[p(X_i)\bigr] : \{X_i\} \text{ partíció}\right\}. \tag{8.11}$$

Adott $m_{\mathrm{be}} : V \to \mathbf{Z}_+$ vektor akkor és csak akkor p-t fedő befok-vektor, ha

$$m_{\mathrm{be}}(Z) \geq p(Z) \quad \text{minden } Z \subset V\text{-re} \tag{8.12}$$

és

$$m_{\mathrm{be}}(V) \geq \max\left\{\sum_i \bigl[p(V - X_i)\bigr] : \{X_i\} \text{ partíció}\right\}. \tag{8.13}$$

Az 5.4.3. irányított növelési tétel absztrakt megfelelője a következő.

8.2.4. tétel ([30]). *Legyen p pozitívan keresztező szupermoduláris halmazfüggvény V részhalmazain. Adott γ egészre akkor és csak akkor létezik egy legfeljebb γ élű p-t fedő H digráf, ha V minden $\{V_1, \dots, V_t\}$ partíciójára*

$$\sum_{i=1}^{t} p(V_i) \leq \gamma \tag{8.14}$$

és

$$\sum_{i=1}^{t} p(V - V_i) \leq \gamma. \tag{8.15}$$

H választható hurokmentesnek.

8.2.5. tétel. *Legyen p pozitívan keresztező szupermoduláris halmazfüggvény V részhalmazain és $g_{\mathrm{be}} : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$, illetve $g_{\mathrm{ki}} : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ a pontok befokaira, illetve kifokaira vonatkozó felső korlátok. Akkor és csak akkor létezik p-t fedő $H = (V, F)$ irányított gráf, amelyben minden v csúcsra*

$$\varrho_H(v) \leq g_{\mathrm{be}}(v) \text{ és } \delta_H(v) \leq g_{\mathrm{ki}}(v) \tag{8.16}$$

ha minden $X \subseteq V$-re

$$p(X) \leq g_{\mathrm{be}}(X), \tag{8.17}$$

és

$$p(V - X) \leq g_{\mathrm{ki}}(X), \tag{8.18}$$

továbbá V minden $\{V_1, \dots, V_t\}$ partíciójára

$$\sum_i p(V - V_i) \leq g_{\mathrm{be}}(V), \tag{8.19}$$

és

$$\sum_i p(V_i) \le g_{\mathrm{ki}}(V). \tag{8.20}$$

Amennyiben $g_{\mathrm{be}}(V) \le g_{\mathrm{ki}}(V)$, *úgy* (8.17) *implikálja* (8.20)*-t, azaz ilyenkor már a* (8.17), (8.18) *és* (8.19) *feltételek elegendőek* p*-t fedő és* (8.16)*-t teljesítő digráf létezéséhez. Ha ráadásul* $g_{\mathrm{be}}(V) = g_{\mathrm{ki}}(V)$, *úgy már a* (8.17) *és* (8.18) *feltételek is elegendőek.*

Most is érvényes a lánctulajdonság.

8.2.6. tétel. *Legyen* p *pozitívan keresztező szupermoduláris halmazfüggvény* V *részhalmazain és* $g_{\mathrm{be}} : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$, *illetve* $g_{\mathrm{ki}} : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ *a pontok befokaira, illetve kifokaira vonatkozó felső korlátok. Akkor és csak akkor létezik* p*-t fedő* $H = (V, F)$ *irányított gráf,*

(i) *amelyben minden* v *csúcsra* $\varrho_H(v) \le g_{\mathrm{be}}(v)$, *ha* (8.17) *és* (8.19) *teljesül,*

(ii) *amelyben minden* v *csúcsra* $\delta_H(v) \le g_{\mathrm{ki}}(v)$, *ha* (8.18) *és* (8.20) *teljesül.*

(iii) *Ha külön-külön létezik* (i)*-t teljesítő és* (ii)*-t teljesítő digráf is, akkor létezik olyan is, amely mindkettőt teljesíti.*

ST**-keresztezés.** A 8.2.4. tétel tovább általáanosítható. Legyen a V alaphalmaznak S és T két nemüres (nem feltételenül diszjunkt) részhalmaza V. Egy élre azt mondjuk, hogy ST**-él,** ha a töve S-ben a feje pedig T-ben van. Az X és Y részhalmaz ST**-keresztező,** ha az $X \cap Y \cap T$, $S - (X \cap Y)$, $X - Y$, $Y - X$ halmazok egyike sem üres. Amennyiben $S = T = V$, úgy ez egybeesik a keresztezés megszokott fogalmával. V részhalmazainak egy $\mathcal{F}$ családja ST**-keresztező,** ha bármely két ST-keresztező tagjára azok metszete és uniója is $\mathcal{F}$-ben van. Halmazok egy $\mathcal{I}$ családja ST**-független,** ha bármely két X, Y tagjára az $X \cap Y \cap T$ és $S - (X \cup Y)$ halmazok közül legalább az egyik üres. Ez azzal ekvivalens, hogy nem létezik ST-él, amely mind X-be, mind Y-ba belép.

Egy $p : 2^V \to \mathbf{Z}_+$ halmazfüggvény **pozitívan** ST**-keresztező szupermoduláris,** ha bármely két ST-keresztező halmazra, melyek p-értéke pozitív, teljesül a szupermodularitási egyenlőtlenség.

8.2.7. tétel (Frank és Jordán, 1995)**.** *Tegyük fel, hogy egy pozitívan* ST*-keresztező szupermoduláris* p *halmazfüggvény csak olyan* X *halmazokon pozitív, melyekre* $T \cap X \ne \emptyset$, $S - X \ne \emptyset$. *Ekkor a* p*-t fedő irányított* ST*-élek minimális száma egyenlő az* ST*-független halmazok maximális* p*-összegével.*

Az $S = T = V$ speciális esetben könnyen megfigyelhető, hogy halmazok egy ST-független rendszere vagy páronként diszjunkt vagy páronként ko-diszjunkt halmazokból áll, így ilyenkor visszajutunk a 8.2.4. tételhez. Lényeges különbség azonban, hogy szemben a 8.2.4. tétellel, a 8.2.7. tétel bizonyítása a kikeresztezési technikán alapul és nem ismeretes egyszerű algoritmus a keresett fedés megtalálására.

8.2.2. A leemelési tételek kiterjesztései

A fenti eredményekből Mader leemelési tételénél általánosabb is kiolvasható. Egy digráfot akkor neveztünk (k, l)**-élösszefüggő**nek $(l \leq k)$, ha létezik egy s csúcsa úgy, hogy minden s-t nem tartalmazó halmaz befoka legalább k és minden s-t tartalmazó halmaz befoka legalább l. Ez azzal ekvivalens, hogy s-ből minden csúcsba vezet k élidegen út, és minden csúcsból vezet s-be l élidegen út.

8.2.8. tétel. *Legyen a $D = (U + z, A)$ digráfnak $s \in U$ olyan gyökérpontja, amelyre nézve D a z-től eltekintve (k, l)-élösszefüggő* (azaz s-ből minden U-beli u csúcsba vezet k és u-ból vezet s-be l élidegen út). *Tegyük fel, hogy $\varrho(z) = \delta(z)$. Ekkor a z-be bemenő és z-ből kilépő élek párba állíthatók úgy, hogy e párokat egyszerre leemelve (k, l)-élösszefüggő digráfot kapunk az U csúcshalmazon.*

Mader tételének egy másirányú kiterjesztése is kiadódik speciális esetként.

8.2.9. tétel. *Legyen a $D = (U + z, A)$ digráfban $\varrho(z) = \delta(z)$. Legyen $U' \subseteq U$ olyan halmaz, amely tartalmazza az összes z-vel szomszédos pontot* (azaz $S \subseteq U'$). *Tegyük fel, hogy D az U'-ben k-élösszefüggő* $(k \geq 1)$. *Ekkor minden $e = zt$ élhez létezik olyan $f = uz$ él, amelyre az $\{e, f\}$ élpár leemelésével kapott D^{ef} digráf is U'-ben k-élösszefüggő.*

8.3. Fedések irányítatlan gráffal és hipergráffal

Watanabe és Nakamura 5.2.3. tételét irányítatlan gráfok élösszefüggőségének növeléséről J. Bang-Jensen és B. Jackson [1] terjesztette ki hipergráfok élösszefüggőségének gráfélekkel való növelésére. Ennek rögtön az absztrakt alakját fogalmazzuk meg [3]. Legyen p egészértékű, szimmetrikus (azaz $p(X) = p(V - X)$) halmazfüggvény a V alaphalmazon. Azt mondjuk, hogy egy G irányítatlan gráf fedi p-t, ha $d_G(X) \geq p(X)$ minden $X \subseteq V$ részhalmazra. Kérdés, hogy mikor lehet p-t adott γ számú éllel fedni. Tetszőleges $\{V_1, \ldots, V_t\}$ részpartícióra a $\sum_p(V_i) \leq 2\gamma$ feltétel szükséges és a Watanabe-Nakamura tétel azt mondta ki, hogy $p \equiv k$ esetén elegendő is, ha $k \geq 2$. A legegyszerűbb $p \equiv 1$ esetben azonban a részpartíciós feltétel nem elegendő, ezért γ-ra további alsó korlátra van szükségünk. A V alaphalmaz egy $\{V_1, \ldots, V_t\}$ partíciójára azt mondjuk, hogy p-teljes, ha bármely $1 \leq j \leq t-1$ darab V_i halmaz X egyesítésére $p(X) \geq 1$. Mivel egy p-t fedő gráf a V_i halmazok öszehúzásával biztosan összefüggő lesz, így p fedéséhez legalább $t - 1$ él kell. Nevezzük a p dimenziójának a legnagyobb t értéket, amire van p-teljes t részes partíció.

8.3.1. tétel (Benczúr és Frank, 1999). *Legyen p egészértékű, szimmetrikus, keresztező szupermoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon. Akkor és csak akkor fedhető p legfeljebb γ éllel, ha* $\dim(p) - 1 \leq \gamma$ *és* $\sum_i p(V_i) \leq 2\gamma$ *minden* $\{V_1, \ldots, V_t\}$ *részpartícióra teljesül.*

Ez a tétel nem csupán Bang-Jensen és Jackson tételét adja vissza speciális esetként, de annak a következő általánosítását is. Azt mondjuk, hogy egy X halmaz szeparálja a $T \subseteq V$ halmazt, ha mind $X - T$, mind $X \cap T$ nemüres, míg egy partíció szeparálja T-t, ha minden tagja szeparálja. A H hipergráf $T \subseteq V$ halmazon k-élösszefüggő, ha bármely T-t szeparáló X halmazra $d_H(X) \geq k$. Egy H' hipergráfra legyen $\sigma_T(X)$ az X elhagyásával keletkező komponensek közül a T-t szeparálók száma.

8.3.2. tétel ([3], 1999). *Egy $H = (V, \mathcal{A})$ hipergráf akkor és csak akkor tehető legfeljebb γ gráfél hozzáadásával a T halmazon k-élösszefüggővé, ha V minden T-t szeparáló $\mathcal{P}$ részpartíciójára $\sum \big[k - d_H(X) : X \in \mathcal{P}\big]$, és ha $\sigma_T(H') - 1 \leq \gamma$ fennáll a H minden olyan részhipergráfjára, amely legfeljebb $k - 1$ hiperél eltörlésével keletkezik.*

A fedési kérdést még tovább általánosíthatjuk, ha p fedésére nem csak gráféleket használhatunk, hanem nagyobb méretű hiperéleket is. Azt mondjuk, hogy egy H hipergráf fedi p-t, ha $d_H(X) \geq p(X)$ minden $X \subseteq V$-halmazra. A következő, Király Tamástól [44] származó tétel a 8.3.1. tétel jelentős mérvű általánosítása.

8.3.3. tétel (Király T., 2002). *Legyen p egészértékű, szimmetrikus, keresztező szupermoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon és legyen $u \geq 2$ egész. Akkor és csak akkor létezik egy p-t fedő legfeljebb γ hiperélből álló u-uniform hipergráf, ha*

$$u\gamma \geq \sum_i p(V_i) \text{ minden } \{V_1, \ldots, V_t\} \text{ részpartícióra,} \tag{8.21}$$

$$\gamma \geq p(X) \text{ minden } X \subseteq V \text{ részhalmazra,} \tag{8.22}$$

$$\gamma(u - 1) \geq \dim(p) - 1. \tag{8.23}$$

Speciális esetként megadható annak a feltétele, hogy egy hipergráfot mikor lehet k-élösszefüggővé tenni legfeljebb γ darab u méretű hiperél hozzáadásával.

Szigeti Z. [57] azt a hipergráf fedési problémát oldotta meg, amikor nem az egyes hiperélek elemszámára van felső korlát előírva, hanem a hiperélek összméretére.

8.3.4. tétel (Szigeti, 1999). *Legyen p egészértékű, szimmetrikus, ferdén szupermoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon és legyen l egész. Akkor és csak akkor létezik egy p-t fedő hipergráf, melyben a hiperélek összmérete legfeljebb l, ha a csúcsok bármely részpartíciójára a benne szereplő halmazok p-összege legfeljebb lk.*

Legyen r a V halmaz pontpárjain értelmezett nemnegatív, egész, szimmetrikus igényfüggvény. Azt mondjuk, hogy egy hipergráf **r**-élösszefüggő, ha a hipergráf minden u, v pontpárjára minden u-t és v-t elválasztó vágásban van legalább $r(u, v)$ hiperél. Speciális esetként kapjuk a következő növelési tételt.

8.3.5. tétel (Szigeti). *Adott $H = (V, \mathcal{E})$ hipergáf akkor és csak akkor tehető legfeljebb l összméretű hiperélek hozzáadásával* **r**-*élösszefüggővé, ha $\sum_i \big[R_r(X_i) - d_H(X_i)\big] \leq l$ fennáll a V minden $\{X_1, \ldots, X_t\}$ részpartíciójára, ahol $R(X) := \max\big\{r(u, v) : \big|X \cap \{u, v\}\big| = 1\big\}$.*

8.4. Szupermoduláris párhalmaz függvények fedése

Az irányított gráfok élösszefüggőségének minimális növeléséről szóló 5.4.3. tétel „absztrakt” alakja a 8.2.4. tétel keresztező szupermoduláris függvények minimális digráffal való fedéséről. Miképp lehetne a digráfok pontösszefüggésének minimális növelésére vonatkozó 5.4.5. tételt ilyen absztrakt alakra kiterjeszteni?

Legyen V adott alaphalmaz. Egy $X = (X_K, X_B)$ részhalmazokból álló párt, amelyre $X_B \subseteq X_K \subseteq V$ **párhalmaz**nak nevezzük. X_K a párhalmaz **külső,** míg X_B a **belső** tagja. Egy párhalmazt **triviális**nak mondunk, ha belső halmaza üres vagy külső halmaza a V alaphalmaz. Az olyan párhalmazokat, melyekre $X_K = X_B$ azonosíthatjuk a V részhalmazaival. Azt mondjuk, hogy egy $e = uv$ irányított él **fedi** vagy **lefogja** az X párhalmazt vagy hogy **belép** X-be, ha e belép X mindkét tagjába. Egy $D = (V, A)$ digráfban $\varrho(X) = \varrho_D(X)$ jelöli az X párhalmazba lépő élek számát.

Jelölje a párhalmazok halmazát $\mathcal{P}_2$. Ezen a természetes módon bevezethetünk egy részbenrendezést, amelyben $X \leq Y$, ha $X_B \subseteq Y_B$ és $X_K \subseteq Y_K$. Az X és Y párhalmazok metszete legyen $(X_K \cap Y_K, X_B \cap Y_B)$ uniója pedig $(X_K \cup Y_K, X_B \cup Y_B)$. Azt mondjuk, hogy az X és Y párhalmaz **keresztező,** ha nem összehasonlíthatók, továbbá $X_B \cap Y_B \neq \emptyset$ és $X_K \cup Y_K \neq V$. A párhalmazok egy $\mathcal{L}$ részhalmazáról azt mondjuk, hogy **keresztező,** ha $\mathcal{L}$ bármely két keresztező tagjával együtt azok metszete és uniója is $\mathcal{L}$-ben van. A $\mathcal{P}_2$ két tagját nevezzük **független**nek, ha a belső halmazaik diszjunktak vagy a külső halmazaik uniója V. Ami azzal ekvivalens, hogy nem fedhetők le egyetlen irányított éllel.

Legyen p nemnegatív, egészértékű, pozitívan keresztező szupermoduláris függvény $\mathcal{P}_2$-n, amelyről feltesszük, hogy minden triviális párhalmazon az értéke 0. Jelölje $D^* = (V, A^*)$ a teljes irányított gráfot (amelyben tehát minden uv él benne van, és így D^*-nek $m := |V|\big(|V|-1\big)$ éle van). Azt mondjuk, hogy egy $z : A^* \to \mathbf{Z}_+$ egészértékű függény **lefogja** vagy **fedi** p-t, ha $\varrho_z(X_K, X_B) \geq p(X_K, X_B)$, vagy röviden

$$\varrho_z(X) \geq p(X) \ \text{ fennáll minden } X = (X_K, X_B) \in \mathcal{P}_2 \text{ párra.}$$

Mivel p értéke triviális párhalmazokon 0 így p-nek mindig létezik lefogása.

A $\sum \big[p(X) : X \in \mathcal{F}\big]$ összegről azt mondjuk, hogy az $\mathcal{F}$ p-összege és röviden $p(\mathcal{F})$-fel jelöljük. Legyen τ_p a p minimális lefogásának értéke, azaz

$$\tau_p := \min\big\{z(A^*) : z \geq 0 \text{ egészértékű fedése } p\text{-nek}\big\},$$

és legyen ν_p a $\mathcal{P}_2$ egy független részhalmazának maximális p-összege, azaz

$$\nu_p := \max\big\{p(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}_2,\ \mathcal{F} \text{ független}\big\}.$$

8.4.1. tétel (Frank és Jordán, 1995)**.** *Legyen $D = (V, A^*)$ a teljes irányított gráf, p pozitívan keresztező szupermoduláris függvény a párhalmazok $\mathcal{P}_2$ halmazán, amely minden triviális párhalmazon 0 értékű. Ekkor $\tau_p = \nu_p$.*

Ez a tétel egyrészt magában foglalja a keresztező szupermoduláris függvények fedéséről szóló 8.2.4. tételt, másrészt a pontösszefüggés növelésére vonatkozó 5.4.5. tételt is. Érdemes külön megfogalmazni a következő speciális esetét.

