EUGENE L. LAWLER

Kombinatorikus optimalizálás: hálózatok és matroidok

MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ, BUDAPEST, 1982

Függelék

ÍRTA FRANK ANDRÁS

Bevezetés

A kombinatorikus optimalizálás területe az utóbbi években is igen jelentős fejlődésben volt. Ez indokolta, hogy a könyvet egy pótfejezettel egészítsük ki, amelyben megemlítünk négy olyan további témát, amely az Olvasót érdekelheti.

1. *Részbenrendezett halmazok láncai és antiláncai*

A 4. fejezetben szerepelt Dilworth-tétel körmentes irányított gráf csúcsait fedő utak minimális számáról. Dilworth e tételt eredetileg részbenrendezett halmazokra fogalmazta meg (l. a 4. fejezet 9.2. feladatát). Ennek kimondásához bevezetjük a lánc és antilánc fogalmát. A *lánc* egy teljesen rendezett részhalmaz, míg az *antilánc* épp az ellenkezője: páronként nem összehasonlítható elemekből áll. Ha azt kérdezzük, hogy egy $P=\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ részbenrendezett halmaz legkevesebb hány lánccal fedhető le, akkor egy maximális A antilánc a elemszáma nyilván alsó korlát, hiszen A elemei a felbontáskor biztosan külön láncokba kerülnek, más szóval a fedő láncok minimális száma legalább akkora, mint a maximális antilánc elemszáma.

1. Tétel *(Dilworth)* Részbenrendezett halmazban a fedőláncok minimális száma a maximális antilánc elemszámával egyenlő.

A 4. fejezet 9. szakaszában e tételnek érdekes gyakorlati alkalmazását láttuk repülőjáratok tervezésénél. Ott az volt a kérdés, hogy előre adott útvonalakat, melyeknek a menetrendje szintén rögzített, legkevesebb hány repülőgéppel lehet lebonyolítani. Ez pontosan annak felelt meg, hogy egy részbenrendezett halmazt hány lánc egyesítésére lehet felbontani. Tegyük most fel, hogy a repülőtársaságnak meghatározott számú repülőgépe van. Ha ez a γ szám legalább akkora, mint a modellben a maximális antilánc mérete, akkor a társaság az összes légiutat el tudja látni. A $\gamma < a$ esetben vetődik fel az az érdekes kérdés, hogy adott számú repülővel maximálisan hány utat lehet teljesíteni. A részbenrendezett halmazok segítségével ez úgy fogalmazható meg, hogy maximálisan hány elem fedhető le γ lánccal, vagy másképpen, mennyi a γ lánc egyesítésének a maximális elemszáma. Jelöljük ezt a maximumot c_γ-val. Dilworth tétele, melyet alább be is fogunk bizonyítani, pontosan azt mondja, hogy $c_a = n$. Be fogunk mutatni egy Greene-től [1] származó minimax-formulát c_γ-ra, és arra is rávilágítunk majd, hogy a 9. fejezet 4. szakaszában bemutatott minimálköltséges folyam algoritmusból miként olvasható ki jó algoritmus az optimális γ lánc meghatározására. Mielőtt azonban ezt megtennénk, hadd mutassunk be egy olyan problémát, amely a Dilworth-tétel ellenpárjának tekinthető. A kérdés az, hogy egy részbenrendezett halmaz legkevesebb hány antilánccal fedhető le. A maximális lánc c elemszáma nyilván alsó korlát.

2. Tétel *(Erdős—Szekeres)* Részbenrendezett halmazban a fedő antiláncok minimális száma a maximális lánc elemszámával egyenlő.

Láthatjuk, hogy az Erdős—Szekeres-tétel formálisan a Dilworth-tételből a lánc és antilánc szavak felcserélésével keletkezik. Bizonyítása azonban sokkal egyszerűbb.

BIZONYÍTÁS Legyen A_1 a minimális elemek halmaza, A_2 a maradékban a minimális elemek halmaza és így tovább. Így P-t fel tudjuk bontani $A_1, A_2, \dots, A_c$ nemüres halmazokra. Rögtön látszik, hogy mindegyik A_i antilánc. A tételhez csupán azt kell kimutatnunk, hogy létezik c elemből álló lánc. Ecélból legyen $x_c \in A_c$. Mivel $A_{c-1} \cup A_c$ ben x_c nem volt minimális, így létezik olyan $x_{c-1} \in A_{c-1}$ elem, amelyre $x_{c-1} < x_c$. Mivel x_{c-1} nem minimális $A_{c-2} \cup A_{c-1} \cup A_c$-ben, ezért létezik olyan $x_{c-2} \in A_{c-2}$ elem, amelyre $x_{c-2} < x_{c-1}$, és így tovább, minden A_i-ből ki tudunk választani egy x_i elemet, amelyek láncot alkotnak. //

Láthatjuk, hogy a bizonyítás egy mohó jellegű algoritmus segítségével történt (szemben a Dilworth-tétel nemsokára következő bizonyításával). Először a minimális fedő antiláncokat konstruáltuk meg, majd visszafelé haladva a maximális láncot.

FELADATOK

1. $ab+1$ darab pozitív egész szám között vagy van $a+1$, amelyek páronként egymás többszörösei, vagy van $b+1$, amelyek páronként nem oszthatók egymással.
2. Különböző valós számok $ab+1$ tagú sorozatából kiválasztható vagy $a+1$ tagú monoton növő, vagy $b+1$ tagú monoton csökkenő részsorozat.
3. Egy egyenesen megadott $ab+1$ szakasz között vagy van $a+1$ páronként diszjunkt, vagy az egyenesnek van olyan pontja, amely legalább $b+1$ szakaszban benne van.

(A három feladatban szereplő „vagy" szót nem kizáró értelemben értjük.)

Útmutatás: A feladatokhoz megfelelően választott részbenrendezett halmazokra alkalmazzuk az Erdős—Szekeres-tételnek azt a nyilvánvaló következményét, hogy $ab+1$ elemű részbenrendezett halmazban mindig van egy $a+1$ elemű lánc vagy egy $b+1$ elemű antilánc.

A DILWORTH-TÉTEL BIZONYÍTÁSA Azt mutatjuk ki, hogy valamilyen a-ra létezik a tagú antilánc és P-nek a láncból álló felbontása. A P részbenrendezett halmaznak feleltessünk meg egy $G=(X, Y, E)$ páros gráfot, ahol $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ $Y=\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ és $(x_i y_j) \in E$, ha $p_i > p_j$ (tehát x_i-ből y_i-be nem vezet él).

1. Lemma A G gráf tetszőleges F független élhalmaza megfeleltethető a P olyan $C_1, C_2, \dots, C_q$ láncokból álló felbontásának, amelyre $k+q=n$.

BIZONYÍTÁS Legyen $x_i \in X$ olyan csúcs, melyet F nem fed. Egy (esetleg egyelemű) láncot készítünk x_i-hez, a következőképpen: A lánc legkisebb eleme p_i. Ha y_i-t lefedi valamely $(x_j, y_i) \in F$ él, akkor a lánc következő eleme legyen p_j. Ha y_j-t lefedi valamely (x_k, y_j) F él, akkor a lánc következő eleme p_k, és így tovább, a láncot addig növeljük, amíg az utolsónak bevett p_m elemhez tartozó y_m csúcsot már nem fedi le F-beli él.

Ily módon az F által nem fedett $n-|F|$ darab X-beli csúcs mindegyikéhez definiáltunk egy láncot P-ben. A lemma állítása következik abból az egyszerűen ellenőrizhető tényből, hogy e láncok P partícióját képezik. //

2. Lemma Legyen $S \subseteq X \cup Y$ a páros gráf éleinek minimális lefogása. Ekkor P-ben van olyan A antilánc, amelyre $|S|+|A|=n$.

BIZONYÍTÁS Először belátjuk, hogy ha $x_i \in S$, akkor $y_i \notin S$. Ha indirekt mindkét csúcs S-ben volna, akkor S minimalitása folytán, a gráfban valamely (x_i, y_j) élre $y_j \notin S$ és valamely (x_k, y_i) élre $x_k \notin S$. Ekkor tehát $p_k > p_i > p_j$, azaz $p_k > p_j$ és így (x_k, y_j) a gráf éle. Ezt az élt azonban S nem fogja le, amely ellentmondás bizonyítja, hogy valóban nem lehet x_i és y_i mindegyike S-ben.