8.4.2. tétel ([32])**.** *Legyen $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}_2$ nemtriviális párhalmazok egy keresztező rendszere. Az $\mathcal{L}$-t lefogó élek minimális $\tau = \tau(\mathcal{L})$ száma egyenlő az $\mathcal{L}$-ből függetlenül kiválasztható párhalmazok maximális $\nu = \nu(\mathcal{L})$ számával.*

8.4.1. Alakzatok minimális fedése téglalapokkal: Győri tétele

A [32] dolgozatban megmutattuk, hogy a 8.4.2. tétel egy ekvivalens megfogalmazásából könnyen levezethető Győri Ervin egy mély tétele, sőt annak egy kiterjesztése. Legyen $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n)$ egyszerű irányított út, ahol az e_i irányított él töve v_{i-1} és feje v_i. Jelöljük a P csúcsainak halmazát V-vel. Legyen $\mathcal{U} := \{U_1, \ldots, U_k\}$ a P részútjainak egy rendszere. A következőkben úton általában az út élhalmazát értjük.

Azt mondjuk, hogy P részútjainak egy $\mathcal{B}$ rendszere **generálja** $\mathcal{U}$-t vagy hogy $\mathcal{B}$ **generátora** $\mathcal{U}$-nak, ha $\mathcal{U}$ minden tagja előáll néhány $\mathcal{B}$-beli út egyesítéseként. Például $\mathcal{U}$ saját magának generátora, és az egyelemű utakból álló $\{e_1, \ldots, e_n\}$ rendszer is generálja $\mathcal{U}$-t. Jelölje $\gamma(\mathcal{U})$ az $\mathcal{U}$ generátorainak minimális elemszámát.

Azt mondjuk, hogy egy U útból és annak egy e éléből álló (U, e) pár **reprezentált út**at alkot. Jelölje $(U, e)^-$ az U azon pontjainak halmazát, melyek megelőzik e-t, míg $(U, e)^+$ azokét, melyek követik. ($(U, e)^-$ és $(U, e)^+$ tehát partícionálja az U ponthalmazát.) Azt mondjuk, hogy a $\big((U, e)^-, (U, e)^+\big)$ halmazpár az (U, e) reprezentált úthoz tartozik. Jelölje $\mathcal{U}_r$ az olyan (U, e) reprezentált utak halmazát, amelyekre $U \in \mathcal{U}$.

Legyen $\mathcal{I} := \{I_1, \ldots, I_t\}$ a P részútjainak egy családja és legyen $\mathcal{R} := \{f_1, f_2, \ldots, f_t\}$ egy reprezentáló rendszer, azaz az f_i irányított élek különböző elemei P-nek és $f_i \in I_i$ minden $i = 1, \ldots, t$-re. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{R}$ **erős reprezentáló rendszer,** ha $I_i \cap I_j$ nem tartalmazza f_i és f_j mindegyikét ($i, j,\ 1 \le i < j \le t$). Ebben az esetben a reprezentált utak $\big\{(I_1, f_1), (I_2, f_2), \ldots, (I_t, f_t)\big\}$ családját **független**nek nevezzük. Az $\mathcal{I} := \{I_1, \ldots, I_t\}$ **erősen reprezentálható,** ha létezik erős reprezentáns rendszere.

Jelölje $\mu(\mathcal{U})$ az $\mathcal{U}$-ban lévő lévő erősen reprezentálható utak maximális számát. Könnyen látható, hogy ha $\mathcal{R}$ erősen reprezentálható útrendszer, akkor $\mathcal{R}$-t nem lehet $|\mathcal{R}|$-nél kevesebb úttal generálni. Ebből következik, hogy $\mu(\mathcal{U}) \le \gamma(\mathcal{U})$. Győri Ervin [39]. tétele azt állítja, hogy itt valójában egyenlőség szerepel:

8.4.3. tétel (Győri, 1984)**.** *A P út részútjainak bármely $\mathcal{U}$ családjára fennáll $\mu(\mathcal{U}) = \gamma(\mathcal{U})$.*

Valójában a 8.4.2. tételből Győri tételének az a kiterjesztése is kiadódik, amelyben a P irányított út helyett egy irányított kör adott részútrendszerét akarjuk generálni.

Győri fenti tételéből egy érdekes kombinatorikus geometriai eredmény következik. Legyen T egy derékszögű poligon, azaz T a síknak vízszintes és függőleges szakaszokkal határolt (összefüggő, zárt) tartománya. T-t le akarjuk fedni T-be eső (zárt) téglalapokkal. Az alábbiakban téglalapon mindig olyan téglalapot értünk, melyek oldalai vízszintesek vagy függőlegesek. A szükséges téglalapok száma nyilván legalább akkora, mint T páronként „független" pontjainak maximális száma, ahol két pontot akkor nevezünk függetlennek, ha nem fedhetők le T-hez tartozó téglalappal (azaz a két pont által meghatározott legszűkebb téglalap kilóg T-ből). Létezik olyan példa, ahol ezen maximumnál több téglalapra van szükség a fedéshez. Ennek fényében értékes, hogy függőlegesen konvex alakzatokra ilyen ellenpélda már nem létezik, magyarán a min-max tétel ilyenkor már fennáll. A T tartományt akkor nevezzük **függőlegesen konvexnek,** ha T-nek és bármely függőleges egyenesnek a metszete szakasz.

8.4.4. tétel (Győri, 1984)**.** *Legyen T függőlegesen konvex derékszögű poligon. A T-t fedő téglalapok minimális száma egyenlő T páronként független pontjainak maximális számával.*

Ez a tétel is kiterjeszthető egy olyan általánosabb esetre, amikor a függőlegesen konvex alakzat egy álló henger palástján adott.

9. Poliéderes kombinatorika

A kombinatorikus optimalizálásban fontos szerepet tölt be a lineáris programozás és különösen az egészértékű optimumoknak van kombinatorikus tartalma. Poliéderen egy lineáris egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmazát értjük, míg egy politop véges sok pont konvex burka. A poliéder mindig felírható $\{x : Qx \leq b\}$ alakban, de könnyen láthatóan a formailag általánosabb alakú $\big\{x = (x_0, x_1) : Px_0 + Ax_1 = b_0,$ $Qx_0 + Bx_1 \leq b_1,\ x_1 \geq 0\big\}$ halmaz is poliéder.

Egy $R = \{x : Qx \leq b\}$ (nemüres) poliéder F **oldal**án (face) az R-nek egy

$$F := \{x \in R : cx = \delta\} \tag{9.1}$$

alakú nemüres részhalmazát értjük, ahol $\delta := \max\{cx : x \in R\}$ valamely cx célfüggvényre, melyre a maximum létezik. Vagyis a poliéder oldala az optimum helyek halmaza valamely cx lineáris célfüggvényre nézve. Egy egyelemű oldal neve csúcs. Kimutatható, hogy R pontosan akkor csúcsos, ha egyenes-mentes, ami viszont azzal ekvivalens, hogy Q oszlopai lineárisan függetlenek.

9.0.1. tétel. *Az $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéder egy nemüres F részhalmaza akkor és csak akkor oldala R-nek, ha létezik a Q bizonyos soraiból álló olyan Q' részmátrix, amelyre $F = \{x \in R : Q'x = b'\}$, ahol b' a Q' sorainak megfelelő részvektora b-nek.*

9.0.2. tétel. *Egy R nemüres poliédernek akkor és csak akkor nincs valódi oldala, ha R affin altér. Egy poliéder tartalmazásra nézve minimális oldala affin altér.*

Egy poliédert akkor nevezünk egésznek, ha minden oldala tartalmaz egész pontot (rácspontot). Ez avval ekvivalens, hogy minden minimális oldal tartalmaz egész pontot, ami csúcsos (vagy ekvivalensen egyenes-mentes) poliéder esetén azzal egyenértékű, hogy minden csúcs egész.

9.1. Teljesen unimoduláris mátrixok

Az alábbiakban egy mátrixot vagy egy vektort akkor nevezünk egésznek vagy egészértékűnek, ha minden elemük (komponensük) egész szám. Valamely Q mátrixot akkor nevezünk **teljesen unimodulárisnak** (TU: totally unimodular), ha minden aldeterminánsa $(0, \pm 1)$ értékű. Speciálisan, ilyen mátrix minden eleme $0, +1$ vagy -1. Világos, hogy TU-mátrix transzponáltja is az. Sorokat vagy oszlopokat -1-gyel szorozva vagy elhagyva ismét TU-mátrixot kapunk. Továbbá, egységvektorokat sorként vagy oszlopként egy TU-mátrixhoz illesztve TU-mátrixot kapunk. Így, ha a Q TU-mátrixot kiegészítjük egy I egység-mátrixszal, akkor a keletkező (Q, I) mátrix is TU-mátrix. Ha Q TU-mátrix, úgy $(Q, -Q)$ is az. (De ha mondjuk egy csupa 1 oszloppal egészítjük ki Q-t, akkor nem feltétlenül kapunk TU-mátrixot: legyen Q az $\{1, 2, 3, 4\}$ pontokon az $\{12, 13, 14\}$ élekből álló gráf 4×3-as incidencia mátrixa.)

Példaképp, legyen Q egy $D = (V, A)$ irányított gráf incidencia mátrixa, azaz Q sorai a V-nek, oszlopai E-nek felelnek meg, és az $q_{v,e}$ elem akkor $+1$, illetve -1, ha az e él belép, illetve kilép v-ből (egyébként 0). Egy $G = (V, E)$ gráf (pont-él) incidencia mátrixában a soroknak a csúcsok, míg az oszlopoknak az élek felelnek meg. A mátrix egy v csúcshoz és e élhez tartozó eleme akkor 1, ha e egyik végpontja v, különben 0. Tehát az incidencia mátrix minden oszlopában két darab 1-es elem van.

9.1.1. tétel. (a) *Digráf incidencia mátrixa teljesen unimoduláris.* (b) *Páros gráf incidencia mátrixa teljesen unimoduláris.*

A digráf incidencia mátrixát általánosítja a **hálózati mátrix.** Legyen D olyan irányított gráf, amely irányítatlan értelemben összefüggő és legyen F egy feszítő fája. A H_F mátrix sorai az F éleinek felelnek meg, míg az oszlopai az F-en kívüli éleknek. Minden uv nem-fa élre a fában egy egyértelmű *(nem feltétlenül irányított)* út vezet v-ből u-ba. Ennek egy f elemére a mátrix $a_{f,e}$ elemét definiáljuk 1-nek, ha f iránya megegyezik az útéval és -1-nek, ha azzal ellentétes. A mátrix minden más eleme 0.

9.1.2. tétel. *A H_F hálózati mátrix teljesen unimoduláris.*

9.1.3. következmény. *Egy olyan hipergráf, amely egy irányított fa élhalmazán van definiálva és a hiperélek irányított utak, teljesen unimoduláris.* ■

9.1.1. Farkas lemma és dualitás tétel TU-mátrixokra

Tekintsük az $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ mátrix által meghatározott primál

$$Px = b_0, \quad Qx \leq b_1 \tag{9.2}$$

rendszert valamint a $y = (y_0, y_1)$ duál-változóra felírt duális

$$y_1 \geq 0, \quad y_0 P + y_1 Q = 0, \quad y_0 b_0 + y_1 b_1 < 0 \tag{9.3}$$

rendszert. A Farkas lemma egyik változata szerint az (9.2) és az (9.3) rendszerek közül pontosan az egyik oldható meg. Az alábbi tétel a Farkas lemma TU-mátrixokra vonatkozó élesítését szolgáltatja.

9.1.4. tétel. *Tegyük fel, hogy az* $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ *mátrix teljesen unimoduláris. Ha a* (9.2) *primál probléma oldható meg és a korlátozó* b *vektor egész, akkor* (9.2)*-nek van egész megoldása is. Ha a* (9.3) *duális probléma oldható meg, akkor van* $(0, \pm 1)$*-értékű* y *megoldás is* (függetlenül b egészértékűségétől).

9.1.5. tétel. *Ismét legyen az* $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ *mátrix teljesen unimoduláris és* b *egész vektor. Ha a* $\max\{cx : Px = b_0,\ Qx \leq b_1\}$ *lineáris programozási problémának létezik megoldása, akkor az optimum egész vektoron is felvétetik* (függetlenül attól, hogy c egészértékű vagy sem). Ekvivalens alakban: *minden TU-mátrix és egész korlátozó vektor által megadott poliéder egész.*

9.1.2. TU-mátrixok jellemzése

Felvetődik, hogy léteznek-e teljesen unimodulárisnál általánosabb mátrixok, melyekre az általuk meghatározott poliéder minden egész korlátozó vektor esetén egész. Hoffman és Kruskal [40] alábbi tétele szerint a válasz egyfajta értelemben nemleges.

9.1.6. tétel (Hoffman és Kruskal, 1956)**.** *A* Q *egész mátrix akkor és csak akkor teljesen unimoduláris, ha minden egész* b *vektorra az* $R_b := \{x : x \geq 0,\ Qx \leq b\}$ *poliéder egész.*

Nem érvényes viszont az a természetesnek tűnő állítás, miszerint *egy négyzetes egész* Q *mátrix akkor és csak akkor TU, ha minden* b *egész vektorra a* $Qx = b$ *egyértelmű megoldása egész.* Ellenpélda az a 3×3-as mátrix, amelynek sorai $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$.

A teljesen unimoduláris mátrixok egy érdekes alkalmazása egyenletes színezésekkel foglalkozik. Az A mátrix oszlopainak egy partícióját („színezését”) $A_1, A_2, \ldots, A_k$ részre akkor nevezzük **egyenletes**nek, ha A minden a sorára érvényes, hogy a sornak az egyes A_i részekbe eső elemeinek összege minden A_i-re lényegében ugyanaz, tehát $\lfloor e_n a/k \rfloor$ vagy $\lceil e_n a/k \rceil$.

9.1.7. tétel. *Az* A *TU-mátrix oszlopainak létezik egyenletes* k*-színezése.*

Az egyenletes színezhetőség valójában jellemzi is a TU-mátrixokat.

9.1.8. tétel (Ghouila-Houri) (ejtsd: Gujla-úri)**.** *Egy Q $(0, \pm 1)$-értékű rt k mátrix akkor és csak akkor teljesen unimoduláris, ha oszlapainak bármely részhalmaza egyenletesen 2-színezhető.*

9.2. Alkalmazások páros és irányított gráfokra

A páros gráfok maximális párosításaira valamint az irányított gráfokban tekintett útakra folyamokra áramokra vonatkozó tételek hátterében a teljes unimodularitás áll. A csupa egyesből álló j-dimenziós vektort e_j jelöli, míg a $j \cdot j$-es identitás mátrixot I_j.

9.2.1. Páros gráfok

Optimális részgráfok. Először levezetjük Kőnig tételét:

9.2.1. tétel (Kőnig, 1931)**.** *A $G = (S, T; E)$ páros gráfban a független élek maximális ν száma egyenlő az éleket lefogó pontok minimális τ számával.*

Bizonyítás. A gráf pontjainak számát jelölje p az élek számát q. A páros gráf incidencia mátrixát jelölje A, amelyben a soroknak a gráf pontjai, az oszlopoknak a gráf élei felelnek meg. Ekkor tehát A egy $p \times q$ méretű $0-1$-mátrix. Tekintsük a következő primál-duál lineáris program párt:

$$\max\{e_q x : \, Ax \le e_p, \; x \ge 0\}, \tag{9.4}$$

$$\min\{e_p y : \, yA \ge e_q, \; y \ge 0\}. \tag{9.5}$$

A 9.1.5. tétel szerint mindkét programnak az optimuma egész vektoron felvétetik. Jelöljük ezeket rendre x_0-lal és y_0-lal. (9.4) minden egészértékű megoldása $0-1$ értékű, és rögtön látszik, hogy (9.5) minden optimális egészértékű megoldása is $0-1$ értékű. Legyen M azon élek halmaza, melyeken x_0 az 1 értéket vesz fel, és legyen L azon pontok halmaza, amelyeken y_0 egyet vesz fel. Az $Ax \le e_p$ feltétel azt jelenti, hogy M párosítás a gráfban, míg az $yA \ge e_q$ feltétel azt jelenti, hogy L az éleket lefogó pontrendszer. A primál és duál optimum értékek egyenlősége pedig azt jelenti, hogy $|M| = |L|$, ami a célunk volt. ■

Természetesen a primál programban az azonosan 1 célfüggvény helyett választhatunk tetszőleges c célfüggvényt. Ekkor a fenti megközelítés Egerváry tételének következő változatát adja.

9.2.2. tétel. *Páros gráfban egy párosítás maximális súlya egyenlő a*

$$\min\left\{\sum_{v\in V} \pi(v) : \, \pi \ge 0, \; \pi(u) + \pi(v) \ge c(uv) \text{ minden } uv \text{ élre}\right\}$$

értékkel. Ha c egészértékű, az optimális π is választható egészértékűnek.

Hasonlóképp kaphatjuk meg Egerváry tételét, sőt most már belefoglaljuk azt az esetet is, amikor a súlyfüggvény nem egész.

9.2.3. tétel (Egerváry, 1931). *A $G = (S, T; E)$ teljes párosítással rendelkező páros gráfban a $c \geq 0$ súlyfüggvényre vonatkozó maximális súlyú teljes párosítás ν_c súlya egyenlő a súlyozott lefogások minimális τ_c összértékével. Amennyiben G teljes páros gráf, úgy az optimális súlyozott lefogás választható nemnegatívnak is. Amennyiben c egészértékű az optimális súlyozott lefogás is választható annak.*

Mi történik, ha adott k-ra a pontosan k élű párosítások maximális súlyára szeretnénk tételt kapni? Miután egy páros gráf incidenciamátrixát egy csupa egyes sorral kiegészítve továbbra is TU-mátrixot kapunk (figyelem: csupa egyes oszloppal való kiegészítéssel nem), így a következő primál-duál lineáris program pár megadja a választ: $\max\{cx : Ax \leq e_p,\ e_q x = k\}$ és $\min\{\pi e_p + k\alpha : \pi A + \alpha e_q \geq c,\ \pi \geq 0\}$. A primál optimum tehát egészértékű, és így szükségképpen egy k elemű párosítás incidencia vektora. A duál optimum is egészértékű, feltéve, hogy c az.