Legyen $A=\{p_i : x_i \notin S$ és $y_i \notin S\}$. Ekkor A a lemma követelményét kielégítő antilánc. //

A Dilworth-tétel maga azonnal következik a két lemmából és a 4. 3. fejezet szakaszában szereplő Kőnig—Egerváry-tételből. //

A Dilworth-tételnek ez a Fulkersontól származó bizonyítása azzal az előnnyel rendelkezik, hogy algoritmikus, ugyanis a feladatot a kétrészes gráfok párosítási problémájára vezeti vissza.

A Dilworth-tételnél lényegesen általánosabb eredményt is bizonyítani fogunk. A Dilworth-tétel bizonyításának külön szerepeltetését az indokolja, hogy éppen e bizonyítást akarjuk általánosítani, továbbá az 1. lemmára a későbbiekben közvetlenül szükségünk lesz.

Ahogy a Dilworth-tétel általánosításaként kitűztük a γ lánc egyesítésének maximalizálási problémáját, az Erdős—Szekeres-tétel általánosításaként felvethetjük azt a kérdést, hogy α antilánc egyesítése maximum hány elemből állhat. Jelöljük ezt a maximumot a_α-val. Az Erdős—Szekeres-tétel szerint $a_c = n$, ezért feltehetjük, hogy $1 \leq \alpha \leq c$.

A c_γ-ra és a_α-ra vonatkozó minimax tételekhez legyen tehát $P=\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ egy részbenrendezett halmaz, amelyben a maximális lánc és antilánc elemszáma c. ill. a.

$\mathcal{C}_\gamma$ *lánccsaládon* diszjunkt nemüres $C_1, C_2, \ldots, C_\gamma$ láncoknak egy halmazát értjük.

$\mathcal{A}_\alpha$ *antilánccsaládon* diszjunkt nemüres $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$ antiláncoknak egy halmazát értjük.

A lánccsaládok halmazát jelölje $\mathcal{A}$, míg az antiláncokét $\mathcal{B}$. A következőkben, ha $\mathcal{B}=(B_1, B_2, \ldots, B_k)$ egy halmazrendszer, akkor az $\bigcup_i B_i$ halmazra az $\bigcup\mathcal{B}$ jelölést fogjuk használni.

Jelölje $c_\gamma=\max|\bigcup\mathcal{C}_\gamma|$ és $a_\alpha=\max|\bigcup\mathcal{A}_\alpha|$, ahol a maximumot a γ tagú lánccsaládokra, ill. az α tagú antilánccsaládokra vesszük.

Látjuk, hogy $c_1=c$ és $a_1=a$ és a Dilworth-tétel szerint $c_a=n$, az Erdős—Szekeres-tétel nyomán pedig $a_c=n$. Ezért végig feltesszük, hogy $1\leqq\gamma\leqq a$ és $1\leqq\alpha\leqq c$.

3.A Tétel *(Greene—Kleitman)* [1]

$$a_\alpha=\min\,(q\alpha+|\overline{\bigcup\mathcal{C}_q}|),$$

ahol a minimumot az összes $\mathcal{C}_q=\{C_1, C_2, \ldots, C_q\}$ lánccsaládra vesszük.

4.A Tétel *(Greene)* [1]

$$c_\gamma=\min\,(q\gamma+|\overline{\bigcup\mathcal{A}_q}|),$$

ahol a minimumot az összes $\mathcal{A}_q=\{A_1, A_2, \ldots, A_q\}$ antilánc családra vesszük.

E tételek bizonyításához először lássuk be, hogy $a_\alpha\leqq\min(q\alpha+|\overline{\bigcup\mathcal{C}_q}|)$. (A $c_\gamma\leqq\min(q\gamma+|\overline{\bigcup\mathcal{A}_q}|)$ egyenlőtlenség bizonyítása ugyanígy történik.) Tetszőleges $\mathcal{A}_\alpha$ antilánc és $\mathcal{C}_q$ lánccsaládra $(\bigcup\mathcal{A}_\alpha)\cap(\bigcup\mathcal{C}_q|\leqq\alpha q$. Így $\mathcal{A}_\alpha$ a legjobb esetben is az összes $\bigcup\mathcal{C}_\gamma$-ban nem szereplő elemet és még αq elemet tartalmazhat, amely a kívánt egyenlőtlenséget igazolja. Egyenlőség pontosan akkor áll, ha $(\bigcup\mathcal{A}_\alpha)\cap(\bigcup\mathcal{C}_q)=\alpha q$ továbbá az $\bigcup\mathcal{A}_\alpha$ és $\bigcup\mathcal{C}_q$ halmazok együttesen lefedik P-t. Ez indokolja, hogy bevezessük lánc- és antilánccsaládok ortogonalitásának fogalmát.

Definíció Az $\mathcal{A}_\alpha=\{A_1, A_2, \ldots, A_\alpha\}$ antilánccsaládot és a $\mathcal{C}_\gamma=\{C_1, C_2, \ldots, C_\gamma\}$ lánccsaládot *ortogonálisnak* nevezzük, ha

$$(a)\quad P=(\bigcup\mathcal{A}_\alpha)\cup(\bigcup\mathcal{C}_\gamma),\quad \text{és}$$

$$(b)\quad A_i\cap C_j\neq\emptyset,\quad \text{ha}\quad 1\leqq i\leqq\alpha,\ 1\leqq j\leqq\gamma.$$

Az egyenlőtlenség bizonyításánál alkalmazott megfontolás mutatja, hogy ha $\mathcal{A}_\alpha$ és $\mathcal{C}_\gamma$ ortogonálisak, akkor mindegyikük a maga nemében optimális, azaz $|\bigcup\mathcal{A}_\alpha|=a_\alpha$ és $|\bigcup\mathcal{C}_\gamma|=c_\gamma$. Így az alábbi **B.** tételek a megfelelő **A.** tételekkel ekvivalensek.

3.B Tétel Minden α-ra, $1\leqq\alpha\leqq c$, létezik $\mathcal{A}_\alpha\in\mathcal{A}$ és $\mathcal{C}_\gamma\in\mathcal{C}$, valamely γ-ra, amelyek ortogonálisak.

4.B Tétel Minden γ-ra, $1\leqq\gamma\leqq a$, létezik $\mathcal{C}_\gamma\in\mathcal{C}$ és $\mathcal{A}_\alpha\in\mathcal{A}$, valamely α-ra, amelyek ortogonálisak.

E tételek közös általánosítása így hangzik:

5. Tétel Létezik olyan

$$\mathcal{C}_a|\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_{i_1}|\mathcal{C}_{a-1}, \mathcal{C}_{a-2}, \ldots, \mathcal{C}_{a-j_1}|\mathcal{A}_{i_1+1}, \ldots, \mathcal{A}_{i_2}|$$
$$\mathcal{C}_{a-j_1-1}, \ldots, \mathcal{C}_{a-j_2}|\ldots|$$

sorozat, amely a $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_{a-1}, \ldots, \mathcal{C}_1$ és az $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_c$ sorozatok összefésüléséből áll elő, ahol $\mathcal{C}_\gamma$ $(1\leqq\gamma\leqq a)$ γ tagú lánccsaládot, $\mathcal{A}_\alpha$ $(1\leqq\alpha\leqq c)$ pedig α tagú antilánccsaládot jelöl, avval a tulajdonsággal, hogy a sorozat mindegyik tagja (akár $\mathcal{C}_\gamma$, akár $\mathcal{A}_\alpha$) ortogonális az őt megelőző utolsó ellentétes típusú tagra. (Azaz $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_{i_1}$ ortogonális $\mathcal{C}_a$-ra, $\mathcal{C}_{a-1}, \ldots, \mathcal{C}_{a-j_1}$ ortogonális $\mathcal{A}_{i_1}$-re stb.)

Figyeljük meg, hogy a $\mathcal{C}_\gamma$-k csökkenő index szerint következnek, míg az $\mathcal{A}_\alpha$-k növekvő szerint. Így a sorozat utolsó tagja vagy $\mathcal{C}_1$ vagy $\mathcal{A}_c$. Megjegyzendő, hogy a tételben nem szimmetrikus a láncok és antiláncok szerepe. A tételből az előző két tétel azonnal adódik.

A tétel bizonyítása a könyvben ismertetett minimális költségű folyam algoritmusán alapul. Jelen céljaink érdekében röviden összefoglaljuk ennek főbb lépéseit és tulajdnságait. Adott tehát a $G=(V, E)$ hálózat két kitüntetett csúccsal: s a forrás és t a nyelő. Valamennyi (x, y) élhez egy $a(x, y)$ nemnegatív egész költséget és egy $c(x, y)$ pozitív egész kapacitást rendeltünk. A feladat egy s-ből t-be vezető $f(x\,y)$ minimális költségű v értékű folyamot keresni, ahol v előre adott pozitív egész.

Az algoritmus minden lehetséges v értékre megoldja a feladatot. Ehhez szükség van a G csúcsaihoz rendelt úgynevezett $\pi(x)$ potenciálfüggvényre vagy röviden potenciálra (duális változók). π nemnegatív egész értékű és $\pi(s)=0$ végig az eljárásban. A $\pi(t)=p$ számot a *potenciál értékének* nevezzük.

Tegyük fel, adott egy v értékű (nem feltétlenül optimális) $f(x, y)$ megengedett folyam (azaz $f(x, y)\leqq c(x, y)$, valamint egy p értékű potenciál. Az $\bar{a}(x, y)=a(x, y)+$ $+\pi(x)-\pi(y)$ jelölést használva a folyam költségére a következő becslés érvényes:

$$\sum_{(x,y)\in E} a(x, y)f(x, y)=\sum(\pi(y)-\pi(x))f(x, y)+\sum\bar{a}(x, y)f(x, y)=$$
$$=pv+\sum_{(x,y)\in E^-}\bar{a}(x, y)f(x, y)+\sum_{(x,y)\in E^+}\bar{a}(x, y)f(x, y)\geqq pv+\sum_{(x,y)\in E^-}\bar{a}(x, y)c(x, y)+$$
$$+\sum_{(x,y)\in E^+}\bar{a}(x, y)\cdot 0=pv+\sum_{(x,y)\in E^-}\bar{a}(x, y)c(x, y),$$

ahol E^+ az $\bar{a}(x, y)>0$ típusú (x, y) élek halmaza, E^- pedig az $\bar{a}(x, y)<0$ típusúaké.

Ebből láthatjuk, hogy a szóban forgó folyam v értékűek közül bizonyosan minimális költségű lesz, ha valamennyi egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül. Ez viszont éppen az alábbi optimalitási kritériumokkal ekvivalens.

$$(1)\quad \bar{a}(x, y)>0\Rightarrow f(x, y)=0;$$

$$(2)\quad \bar{a}(x, y)<0\Rightarrow f(x, y)=c(x, y).$$

Az algoritmus az azonosan 0 potenciálból és 0 folyamból indul ki, és működése során az optimalitási kritériumok végig fennállnak. Az általános lépésben a címkézési módszerrel utat keresünk abban a G' irányított gráfban, amelynek (x, y) éleire vagy (I) $\bar{a}(x, y)<0$ és $f(x, y)<c(x, y)$, vagy (II) $\bar{a}(y, x)=0$ és $f(y, x)>0$. Ilyen út vagy létezik vagy nem. Ennek megfelelően két fajta továbblépés lehetséges.

(a) Eset Ha a keresett út létezik, akkor felhasználásával új folyamot készítünk, melynek értéke *eggyel* nagyobb a megelőzőénél. Eközben a potenciál változatlan.

(b) Eset Ha az út nem létezik, akkor új potenciált készítünk oly módon, hogy a G'-ben az s-ből úttal nem elérhető (nem címkézett) csúcsokon a $\pi(x)$ potenciált *eggyel* növeljük. Az új potenciál értéke eggyel nagyobb a megelőzőénél. A folyam változatlan.

Az algoritmus ezen általános lépés ismételt alkalmazásaiból áll. Megjegyzendő, hogy folyam növelésénél *(a)* eset a folyam költsége az aktuális p potenciálértékkel nő. Továbbá az eljárás során $0 \leq \pi(x) \leq p$ végig minden x csúcsra fennáll.

Az algoritmus valamely fázisára a folyam és a potenciál aktuális értékeiből álló (v, p) párral fogunk hivatkozni.

A P részbenrendezett halmazhoz visszatérve feleltessünk meg P-nek egy $G=(V, E)$ hálózatot. Legyen $V=\{s, t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$, $E=\{(s, x_i): i=1, \dots, n\} \cup \{(y_i, t): i=1, \dots, n\} \cup \{(x_i, y_j): \text{ha } p_i \geq p_j\}$.

Figyeljük meg, miben különbözik ez a gráf a Dilworth-tétel bizonyításában szereplőtől. Két dologban. Egyrészt irányított, és egy s forrás, ill. t nyelőponttal van kiegészítve, másrészt x_i-ből vezet él y_i-be. Valamennyi él $c(e)$ kapacitása legyen 1, míg az $a(e)$ költségekre:

$$a(e)=\begin{cases} 1, & \text{ha } e=(x_i, y_i), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Tekintsük e hálózatban a minimális költségű folyam algoritmusának valamely (v, p) fázisát, és feleltessünk meg először az aktuális folyamnak egy $\mathcal{C}_\gamma$ lánccsaládot, ahol $\gamma=n-v$. Ha a folyam költsége d $(d \geq 0)$, akkor a folyam d számú (x_i, y_i) típusú élen 1, mondjuk $f(x_1, y_1)=f(x_2, y_2)=\dots=f(x_d, y_d)=1$. Azon (x_i, y_j) élek $(i \neq j)$, amelyekre $f(x_i, y_j)=1$, független élrendszert alkotnak. Ez pedig a $P'=(p_{d+1}, p_{d+2}, \dots, p_n)$ részhalmaznak egy láncfelbontását definiálja, a Dilworth-tétel bizonyításában szereplő 1.1. lemmát használva. A láncok száma $|P'|-(v-d)=n-v=\gamma$. Jelöljük a láncokat $C_1, C_2, \dots, C_\gamma$-val és a belőlük álló lánccsaládot $\mathcal{C}_\gamma$-val. Megjegyezzük, hogy $\mathcal{C}_\gamma$ nem függ a potenciáltól.

Ezután az aktuális potenciálnak egy $\mathcal{A}_\alpha$ antilánccsaládot feleltetünk meg, ahol $\alpha=p$. Legyen $A_i=\{p_j: \pi(x_j)+1=\pi(y_j)=i\}$, $i=1, 2, \dots, p$. Legyen $\mathcal{A}_\alpha=\{A_1, A_2, \dots, A_\alpha\}$. Megjegyezzük, hogy $\mathcal{A}_\alpha$ nem függ a folyamtól.

Célunk annak kimutatása, hogy $\mathcal{C}_\gamma$ és $\mathcal{A}_\alpha$ ortogonálisak. Mielőtt azonban ezt megtennénk, lássuk először be, hogy $\mathcal{A}_\alpha$ egyáltalán antiláncokból áll.

3. Lemma Az algoritmus minden fázisában igaz (A) és (B) ahol

(A) $\pi(y_i)=\pi(x_i)$, vagy $\pi(y_i)=\pi(x_i)+1$;

(B) Ha $p_i > p_j$ és $f(x_i, y_j)=1$, akkor $\pi(x_i)=\pi(y_j)$.

Bizonyítás (A) kezdetben nyilván igaz. A potenciál növelésénél csak akkor keletkezhet baj, ha $\pi(y_i)=\pi(x_i)+1$ a növelés előtt, és x_i elérhető s-ből, de y_i nem. Ekkor (és csak ekkor) ugyanis a növelés után $\pi'(y_i)=\pi'(x_i)+2$ volna. $\pi(y_i)=\pi(x_i)+1$ azt jelenti, hogy $\bar{a}(x_i, y_i)=0$, ezért $f(x_i, y_i)=1$; $f(x_i, y_i)=0$ esetén ugyanis y_i is elérhető volna x_i-ből a G' gráfban. Nézzük most meg, hogy ha x_i elérhető, akkor melyik korábban elért csúcsból érhettük el. Az s-ből nem, hiszen $f(s, x_i)=1$, így csak y_i-ből, ami viszont ellentmondásban van azzal, hogy y_i nem elérhető.

A folyamnövelés nincs *(A)*-ra befolyással.