Élszínezések. Közismert Kőnig élszínezési tétele, amely szerint minden Δ-reguláris páros gráf élhalmaza felbomlik Δ élidegen teljes párosításra. (Ez közvetlenül levezethető indukcióval, vagy esetleg a Hall-tételre támaszkodva). Ugyanakkor a TU-mátrixokra vonatkozó 9.1.7 egyenletes színezési tételből sokkal általánosabb eredmény nyerhető. Az élszínezési tételt néha kicsit általánosabban fogalmazzák meg: *Ha egy páros gráfban a maximális fokszám Δ, akkor az éleket meg lehet Δ színnel színezni úgy, hogy minden csúcsba különböző színű élek futnak.*

9.2.4. tétel (de Werra, 1970). *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráf éleit meg lehet k színnel úgy színezni, hogy minden v csúcsra és mindegyik j színre $(j = 1, \dots, k)$ a v-be menő $d(v)$ darab él közül $\lfloor d(v)/k \rfloor$ vagy $\lceil d(v)/k \rceil$ darab színe j. Ráadásul minden színosztály mérete választható közel egyformának, vagyis $\lfloor |E|/k \rfloor$ vagy $\lceil |E|/k \rceil$ elemszámúnak.*

Ha k-t a maximális Δ fokszámnak választjuk, akkor megkapjuk Kőnig élszínezési tételét, amely szerint páros gráf kromatikus indexe (élszínezési száma) a maximális fokszámmal egyenlő. Ha k-t a minimális δ fokszámnak választjuk, akkor Gupta egy tételét kapjuk, amely szerint G páros gráf élhalmaza felbontható δ részre úgy, hogy mindegyik rész fedi az összes pontot. ■

Párosítások pakolása. A fenti lineáris programozási megközelítést használva néhány sorban levezethető Folkman és Fulkerson [18] alábbi, kevésbé közismert tétele.

9.2.5. tétel (Folkman és Fulkerson, 1969). *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik l darab élidegen k élű párosítás, ha*

$$i_G(Z) \geq l\big(k + |Z| - |U|\big) \tag{9.6}$$

fennáll $U := S \cup T$ minden Z részhalmazára, ahol $i_G(Z)$ jelöli a Z által feszített élek számát.

9.2.2. Hálózati optimalizálás

Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, melynek $(0, 1, -1)$-es incidencia mátrixát jelölje Q. Egy $\pi : V \to \mathbf{R}$ vektort akkor neveztünk a $c : A \to \mathbf{R}$ költségfüggvényre nézve megengedett potenciálnak, ha $\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv)$ fennáll minden $uv \in A$ élre. Figyeljük meg, hogy egy π vektor pontosan akkor megengedett potenciál, ha $\pi Q \leq c$. Egy $x : A \to \mathbf{R}$ vektor pedig pontosan akkor áram, ha $Qx = 0$. Nem nehéz megmutatni, hogy Gallai a megengedett potenciál létezésére vonatkozó 1.1.2. tétele rögtön következik a Farkas lemma TU-mátrixokra vonatkozó élesebb alakjából. Hoffman 1.5.3. tétele megengedett áramok létezésére szintén könnyen levezethető.

A dualitás tétel TU-mátrixokra vonatkozó élesített alakjából könnyen kiadódik Duffin 1.1.3. tétele is. Hasonlóképp megkaphatók a minimális költségű fonatokra és ciklusokra vonatkozó 1.5.5. és 1.5.4. tételek. Ezen az úton juthatunk el az irányított kínai postás problémájának megoldásához valamint egy aciklikus digráf minimális útfedéseiről szóló tételhez is.

9.2.6. tétel. *Egy $D = (V, A)$ erősen összefüggő digráfban azon új, meglévővel párhuzamosan behúzott élek minimális száma, melyek hozzáadásával Euler-féle digráfot kapunk egyenlő a következő maximummal:*

$$\max\left\{ \sum \left[\delta(V_i) - \varrho(V_i) : i = 1, \ldots, q\right]\right\}, \tag{9.7}$$

ahol a maximum a V részhalmazaiból álló olyan $V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_q$ megengedettnek nevezett halmazláncokra megy, melyek tagjaira $\delta(V_i) - \varrho(V_i) \geq 0$, és amelyekre igaz, hogy D semelyik éle sem lép egynél több V_i halmazba.

9.2.7. tétel. *Legyen $D = (V, A)$ aciklikus digráfban $F \subseteq A$ az éleknek egy kijelölt részhalmaza, és legyen γ pozitív egész. A γ darab (nem feltétlenül élidegen) irányított úttal lefedhető F-élek maximális száma egyenlő a következő minimummal:*

$$\min\{\gamma q + \textit{az egyik } V_h\textit{-ba sem lépő } F\textit{-élek száma}\}, \tag{9.8}$$

ahol a minimum a V részhalmazainak olyan q tagú $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_q$ halmazláncaira megy, amelynek tagjaiból nem vezet ki D-beli él.

Ebből könnyen levezethető a Dilworth-tétel általánosítása, a korábban már említett Greene-féle 1.5.11. tétel is.

Algoritmus. Fontos hangsúlyozni, hogy minden olyan lineáris programozási feladat, amelynek feltételi mátrixa hálózati mátrix vagy annak transzponáltja egyszerű fogással átalakítható áram problémává. Emiatt a legolcsóbb megengedett áram kiszámítására kidolgozott algoritmus alkalmazható és így a szakaszban ismertetett valamennyi problémára létezik polinomiális futásidejű megoldó algoritmus.

9.3. Egész poliéderek

Bár a TU feltételi mátrixokra vonatkozó „egészértékű" dualitás tétel számos hálózati optimalizálási és párosítási probléma megoldásában segít, olyan korábban megismert alaptételek, mint a Lucchesi–Younger tétel, Tutte diszjunkt fa tétele vagy Nash–Williams irányítási tétele nem vezethetők le ily módon.

Természetesen vetődik fel a kérdés, hogy nem lehetne-e a teljes unimodularitási feltételt enyhíteni úgy, hogy az általa meghatározott poliéder csúcsai még mindig egész pontok (rácspontok) legyenek. Hoffman és Kruskal 9.1.6. tétele, (amely szerint ha egy mátrixhoz tartozó bizonyos poliéderek mind egészek, akkor a mátrix szükségképpen teljesen unimoduláris,) látszólag kizárja ezt a megközelítési lehetőséget.

J. Edmonds azonban a hatvanas évek elején egy forradalmian új ötlet segítségével megkerülte ezt a nehézséget. Az elképzelés a (digráf minimális kötéseiről szóló) Lucchesi–Younger tételen szemléltetve az, hogy próbáljuk meg a kötések incidencia vektorainak konvex burkát egyenlőtlenségekkel leírni, mert akkor a kapott lineáris rendszerre már alkalmazhatjuk a dualitás tételt és így a minimális kötés elemszámára (vagy költségére) egy min-max tételt nyerhetünk. A terv megvalósíthatóságának irányában biztató jel, hogy a lineáris programozás egyik alaptétele szerint $\mathbf{R}^n$-ben tetszőlegesen vett véges sok pont konvex burka előállítható véges sok féltér metszeteként, azaz leírható lineáris egyenlőtlenségekkel (röviden minden politop előáll poliéderként).

Az egyik nehézség az, hogy hiába létezik az elvi lehetőség ilyen leírásra, nem világos, hogy a keresett egyenlőtlenségeket miként lehet explicit megadni. Rádásul nagyon is valószínűtlen, hogy ez minden kombinatorikus optimalizálási problémánál sikerülhet, hiszen akkor NP-teljes problémákra is nyerhetnénk jó karakterizációt (min-max tételt).

A másik nehézség az, hogy ha még sikerülne is az egyenlőtlenségek explicit megadása, előfordulhat, hogy a gráf méretében exponenciálisan sok kell belőlük. Mármost Edmonds felismerésének a lényege az, hogy ettől önmagában nem kell megijedni: a szóbanforgó egyenlőtlenségek megadása segítségével fel tudjuk írni a dualitás tételt, és erre majd kifejleszthetünk közvetlen megoldó algoritmust, amely már nem támaszkodik az exponenciálisan sok egyenlőtlenségre.

Alapvető az egész poliéderek következő jellemzése. A tételt korlátos poliéderre A. Hoffman [42] bizonyította, míg az általános eset Edmonds és Gilestól [14] való.

9.3.1. tétel (Hoffman – 1974, Edmonds és Giles – 1977)**.** *Az* $R := \{x : Qx \leq b\}$ *nemüres poliéder* (Q, b egész) *akkor és csak akkor egész, ha minden olyan* c *egész vektorra, amelyre* $\{cx : x \in R\}$ *felülről korlátos, a* $\max\{cx : x \in R\}$ *szám egész.*

Teljesen duálisan egészértékű rendszerek. Gyakran a 9.3.1. tételt olyan módon használják, hogy valamely $\max\{cx : Qx \leq b\}$ lineáris program $\min\{by : y \geq 0, yQ = c\}$ duálisáról minden egész c-re kimutatják, hogy ha van egyáltalán optimális megoldása, akkor van ilyen egész is. Ekkor a $Qx \leq b$ rendszert **teljesen duálisan**

egészértékűnek (total dual integral: TDI) hívják. (Ez tehát az egyenlőtlenség-rendszer tulajdonsága és nem a rendszer által definiált poliéderé.) A TU mátrixról mondottak értelmében minden TU mátrixszal megadott lineáris rendszer TDI. Ki fog azonban derülni, hogy léteznek egyéb TDI rendszerek is.

Hasznos W. Cook [4] alábbi eredménye, amely azt mondja ki, hogy ha egy TDI rendszer egyik egyenlőtlenségét egyenlőséggel helyettesítjük, akkor továbbra is TDI rendszert kapunk.

9.3.2. tétel (Cook, 1983)**.** *Amennyiben a* $\{Qx \leq b,\, qx \leq \beta\}$ *rendszer TDI* (ahol Q, q, b, β egész), *úgy a* $\{Qx \leq b,\, qx = \beta\}$ *rendszer is TDI.*

Megjegyzés. A TDI-ség definíciója és a 9.3.1. tétel a dualitás tétellel karöltve egy rövid szóhasználatot tesz lehetővé. Ahelyett például, hogy explicit megfogalmaznánk Egerváry 1.3.4. tételét elég csak annyit mondanunk, hogy az $\{Ax = b,\, x \geq 0\}$ rendszer TDI, ahol A a páros gráf incidencia mátrixa. Ebből ugyanis már a dualitás tétel és az egészértékűség miatt az Egerváry tétel kiolvasható. Ezért a továbbiakban már (kivételektől eltekintve) nem fogalmazzuk meg a szóbanforgó (egészértékű) min-max tételt, csupán annyit mondunk, hogy a szóbanforgó rendszer TDI.

10. Polimatroidok és általánosításaik

10.1. Általánosított polimatroidok

Edmonds két nagy területen kezdte el kidolgozni az általa felvázolt programot. Az egyik a nem-páros gráfok párosításainak elmélete, a másik a szubmoduláris függvényeké. Az elsőben a paritás fogalma központi szerepet játszik, így ennek bemutatása a jelen írásnak nem célja. Ugyanakkor viszonylag részletesen áttekintjük a szub- és szupermoduláris függvényekhez kapcsolódó egész poliédereket, az ezekre vonatkozó fő eredményeket és alkalmazásokat.

10.1.1. Matroidok poliéderei

A legegyszerűbb egész poliéderek, melyek nem írhatók le TU mátrixokkal matroidokkal kapcsolatosak. Edmonds [9] poliéderként meghatározta egy $M = (S, r)$ matroid független részhalmazainak a $P(r)$ és a bázisainak a $B(r)$ konvex burkát.

10.1.1. tétel (Edmonds, 1970)**.** $P(r) = \big\{x \in \mathbf{R}^S : x \geq 0,\ x(Z) \leq r(Z)$ *minden* $Z \subseteq S$-re$\big\}$ *és* $B(r) = \big\{x \in \mathbf{R}^S : x \geq 0,\ x(Z) \leq r(Z)$ *minden* $Z \subseteq S$-re *és* $x(S) = r(S)\big\}$.

Valójában Edmonds többet bizonyított:

10.1.2. tétel. *Az* $\big\{x \geq 0,\, x(Z) \leq r(Z)$ *minden* $Z \subseteq S$-re$\big\}$ *lineáris rendszer TDI.*

A bizonyítás a matroid mohó algoritmusból könnyen kiolvasható. Sokkal mélyebb a matroid metszet-tételt is magában foglaló következő eredmény.

10.1.3. tétel (Edmonds)**.** *Legyen $M_1 = (S, r_1)$ és $M_2 = (S, r_2)$ két matroid. Ekkor az*

$$\text{(10.1)} \qquad \Big\{x \geq 0,\ x(Z) \leq \min\big\{r_1(Z), r_2(Z)\big\} \text{ minden } Z \subseteq S\text{-re}\Big\}$$

rendszer TDI. Ha a két matroidnak van közös bázisa, úgy az

$$\text{(10.2)} \qquad \Big\{x \geq 0,\ x(S) = r_1(S), x(Z) \leq \min\big\{r_1(Z), r_2(Z)\big\} \text{ minden } Z \subseteq S\text{-re}\Big\}$$

rendszer TDI.

Ebből következik (a 9.3.1. tétel segítségével), hogy a két matroid közös független halmazainak politopját a (10.1) rendszer írja le, míg a közös bázisokét a (10.2). A közös bázisok, illetve függetlenek politopjainak ez a leírása azért rendkívül fontos, mert ennek birtokában már használhatjuk a lineáris programozás dualitás tételét és az optimalitási kritériumokat. Ezek nélkül nehezen volna elképzelhető bármilyen súlyozott matroidmetszet algoritmus. Olvassuk ki (a dualitás tétel segítségével) Edmonds súlyozott matroid metszet-tételét [9].

10.1.4. tétel (Edmonds, 1970)**.** *Legyen $M_1 = (S, r_1)$ és $M_2 = (S, r_2)$ két matroid és $c : S \to \mathbf{R}+$ súlyfüggvény. A maximális súlyú közös független halmaz súlya egyenlő a*

$$\text{(10.3)} \qquad \min\Big\{\sum\big[y_1(Z)r_1(Z) + y_2(Z)r_2(Z) :\ Z \subseteq S\big]\Big\}$$

értékkel, ahol a minimum az olyan $y_i : 2^S \to \mathbf{R}_+$ $(i = 1, 2)$ nemnegatív vektorokra megy, melyekre

$$\text{(10.4)} \qquad \sum\big[y_1(Z) + y_2(Z) :\ s \in Z\big] \geq c(s) \text{ minden } s \in S\text{-re}].$$

Az optimális (y_1, y_2) választható úgy, hogy mind a $\big\{Z : y_1(Z) > 0\big\}$, mind a $\big\{Z : y_2(Z) > 0\big\}$ halmazrendszer halmazlánc legyen. Ha c egészértékű, az optimális (y_1, y_2) is választható egészértékűnek.

A $c \equiv 1$ speciális esetben megkapjuk a 7.2.4 matroid metszet-tételt. Analóg tétel érvényes a közös bázisok maximális súlyára.

10.1.5. tétel (Edmonds, 1970)**.** *Legyen $M_1 = (S, r_1)$ és $M_2 = (S, r_2)$ két olyan matroid, melyeknek van közös bázisa, és legyen $c : S \to \mathbf{R}$ súlyfüggvény. A maximális súlyú közös bázis súlya egyenlő a $\min\Big\{\sum\big[y_1(Z)r_1(Z) + y_2(Z)r_2(Z) :\ Z \subseteq S\big] : y_1 : 2^S \to \mathbf{R},\ y_2 : 2^S \to \mathbf{R},\ \sum\big[y_1(Z) + y_2(Z) :\ s \in Z\big] \geq c(s) \text{ minden } s \in S\text{-re}\big]\Big\}$. Az optimális (y_1, y_2) választható úgy, hogy mind a $\big\{Z : y_1(Z) = 0\big\}$, mind a $\big\{Z : y_2(Z) = 0\big\}$ halmazrendszer halmazlánc. Ha c egészértékű, az optimális (y_1, y_2) is választható egészértékűnek.*

A 7.2.6. tételben egyszerűbb (bár a 10.1.5. tételből is levezethető) formula szerepelt a közös bázisok maximális súlyára.

10.1.2. Szub- és szupermoduláris függvények poliéderei

A gráfelméletben gyakran tűnnek fel olyan szubmoduláris függvények, melyek nem matroid rangfüggvényei. Például, a $G = (S, T; E)$ páros gráfban az S részhalmazain értelmezhetjük a $\left|\Gamma(X)\right|$ függvényt, ahol $\Gamma(X)$ jelöli az $X \subseteq S$ halmaz T-beli szomszédainak halmazát. Nem nehéz kimutatni, hogy ez a halmazfüggvény szubmoduláris, monoton növő (azaz $X \subseteq Y \subseteq S$ esetén $\left|\Gamma(X)\right| \leq \left|\Gamma(Y)\right|$) és persze az üres halmazon nulla. Ugyanakkor $\left|\Gamma(X)\right|$ tipikusan nem szubkardinális. Találkozhatunk olyan szubmoduláris függvényekkel is, amelyek még csak nem is monotonak (például egy irányított gráf csúcsainak részhalmazain értelmezett ϱ befok függvény). Még az is előfordulhat, hogy a függvény nem minden részhalmazon értelmezett, a $\pm\infty$ értéket is felveheti, vagy hogy a szubmodularitás nem minden halmazpárra teljesül.