(B) kezdetben nyilván igaz. Mivel $f(x_i, y_j)=1$, így (1) miatt $\pi(y_j) \geq \pi(x_i)$ mindig fennáll.

Ha most a potenciál növelésénél az (x_i, y_j) élre *(B)* elromlana, akkor az új potenciálra csak $\pi'(y_j)=\pi'(x_i)+1$ lehetne, továbbá x_i elérhető volna G'-ben s-ből, míg y_j nem. G'-ben x_i-be csak y_j-ből vezet él, márpedig y_j nem elérhető, tehát ellentmondásra jutottunk.

Folyam növelésekor *(B)*-t az olyan (x_i, y_j) élekre kell csak ellenőrizni, amelyeken a régi folyam 0 volt, míg az új 1. Ekkor persze (x_i, y_j) él volt G'-ben és így $\pi(y_j)-\pi(x_i)=a(x_i, y_j)=0$, amit igazolni kellett. //

Következmény A fentebb definiált A_i halmaz antilánc minden $i=1, 2, \dots, p$-re.

Bizonyítás Ha $p_m, p_j \in A_i$ és $p_m > p_j$ volna, akkor $\pi(y_j)-\pi(x_m)=1>0$, így (2) miatt $f(x_m, y_j)=1$, és ez ellentmond *(B)*-nek. //

4. Lemma $\mathcal{A}_\alpha$ és $\mathcal{C}_\gamma$ ortogonálisak.

Bizonyítás

(a) Először belátjuk, hogy $P=(\bigcup \mathcal{A}_\alpha) \cup (\bigcup \mathcal{C}_\gamma)$. Legyen $p_m \notin \bigcup \mathcal{A}_\alpha$, vagy ekvivalensen $f(x_m, y_m)=1$. Ekkor (1) miatt $\pi(y_m)-\pi(x_m) \geq 1$, így *(A)* miatt $\pi(y_m)=\pi(x_m)+1$, vagyis $\pi(y_m)$-et i-vel jelölve, $p_m \in A_i$.

(b) Igazoljuk ezután, hogy $A_i \cap C_j \neq \emptyset$, $(1 \leq i \leq \alpha,\ 1 \leq j \leq \gamma)$. A C_j lánc álljon mondjuk a $p_1 > p_2 > \dots > p_k$ $(k \geq 1)$ elemekből. Ekkor $f(y_1, t)=0$, így (2) miatt $\pi(y_1) \geq \pi(t)=p$, és ezért $\pi(y_1)=p$. Hasonlóképpen $f(s, x_k)=0$, így (2) miatt $\pi(x_k) \leq \pi(s)=0$. Tehát $\pi(x_k)=0$. Most *(B)*-t használva tudjuk, hogy $p=\pi(y_1) \geq \pi(x_1)=\pi(y_2) \geq \pi(x_2)=\dots=$ $=\pi(y_k) \geq (x_k)=0$. Vagyis a potenciálok az $y_1, x_1, y_2, x_2, \dots, y_k, x_k$ pontokon monoton csökkenő sorozatot alkotnak, amely csak (x_j, y_j) éleken csökkenhet, *(A)* szerint legfeljebb 1-gyel. Ily módon minden i-re $(1 \leq i \leq \alpha \leq p)$ van olyan m, amelyre $\pi(x_m)+$ $+1=\pi(y_m)=i$. Vagyis $p_m \in C_j \cap A_i$. //

A lemma bizonyítását befejezve tegyük fel, hogy a minimális költségű folyam algoritmusa a részbenrendezett halmazhoz rendelt hálózatban a következőképpen futott le. Kiindulva $\pi(x) \equiv 0$-ból és $f(x, y) \equiv 0$-ból, a folyam értéke egyenként k_0-ig nő, a potenciál értéke i_1-ig, azután ismét a folyam értéke k_1-ig ... stb. Végül a folyam érték i_s-re, a potenciál értéke pedig k_s-re nő $(0 \leq k_0 < k_1 < k_2 < \dots < k_s,\ 0 < i_1 <$ $< i_2 < \dots < i_s)$.

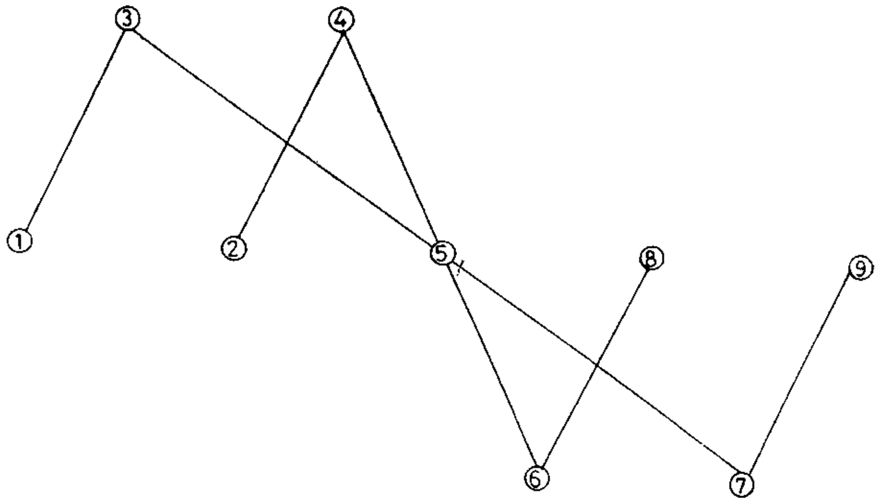
Az algoritmus a maximális folyam elérésekor ér véget, amely esetünkben n, azaz $k_s=n$.

Legyen $a=n-k_0$ és $j_i=k_i-k_0$, $i=1, 2, \dots, s$. Az utolsó lemma alapján az algoritmus $(v, p)=(k_0, 1)$ fázisához $\mathcal{C}_a$ és $\mathcal{A}_1$ tartozik. Ezután a potenciál értéke, mint említettük, egyenként i_1-re nő. A közbenső helyzetekhez tartozó $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \dots, \mathcal{A}_{i_1}$ antilánccsaládok ortogonálisak a változatlan $\mathcal{C}_a$-ra. Ezután a folyam értéke egyenként k_1-re nő. A közbenső helyzetekhez tartozó $\mathcal{C}_{a-1}, \mathcal{C}_{a-2}, \dots, \mathcal{C}_{a-j_1}$ lánccsaládok ortogonálisak a változatlan $\mathcal{A}_{i_1}$-re, és így tovább. Evvel az 5. tétel bizonyítását és az algoritmus ismertetését befejeztük. //

Az 5. tétel példát mutatott olyan α, γ indexpárokra, melyekre van ortogonális $\mathcal{A}_\alpha$ és $\mathcal{C}_\gamma$. Nem nehéz kimutatni, hogy más ilyen indexpár nincs is (l. alább az 1. feladatot). Az is látszik, hogy az $i_1, \dots, i_s$ és $j_1, \dots, j_s$ indexsorozatokat a részbenrendezett halmaz egyértelműen meghatározza, így az algoritmus során fellépő (v, p)

párok csupán P-től függenek és nem az algoritmus lefutásának mikéntjétől. Ábrázoljuk e számpárokat egy koordinátarendszer v és p koordinátájú pontjaiként. Példaként tekintsük az F.1. ábrán látható részbenrendezett halmazt, ahol az (úttal) összekötött pontok vannak relációban és a feljebb levő a nagyobb.

Az algoritmus lefutása ebben az esetben a $k_0=4$, $k_1=6$, $k_2=8$, $k_3=9$ $(=n)$ és az $i_1=1$, $i_2=2$, $i_3=3$ sorozatokat definiálja, vagyis a szereplő (v, p) párokat ábrázolva a következő ábrát kapjuk.



F.1. ábra

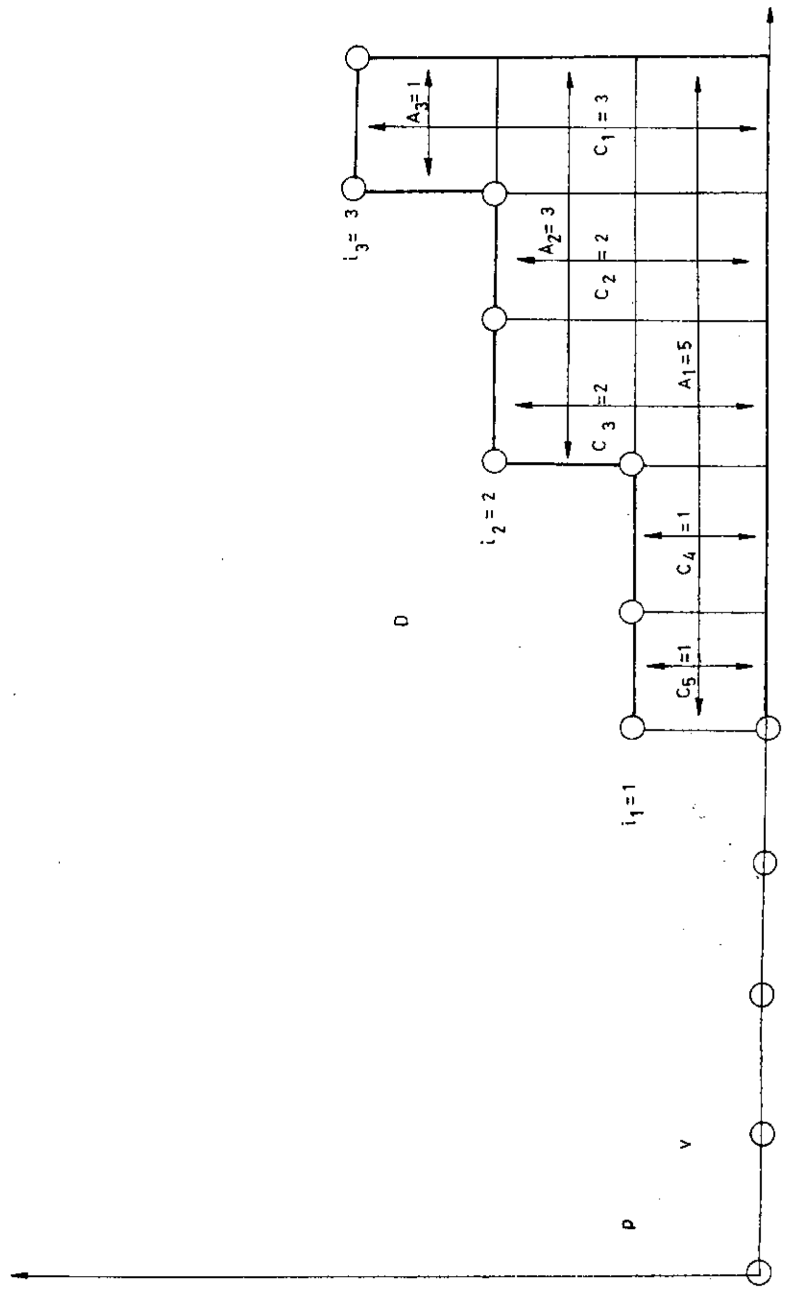
Az F.2. ábrán vastag vonallal határolt D tartomány csak P-től függ, és segítségével egy érdekes állítást lehet leolvasni. A példában a tétel által biztosított sorozat:

$$\mathcal{C}_5|\mathcal{A}_1|\mathcal{C}_4,\ \mathcal{C}_3|\mathcal{A}_2|\mathcal{C}_2,\ \mathcal{C}_1|\mathcal{A}_3,$$

ahol

$$\mathcal{C}_5=\{13, 24, 5, 68, 79\},$$
$$\mathcal{A}_1=\{12589\},$$
$$\mathcal{C}_4=\{13, 24, 68, 79\},$$
$$\mathcal{C}_3=\{13, 456, 79\},$$
$$\mathcal{A}_2=\{1267, 3489\},$$
$$\mathcal{C}_2=\{13, 456\},$$
$$\mathcal{C}_1=\{456\},$$
$$\mathcal{A}_3=\{1267, 3489, 5\}.$$

Innen látható, hogy $a_1=5$, $a_2=8$, $a_3=9$ és $c_1=3$, $c_2=5$, $c_3=7$, $c_4=8$, $c_5=9$.



F.2. ábra

Képezzük az $\{a_i\}$ és $\{c_j\}$ sorozatok differenciasorozatait: $A_1=a_1$, $A_i=a_i-a_{i-1}$, ha $2\leq i\leq c$ és $C_1=c_1$, $C_j=c_j-c_{j-1}$, ha $2\leq j\leq a$. Nyilván $\Sigma A_i=\Sigma C_j=n$.

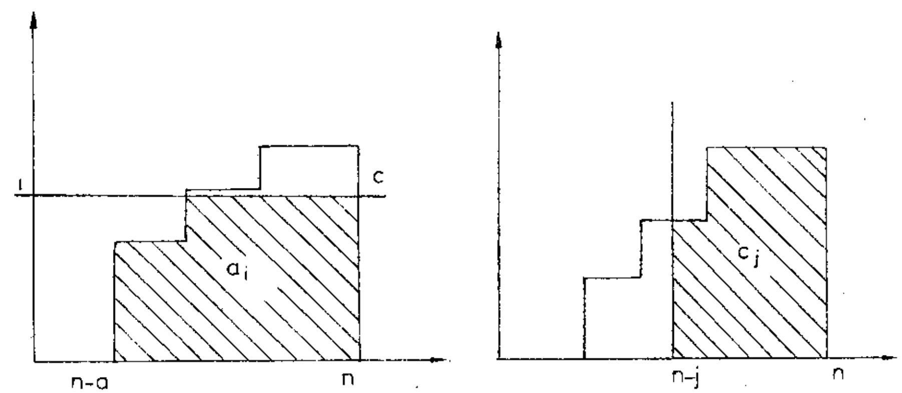
A D tartománnyal összefüggésben a differenciasorozatoknak érdekes jelentésük van.

Ha az algoritmus valamely lépése a folyam növelését jelentette a (v, p) fázisból a $(v+1, p)$-be $(v\geq k_0)$, akkor a folyam költsége, tudjuk, p-vel nőtt. Így az utolsó lemma alapján $C_{n-v}=p$. Mivel p az algoritmus során sohasem csökken, a $\{C_j\}$ sorozat monoton csökkenő, és a C_j számok éppen a D tartomány oszlopainak magasságai.

Ha az algoritmus valamely lépése a potenciál növelése volt a (v, p) fázisból a $(v, p+1)$-be, akkor a két fázishoz tartozó közös $\mathscr{C}_{n-v}$ lánccsalád ortogonális $\mathscr{A}_p$ és $\mathscr{A}_{p+1}$-re, így $A_{p+1}=n-v$. Mivel a v folyamérték az algoritmus során sohasem csökken, tehát az A_i sorozat monoton csökkenő, és az A_i számok éppen a D tartomány sorainak hosszúságai.

Ily módon adódott a következő tétel:

6. Tétel Az $\{A_i\}$ és $\{C_j\}$ sorozatok monoton csökkenőek és a D tartomány sorainak, ill. oszlopainak hosszaival egyeznek meg. a_i az $y=i$ egyenes alatti terület nagysága D-ben, míg c_i az $x=n-j$-től jobbra eső területé (F.3. ábra).



F.3. ábra

FELADATOK

1. Igazoljuk, hogy az algoritmusban fellépő (v, p) párok csak a hálózattól függnek és nem az algoritmus lefutásának mikéntjétől!
2. Igazoljuk az 5. tétel felhasználásával, hogy a diszjunkt maximális (vagyis *a* elemszámú) antiláncok maximális száma az összes maximális antiláncot lefogó elemek minimális számával egyenlő! Lássuk be, hogy a láncok és antiláncok felcserélésével is igaz állításhoz jutunk!

2. *A súlyozott matroid metszetére vonatkozó egyszerűsített algoritmus*

A függelék második részében egy primál—duál módszert mutatunk be a súlyozott matroidmetszet problémájának megoldására és egyúttal Edmonds-nak a matroidmetszetek poliéderére vonatkozó tételének igazolására. Ez lényegesen egyszerűbbnek és a bizonyítás szempontjából meggyőzőbbnek tűnik, mint a könyv 8. fejezetének 11...13. szakaszában szereplő primál—duál eljárás, bár bizonyos értelemben mindkét algoritmus futása során ugyanaz történik. Javasolnánk az Olvasónak a kétfajta algoritmus összevetését.