Az alábbiakban a matroid poliédereknél általánosabb, szub- vagy szupermoduláris függvényekkel definiálható poliédereket vizsgálunk. Hacsak az ellenkezőjét nem mondjuk, végig feltesszük, hogy valamennyi szóbanforgó p és b függvény egészértékű. Adott p és b halmazfüggvényekre definiáljuk az alábbi poliédereket, melyeknél a $B(b)$ és $B'(p)$ definíciójában feltesszük, hogy $b(S)$, illetve $p(S)$ véges értékű.

$$P(b) := \left\{x \in R^S : x \geq 0,\ x(A) \leq b(A) \text{ minden } A \subseteq S\right\}$$

$$S(b) := \left\{x \in R^S : x(A) \leq b(A) \text{ minden } A \subseteq S\right\}$$

$$B(b) := \left\{x \in R^S : x(S) = b(S),\ x(A) \leq b(A) \text{ minden } A \subseteq S\right\}$$

$$C(p) := \left\{x \in R^S : x \geq 0,\ x(A) \geq p(A) \text{ minden } A \subseteq S\right\}$$

$$S'(p) := \left\{x \in R^S : x(A) \geq p(A) \text{ minden } A \subseteq S\right\}$$

$$B'(p) := \left\{x \in R^S : x(S) = p(S),\ x(A) \geq p(A) \text{ minden } A \subseteq S\right\}.$$

A b és p függvényeket a szóbanforgó poliéderek (felső, illetve alsó) **határfüggvény**einek nevezzük. Ha b polimatroid-függvény, $P(b)$-t **polimatroid**nak hívjuk. Az üres halmazt is polimatroidnak tekintjük. Ha b teljesen szubmoduláris, $S(b)$ **szubmoduláris poliéder.** (Bár nem igazán szerencsés, hogy az alaphalmaz és a szubmoduláris poliéder jelölésére is ugyanazt az S betűt használjuk, remélhetőleg eme megjegyzés nyomán ez mégsem fog zavart okozni.) Ha b teljesen szubmoduláris és $b(S)$ véges, $B(b)$ **bázis-poliéder.** Az üres halmazt is bázis-poliédernek tekintjük. Amennyiben $b(S) = 0$, **0-bázis-poliéder**ről beszélünk. Szupermoduláris p esetén, ha $p(S)$ véges, akkor a $\overline{p}(X) := p(S) - p(S - X)$ által definiált $\overline{p}$ komplementer függvény szubmoduláris, (amelyre $\overline{p}(\emptyset) = 0$ és $\overline{p}(S) = p(S)$), és könnyen láthatóan $B(\overline{p}) = B'(p)$. Emiatt a $B'(p)$ poliédert is bázis-poliédernek fogjuk hívni. Amint kiderül, $B(b)$ keresztező szubmoduláris b függvény esetén is (esetleg üres) bázis-poliédert alkot.

Ha p teljesen szupermoduláris, $S'(p)$ **szupermoduláris poliéder.** Ha ráadásul p nemnegatív (amiből következik, hogy véges értékű és monoton növő), úgy az $S'(p)$ szupermoduláris poliéder neve **kontra-polimatroid.**

A polimatroid fogalma Edmondstól származik [9]. A 10.1.1. tétel szerint egy matroid függetlenjeinek politopja (a rangfüggvényhez tartozó) polimatroid.

Általánosabb konstrukcióhoz jutunk az aggregálás segítségével. Egy $\mathbf{R}^S$-beli halmaz Q **aggregált**ját egy $\varphi : S \to S'$ leképezés segítségével definiáljuk. Ez meghatározza az S egy $\{S_1, \dots, S_q\}$ partícióját, ahol S_i jelöli azon $v \in S$ elemek halmazát, melyekre $\varphi(v) = s_i$ és $S' := \{s_1, \dots, s_q\}$. Egy x vektor $x' = \varphi(x)$ aggregáltjára $x'(s') := \sum \big[x(s) : s \in \varphi^{-1}(s')\big] \quad (s \in S')$. Egy $R \subseteq \mathbf{R}^S$ halmaz $\varphi(Q)$ aggregáltján a Q elemeinek aggregáltjaiból álló halmazt értjük, azaz $\varphi(R) := \big\{\varphi(x) : x \in R\big\}$. Végül egy S-en értelmezett b halmazfüggvény $\varphi(b) = b'$ aggregáltját a $b'(X) := b\big(\varphi^{-}(X)\big)$ formula definiálja.

Igazolható, hogy egy matroid poliéder aggregáltja polimatroid és Lovász [50] megmutatta igazolta ennek egy megfordítását is.

10.1.6. tétel (Lovász, 1977)**.** *Minden polimatroid egy matroid poliéder aggregáltja.*

Matroidos ideákat általánosítva Edmonds kidolgozta az olyan polimatroidokra vonatkozó alaperedményeket, mint a mohó algoritmus vagy a polimatroid metszettétel. Azt is kimutatta, hogy egy P nemüres polimatroid egyértelműen meghatározza a határfüggvényét, nevezetesen $b(Z) = \max\big\{x(Z) : x \in P\big\}$. Belátta továbbá, hogy egy polimatroid metszete a $0-1$ egységkockával egy matroid poliédere.

Később a fenti rokon poliéderekre is a polimatroidokra vonatkozó tételekhez hasonló eredményeket igazoltak, így az egységes tárgyalás érdekében érdemes a polimatroid fogalmát kissé kiterjeszteni. Adott p és b halmazfüggvényekre tekintsük a következő poliédert.

$$Q(p, b) := \big\{x \in R^S : p(A) \le x(A) \le b(A) \text{ minden } A \subseteq S\big\}\text{-re.} \tag{10.5}$$

A [22] dolgozatban került bevezetésre az általánosított polimatroid fogalma. Azt mondjuk, hogy a (p, b) halmazfüggvényekből álló pár **paramoduláris** (vagy röviden **erős pár,** ha p teljesen szupermoduláris, b teljesen szubmoduláris és **összeillők** (compliant), azaz a

$$b(X) - p(Y) \ge b(X - Y) - p(Y - X) \tag{10.6}$$

kereszt-egyenlőtlenség fennáll minden $X, Y \subseteq S$ halmazra. Ha (p, b) paramoduláris párra $Q(p, b)$ poliédert **általánosított polimatroid**nak (vagy röviden g-**polimatroid**nak nevezzük.) Megállapodás szerint az üres halmazt is g-polimatroidnak tekintjük (bár ez nem definiálható paramoduláris párral). A (p, b) pár a Q **határpár**ja, p a Q **alsó,** b pedig a **felső határfüggvény**e.

10.1.7. tétel. *Paramoduláris* (p, b) *pár által definiált* $Q = Q(p, b)$ *g-polimatroid nemüres és egyértelműen meghatározza az őt definiáló paramoduláris párt, éspedig*

$$b(Z) = \max\left\{x(Z) : x \in Q\right\} \quad \text{és} \quad p(Z) = \min\left\{x(Z) : x \in Q\right\}. \tag{10.7}$$

Egészértékű (p, b) *esetén az optimalizáló* x *is választható egésznek.*

10.1.3. Példák és alaperedmények

Adott $f : S \to \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$ és $g : S \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ egészértékű függvényekre, melyekre $f \leq g$, a $T(f, g) := \{x \in \mathbf{R}^S : f \leq x \leq g\}$ tégla g-polimatroid. Adott $\alpha \leq \beta$ egészekre a $\left\{x \in \mathbf{R}^S : \alpha \leq x(X) \leq \beta\right\}$ sáv g-polimatroid. Valójában több is igaz.

10.1.8. tétel. *A* $Q(p, b)$ *g-polimatroid és a* $T(f, g)$ *tégla* M *metszete g-polimatroid. Ha* M *nemüres, akkor az* M (p', b') *határpárja a következő:*

$$p'(Z) = \max\left\{p(X) - g(X - Z) + f(Z - X) : X \subseteq S\right\}, \tag{10.8}$$

$$b'(Z) = \min\left\{b(X) - f(X - Z) + g(Z - X) : X \subseteq S\right\}. \tag{10.9}$$

10.1.9. tétel. *Az* $M := Q(p, b) \cap K(\alpha, \beta)$ *metszet g-polimatroid. Ha* M *nemüres, akkor az* M (p', b') *határpárja a következő.*

$$p'(Z) := \max\left\{p(Z),\ \alpha - b(S - Z)\right\} \tag{10.10}$$

és

$$b'(Z) := \min\left\{b(Z),\ \beta - p(S - Z)\right\}. \tag{10.11}$$

Matroidok bázisaiból. Legyen M egy r rang- és t ko-rang függvényű matroid S-en és legyen $\{S_1, \ldots, S_q\}$ az S egy részpartíciója. A q elemű S' halmazon értelmezett $z(i)$ $i \in S')$ vektort nevezzünk **metszet-vektor**nak, ha M-nek van olyan B bázisa, amelyre $z(i) = |B \cap S_i|$ $(i \in S')$. A metszet-vektorok politopja nem más, mint $P(M)$ poliéder aggregáltja és így g-polimatroid, melyet a (p_M, b_M) paramoduláris pár definiál, ahol az $X \subseteq S'$ halmazra legyen $b_M(X) := r\big(\cup[S_i : i \in X]\big)$ és $p_M(X) := t\big(\cup[S_i : i \in X]\big)$.

Speciális esetben kapjuk, hogy ha $S \subset V$ a $G = (V, E)$ összefüggő gráf egy stabil ponthalmaza és minden feszítő fához tekintjük a fa S-beli fokszámainak vektorát, akkor ezen vektorok konvex burka g-polimatroid.

Irányításokból. Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf. Egy $m : V \to \mathbf{Z}$ egészértékű vektort **befok vektor**nak nevezünk, ha G-nek létezik olyan irányítása, amelyben minden v pont befoka $m(v)$. A 3.1.5. irányítási lemmából tudjuk, hogy adott $m : V \to \mathbf{Z}$ vektor akkor és csak akkor befok vektor, ha $m(V) = |E|$ és $m(X) \geq i(X)$ minden $X \subseteq V$-re, vagy ekvivalensen $m(Y) \leq e(Y)$ minden $Y \subseteq V$-re, ahol $i(X)$ az X által feszített élek száma, míg $e(Y)$ azon éleké, melyek egyik vége legalább X-ben van. Ebből kiolvasható az alábbi.

10.1.10. tétel. *Legyen $S \subseteq V$ adott részhalmaz. Egy $G = (V, E)$ gráf irányításainak befok-vektorai az S-re megszorítva egy g-polimatroidot feszítenek, melynek definiáló erős párja $(i_G \mid S, e_G \mid S)$. Speciálisan, az irányítások befok-vektorai bázispoliédert feszítenek.*

Az alábbi tétel [22] mutatja, hogy az általánosított polimatroid fogalma rászolgál a nevére.

10.1.11. tétel. *Polimatroid, szubmoduláris poliéder, kontra-polimatroid, bázispoliéder mindegyike g-polimatroid. Egy g-polimatroid oldala, vektorral való eltoltja, tengely menti vetülete, origóra való tükörképe, egy $\{x \in \mathbf{R}^S : f \leq x \leq g\}$ téglával való metszete és egy $\{x \in \mathbf{R}^S : \alpha \leq x(S) \leq \beta\}$ alakú sávval való metszete is g-polimatroid.*

Bár a g-polimatroid fogalma nagy rugalmasságot tesz lehetővé, tartalmilag nem sokkal általánosabb a polimatroidnál [26]:

10.1.12. tétel. *Minden g-polimatroid egy eggyel magasabb dimenziós* 0*-bázispoliéder tengelymenti vetülete. Minden 0-bázis-poliéder megkapható egy matroid bázisainak poliéderéből eltolással és homomorf kép képzéssel.*

10.1.4. Aggregált, összeg, metszet

A matroidoknál megismert homomorfia, metszet és összegtételek kiterjeszthetők g-polimatroidokra.

Aggregálás.

10.1.13. tétel (Aggregálási tétel)**.** *Ha (p, b) paramoduláris, akkor a $Q = (p, b)$ g-polimatroid aggregáltja g-polimatroid, melynek határpárja $(\varphi(p), \varphi(b))$, azaz $\varphi(Q) = Q(\varphi(p), \varphi(b))$. Ráadásul, ha p és b egészértékű, úgy $Q(\varphi(p), \varphi(b))$ minden x' egész eleme előáll egy egész $x \in Q$ elem képeként.*

Megjegyzendő, hogy egy matroid homomorf képének poliédere nem más, mint a matroid poliéderének aggregáltja elmetszve a $0-1$ kockával.

Legyen M matroid az S alaphalmazon r rang- és t ko-rangfüggvényel. Legyen $\mathcal{P} := \{S_1, \ldots, S_q\}$ az alaphalmaz egy részpartíciója. Az $(m_1, \ldots, m_q)$ vektort **bázis-vetület**nek mondjuk, ha létezik M-nek olyan B bázisa, melyre $|B \cap S_i| = m_i$ minden $i = 1, \ldots, q$-ra.

10.1.14. következmény. *Egy $(m_1, \ldots, m_q)$ egész vektor akkor és csak akkor bázisvetület, ha az m bármely j komponensének összege legalább $t(X)$ és legfeljebb $r(X)$, ahol X a j komponensnek megfelelő j darab S_i halmaz uniója. A bázis-vetületek egy g-polimatroid* (éspedig a $B(r)$ aggregáltja vetületének) *egész pontjai.*

Összeg. Emlékeztetünk, hogy az $R_1, \ldots, R_k$ $\mathbf{R}^S$-beli halmazok összegén (néha Minkowski összegén) azon elemek halmazát értik, melyek előállnak az R_i-kből vett egy-egy elem összegeként. Adott (p_i, b_i) $(i = 1, \ldots, k)$ paramoduláris párok összege nyilván paramoduláris.

10.1.15. tétel (Összegtétel)**.** *$\sum_i Q(p_i, b_i) = Q(\sum_i p_i, \sum_i b_i)$. Ráadásul, ha mindegyik p_i, b_i egészértékű, akkor $Q\big(\sum_i p_i, \sum_i b_i\big)$ minden egész eleme előáll a Q_i-kből vett egy-egy egész elem összegeként.*

Hogyan viszonylik a matroid összeg fogalma a polimatroid összeghez? Egy $P(b)$ polimatroid metszete a $T(0,1)$ egységkockával egy matroid függetlenjeinek poliéderét alkotja, amely matroidban egy $F \subseteq S$ halmaz akkor és csak akkor független, ha $x = \chi_F$ benne van $P(b')$-ben. Ez azzal ekvivalens, hogy $|F \cap X| \leq b(X)$ minden $X \subseteq F$-re. Amennyiben a b polimatroid függvény k matroid rangfüggvényének az összege, úgy a kapott matroid éppen a k matroid összege.

Metszet. Edmonds [9] kiterjesztette matroid metszet-tételét polimatroidokra is. Ezt rögtön g-polimatroidokra fogalmazzuk meg.

10.1.16. tétel (G-polimatroid metszet-tétel)**.** *A (p_1, b_1) és (p_2, b_2) paramoduláris párok által definiált $Q_1 := Q(p_1, b_1)$, illetve $Q_2 := Q(p_2, b_2)$ g-polimatroidok $M := Q_1 \cap Q_2$ metszete akkor és csak akkor nemüres, ha*

$$p_1 \leq b_2 \ \text{ és } \ p_2 \leq b_1. \tag{10.12}$$

Ha M nemüres, akkor tartalmaz egész pontot.

Figyeljük meg, hogy a metszet tételt egy $Q_1 = S(b)$ szubmoduláris és egy $Q_2 = S'(p)$ szupermoduláris poliéderre alkalmazva éppen a 7.1.5. diszkrét szeparációs tételhez jutunk. Ugyanakkor egyszerű konstrukció segítségével megmutatható, hogy a szeparációs tétel is implikálja a a 10.1.16. tételt. Kiderül azonban [22], hogy a metszet nem csak hogy tartalmaz egész pontot, hanem valójában egész poliéder, sőt a leíró egyenlőtlenség rendszer TDI.

10.1.17. tétel. *Ha (p_1, b_1) és (p_2, b_2) paramoduláris párok, akkor a*

$$\big\{p_1(Z) \leq x(Z) \leq b_1(Z),\ p_2(Z) \leq x(Z) \leq b_2(Z)\big\} \text{ minden } Z \subseteq S\text{-re}\} \tag{10.13}$$

rendszer TDI. Speciálisan, a $Q(p_1, b_1) \cap Q(p_2, b_2)$ metszet poliéder egész.

10.1.5. G-polimatroidok lánctulajdonsága

A metszet-tétel speciális eseteként megadható, hogy egy g-polimatroid metszete téglával és sávval mikor nemüres.

10.1.18. tétel. *Legyen (p, b) paramoduláris pár és legyen $\alpha \leq \beta$ két szám* (ahol α lehet $-\infty$, β pedig ∞). *Tegyük fel az $f : S \to \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$, $g : S \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ függvényekre, hogy $f \leq g$. Az $M := Q(p, b) \cap T(f, g) \cap K(\alpha, \beta)$ metszet pontosan akkor nemüres, ha*

$$f(X) \leq b(X) \ \text{ és } \ f(X) \leq \beta - p(S - X) \ \text{ minden } X \subseteq S\text{-re} \tag{10.14}$$

és

$$g(X) \geq p(X) \ \text{ és } \ g(X) \geq \alpha - b(S - X) \ \text{ minden } X \subseteq S\text{-re.} \tag{10.15}$$

A tételből kiolvasható a lánctulajdonság erős alakja. Látni fogjuk, hogy a korábban irányításoknál és növeléseknél felbukkant láncszabály hátterében ez a tétel áll.

10.1.19. tétel (Erős lánctulajdonság)**.** *Ha egy $Q(p,b)$ g-polimatroidnak létezik olyan x eleme, amelyre $x' \geq f$ és $x'(S) \leq \beta$, továbbá létezik olyan x'' eleme, amelyre $x'' \leq g$ és $x''(S) \geq \alpha$, akkor olyan x eleme is létezik, amelyre $f \leq x \leq g$ és $\alpha \leq x(S) \leq \beta$. Ha p, b, f, g, α, β mindegyike egészértékű, úgy x is választható annak.*

Az $f \equiv -\infty$, $\alpha = -\infty$ esetben kapjuk a következőt.

10.1.20. következmény. *Ha egy g-polimatroidnak létezik olyan x eleme, amelyre $x'(S) \leq \beta$, továbbá létezik olyan x'' eleme, amelyre $x'' \leq g$, akkor létezik olyan x eleme is, amelyre $x(S) \leq \beta$ és $x \leq g$.*

Az $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$ esetben következőt adja.

10.1.21. következmény (Lánctulajdonság)**.** *Ha létezik a Q g-polimatroidnak olyan x' eleme, melyre $x' \geq f$ és létezik Q-nak olyan x'' eleme, amelyre $x'' \leq g$ eleme, akkor létezik olyan x eleme is, amelyre $f \leq x \leq g$. Ha p, b, f, g mindegyike egészértékű, úgy x is választható annak.*

Matroid metszet-vektorai. A 10.1.3. szakaszban említettük, hogy egy matroid metszet-vektorai g-polimatroidot feszítenek. Ezt a 10.1.18. tétellel kombinálva megkapjuk 7.2.5. tételt. Valójában még általánosabban olyan független halmaz létezését is jellemezhetjük, amelynek elemszáma α és β közé esik, továbbá S egy adott partíciójának minden X tagjával való metszete legalább $f(X)$ és legfeljebb $g(X)$ elemű.