Legyen tehát $M_1=(S, \mathscr{I}_1)$ és $M_2=(S, \mathscr{I}_2)$ két adott matroid, w pedig tetszőleges (akár negatív vagy nem egész) súlyfüggvény. S egy X részhalmazának súlyát a szokásos módon az $w(X)=\Sigma w(x)$ (ahol $x\in X$) összeggel definiáljuk. Ha $\mathscr{F}$ az S részhalmazainak egy családja, akkor $F\in\mathscr{F}$-ről azt mondjuk, hogy *w-maximális* $\mathscr{F}$-ben, ha $w(F)\geq w(X)$ minden $X\in\mathscr{F}$-re. Szükségünk lesz néhány egyszerű lemmára. A könyv 7. fejezetében vizsgált mohó algoritmus érvényessége az alábbi lemmával ekvivalens:

1. Lemma Adott $M=(S, \mathscr{I})$ matroidra legyen $\mathscr{I}^k=\{X: X\in J,\ |X|=k\}$. Az $I\in\mathscr{I}^k$ halmaz akkor és csak akkor w-maximális, ha

(1) $x\notin I$, $I+x\notin\mathscr{I}$, és $y\in C(I, x)$-ből $w(x)\leq w(y)$ következik, és

(2) $x\notin I$, $I+x\in\mathscr{I}$, és $y\in I$-ből $w(x)\leq w(y)$ következik,

ahol $C(I, x)$ az $I+x$-ben levő egyértelmű kört jelöli.

2. Lemma Legyen B w-maximális $\mathscr{I}^k$-ban. Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_l$ és $y_1, y_2, \ldots, y$ különböző elemek, $y_i\in B$, $x_i\notin B$ $(i=1, 2, \ldots, l)$ amelyekre

(3) $B+x_i\notin\mathscr{I}$, és $y_i\in C(B, x_i)$

(4) $w(x_i)=w(y_i)$,

(5) Ha $w(y_i)=w(x_j)$, és $i<j$, akkor $y_i\notin C(B, x_j)$.

Ekkor a $B'=B-\{y_1, y_2, \ldots, y_l\}\cup\{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$ halmaz is w-maximális $\mathscr{I}^k$-ban.

BIZONYÍTÁS Mivel $w(B')=w(B)$ és $|B'|=k$, csupán B' függetlenségét kell bizonyítanunk. Ezt l szerinti indukcióval végezzük. Az $l=1$ eset nyilvánvaló. Legyen $l>1$. Legyen y_i olyan elem, amely lexikografikusan minimalizálja $(w(y_j), j)$-t. Ekkor $i\neq j$-ből következik, hogy $y_i\notin C(B, X_j)$: ellenkező esetben (1) és (4) az $w(y_j)\geq w(y_i)$ egyenlőtlenséget vonná maga után, és így y_i választása folytán $w(y_i)=w(y_j)$ lenne, amiből pedig, (5)-öt is felhasználva $i>j$ adódik. Ezek szerint az $(w(y_j), j)$ lexikografikusan kisebb, mint $(w(y_i), i)$, ami pedig ellentmondás.

Most az indukciós feltevés alkalmazható a $B_1=B-y_i+x_i$ halmazra és az $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_1$, ill. $y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_1$ elemekre, amiből a lemma következik. //

A két matroid k elemű közös függetlenjeinek halmazát jelöljük $\mathscr{I}_{12}^k$-vel.

3. Lemma Legyen $I\in\mathscr{I}_{12}^k$, továbbá w_1 és w_2 az S-nek két olyan súlyozása, amelyekre $w_1+w_2=w$ és I w_i-maximális $\mathscr{I}_i^k$-ben $(i=1, 2)$. Ekkor I w-maximális $\mathscr{I}_{12}^k$-ben.

A lemma bizonyítása triviális, ezért az Olvasóra hagyjuk.

Az algoritmus valamennyi lehetséges k-ra megad egy, a 3. lemma feltételeit kielégítő I halmazt, ill. w_1, w_2 súlyozást. Az eljárás $k=0$-val indul, majd k értékét egyenként növeljük. Az algoritmus lényeges tulajdonsága, hogy minden fázisában az aktuális $I\in\mathcal{I}_{12}^k$ w-maximális $\mathcal{I}_{12}^k$-ban.

Tegyük fel, hogy valamely k-ra adott a 3. lemma feltételeit kielégítő $I\in\mathcal{I}_{12}^k$, w_1, w_2. Ezekből kiindulva elkészítjük az $I'\in\mathcal{I}_{12}^{k+1}$ halmazt és a w_1', w_2' súlyozásokat, amelyekre ismét teljesülni fognak a 3. lemma feltételei (k helyett $k+1$-re). Kezdetben lehet például $k=0$, $I=\emptyset$, $w\equiv 0$ és $w_1=w$.

Legyen $m_i=\max\{w_i(y): y\notin I, I+y\in\mathcal{I}_i\}$ $(i=1,2)$. Legyen $X_i=\{x: x\notin I, I+x\in\mathcal{I}_i, w_i(x)=m_i\}$ $(i=1,2)$.

Definiáljuk S-en a kétrészes G segédgráfot a következőképpen:

I. Ha $x\notin I$, $I+x\notin\mathcal{I}_1$, $y\in C_1(I,x)$, $w_1(x)=w_1(y)$, akkor legyen (xy) él a segédgráfban.

II. Ha $x\notin I$, $I+x\notin\mathcal{I}_2$, $y\in C_2(I,x)$, $w_2(x)=w_2(y)$, akkor legyen (y,x) él a segédgráfban.

Döntsük el a címkézési technika segítségével, hogy G-ben létezik-e út az X_2 halmazból az X_1 halmazba! Két eset lehetséges:

1. *Eset* Ha a szóban forgó út létezik, akkor legyen U olyan, amely a legkevesebb pontból áll. (U-t csúcshalmaznak tekintjük, és valójában csak arra lesz szükségünk, hogy U, mint halmaz minimális.)

Legyen $I'=I\oplus U$, és legyen továbbá $w_i'=w_i$ $(i=1,2)$.

1. Állítás I', w_1', w_2' kjelégítik a 3. lemma feltételeit $k+1$-re.

BIZONYÍTÁS Jelöljük U csúcsait a végighaladás sorrendjében $x_0, y_1, x_1, y_2, \ldots, y_l, x_l$-lel. $(x_0\in X_2$, $x_1\in X_1)$. Az 1. lemma szerint $B=I+x_0$ w_2-optimális $\mathcal{I}_2^{k+1}$-ben.

Figyeljük meg, hogy a 2. lemma feltétele teljesül $k+1$-re a $B\in\mathcal{I}_2^{k+1}$ halmazra és az $x_1, x_2, \ldots, x_l$, valamint $y_1, y_2, \ldots, y_l$ elemekre. ((3) és (4) G definíciója folytán igaz, (5) pedig U minimalitásából következik.) Ily módon a 2. lemma szerint I' w_2-optimális $\mathcal{I}_2^{k+1}$-ben. Hasonlóképpen igazolhatjuk I' w_1-optimalitását $\mathcal{I}_1^{k+1}$-ben, avval az eltéréssel, hogy az U csúcsait fordított sorrendben újra kell indexelni (azaz az út utolsó csúcsa lesz x_0, az első pedig x_1.) //

2. Állítás $w(I')-w(I)=m_1+m_2$.

BIZONYÍTÁS Az állítás nyilvánvaló. Valójában erre nem is az algoritmus bizonyításához van szükségünk, hanem egy későbbi következménynél. //

2. *Eset* Ha nem létezik út, akkor jelölje T az X_2-ből úttal elérhető csúcsok halmazát.

Legyen

$$w_1'(x)=\begin{cases} w_1(x)+\delta, & \text{ha} \quad x\in T,\\ w_2(x), & \text{ha} \quad x\notin T,\end{cases}$$

és

$$w_2(x)=w(x)-w_1'(x),$$

ahol

$$\delta=\min(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4),$$

amelyben

$$\delta_1=\min(w_1(y)-w_1(x):\ I+x\notin\mathcal{I}_1,\ x\in T-I,\ y\in C_1(I,x)-T);$$

$$\delta_2=\min(m_1-w_1(x):\ I+x\in\mathcal{I}_1,\ x\in(T-I));$$

$$\delta_3=\min(w_2(y)-w_2(x):\ I+x\notin\mathcal{I}_2,\ x\in S-(T\cup I);\ y\in C_2(I,x)\cap T));$$

$$\delta_4=\min(m_2-w_2(x):\ I+x\in\mathcal{I}_2,\ x\in S-(T\cup I)).$$

(A minimumot $+\infty$-nek értelmezzük, ha az üres halmaz felett vettük.)