10.1.6. A mohó algoritmus

A mohó algoritmus bázis-poliéderen. Edmonds megfigyelte, hogy a matroidokra vonatkozó mohó algoritmus kiterjeszthető polimatroidokra is. Az alábbiakban Edmonds eredményét bázis-poliéderekre ismertetjük. Legyen b teljesen szubmoduláris és véges értékű. Adott $c: S \to \mathbf{R}$ vektorra tekintsük a $\max\{cx : x \in B(b)\}$ optimalizálási feladatot. Ez nem más, mint a

$$\max\{cx : x(S) = b(S) \text{ és minden } Z \subset S\text{-re } x(Z) \leq b(Z)\} \tag{10.16}$$

lineáris program, amelynek duálisa:

$$\min\{yb : y \in D(c)\}, \tag{10.17}$$

ahol $yb := \sum_{Z \subseteq S} y(Z)b(Z)$ és

$$D(c) := \left\{ y \in \mathbf{R}^{2^S} : y(Z) \geq 0, \text{ ha } Z = S, \text{ és } \sum_{Z \subseteq S} y_Z \chi_Z = c \right\} \tag{10.18}$$

a duális poliéder.

Feltehető, hogy c komponensei nagyság szerint csökkenő sorrendben vannak elrendezve, azaz $c(s_1) \geq c(s_2) \geq \cdots \geq c(s_n)$. Jelölje S_i az első i elem halmazát. Definiáljuk az x_{mo} vektort a következőképp.

(10.19) $\quad x_{mo}(s_1) := b(s_1),$ és $i = 2, \ldots, n$-re $x_{mo}(s_i) := b(S_i) - b(S_{i-1}).$

Definiáljuk az y^* vektort a következőképp.

(10.20) $\quad y^*(S_n) := c(s_n),$ és $i = 1, 2, \ldots, n-1$-re $y^*(S_i) := c(s_i) - c(s_{i+1})$

és S tetszőleges más részhalmazán legyen $y^*(Z) := 0$.

10.1.22. tétel. *x_{mo} optimális megoldása az (10.16) primál programnak, y^* optimális megoldása a (10.17) duál programnak.*

A mohó algoritmus geometriailag. Előfordulhat, hogy a B bázis-poliéder nem teljesen szubmoduláris függvénnyel van megadva. Ekkor a fenti algoritmust nem tudjuk közvetlenül használni. Mégis a mohó algoritmus következő interpretációja sokszor segíthet.

A célfüggvény által meghatározott csökkenő sorrendben végigmegyünk az elemeken és egymás után megállapítjuk az $x(s_i)$ értékeket. Az aktuális $x_i = x(s_i)$ értéket a lehető legnagyobbra választjuk úgy, hogy létezzék olyan $(x_1, \ldots, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)$ vektor $B(b)$-ben. Itt $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ a már kiszámított komponenseket jelöli. Ennek az értelmezésnek az az előnye, hogy független attól, hogy a bázis-poliéder milyen formában van megadva és így reményt nyújt arra, hogy az aktuális x_i-t esetleg akkor is ki tudjuk számolni, ha az egyértelmű definiáló teljesen szubmoduláris függvény nem áll rendelkezésre.

A mohó algoritmus más g-polimatroidokon. Mi a helyzet, ha szubmoduláris poliéder felett akarjuk cx célfüggvény maximumát megkeresni? Az (10.16) maximalizálási probléma duálisában az $y(S)$ kivételével minden $y(Z)$ változóra nem-negativitást követeltünk. Az algoritmus szerinti $y^*(S)$ pontosan akkor lesz negatív, ha a célfüggvény legkisebb, $c(s_n)$ komponense negatív. Amennyiben az $S(b)$ szubmoduláris poliéder felett akarjuk maximalizálni cx-t és $c(s_n) \geq 0$, úgy a fent kapott primál és duál megoldás erre is jó lesz. Ha viszont $c(s_n) < 0$, akkor a $\max\{cx : x \in S(b)\}$ feladat nem is korlátos felülről, hiszen $S(b)$ tetszőleges x eleméből kiindulva az $x(s_n)$ komponenst tetszőlegesen csökkenthetjük és ezzel a célfüggvény értéke is tetszőlegesen naggyá válhat.

Tudjuk, hogy kontra-polimatroid (is) előáll bázis-poliéder vetületeként, ezért a mohó algoritmust erre is át lehet fogalmazni. Most minimalizálni akarjuk a cx célfüggvényt a C kontra-polimatroid felett, ezért az előbbi algoritmus így hangzik. Rendezzük c szerint csökkenő sorrendbe az S elemeit. Az aktuális $x_i = x(s_i)$ értéket a lehető legkisebbre választjuk úgy, hogy létezzék $(x_1, \ldots, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)$ vektor C-ben. (Ez a mohó algoritmus a közismert Kruskal féle algoritmus „óvatos" változatának felel meg, ahol egy összefüggő gráf minimális költségű feszítő fájának meghatározása úgy történik, hogy minden lépésben a legdrágább élt hagyjuk ki a gráfból csak arra ügyelve, hogy összefüggő maradjon.)

Hogyan tudjuk meghatározni az aktuális s_i-re a minimális $x(s_i)$ értéket? Egy egyszerű megfigyelés segít. Jelölje k a $p(X)$ maximális értéket. Könnyű igazolni, hogy ha $(x_1,\dots,x_i,y_{i+1},\dots,y_n)$ benne van C-ben, akkor $(x_1,\dots,x_i,k,k,\dots,k)$ is benne van. Ennek megfelelően a mohó algoritmus úgy módosul, hogy az aktuális x_i-t minimálisra választjuk arra való tekintettel, hogy $(x_1,\dots,x_i,k,k,\dots,k)$ benne van C-ben.

10.2. A szubmodularitás gyengítése

10.2.1. Jórészt szub- és szupermoduláris függvények

A g-polimatroidokra bemutatott eredmények széleskörű felhasználását az teszi lehetővé, hogy g-polimatroidokat nem csak paramoduláris párral lehet definiálni, hanem olyan függvényekkel is, melyekre a szub- vagy szupermodularitási egyenlőtlenséget nem minden $\{X,Y\}$ halmazpárra teljesül. Mindez annak mintájára, ahogy a 7.2.12. tétel révén metsző szubmoduláris függvények segítségével lehetett matroidokat definiálni.

Egy (p,b) halmazpárt **metsző** vagy **metsző paramoduláris**nak mondunk, ha mind b, mind $-p$ metsző szubmoduláris és átmetsző halmazpárokra fennáll a kereszt-egyenlőtlenség (X ás Y **átmetsző**, ha $X-Y$, $Y-X$, $X\cap Y$ egyike sem üres). Azt mondjuk, hogy a p nem-negatív függvény **pozitívan metsző szupermoduláris**, ha $p(X)>0, p(Y)>0$ és $X\cap Y\neq\emptyset$ esetén $p(X)+p(Y)\leq p(X\cap Y)+p(X\cup Y)$. A p-t **ferdén szupermoduláris**nak mondjuk, ha nemnegatív és minden $X,Y\subseteq S$-re, amelyre $p(X)>0, p(Y)>0$, a következő egyenlőtlenségek közül legalább az egyik teljesül:

$$p(X)+p(Y)\leq p(X\cap Y)+p(X\cup Y),$$

$$p(X)+p(Y)\leq p(X-Y)+p(Y-X).$$

Ebből látszik, hogy pozitívan metsző szupermoduláris függvény ferdén szupermoduláris.

10.2.1. tétel. *Ha (p,b) metsző paramoduláris pár, akkor $Q(p,b)$ g-polimatroid. Ha b és p keresztező szubmoduláris, illetve szupermoduláris függvény, akkor $B(b)$ és $B'(p)$ is g-polimatroid. Ha p ferdén szupermoduláris, akkor $C(p)$ g-polimatroid* (éspedig kontra-polimatroid).

Érdemes azonban a metsző szub- és szuper- és paramodularitás fogalmát még tovább gyengíteni. Az $X\subseteq S$ részhalmazt a b halmazfüggvényre nézve **alulról b-szeparálható**nak nevezzük (rövidebben alulról szeparálható), ha X felbontható olyan nemüres, diszjunkt $X_1,X_2,\dots,X_t$ részhalmazok egyesítésére, melyekre $\sum_i b(X_i)\leq b(X)$. Azt mondjuk, hogy b **jórészt szubmoduláris**, ha bármely két alulról lényeges X,Y halmazra, melyekre $X\cap Y\neq\emptyset$, fennáll a szubmodularitási egyenlőtlenség. Például metsző szubmoduláris függvény jórészt szubmoduláris. Analóg módon beszélhetünk egy p halmazfüggvény esetén arról, hogy az X halmaz

felülről p**-szeparálható** és hogy p **jórészt szupermoduláris**. Amennyiben a szövegösszefüggésből világos, az alulról vagy felülről jelzőket kihagyjuk. Végül, azt mondjuk, hogy a (p, b) pár **jórészt paramoduláris**, ha p és b jórészt szuper-, illetve szubmoduláris és a kereszt-egyenlőtlenség teljesül minden olyan átmetsző X, Y halmazpárra, melyre X alulról nem b-szeparálható és Y felülről nem p-szeparálható.

Nem nehéz igazolni, hogy szimmetrikus és pozitívan keresztező szupermoduláris függvény ferdén szupermoduláris, továbbá ferdén szupermoduláris függvény jórészt szupermoduláris.

10.2.2. Reszelés

Bemutatunk egy fontos konstrukciót, a reszelést (Dilworth truncation), amely egy jórészt szubmoduláris függvényből teljesen szubmodulárisat hoz létre. A b jórészt szubmoduláris függvény $b^\vee$ (**alsó**) **reszelt**jén a következő halmazfüggvényt értjük:

$$b^\vee(Z) := \min\left\{\sum_i^t b(X_i) : \{X_1, \ldots, X_t\} \text{ a } Z \text{ partíciója, } t \geq 1\right\}. \tag{10.21}$$

Mivel most az egytagú $\{Z\}$ is a Z partíciójának számít, így $b^\vee \leq b$.

A p jórészt szupermoduláris függvény $p^\wedge$ (**felső**) **reszelt**jén a következő halmazfüggvényt értjük:

$$p^\wedge(Z) := \max\left\{\sum_i^t p(X_i) : \{X_1, \ldots, X_t\} \text{ a } Z \text{ partíciója, } t \geq 1\right\}. \tag{10.22}$$

Mivel most az egytagú $\{Z\}$ is az Z partíciójának számít, így $p^\wedge \geq p$.

10.2.2. tétel (Reszelési tétel)**.** *Jórészt szubmoduláris b függvény $b^\vee$ reszeltje teljesen szubmoduláris. Ha ráadásul $b \geq 0$, akkor b monoton reszeltje teljesen szubmoduláris és monoton növő. Jórészt szupermoduláris p függvény $p^\wedge$ reszeltje teljesen szupermoduláris, monoton reszeltje teljesen szupermoduláris és monoton növő.*

A reszelési tételt a diszkrét szeparációs tétellel kombinálva nyerjük annak kiterjesztését.

10.2.3. tétel. *Legyen b jórészt szubmoduláris és p jórészt szupermoduláris. Akkor és csak akkor létezik olyan m moduláris függvény, amelyre $p \leq m \leq b$* (más szóval, az $M = S(b) \cap S'(p)$ metszet akkor és csak akkor nemüres), *ha*

$$p^\wedge \leq b^\vee, \tag{10.23}$$

vagyis, ha az S minden Z részhalmazának bármely két $\{X_i\}$ és $\{Y_j\}$ partíciójára

$$\sum_i p(X_i) \leq \sum_j b(Y_j). \tag{10.24}$$

Ha p és b egészértékű, úgy m választható egészértékűnek.

A reszelt kiszámítása. A bázis poliéderekre vonatkozó mohó algoritmus segítségével kiszámíthatjuk egy b jórészt szubmoduláris függvényre a $b^\vee(S)$ értéket. Feltesszük, hogy b véges értékű. A 10.1.7. tételből adódóan tetszőleges b^* teljesen szubmoduláris függvény esetén $b^*(S) = \max\{x(S) : x \in B(b^*)\}$. A mohó algoritmus elvileg ki tud számítani egy optimális x-t, feltéve, hogy egy bizonyos szubrutin rendelkezésre áll.

Legyen $s_1, \dots, s_n$ az elemek tetszőleges sorrendje és legyen $S_i := \{s_1, \dots, s_i\}$. Tegyük fel, hogy az $x^*(s_1), \dots, x^*(s_{k-1})$ értékeket már meghatároztuk. Válasszuk $x^*(s_k)$-t a lehető legnagyobb olyan α értékre, hogy ezen választással még ne sérüljön $x^*(X) \le b(X)$ egyenlőtlenség, vagyis legyen

$$\alpha := \min\{b(Z) - x^*(Z - s_k) : s_k \in Z \subseteq S_k\}. \tag{10.25}$$

A bázis poliéderekre vonatkozó mohó algoritmus szerint az ezen szabállyal kiszámolt x^* vektor olyan lesz, hogy $x^*(S) = b^\vee(S) = \min\Big\{\sum_i b(T_i) : \{T_1, \dots, T_t\}$ partíciója S-nek$\Big\}$. Konkrét b esetén a számolást akkor tudjuk végrehajtani, ha rendelkezésre áll egy szubrutin (10.25)-ben α kiszámítására.

Amennyiben a szubrutin nem csak a minimum értékét számítja ki, hanem azt is megmondja, hogy az mely Z halmazon vétetik fel, úgy a $b^\vee(S)$-t megvalósító optimális $\{T_1, \dots, T_t\}$ partíciót is kiszámolhatjuk. Ehhez tekintsük a szubrutin által szolgáltatott minimalizáló $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ halmazokat. Tudjuk, hogy x^* benne van $B(b^\vee)$-ben, és a Z_i halmazok mind pontosak (abban az értelemben, hogy $x^*(Z_i) = b^\vee(Z_i)$. Márpedig pontos halmazok metszete és uniója is pontos, így a $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ hipergráf komponensei az alaphalmaznak egy pontos halmazokból álló $\{T_1, \dots, T_t\}$ partícióját adják, amiből $b^\vee(S) = x^*(S) = \sum_i x^*(T_i) = \sum_i b(T_i)$ miatt $\{T_1, \dots, T_t\}$ valóban a keresett partíció.

10.2.3. Jórészt paramoduláris párral adott g-polimatroidok

10.2.4. tétel. *Jórészt* (speciális esetben: metsző) *paramoduláris* (p, b) *pár esetén* $Q(p, b)$ *g-polimatroid, amely egész, ha* (p, b) *egészértékű.* $Q(p, b)$ *akkor és csak akkor nemüres, ha az* S *alaphalmaz minden* $\{Z_1, \dots, Z_t\}$ *részpartíciójára*

$$p(\cup Z_i) \le \sum_i b(Z_i) \quad \textit{és} \quad \sum_i p(Z_i) \le b(\cup Z_i). \tag{10.26}$$

$Q(p, b)$ határpárját ki lehet ugyan fejezni p és b függvényében, de a kiadódó formula némileg bonyodalmas. Szubmoduláris poliéderek, bázis-poléderek, kontrapolimatroidok esetén azonban a határfüggvények közvetlenül felírhatók a reszelt segítségével.

10.2.5. tétel. *Legyen* b *jórészt szubmoduláris. Ekkor* $S(b)$ *szubmoduláris poliéder, melynek határfüggvénye* $b^\vee$. *Ha* $b(S)$ *véges, akkor* $B(b)$ *bázis-poliéder, amelynek felső határfüggvénye nemüres* $B(b)$ *esetén* $b^\vee$. *Ha ráadásul* $b \ge 0$, *akkor* $P(b)$ *polimatroid, melynek* b' *határfüggvénye a* b *monoton reszeltje, azaz*

$$b'(Z) := \min\left\{\sum_i b(X_i) : \{X_1, \dots, X_t\} \ \textit{részpartíció}, \ Z \subseteq \cup X_i \subseteq S\right\}. \tag{10.27}$$

Analóg eredmény érvényes jórészt szupermoduláris p esetén az $S'(p)$ és $B'(p)$ poliéderekre.

10.2.6. tétel. *Jórészt szubmoduláris függvénnyel adott $B(b)$ bázis-poliéder akkor és csak akkor nem üres, ha S minden $\{S_1, \dots, S_k\}$ partíciójára $\sum_i b(S_i) \geq b(S)$ (azaz $b^{\vee}(S) = b(S)$). Jórészt szupermoduláris függvénnyel adott $B'(p)$ bázis-poliéder pontosan akkor nemüres, ha $\sum_i p(S_i) \geq p(S)$ minden partícióra.*

Speciális esetként kapjuk a következőt.

10.2.7. tétel. *Legyen p_1 jórészt szupermoduláris, melyre $k := p_1(S)$ véges és $f : S \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $g : S \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ két függvény, melyekre $f \leq g$. A $B'(p_1) \cap T(f, g)$ poliéder akkor és csak akkor nemüres, ha*

$$f(S) \leq k, \tag{10.28}$$

$$f(X_0) + \sum_{i=1}^{t} p_1(X_i) \leq k \tag{10.29}$$

az S minden olyan $\{X_0, X_1, \dots, X_t\}$ $(t \geq 1)$ partíciójára, amelyben csak X_0 lehet üres, és

$$g(X) \geq p_1(X) \text{ minden } X \subseteq S\text{-re.} \tag{10.30}$$

Fenyő-pakolások. Edmonds 4.2.2. fenyő-tétele szerint *egy digráfban akkor és csak akkor létezik k élidegen s-gyökerű feszítő fenyő, ha minden s-t nem tartalmazó nemüres csúcshalmaz befoka legalább k.* Ebből rögtön következik az alábbi általánosítás. *Legyen $D = (U, A)$ irányított gráf és $m : V \to \mathbf{Z}_+$ egészértékű vektor, amelyre $m(U) = k$. D-ben akkor és csak akkor létezik k élidegen feszítő fenyő úgy, hogy mindegyik v csúcs pontosan $m(v)$ fenyőnek a gyökere, ha*

$$\varrho_D(X) \geq k - m(X) \text{ fennáll minden } \emptyset \subset X \subseteq V \text{ halmazra.} \tag{10.31}$$

(Valóban, vegyünk fel egy új s pontot és vezessünk s-ből minden v pontba $m(v)$ párhuzamos élt és alkalmazzuk az Edmonds tételt). Nevezzünk egy ilyen m vektort **gyökérvektor**nak. Az U alaphalmazon értelmezzük a p_1 függvényt a $p_1(X) := \big(k - \varrho(X)\big)^+$ képlettel, ha $X \neq \emptyset$. Ekkor p_1 pozitívan metsző szupermoduláris, és ezért $B'(p_1)$ bázis-poliéder. A 10.31 lépletből adódik, hogy a gyökérvektorok pontosan a $B'(p_1)$ bázis-poliéder egész pontjai. A 10.2.7. tétel alkalmazásával visszajutunk a szabad gyökerű fenyők pakolásáról szóló 4.2.9. tételhez.