3. Állítás $\delta>0$.

BIZONYÍTÁS Belátjuk, hogy δ_1 és $\delta_4>0$. A $\delta_2>0$ és $\delta_3>0$ egyenlőtlenségek bizonyítása hasonlóképpen történhet. Ha $y\in C_1(I,x)-T$, akkor az 1. lemma alapján $w_1(y)\geq w_1(x)$. Ha viszont itt egyenlőség állna, akkor (x,y) él volna a segédgráfban, amely T-ből kilép. Ez lehetetlen, így $\delta_1>0$. Ha $x\in S-(T\cup I)$, akkor $x\notin X_2$, így m_2 definíciójából $\delta_4>0$ adódik.

4. Állítás Az $I'=I$, halmaz és a w_1', w_2' súlyozások kielégítik a 3. lemma feltételeit.

BIZONYÍTÁS Csak annyit bizonyítunk be, hogy az $I'=I$ halmaz w_1'-optimális $\mathcal{I}_1^k$-ban. A w_2'-optimalitás $\mathcal{I}_2^k$-ban hasonlóképp látható be. Az 1. lemma alapján azt kell igazolnunk, hogy (1) és (2) fenáll w_1'-re.

Válasszuk ki az olyan x és y elemeket, amelyekre $y\in C_1(I,x)$! Ha indirekt feltevéssel $w_1'(y)<w_1'(x)$ volna, akkor $w_1(y)\geq w_1(x)$ miatt, $w_1'(x)=w_1(x)+\delta$ és $w_1'(y)=w_1(y)$ következik. De $\delta\leq\delta_1\leq w_1(y)-w_1(x)$, vagyis $w_1'(x)\leq w_1'(y)$, ellentétben az indirekt feltevéssel. Így (1) fennáll.

Válasszuk ki az x, és y elemeket, amelyekre $y\in I$, $x\notin I$ és $I+x\in I_1$. Ha indirekt $w_1'(y)<w_1'(x)$ volna, akkor $w_1(y)\geq w_1(x)$ miatt $w_1'(y)=w_1(y)$ és $w_1'(x)=w_1(x)+\delta$ állna fenn. De $m_1<w_1(y)$ és $\delta\leq\delta_2\leq m_1-w_1(x)$, amiből $w_1'(x)\leq w_1'(y)$. Ez ellentétben van az indirekt feltevéssel, így (2) igaz.

Alkalmazzuk most ismét az algoritmust, ezúttal I', w_1' és w_2'-vel indítva. Figyeljük meg, hogy ha újra a második eset fordul elő, akkor az új T' szigorúan tartalmazza T-t, továbbá $X_i'\supseteq X_i$ $(i$-$1, 2)$. Következésképp az algoritmus ezen ciklusának legfeljebb $|S|$ alkalmazása után vagy az 1. eset fog bekövetkezni, vagy δ végtelenné válik. Ez utóbbi esetben megállapíthatjuk, hogy az aktuális I és T halmazokra fennáll az $|I|=r_1(T)+r_2(S-T)$ egyenlőség, ami azt jelenti, hogy I maximális elemszámú közös független halmaz. (Vegyük észre, hogy ezen a ponton megkaptuk az Edmondsnak a matroidok metszetére vonatkozó tétele bizonyítását.) Ezzel az algoritmus ismertetését és helyességének igazolását befejeztük.

Mielőtt az algoritmus lépéseit részletesen ismertetnénk, néhány szót ejtünk bonyolultságáról. Feltesszük, hogy a matroidok egy olyan szubrutin segítségével vannak adva, amelyek legfeljebb g lépésben el tudják dönteni, hogy adott I független halmaz és $x\in I$ elem esetén $I+x$ független-e, és ha nem, akkor megadják a $C(I,x)$ kört is.

Két valós szám összeadását, kivonását vagy összehasonlítását a szokásos módon egyetlen műveletnek tekintjük.

Legyen $|S|=n$, és jelölje K a maximális elemszámú közös független halmaznak az algoritmus által meghatározandó elemszámát.

A címkézési technika legfeljebb $O(n^2)$ lépést igényel a keresett út, ill. az elérhető pontok T halmazának meghatározására. Ha a 2. eset következik be, akkor a meglevő címkéket újra lehet használni, mivel $T' \supset T$, $X_1' \supseteq X_1'$ és $X_2' \supseteq X_2$. Következésképp, ha akármikor az 1. eset áll fenn, úgy legfeljebb $O(gn^2)$ lépés után ismét az első eset fog bekövetkezni. Ily módon az algoritmus lépésszámigénye legfeljebb $O(g\,K\,n^2) \leqq \leqq O(g\,n^3)$.

Megjegyzés: Ha az algoritmus $w_1 \equiv 0$-val indul, akkor az eljárás során végig $m_1 = 0$ és $\delta_2 = \infty$. Az algoritmus leírásánál nem használtuk ki az ebből adódó egyszerűsítési lehetőséget, egyrészt, hogy fenntartsuk a szimmetriát a két matroid között, másrészt, hogy meglegyen a lehetőség tetszőleges I, w_1 és w_2-vel való indulásra, amelyek kielégítik a 3. lemma feltételeit.

SÚLYOZOTT MATROIDOK METSZETÉRE VONATKOZÓ ALGORITMUS;

Bemenet M_1 és M_2: matroidok az S halmazon; w: súlyozás az S-en.

Kimenet

K a maximális közös független halmaz elemszáma;
T $T \subseteq S$ olyan halmaz, amelyre $r_1(T) + r_2(S-T) = K$;
I_k maximális súlyú k elemű közös független halmaz $(0 \leqq k \leqq K)$;
w_1^k és w_2^k súlyozások, amelyek összege w és I_k w_i^k-maximális $\mathcal{I}_i^k$-ben $(i=1, 2)$.

1. Lépés

(1.0) Legyen $w_1 \equiv 0$, $w_2 = w$, $k = 0$, $I_k = \emptyset$.

(1.1) Készítsük el a segédgráfot! Határozzuk meg X_1-et és X_2-t!

(1.2) Keressünk U utat X_2-ből X_1-be a címkézési technika segítségével, felhasználva olyan korábban definiált címkéket, amelyeket még nem töröltünk! Ha az út létezik, menjünk a 3. lépésre!

2. Lépés

(2.0) Jelölje T a megcímkézett csúcsok halmazát (az elérhető csúcsok halmazát)!

(2.1) Számítsuk ki δ-t! Ha $\delta = \infty$, akkor legyen $K = k$. Az aktuális I_k maximális elemszámú és $K = r_1(T) + r_2(S-T)$. STOP.

(2.2) Legyen $w_1(x) = w_1(x) + \delta$ és $w_2(x) = w_2(x) - \delta$, amikor $x \in T$.

(2.3) Menjünk az (1.1) lépésre!

3. Lépés

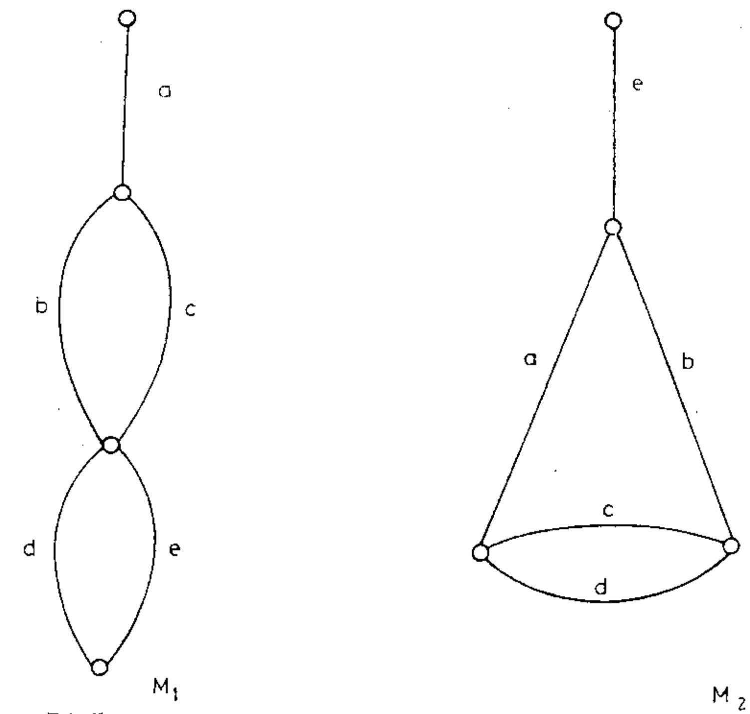
(3.0) Legyen $I_{k+1} = I_k \oplus U$. Legyen $k = k+1$. I_k optimális $\mathcal{I}_{12}^k$-ben. Tároljuk (vagy írassuk ki) I_k-t!