10.2.4. Keresztező szubmoduláris függvények

A 7.2.5 szakaszban említettük, hogy keresztező szubmoduláris függvények segítségével is definiálhatjuk egy matroid bázisait. Ez általánosítható bázis-poliéderekre.

10.2.8. tétel ([22]). *Ha b keresztező szubmoduláris és $b(S)$ véges, akkor $B(b)$ bázis-poliéder, amely egész, ha b egészértékű.*

Fujishige [37] megadta a nemüresség feltételét.

10.2.9. tétel (Fujishige, 1984)**.** *$B(b)$ akkor és csak akkor nemüres, ha az S minden $\mathcal{F} = \{S_1, \ldots, S_t\}$ partíciójára*

$$\sum_i b(S_i) \geq b(S) \tag{10.32}$$

és

$$\sum_i b(S - S_i) \geq (t-1)b(S). \tag{10.33}$$

A teljes reszelt. Egy keresztező szubmoduláris függvénnyel adott $B(b)$ bázispoliéder (teljesen szubmoduláris) felső határfüggvényének meghatározása azonban bonyolultabb annál, mint amilyen a reszelt volt a speciálisabb metsző szubmoduláris esetben. Ezért szükségünk van egy partíciónál bonyolultabb fogalomra. Egy $\mathcal{K}$ hipergráfról azt mondjuk, hogy a $Z \subset S$ nemüres részhalmaz **kompozíció**ja, ha $\mathcal{K}^+ := \mathcal{K} \cup \{S - Z\}$ kompozíciója S-nek. $\mathcal{K}$ **alapfedési** száma a $\mathcal{K}^+$ fedési száma minusz 1. Speciálisan a Z egy partíciója kompozíciója Z-nek, melynek alapfedési száma 0. A Z egy ko-partíciója is kompozíciója Z-nek, (ahol a **ko-partíció** egy $\{S - V_1, S - V_2, \ldots, S - V_t\}$ halmazrendszer, melyre $\{V_1, \ldots, V_t\}$ az $S - Z$ partíciója). Ennek alapfedési száma $t - 1$.

A partíciónál és ko-partíciónál általánosabb kompozíció a dupla-partíció. Ehhez legyen $\{Z_1, \ldots, Z_t\}$ a Z egy partíciója. Mindegyik Z_i-re legyen $\{Z_i^1, \ldots, Z_i^{t_i}\}$ az $S - Z_i$ halmaz egy partíciója ($t_i \geq 1$). Ekkor az $\{S - Z_i^j\}$ halmazok rendszerét a Z egy **dupla-partíció**jának nevezzük. A dupla-partíció tehát a Z valamely partíciójában szereplő halmazok ko-partícióiból áll. Könnyen látható, hogy Z dupla-partíciója valóban a Z kompozícióját alkotja, amelynek alapfedési száma a $(t_i - 1)$ értékek összege.

Tegyük fel, hogy a keresztező szubmoduláris b függvényre $B(b)$ nemüres. Definiáljuk a $b^{\downarrow}$ függvényt $b(S) = 0$ esetben a következőképp. Egy nemüres $Z \subset S$ halmazra legyen

$$b^{\downarrow}(Z) = \min\left\{ \sum_{\{i,j\}} b(Z_i^j) : \{Z_i^j\} \text{ az } Z \text{ dupla-partíciója} \right\}. \tag{10.34}$$

Tömörebben,

$$b^{\downarrow}(Z) = \min\big\{ b(\mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ a } Z \text{ dupla-partíciója} \big\}. \tag{10.35}$$

Az általános esetben legyen $b^{\downarrow}(Z) = \min\big\{b(\mathcal{D}) - fb(S)\big\}$, ahol a minimum a Z halmaz $\mathcal{F}$ dupla-partícióira megy és f az $\mathcal{D}$ alapfedési száma. A $b^{\downarrow}$ a b függvény **teljes** (alsó) **reszelt**jének nevezzük. (Analóg módon definiálható egy keresztező szupermoduláris függvény teljes felső reszeltje.)

10.2.10. tétel ([24]). *Ha b keresztező szubmoduláris és a $B(b)$ bázis-poliéder nem üres, akkor $b^{\downarrow}$ teljesen szubmoduláris és a $B(b)$ bázis-poliéder felső határfüggvénye $b^{\downarrow}$.*

A tétel esztétikai hiányossága, hogy egy dupla-partícióban lévő halmazok kuszán helyezkedhetnek el és túl sok ($O(n^2)$) lehet belőlük. Kimutatható azonban, hogy elegendő speciális, fa-kompozíciónak nevezett dupla-partíciókra szorítkozni, melyek keresztezés-mentesek és csak $n-1$ halmazt tartalmazhatnak. Ehhez feltesszük, hogy b olyan keresztező szubmoduláris függvény, amelyre a $B(b)$ bázis-poliéder nemüres és $b(S) = 0$.

A $Z \subset S$ halmaz egy **fa-kompozíciójá**t a Z-nek egy $\{Z_1, \dots, Z_k\}$ $(k \geq 1)$ partíciójával, az $S - Z$-nak egy $\{U_1, \dots, U_l\}$ $(l \geq 1)$ partíciójával, valamint a $\{z_1, \dots, z_k, u_1, \dots, u_l\}$ ponthalmazon adott olyan F irányított fával lehet megadni, melynek minden éle egy u_i pontból vezet egy z_j pontba. A fa-kompozíció tagjai és az F élei között egy-egy értelmű megfeleltetés van a következő szerint. A fa egy e élének elhagyásával keletkező két komponens közül jelölje Z_e azt, amelyikbe e belép. A Z_e-ben lévő z_i, illetve u_j fabeli csúcsoknak megfelelő Z_i, illetve U_j halmazok uniója legyen az a tagja a fa-kompozíciónak, amelyek az e faélnek megfelel. Megállapodás szerint az S alaphalmaz fa-kompozícióján az S egy partícióját vagy ko-partícióját értjük.

10.2.11. tétel ([29]). *Legyen b olyan keresztező szubmoduláris függvény, amelyre $b(S) = 0$ és $B(b)$ nemüres. Ekkor*

$$b^{\downarrow}(Z) = \min\big\{b(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \text{ a } Z \text{ fa-kompozíciója}\big\}. \tag{10.36}$$

Ha $b(S)$ tetszőleges, akkor $b^{\downarrow}(Z) = \min\big\{b(\mathcal{F}) - fb(S) : \mathcal{F}$ a Z fa-kompozíciója és f ennek alapfedési száma.$\big\}$

Két g-polimatroid metszete

10.2.12. tétel. *Legyen (p_1, b_1) és (p_2, b_2) két egészértékű, jórészt paramoduláris pár. Ekkor a $\big\{p_1(Z) \leq x(Z) \leq b_1(Z),\ p_2(Z) \leq x(Z) \leq b_2(Z)$ minden $Z \subseteq S$-re$\big\}$ egyenlőtlenségrendszer TDI. Speciálisan, a $Q(p_1, b_1)$ és $Q(p_2, b_2)$ g-polimatroidok metszete egész poliéder.*

10.2.13. tétel. *Legyen b_1 és b_2 két egészértékű, keresztező szubmoduláris függvény, melyekre $b_1(S) = b_2(S) = k$. Ekkor az $\big\{x(S) = k, x(Z) \leq b_1(Z), x(Z) \leq b_2(Z)$ minden $Z \subseteq S$-re$\big\}$ egyenlőtlenségrendszer TDI. Speciálisan, a $B(b_1)$ és $B(b_2)$ bázis-poliéderek metszete egész poliéder.*

11. Szub- és szupermoduláris függvények digráfokon

Két meglehetősen általános modellt mutatunk be, amelyekben szub- és szupermoduláris függvények és irányított gráfok szerepelnek.

11.1. Szubmoduláris áramok

Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, $f : A \to \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$, $g : A \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ két egészértékű korlátozó függvény, melyekre $f \le g$. Ezen kívül $b : 2^V \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ egészértékű keresztező szubmoduláris halmazfüggvény, amelyre $b(\emptyset) = b(V) = 0$. Egy $x : A \to \mathbf{R}$ vektort **szubmoduláris áram**nak nevezünk, ha

$$\lambda_x(Z) := \varrho_x(Z) - \delta_x(Z) \le b(Z) \tag{11.1}$$

minden $Z \subseteq V$-re, amely **megengedett,** ha

$$f \le x \le g. \tag{11.2}$$

A megengedett szubmoduláris áramok halmazát **szubmoduláris áram poliédernek** hívjuk. Azt mondjuk, hogy a szubmoduláris áramot (vagy a poliédert) a b függvény **határolja.** Amennyiben b azonosan 0, visszajutunk a megengedett áram fogalmához.

11.1.1. Kapcsolat g-polimatroidokhoz

Q_D-vel jelölve a D digráf $(0, \pm 1)$-es pont-él incidencia-mátrixát és λ_x-t egy V-n értelmezett függvénynek tekintve, $\lambda_x = Q_D x$ adódik. Miután $B(b)$ bázis-poliédert alkot, egy $x : A \to \mathbf{R}$ vektor pontosan akkor szubmoduláris áram, ha a $\lambda_x : V \to \mathbf{R}$ vektor $B(b)$-ben van. Egy bázis-poliédert más alakban is meg lehetett adni, például egy p keresztező szupermoduláris függvény segítségével $B'(p)$ alakban, vagyis ilyenkor a $\{\varrho_x(Z) - \delta_x(Z) \ge p(Z)$ minden $Z \subseteq V\text{-re}\}$ rendszer egy megoldása is szubmoduláris áram. Ezért éppoly joggal beszélhetnénk szupermoduláris áramokról. Ráadásul jórészt paramoduláris (p, b) párra is $Q(p, b)$ g-polimatroid, így ennek a $\{z : z(V) = 0\}$ hipersíkkal való metszete is 0-bázis-poliéder. Emiatt az $\{x \in \mathbf{R}^A : \lambda_x \in Q(p, b)\}$ halmaz is szubmoduláris áram poliéder, vagy kiírva: $p(Z) \le \varrho_x(Z) - \delta_x(Z) \le b(Z)$ minden $Z \subseteq V$-re. Ennek alapján leghelyesebb volna paramoduláris áram poliéderről beszélni, amelyet akár szubmoduláris, akár szupermoduláris függvénnyel is lehet definiálni. Megmaradunk azonban a szubmoduláris áram kifejezés használata mellett, mert ez a szakirodalomban már meghonosodott.

Szubmoduláris áramok és g-polimatroidok között a pontos kapcsolatot az alábbi tételek írják le [34].

11.1.1. tétel. *Legyen (p_1, b_1) és (p_2, b_2) két metsző paramoduláris pár. A $Q_1 = Q(p_1, b_1)$ és $Q_2 = Q(p_2, b_2)$ g-polimatroidok metszete szubmoduláris áram poliéder.*

11.1.2. tétel. *Legyen b teljesen szubmoduláris függvény, amelyre $b(V) = 0$. Ekkor $Q = Q(f, g; b) \subseteq \mathbf{R}^A$ szubmoduláris áram poliéder előáll, mint két $2|A|$ dimenziós bázis poliéder metszetének a vetülete.*

11.1.2. Optimalizálás

Alapvető a következő eredmény.

11.1.3. tétel (Edmonds és Giles, 1977). *A* $\{(11.1),\ (11.2)\}$ *rendszer teljesen duálisan egészértékű. Speciálisan, ha* b, f, g *mind egészértékű, akkor a szubmoduláris árampoliéder egész.*

A folyamokra és áramokra valamint a súlyozott matroid metszetre meglévő algoritmusok közös általánosításaként kidolgozásra kerültek [24, 25] megengedett, illetve optimális szubmoduláris áramokat kiszámító polinomiális algoritmusok is (lásd még Fujishige [38] könyvét.)

A 11.1.3. tétel speciális eseteként könnyen kiolvasható Lucchesi és Younger 2.2.3. tétele, mely szerint *egy digráfban az egyirányú vágásokat lefogó élek minimális száma egyenlő a diszjunkt egyirányú vágások maximális számával.*

Hasonló jellegű tétel érvényes a minimális elemszámú egyirányú vágásokra.

11.1.4. tétel. *Tegyük fel, hogy a minimális egyirányú vágásnak* k *éle van. Ekkor az élidegen* k*-elemű irányított vágások maximális száma egyenlő a* k*-elemű irányított vágásokat lefogó élek minimális számával.*

Ebből síkdualizálással adódik a következő érdekesség.

11.1.5. következmény. *Egy irányított síkgráfban az élidegen minimális elemszámú irányított körök maximális száma egyenlő a minimális köröket lefogó élek minimális számával.*

11.1.3. Megengedettség

Az áramok megengedettségére vonatkozó Hoffman féle 1.5.3. tétellel analóg jellemzés adható a szubmoduláris áramokra is [24, 29].

11.1.6. tétel (Frank, 1982). *Adottak a* $D = (V, A)$ *digráf élhalmazán az* $f \le g$ *korlátok, valamint a* b *halmazfüggvény. Akkor és csak akkor létezik megengedett szubmoduláris áram*

(A) *teljesen szubmoduláris* b *esetén, ha minden* $Z \subseteq V$*-re,*

$$\varrho_f(Z) - \delta_g(Z) \le b(Z) \tag{11.3}$$

(B) *metsző szubmoduláris* b *esetén, ha minden* $Z \subseteq V$*-re és* Z *minden* $\{V_1, \dots, V_t\}$ *partíciójára*

$$\varrho_f(Z) - \delta_g(Z) \le \sum_i b(V_i), \tag{11.4}$$

(C) *keresztező szubmoduláris* b *esetén, ha minden* $Z \subseteq V$*-re és* Z*-nek minden* $\mathcal{F}$ *fa-kompozíciójára*

$$\varrho_f(Z) - \delta_g(Z) \le \sum \big[b(X) :\ X \in \mathcal{F} \big]. \tag{11.5}$$

Ha f, g, b *mindegyike egészértékű és létezik megengedett szubmoduláris áram, akkor létezik egészértékű is.*

A $b \equiv 0$ esetben visszajutunk Hoffman tételéhez, de Edmonds 7.2.4 matroid metszettétele is éppoly könnyen következik, mint a 7.1.5 diszkrét szeparációs tétel. A (B) rész a 10.2.2 reszelési tételt felhasználva következik (A)-ból, a (C) rész pedig a teljes reszeltre megadott 10.36 formula segítségével.

11.2. Fedés digráfokkal

A 8.4. szakaszban már bevezettük a párhalmaz fogalmát és bemutattunk egy keresztező szupemoduláris párhalmazfüggvény minimális számú éllel való fedéséről szóló tételt. Itt a minimális költségű verzió már NP-teljes. Metsző szupermoduláris párhalmaz függvényre azonban jobb a helyzet.

Egy $p : \mathcal{P}_2 \to \mathbf{Z}_+$ párhalmaz függvényről azt mondjuk, hogy **pozitívan metsző szupermoduláris,** ha metsző $X, Y \in \mathcal{P}_2$ és $p(X) > 0$, $p(Y) > 0$ esetén $p(X) + p(Y) \leq p(X \cap Y) + p(X \cup Y)$. Amikor p csak olyan párhalmazokon pozitív, amelyeken $X_K = X_B$, akkor visszajutunk a halmazokon értelmezett metsző szupermoduláris (egyváltozós) halmazfüggvények fogalmához.

11.2.1. tétel ([36])**.** *A $D = (V, A)$ digráfra legyen adott $g : A \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ egészértékű kapacitás függvény. Legyen p pozitívan metsző szupermoduláris függvény $\mathcal{P}_2$-n, amelyre $\varrho_g(X_K, X_B) \geq p(X_K, X_B)$ fennáll $\mathcal{P}_2$ minden tagjára. Ekkor a*

$$\Big\{0 \leq x \leq g,\ \varrho_x(X_K, X_B) \geq p(X_K, X_B),\ \text{ha } (X_K, X_B) \in \mathcal{P}_2\Big\} \tag{11.6}$$

egyenlőtlenség-rendszer teljesen duálisan egészértékű.

Adott $T \subseteq V$ esetén akkor mondjuk, hogy egy p halmazfüggvény pozitívan T-metsző szupermoduláris, ha $X \cap Y \cap T \neq \emptyset$ és $p(X) > 0, p(Y) > 0$ esetén fennáll a szupermodularitási egyenlőtlenség.

11.2.2. következmény. *Legyen $D = (V, A)$ digráfban legyen $g : A \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ egészértékű kapacitás függvény, továbbá $T \subset V$ a csúcsok egy olyan részhalmaza, amely tartalmazza az összes él fejét. Legyen p_1 egy pozitívan T-metsző szupermoduláris halmaz-függvény, amelyre $\varrho_g(X) \geq p_1(X)$. Ekkor a*

$$\Big\{0 \leq x \leq g,\ \varrho_x(X) \geq p_1(X) \text{ minden } X \subseteq V\text{-re}\Big\} \tag{11.7}$$

egyenlőtlenség-rendszer teljesen duálisan egészértékű.

11.2.1. Gyökeres összefüggőség

Legyen $D = (V, A)$ digráf, amelyben s kijelölt gyökérpont.

11.2.3. tétel ([20])**.** *Ha D gyökeresen k-élösszefüggő, úgy D gyökeresen k-élösszefüggő részdigráfjainak poliédere $\big\{x : \varrho_x(Z) \geq k$ minden $\emptyset \subset Z \subseteq V - s$ halmazra és $0 \leq x(e) \leq 1$ minden $e \in A$ élre$\big\}$. A leírásban szereplő rendszer TDI.*

11.2.4. tétel ([36]). *Legyen $D = (V, A)$ s-ből gyökeresen k-pontösszefüggő. Ekkor D gyökeresen k-pontösszefüggő részdigráfjainak poliédere*

$$Q := \big\{x : \varrho_x(X_K, X_B) \geq k - |X_K - X_B| \text{ ha } \emptyset \subset X_B \subseteq X_K \subseteq V - s, \quad \text{és } 0 \leq x(e) \leq 1 \text{ minden } e \in A \text{ élre}\big\}. \tag{11.8}$$

A leírásban szereplő rendszer TDI.

A fenti tételek segítségével választ kaphatunk a gyökeres pont- vagy élösszefüggőség növelésének problémájára is. Tegyük fel, hogy adott egy kiindulási $H = (V, F)$ digráf egy kijelölt gyökérponttal. Ezt kell megnövelnünk egy megadott $D = (V, A)$ digráf éleinek segítségével úgy, hogy a megnövelt digráf gyökeresen k-élösszefüggő (k-pontösszefüggő) legyen és a felhasznált D-beli élek összköltsége minimális legyen. A megoldáshoz a $H + D = (V, F + A)$ digráfban keresünk minimális költségű gyökeres k-élösszefüggő (k-pontösszefüggő) digráfot, ahol minden H-beli él költsége nulla. Az előbbi tételek felhasználásával (és a dualitás tétellel) könnyen felírható egy min-max formula az optimális növelés költségére. A $k = 1$ speciális esetben visszajutunk Fulkerson 1.2.5. tételéhez s gyökerű fenyők minimális költségéről.

12. Alkalmazások

12.1. Általános gráf-irányítási problémák

A 8.1 fejezetben megismert két fő irányítási tétel nem összemérhető. Az egyikben (8.1.1. tétel) a h igényfüggvény nemnegatív és keresztező szupermoduláris volt, a másikban (8.1.8. tétel) metsző szupermoduláris. Nyitva maradt azonban a közös általánosítás problémája, amikor az igényfüggvény keresztező szupermoduláris, de nem feltétlenül nemnegatív. Ennek megoldása azért is kívánatos, mert a vegyes gráf k-élösszefüggővé irányításának feladata erre vezet. Tisztázásra szorul továbbá, hogy a lánctulajdonság miért áll fenn bizonyos esetekben (gráf k-élösszefüggővé irányítása) és miért nem másokban (vegyes gráf k-élösszefüggővé irányítása).

Az alábbiakban jelezzük, hogy ezek a problémák miként kezelhetők szubmoduláris áramok, illetve polimatroidok segítségével egységes keretben. Kétféle visszavezetés is létezik szub-, illetve szupermoduláris modellekre: van amikor az egyik jobb, van amikor a másik.

Az első azon a megfigyelésen alapszik, hogy egy irányításban a pontok befokai meghatározzák a halmazok befokait, nevezetesen

$$\varrho(Z) = \sum \big[\varrho(v) : v \in Z\big] - i_G(Z), \tag{12.1}$$

így a h-t fedő irányítás létezése egy olyan $m : V \to \mathbf{Z}$ befok-vektor létezésével ekvivalens, amelyre

$$m(Z) \geq h(Z) + i_G(Z) \quad \text{minden} \quad Z \subseteq V\text{-re.} \tag{12.2}$$

Miután a 3.1.5. irányítási lemma szerint m pontosan akkor egy irányítás befokvektora, ha $m(V) = |E|$ és $m(Z) \geq i_G(Z)$ minden $Z \subseteq V$-re, érvényes a következő.

12.1.1. lemma. *Egy egész m vektor akkor és csak akkor egy h-t fedő irányítás befok-vektora, ha $m \in B'(i_G) \cap B'(h + i_G)$.*

12.1.1. Visszavezetés bázis-poliéderre

Legyen h keresztező szupermoduláris, melyre $h(V) = 0$. Ha h nemnegatív, akkor $h + i_G \geq i_G$, vagyis ilyenkor $B'(h + i_G) \subseteq B'(i_G)$ és ezért a befok-vektorok egy bázis-poliédert alkotnak. Ennek alapján a bázis-poliéderek nemürességére vonatkozó Fujishige-féle 10.2.9. tételből egyrészt rögtön leolvasható a 8.1.1. tétel, másrészt a g-polimatroidok lánctulajdonságából következik a h-t fedő irányítások befokvektorainak lánctulajdonsága (8.1.3. tétel).

12.1.2. Visszavezetés két bázis-poliéder metszetére

Ha viszont h metsző szupermoduláris, amelyre a nemnegativitás nincsen kikötve, akkor már a h-t fedő irányítások befok-vektorai két bázis-poliéder metszetének az egész elemei és ezért nem várható el a lánctulajdonság megléte. Ugyanakkor a 10.2.3. szeparációs tételből kiolvasható a nemürességnek a 8.1.8. tételben megfogalmazott feltétele.

Ez a megközelítés azonban nem csak arra alkalmas, hogy meglévő eredményeket jobban megértve azokat újra bizonyítsuk, hanem korábban még nem szerepelt irányítási tételeket is nyerhetünk.

12.1.2. tétel. *Legyen h_1 és h_2 két keresztező G-szupermoduláris és szimmetrikus függvény, melyek közül h_2 nemnegatív, és legyen $h(X) := \max\{h_1(X), h_2(X)\}$. A $G = (V, E)$ irányítatlan gráfnak akkor és csak akkor létezik h-t fedő irányítása, ha $d(X) \geq 2h(X)$ minden $X \subseteq V$ halmazra fennáll.*

Bizonyítás. A feltétel szükséges, hiszen egy h-t fedő irányításra $d(X) = \varrho(X) + \varrho(V - X) \geq h(X) + h(V - X) = 2h(X)$. A feltétel elegendőségéhez a fenti megfontolás alapján azt kell kimutatnunk, hogy létezik egy olyan m befok vektor, amelyre (12.2) fennáll. Másszóval azt kell kimutatnunk, hogy a $P := \{x \in \mathbf{R}^V :$ $x \geq 0$, $x(V) = |E|$, $x(Z) \geq i(Z)$ és $x(Z) \geq h(Z) + i(Z)$ minden $Z \subseteq V$-re$\}$. Miután h nemnegatív (most használjuk ki!), az $x(Z) \geq i(Z)$ egyenlőtlenség felesleges, vagyis $P = \{x \in \mathbf{R}^V : x \geq 0,\ x(V) = |E|,\ x(Z) \geq p_1(Z)$ és $x(Z) \geq p_2(Z)$ minden $Z \subseteq V$-re$\}$, ahol $j = 1, 2$-re $p_j(Z) := h_j(Z) + i(Z)$. Miután p_j keresztező szupermoduláris, így P két bázis-poliéder metszete, és emiatt egész poliéder.

Ráadásul az $x^*(v) := d(v)/2$ által definiált x vektor benne van P-ben, hiszen egyrészt $x^*(V) = \sum\big[x^*(v) : v \in V\big] = \sum\big[d(v)/2 : v \in V\big] = |E|$, másrészt $Z \subset V$-re $x^*(Z) = \sum\big[x^*(v) : v \in Z\big] = \sum\big[d(v)/2 : v \in Z\big] = d(Z)/2 + i(Z) \geq h(Z) + i(Z)$. Vagyis a P egész poliéder tényleg nem üres, így van egész eleme. ■

Nash–Williams 3.4.2. tétele a $h_1(X) = k$, ha $\emptyset \subset X \subset V$ és $h_2 \equiv 0$ választással rögvest adódik, de valójában az alábbi csinos élesítést is könnyen kapjuk.

12.1.3. következmény. *Legyen G $(2k)$-élösszefüggő gráf és H a G-nek egy Euler-részráfja* (azaz H-ban minden pont foka páros). *Ekkor H-nak egy tetszőleges Euler-irányítását ki lehet terjeszteni a G-nek egy k-élösszefüggő irányításává.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 12.1.2. tételt az irányítatlan élek G' gráfjára a $h_1(Z) := k - d_H(Z)/2$ és $h_2 \equiv 0$ választással. ■

A Nash–Williams irányítási tétel egy rokon kiterjesztése a következő.

12.1.4. következmény. *Adott a $G = (V, E)$ k-élösszefüggő irányítatlan gráf éleinek egy F részhalmaza. Akkor és csak akkor lehet F elemeit úgy irányítani, hogy a keletkező vegyes gráf k-élösszefüggő legyen, ha $d_F(X) \leq 2\big(d_E(X) - k\big)$ fennáll minden $X \subset V$ nemüres részhalmazra.*

12.1.3. Visszavezetés szubmoduláris áramra

Keresztező szupermoduláris igényfüggvényekre gyakran kényelmesebb szubmoduláris áramokkal modellezni a problémát. Ehhez a G egy tetszőleges $D = (V, A)$ referencia irányításából indulunk majd ki, és ebben kell alkalmasan kijelölni azon éleket, amelyek megfordításával h-t fedő irányítást kapunk. A kijelölést egy $z : A \to \{0, 1\}$ vektorral végezzük, amelyre $z(a)$ pontosan akkor 1, ha az a él irányítását megfordítjuk. Az így kapott irányításban egy $X \subseteq$ halmaz befoka $\varrho_D(X) - \varrho_z(X) + \delta_z(X)$, vagyis ennek kell legalább $h(X)$-nek lennie. Akkor létezik tehát h-t fedő irányítás, ha a $Q = \big\{z : 0 \leq z \leq 1,\ \varrho_z(X) - \delta_z(X) \leq b(X) := \varrho_D(X) - h(X)\big\}$ poliédernek van egész (azaz $0-1$-es) eleme. Miután h keresztező szupermoduláris és i_G teljesen szubmoduláris, a b határfüggvény keresztező szubmoduláris, így alkalmazhatjuk a szubmoduláris áramok létezésére vonatkozó 11.1.6. tétel (C) részét.

12.1.5. tétel. *Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és h keresztező szupermoduláris függvény, amelyre $h(\emptyset) = h(V) = 0$. G-nek akkor és csak akkor létezik h-t fedő irányítása, ha*

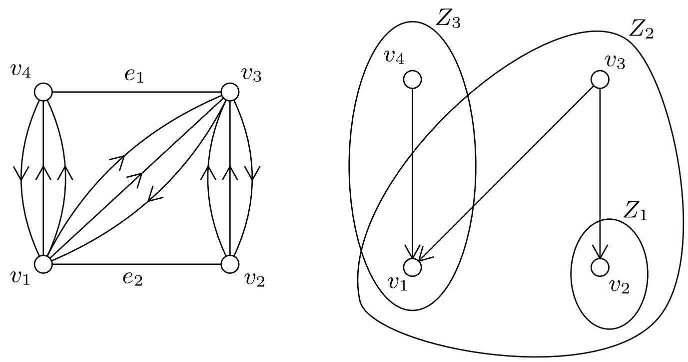
$$h(\mathcal{F}) \leq \sum_{j \in E} e_j(\mathcal{F}) \tag{12.3}$$

fennáll V minden Z részhalmazának minden $\mathcal{F}$ fa-kompozíciójára, ahol $e_j(\mathcal{F})$ annak a két számnak a maximumát jelzi, ahány $\mathcal{F}$-beli halmazba a j él egyik, illetve másik irányításánál belép.

Vegyes gráfok k-élösszefüggővé irányítása. Legyen $M = (V, A + E)$ vegyes gráf, G éleit akarjuk irányítani úgy, hogy a keletkező $(V, A + \vec{E})$ digráf k-élösszefüggő legyen. Definiáljuk a h függvényt az üres halmazon és V-n nullának, míg másutt $h(X) = k - \varrho_A(X)$. Ekkor h keresztező szupermoduláris, és az E-nek egy $\vec{E}$ irányítása pontosan akkor fedi h-t, ha $(V, A + \vec{A})$ k-élösszefüggő. Ezen h függvényre alkalmazva az 12.1.5. tétel első részét megkapjuk a vegyes gráf k-élösszefüggővé irányításának szükséges és elegendő feltételét.

A dolgozat I. részének 3.4. szakaszában példán mutattuk meg, hogy a feltételben nem elegendő csupán partíciókra és ko-partíciókra szorítkozni. A példában a $Z = \{v_1, v_2\}$ halmaznak $\mathcal{F} := \{Z_1, Z_2, Z_3\}$ egy fa-kompozícióját alkotja, ahol

$Z_1 = \{v_2\}$, $Z_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $Z_3 = \{v_1, v_4\}$. Az $\mathcal{F}$ valóban a Z fakompozíciója, amelyet a Z-nek az $\big\{\{v_1\}, \{v_2\}\big\}$ partíciója, a $V - Z$-nek $\big\{\{v_3\}, \{v_4\}\big\}$ partíciója, és e partíciók tagjain értelmezett $f_1 = \{v_3\}\{v_2\}$, $f_2 = \{v_4\}\{v_1\}$, $f_3 = \{v_3\}\{v_1\}$ irányított fa-élek definiálnak. Ekkor egyrészt $h(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{3} \big[k - \varrho_A(Z_i)\big] = \sum_{i=1}^{3}[2-1] = 3$ másrészt $\sum_{j \in E} e_j(\mathcal{F}) = 1 + 1 = 2$, vagyis a 12.1.5. tételbeli feltétel nem teljesül.



Nincs 2-élösszefüggő irányítás

$\mathcal{F} := \{Z_1, Z_2, Z_3\}$ fa-kompozíció

4. ábra

12.2. Az élösszefüggőség növelése

Kimutatjuk, hogy az élösszefüggőség növelési problémák hátterében is g-polimatroidok állnak.

12.2.1. Irányított növelés

A 8.2 szakaszban megmutattuk, hogy egy digráf élösszefüggőség növelési problémája miként fogalmazható meg absztrakt alakban egy keresztező szupermoduláris függvény fedési feladataként. Most is ezzel az általánosabb alakkal foglalkozunk.

Adott $D = (V, A)$ irányított gráfra nevezzünk egy $m_{\mathrm{ki}} : V \to \mathbf{Z}$ vektort **növelési kifok-vektor**nak, ha létezik egy olyan $H = (V, F)$ digráf, amelyre $G + H = (V, A + F)$ k-élösszefüggő és $\delta_H(v) = m_{\mathrm{ki}}(v)$ minden $v \in V$-re. A növelési befok-vektort analóg definiáljuk.

A 8.2.4. tételben megadtuk, hogy egy pozitívan keresztező p függvény mikor fedhető egy γ élű digráffal. A 8.2.3. tétel pedig jellemezte azon vektorokat, melyek egy p-t fedő digráf befok-vektorai.

Adott $\gamma \geq 0$ egész számra definiáljuk a p^γ függvényt a következőképpen.

$$p^\gamma(V) := \gamma \quad \text{és} \quad p^\gamma(X) := p(X), \quad \text{ha} \quad X \subset V. \tag{12.4}$$

Ha p fedhető γ éllel, akkor minden $X, Y \subset V$ diszjunkt halmazra $\gamma \geq p(V - X) + p(V - Y)$ és ezért ilyenkor p^γ pozitívan metsző szupermoduláris. A 10.2.5. tétel szerint ilyen függvény is bázis poliédert definiál, így kapjuk a következőt.

12.2.1. tétel. *Legyen γ olyan egész, amelyre p-nek létezik γ élű fedése. Ekkor p^γ pozitívan metsző szupermoduláris, a $B'(p^\gamma)$ bázis-poliéder nemüres és egész pontjai pontosan a p-t fedő γ élű digráfok befok-vektorai.*

Jelölje most γ a p-t fedő digráfok minimális élszámát. Ekkor az 12.2.1. tétel szerint p^γ pozitívan metsző szupermoduláris, és így $C(p^\gamma)$ kontra-polimatroidot alkot.

12.2.2. tétel. *A p-t fedő befok-vektorok pontosan a $C(p^\gamma)$ kontra-polimatroid egész elemei.*

Tekinthetjük a növelési és általánosabban a p-fedési feladatnak a minimális költségű változatát, amikor adott két nemnegatív költségfüggvény a ponthalmazon, c_{ki} és c_{be}, és egy új uv él költségét a $c_{\mathrm{ki}}(v) + c_{\mathrm{be}}(u)$ összeggel definiáljuk. A cél minimális költségű élhalmaz hozzáadásával D-t k-élösszefüggővé tenni. (Amennyiben az éleken egy tetszőleges költség vektor van megadva, a növelési probléma NP-teljes). Ehhez csak az kell, hogy a $C(p)$ (és az analóg módon definiált $C(\hat{p})$ kontra-polimatroidnak egy-egy minimális költségű m_{be} ill. m_{ki} elemét megkeressük, melyekre $m_{\mathrm{ki}}(V) = m_{\mathrm{be}}(V)$, majd alkalmazzuk a 8.2.2. tételt. A keresés a mohó algoritmus kontra-polimatroidra vonatkozó változatával történhet, amikor a definiáló p függvény pozitívan metsző szupermoduláris.

Mivel g-polimatroidokra érvényes a lánctulajdonság, a 12.2.2. tétel implikálja a növelések lánctulajdonságát kimondó 8.2.6. tételt. Sőt, az erős lánctulajdonság 10.1.20 következménye az alábbit is kiadja.

12.2.3. következmény. *Adott $D = (V, A)$ irányított gráf, $g_{\mathrm{be}} : V \to \mathbf{Z}_+$ $g_{\mathrm{ki}} : V \to \mathbf{Z}_+$ felső korlátok és γ egész. Tegyük fel, hogy D k-élösszefüggővé tehető legfeljebb γ él hozzáadásával, továbbá, hogy D k-élösszefüggővé tehető egy olyan digráf hozzáadásával, melynek be- és kifokait g_{be}, illetve g_{ki} felülről korlátozza. Ekkor D k-élösszefüggőve tehető egy olyan legfeljebb γ élű digráf hozzáadásával, amelynek be-, illetve kifokai teljesítik a felső korlátokat.*

12.3. Irányítatlan növelés

A fenti megfontolás átvihető az irányítatlan élösszefüggőség növelési problémára is, ráadásul a globális k-élösszefüggőség növelésénél általánosabb alakban. Minden $\{u, v\}$ pontpárra adott egy $r(u, v) \neq 1$ előírás, és úgy kell minimális számú élt a megadott $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráfhoz hozzáadni, hogy a megnövelt gráfban minden (u, v) pontpárra u és v között az élidegen utak maximális $\lambda(u, v)$ száma legalább $r(u, v)$ legyen. Vezessük be az $R(X) := \max\Big\{r(u, v) : \big|\{u, v\} \cap X\big| = 1\Big\}$ függvényt. R nyilván szimmetrikus és nem nehéz igazolni, hogy ferdén szupermoduláris. Azt mondjuk, hogy egy G^+ gráf fedi R-t, ha $d_{G^+} \geq R$.

A következő tételt W. Mader [53] eredetileg egy ekvivalens alakban fogalmazta meg, pontpárok lokális élösszefüggőségét megőrző leemelésekre vonatkozóan (5.3.2. tétel).

12.3.1. tétel. *Adott $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és egy $m : V \to \mathbf{Z}$ egész vektor, amelyre $m(V)$ páros, és nincs G-nek olyan K komponense, amelyre $m(K) = 1$. Akkor és csak akkor létezik olyan $H = (V, F)$ gráf, amelyre*

$$d_H(v) = m(v) \tag{12.5}$$

minden $v \in V$-re fennáll és

$$\lambda(x, y; G^+) \geq r(x, y) \tag{12.6}$$

teljesül minden x, y pontpárra, ahol $G^+ = G + H = (V, E \cup F)$, ha

$$m(X) \geq R_r(X) - d_G(X) \tag{12.7}$$

érvényes minden $X \subseteq V$ részhalmazra, ahol $R_r(X) := \max\{r(x, y) : x \in X,\ y \in V - X\}$.

Egy ilyen m vektort nevezzünk a növelés **fokszám vektor**ának. Definiáljuk p-t függvényt a $p(X) := \big(R(X) - d_G(X)\big)^+$ $(X \subseteq V)$ képlettel. Ekkor $p(V) = 0$, p szimmetrikus és ferdén szupermoduláris. Adott $\gamma \geq 0$ egészre legyen

$$p^{2\gamma}(V) := 2\gamma \ \text{ és } \ p^{2\gamma}(X) := p(X), \text{ ha } X \subset V. \tag{12.8}$$

Ekkor $p^{2\gamma}$ szimmetrikus és ferdén szupermoduláris és így jórészt szupermoduláris. A 10.2.5. tétel szupermoduláris változata folytán $B'(p^{2\gamma})$ bázis poliéder, amelynek egész elemei a γ élű növelés fokszám vektorai. A 10.2.7. tétel szerint $B'(p)$ akkor és csak akkor nem üres, ha minden $\{X_1, \dots, X_t\}$ részpartícióra $\sum_i p(X_i) \leq p(V)$. Ebből következik az I. rész 5.3.4. tétele irányítatlan gráfok lokális élösszefüggőségének növeléséről [28]:

12.3.2. tétel (Frank, 1992)**.** *Adott $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráfhoz akkor és csak akkor létezik olyan γ élű $H = (V, F)$ gráf, amelyre $\lambda(u, v; G + H) \geq r(u, v)$ minden $\{u, v\}$ pontpárra, ha minden $\{X_1, \dots, X_t\}$ részpartícióra $\sum_i \big[R(X_i) - d_G(X_i)\big] \leq 2\gamma$. Az ilyen γ élű H gráfok fokszám vektorai pontosan a $B'(p^{2\gamma})$ bázis-poliéder egész elemei.*

Ismét a 10.1.20 következményből kapjuk:

12.3.3. következmény. *Adott $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráf és $g : V \to \mathbf{Z}_+$ felső korlát. Ha létezik olyan $H = (V, F)$ gráf, amelyre $d_H(v) \leq g(v)$ minden $v \in V$ csúcsra és*

$$\lambda(u, v; G + H) \geq r(u, v) \ \ \text{minden } \{u, v\} \text{ pontpárra,} \tag{12.9}$$

és létezik legfeljebb γ élű (12.9)-t kielégítő gráf, akkor olyan gráf is létezik, amely egyszerre kielégíti a kívánalmakat.

Az irányított esethez hasonlóan, ennek alapján adott $c : V \to \mathbf{R}_+$ költségfüggvényre a mohó algoritmus segítségével meg tudunk határozni egy minimális költségű növelést, ahol egy új uv él költsége $c(u) + c(v)$. Kiindulunk abból az m vektorból, amelynek minden komponense az $r(u, v)$ igények értékének k maximuma, majd a $c(v)$ szerinti csökkenő sorrendben végighaladva a csúcsokon, egymás után próbáljuk csökkenteni az $m(v)$ pozitív komponenseit amennyivel csak lehet csupán arra ügyelve, a $C(p)$ kontra-polimatroidban maradjunk.

12.4. Az irányított pontösszefüggőség növelése

Megmutatjuk, hogy hasonló állítás érvényes a pontösszefüggőség esetén is. Az irányított gráfok pontösszefüggőségének optimális növelésére vonatkozó 5.4.5. min-max tétel a 8.4.1. tétel speciális esete. Ebből levezethető, hogy egy adott vektor mikor egy p-t fedő digráf befok-vektora. A $Z \subseteq V$ halmazokra jelölje $p^*(Z)$ az olyan független párhalmazok maximális p-összegét, melyek belső halmazai mind Z-ben vannak. A következő eredmények, explicit vagy implicit, Frank és Jordán [32] dolgozatában szerepelnek.

12.4.1. tétel. *Adott $m : V \to \mathbf{Z}_+$ vektorhoz akkor és csak akkor létezik p-t fedő m befok-vektorú digráf, ha*

$$m(Z) \geq p^*(Z) \quad \text{minden} \quad Z \subseteq V\text{-re.} \tag{12.10}$$

12.4.2. tétel. *A p^* halmazfüggvény teljesen szupermoduláris.*

12.4.3. tétel. *Legyen p pozitívan keresztező szupermoduláris párhalmaz függvény. Ekkor a p-t fedő digráfok befok-vektorai egy kontra-polimatroid, nevezetesen $C(p^*)$ egész pontjai.*

Ezek alapján a fokszám-korlátos irányított pontösszefüggés növelési probléma minimális költségű változata is kezelhető pontindukált költségfüggvények esetén.

Végül a linking tulajdonságnak egy olyan megjelenését mutatjuk be, amely úgy tűnik, nem magyarázható azon az alapon hogy a háttérben egy g-polimatroid munkál.

12.4.4. tétel. *Legyen p egy pozitívan keresztező szupermoduláris párhalmaz függvény az S alaphalmazon, legyen továbbá m_{be} és m_{ki} egy befok, illetve egy kifok előírás, melyekre $m_{\mathrm{be}}(V) = m_{\mathrm{ki}}(V)$. Amennyiben létezik egy m_{be} befok vektorú digráf, amely fedi p-t és létezik egy m_{ki} kifok vektorú digráf, amely fedi p-t, úgy létezik olyan p-t fedő digráf is, amelynek a befok vektora m_{be} és a kifok vektora m_{ki}.*

12.5. Konklúziók

A dolgozat egyik célja az volt, hogy viszonylag tömör, magyar nyelvű áttekintést adjon a kombinatorikus optimalizálás egy szeletéről. Az első rész konkrét gráfoptimalizálási feladatokat mutatott be kezdve olyan klasszikusnak számító kérdéskörökön, mint a páros gráf költséges párosításának kiszámítása, illetve különféle út, folyam és áram problémák, majd olyan modernebb témákkal folytatva, mint az egyirányú vágások lefogása, fa és fenyő pakolások, gráfirányítási és növelési problémák.

A második rész olyan absztraktabb eszközöket mutatott be, melyek megvilágítják, hogy az első rész eredményeinek valójában mi is áll a hátterében. A poliéderes kombinatorika és a szubmoduláris technika segítségével megérthettük, hogy látszólag távolfekvő tételek közös tőről fakadnak. Ennek egyik legszélsőségesebb példája volt, hogy Győri Ervin nehéz tétele függőlegesen konvex poliominók minimális fedéséről és az irányított összefüggőség minimális növelésére vonatkozó tétel egymás rokonai.

A dolgozatban nem esett szó a kombinatorikus optimalizálás egy másik, nem kevésbé jelentős ágáról, amelyben a paritás játszik valamiféle szerepet. A párosítások, T-kötések, diszjunkt út feladatok fentiekhez hasonló jellegű összefoglaló áttekintése a jövő szép célkitűzése lehet.

Irodalom

[1] J. Bang-Jensen and B. Jackson, Augmenting hypergraphs by edges of size two, in: *Connectivity Augmentation of Networks: Structures and Algorithms, Mathematical Programming,* (ed. A. Frank), Ser. B, Vol. 84, No. 3 (1999), pp. 467–481.

[2] J. Becker and A. Frank, *A quick proof for the matroidal structure of a source location problem,* EGRES Quick-proof series, 2008-01.

[3] A. Benczúr and A. Frank, Covering symmetric supermodular functions by graphs, in: *Connectivity Augmentation of Networks: Structures and Algorithms, Mathematical Programming,* (ed. A. Frank), Ser. B, Vol. 84, No. 3 (1999), pp. 483–503.

[4] W. J. Cook, Operations that preserve total dual integrality, *Operations Research Letters,* **2** (1983), 31–35.

[5] W. J. Cook, J. Fonlupt and A. Schrijver, An integer analogue of Caratheodory's theorem, *J. Combinatorial Theory,* Ser B., **40** (1986), 63–70.

[6] J. Edmonds, Minimum partition of a matroid into independent sets, *J. Res. Nat. Bur. Standards,* **B69** (1965), 67–72.

[7] J. Edmonds and D. R. Fulkerson, Transversal and matroid partition, *Journal of Research of the National Bureau of Standards,* **B69** (1965), 147–153.

[8] J. Edmonds, Optimum branchings, *J. Res. Nat. Bur. Standards,* **B71** (1967), 233–240.

[9] J. Edmonds, Submodular Functions, Matroids and Certain Polyhedra, in: *Combinatorial Structures and their Applications* (R. Guy, H. Hanani, N. Sauer and J. Schönheim, eds.), Gordon and Breach, New York (1970), pp. 69–87.

[10] J. Edmonds, Matroids and the greedy algorithm, *Math. Programming,* **1** (1971), 127–136.

[11] J. Edmonds, Edge-disjoint branchings, in: *Combinatorial Algorithms* (B. Rustin, ed.), Acad. Press, New York, (1973), 91–96.

[12] J. Edmonds, Matroid intersection, *Annals of Discrete Math.,* **4** (1979), 39–49.

[13] J. Edmonds and D. R. Fulkerson, Transversal and matroid partition, *Journal of Research of the National Bureau of Standards,* **B69** (1965), 147–153.

[14] J. Edmonds and R. Giles, A min-max relation for submodular functions on graphs, *Annals of Discrete Mathematics,* **1** (1977), 185–204.

[15] J. Edmonds, Matroid intersection, *Annals of Discrete Math.,* **4** (1979), 39–49.

[16] J. Edmonds and R. Giles, Total dual integrality of linear inequality systems, in: *Progress in Combinatorial Optimization* (ed. W. R. Pulleyblank), Academic Press (1984), pp. 117–129.

[17] Egerváry J., Matrixok kombinatorius tulajdonságairól, *Matematikai és Fizikai Lapok,* **38** (1931), 16–28.

[18] J. Folkman and D. R. Fulkerson, Edge-colorings in bipartite graphs, in: *Combinatorial Mathematics and its Applications* (Proc. Conference Chapel Hill, North Carolina, 1967). The University of North Carolina Press, 1969 (R. C. Bose, T. A. Dowling, eds.), 561–577.

[19] A. Frank, On disjoint trees and arborescences, in: *Algebraic Methods in Graph Theory,* Colloquia Mathematica Soc. J. Bolyai, **25** (1978), 159–169. North-Holland.

[20] A. Frank, Kernel systems of directed graphs, *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged),* **41, 1–2** (1979), 63–76.

[21] A. Frank, On the orientation of graphs, *J. Combinatorial Theory,* Ser. B., Vol. 28, No. 3 (1980), 251–261.

[22] A. Frank, Generalized polymatroids, in: *Finite and infinite sets* (Eger 1981), Colloquia Mathematica Soc. J. Bolyai, **37**, 285–294. North-Holland.

[23] A. Frank, A weighted matroid intersection algorithm, *J. Algorithms,* **2** (1981), 328–336.

[24] A. Frank, An algorithm for submodular functions on graphs, *Annals of Discrete Mathematics,* **16** (1982), 97–120.

[25] A. Frank, Finding feasible vectors of Edmonds-Giles polyhedra, *J. Combinatorial Theory,* Ser. B, Vol. 36, No. 4 (1984), 221–239.

[26] A. Frank and É. Tardos, Generalized polymatroids and submodular flows, *Mathematical Programming,* Ser. B., **42** (1988), 489–563.

[27] A. Frank and É. Tardos, An application of submodular flows, *Linear Algebra and its Applications,* **114/115** (1989), 329–348.

[28] A. Frank, Augmenting graphs to meet edge-connectivity requirements, *SIAM J. on Discrete Mathematics* (1992 February), Vol. 5, No. 1., pp. 22–53.

[29] A. Frank, Orientations of Graphs and Submodular Flows, *Congressus Numerantium,* **113** (1996) (A. J. W. Hilton, ed.), pp. 111–142.

[30] A. Frank, Connectivity augmentation problems in network design, in: *Mathematical Programming: State of the Art,* 1994, (J. R. Birge and K. G. Murty, eds.), The University of Michigan, pp. 34–63.

[31] Frank A., A Magyar Módszer és általánosításai, *Szigma,* 2002, XXXIII, 1–2, pp. 13–44.

[32] A. Frank and T. Jordán, Minimal edge-coverings of pairs of sets, *J. Combinatorial Theory,* Ser. B., Vol. 65, No. 1 (1995, September), pp. 73–110.

[33] A. Frank, T. Király and M. Kriesell, On decomposing a hypergraph into k connected sub-hypergraphs, in: *Submodularity* (guest editor S. Fujishige), Discrete Applied Mathematics, Vol. 131, Issue 2. (September 2003), pp. 373–383.

[34] A. Frank and É. Tardos, Matroids from crossing families, in: *Finite and infinite sets* (Eger, 1981), Colloquia Mathematica Soc. J. Bolyai, **37**, 295–304. North-Holland.

[35] Frank A., Összefüggések a kombinatorikus optimalizálásban: I. Optimalizálás gráfokon, *Matematikai Lapok,* Vol. 1 (2008), 20–76.

[36] A. Frank, Rooted k-connections in digraphs, *Discrete Applied Mathematics* (2008) to appear.

[37] S. Fujishige, Structures of polyhedra determined by submodular functions on crossing families, *Math. Programming,* **29** (1984), 125–141.

[38] S. Fujishige, *Submodular functions and optimization,* (Second Edition) Annals of Discrete Mathematics, Vol. 58, Elsevier (2005).

[39] E. Győri, A minimax theorem on intervals, *J. Combinatorial Theory,* Ser. B, **37** (1984), 1–9.

[40] A. J. Hoffman and J. B. Kruskal, Jr., *Integral boundary points of convex polyhedra*, Linear Inequalities and Related Systems, Annals of Mathematics Study, **38** (1956), 223–346, Princeton University Press.

[41] A. J. Hoffman, Some recent applications of the theory of linear inequalities to extremal combintorial analysis, *Proceedings of the Symposia of Applied Mathematics,* **10** (1960), 113–127.

[42] A. J. Hoffman, A generalization of max-flow min-cut, *Math. Programming,* **6** (1974), 352–359.

[43] T. Jordán and Z. Szigeti, Detachment preserving local edge-connectivity of graphs, *SIAM J. Discrete Mathematics,* Vol. 17, No. 1. (2003), pp. 72–87.

[44] T. Király, Covering symmetric supermodular functions by uniform hypergraphs, *J. Combinatorial Theory,* Ser. B, **91** (2004), 185–202.

[45] Kőnig D., Graphok és matrixok, *Matematikai és Fizikai Lapok,* **38** (1931), 116–119.

[46] G. Laman, On graphs and rigidity in plane skeletal structures, *J. Engineering Math.,* **4** (1970), 331–340.

[47] E. L. Lawler, *Kombinatorikus Optimalizálás: hálózatok és matroidok,* Műszaki Kiadó, 1982. (*Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*, Holt, Rinehart and Winston, 1976).

[48] L. Lovász, Jelentés az 1968. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékversenyről, *Matematikai Lapok,* **20** (1969) pp. 145–171. 11. feladat, Lovász megoldása 168–169 oldal.

[49] L. Lovász, A generalization of Kőnig's theorem, *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.,* **21** (1970), 443–446.

[50] L. Lovász, Flats in matroids and geometric graphs, in: *Combinatorial Surveys – Proceedings of the Sixth British Combinatorial Conference* (London-Egham, 1977, P. J. Cameron, ed.) Academic Press, London, 1977, pp. 45–86.

[51] L. Lovász and Yemini, On generic rigidity in the plane, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods,* **3** (1982), 1, 91–98.

[52] L. Lovász, Submodular functions and convexity, in: *Mathematical programming – The state of the art* (eds. A. Bachem, M. Grötschel and B. Korte), Springer 1983, 235–257.

[53] W. Mader, A reduction method for edge-connectivity in graphs, *Ann. Discrete Math.,* **3** (1978), 145–164.

[54] K. Murota, Discrete Convex Analysis, *SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications,* 2003.

[55] H. Nagamochi, T. Ishii and H. Ito, Minimum cost source location problem with vertex-connectivity requirements in digraphs, *Information Processing Letters,* **80** (2001), 287–294.

[56] R. Rado, A theorem on independence relations, *Quarterly J. of Math. Oxford,* **13** (1942), 189–222.

[57] Z. Szigeti, Hypergraph connectivity augmentation, in: *Connectivity Augmentation of Networks: Structures and Algorithms, Mathematical Programming*, (ed. A. Frank), Ser. B, **84**, No. 3 (1999), pp. 519–527.

[58] D. H. Younger, Maximum families of disjoint directed cut sets, in: *Recent Progress in Combinatorics* (ed. W. T. Tutte), Proceedings of the Third Waterloo Conference on Combinatorics, May 1968, Academic Press (1969), pp. 329–333.

Frank András

Operációkutatási Tanszék és
MTA-ELTE Egerváry Kutatócsoport
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Pázmány P. s. 1/c
Budapest H-1117

`e-mail: frank@cs.elte.hu.`