(3.1) Töröljük el az összes címkét!

(3.2) Legyen $w_1^k = w_1$ és $w_2^k = w_2$.

(3.3) Menjünk az (1.1) lépésre!

Példaként tekintsük az $S = \{a, b, c, d, e\}$ halmazon értelmezett két grafikus matroidot (F.4. ábra):



F.4. ábra. Példa a súlyozott matroid metszetére vonatkozó algoritmushoz

Az elemeken a w súlyozás legyen a következő:

	a	b	c	d	e
w:	3	5	6	10	8

Az algoritmus futását táblázaton követhetjük nyomon a könyv végén.

A példa után bemutatjuk az algoritmus néhány elvi következményét. Miután m_1 és m_2 az algoritmus futása során sohasem nő, a 2. állítás Krogdahlnak a könyvben már említett erdményét vonja maga után:

Következmény $w_{k+1} - w_k \leqq w_k - w_{k-1}$, ahol w_j az $\mathcal{I}_{12}^j$-ben w-maximális elem súlyát jelöli.

Az algoritmussal bizonyítást nyert az alábbi eredmény:

1. Tétel Az I halmaz akkor és csak akkor w-maximális $\mathcal{I}_{12}^k$-ben, ha van olyan w_1 és w_2 súlyozás, amelyek összege w és I w_i-maximális $\mathcal{I}_i^k$-ben $(i=1, 2)$. Ha ráadásul w egész értékű, akkor w_1 és w_2 is egész értékűnek választható.

Az alábbiakban az algoritmus segítségével levezetjük Edmonds tételét két matroid poliéderének metszetéről. Legyen A_i egy olyan 0-t és 1-et tartalmazó mátrix amelynek oszlopai S elemeinek felelnek meg, míg a sorai az M_i matroid zárt részhalmazainak. Az a_{ij} elem akkor 1, ha az i-edik elem benne van a j-edik zárt halmazban, másküIönben 0. Jelölje e az $|S|$ darab 1-esből álló vektort. Edmonds tételének változata a következő:

2. Tétel Tekintsük az alábbi duális lineáris programokat:

$$(*)\ \begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix} x \leqq \begin{pmatrix}r_1\\r_2\end{pmatrix} \qquad (y_1, y_2, t)\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\e\end{pmatrix} \geqq w\ (**)$$

$$ex = k \qquad (y_1, y_2) \geqq 0$$

$$x \geqq 0$$

$$\max wx \qquad \min \Sigma y_1(z) r_1(z) + \Sigma y_2(z) r_2(z) + t\cdot k.$$

Ha a (*) primál programnak van megoldása, akkor van egész értékű optimális megoldása is (amely egy k elemű közös független halmaz incidenciavektora). Ezenkívül, ha w egész értékű, akkor a duál programnak is van egész értékű optimális megoldása.

BIZONYÍTÁS A primál program megoldása legyen az algoritmus által megkonstruált $I_k \leqq \mathcal{I}_{12}^k$ halmaz incidenciavektora. A duális megoldást w_1 és w_2 segítségével írjuk fel.

Legyen $I_k = \{e_1, e_2, \dots, e_k\} = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ úgy, hogy $w_1(e_1) \geqq w_1(e_2) \geqq \dots \geqq w_1(e_k)$ és $w_2(f_1) \geqq w_2(f_2) \geqq \dots \geqq w_2(f_k)$.

Legyen $E_i = \mathrm{sp}_1(e_1, e_2, \dots, e_i)$ és $F_i = \mathrm{sp}_2 f(_1, f_2, \dots, f_i)$. Az y_1 és y_2 vektor komponenseit a következőképpen definiáljuk:

$$y_1(E_i) = w_1(e_i) - w_1(e_{i+1}), \qquad (i = 1, 2, \dots, k-1).$$

$$y_2(F_i) = w_2(f_i) - w_2(f_{i+1}),$$

Minden más komponens legyen 0.

Legyen továbbá $t = w_1(e_k) + w_2(f_2)$. Az (1) és (2) felhasználásával egyszerű számítás mutatja, hogy az így definiált (y_1, y_2, t) megengedett megoldása a duális programnak, amelyen a célfüggvény értéke:

$$1(w_1(e_1) - w_1(e_2)) + 2(w_1(e_2) - w_1(e_3)) + \dots + (k-1)\cdot(w_1(e_{k-1}) - w_1(e_k)) +$$

$$+ 1(w_2(f_1) - w_2(f_2)) + 2(w_2(f_2) - w_2(f_3)) + \dots + ((k-1)(w_2(f_{k-1}) - w_2(f_k)) + k\cdot t =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} w_1(e_i) - kw_1(e_k) + \sum_{i=1}^{k} w_2(f_i) - kw_2(f_k) + k\cdot t = \sum_{i=1}^{k} w(e_i) = w(I_k).$$

Láthatjuk tehát, hogy a megadott primál és duális megoldásokon a megfelelő célfüggvények értéke egyenlő egymással, így mindkét megoldás optimális. Továbbá, ha w egész értékű volt, akkor w_1 és w_2 is az, így y_1, y_2 és t is egész értékű. //

Az Edmonds-tétel eredeti alakja is egyszerűen megkapható:

3. Tétel Tekintsük az alábbi duál lineáris programokat:

$$\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix} x \leqq \begin{pmatrix}r_1\\r_2\end{pmatrix} \qquad (y_1, y_2)\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix} \geqq w$$

$$x \geqq 0 \qquad (y_1, y_2) \geqq 0$$

$$\max wx \qquad \min \Sigma y_1(z) r_1(z) + \Sigma y_2(z) r_2(z)$$

A primál programnak mindig van egész értékű otimális megoldása. Ha w egész értékű, akkor a duál programnak is van egész értékű optimális megoldása.

BIZONYÍTÁS Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy egyik matroid sem tartalmaz hurkot (egyelemű kört). Módosítsuk kissé az algoritmust. Tegyük fel, hogy az algoritmus $w_1 \equiv 0$ és $w_2 = w$ kezdeti megoldással indul, és ez esetben, amint már korábban megjegyeztük, $m_1 = 0$ és $\delta_2 = \infty$ végig fennáll az algoritmus futása során. Ha valamikor a 2. eset fordul elő, akkor δ-t definiáljuk a következőképpen: $\delta = \min(\delta_1, \delta_3, \delta_4, m_2)$ Ha $w \leqq 0$, akkor a megfelelő dimenziójú 0 vektorok lesznek az optimális (megengedett) megoldások. Ha $w \nleqq 0$, akkor az algoritmus indulásakor az m_2 szigorúan pozitív. A δ-nak ezen kissé módosított választása az algoritmus működését nem befolyásolja egészen addig, amíg δ az m_2 értékkel nem lesz egyenlő. (Ez az eset biztosan elő fog fordulni.) Végrehajtva most w_1 és w_2 előírt cseréjét m_2 0-vá válik (először az algoritmus során). Jelölje I_k, w_1 és w_2 az ebben a fázisban szereplő közös független halmazt, ill. súlyozásokat. Most $m_1 = m_2 = 0$ és $w_1(e_k) \geqq 0$, $w_2(f_k) \geqq 0$ (Természetesen az e_i, ill. f_i elemeket a konkrét w_1 és w_2 súlyozás definiálja.) Definiáljuk $y_1(E_i)$ és $y_2(F_i)$ értékeket pontosan ugyanúgy, mint az előbb, de most $i = 1, 2, \dots, k$-ra. Ekkor $y_1 \geqq 0$, $y_2 \geqq 0$, és könnyen ellenőrizhető, hogy I_k incidenciavektora, valamint az (y_1, y_2) vektor a primál, ill. a duálprogramok otiámális megoldásai. Ezenkívül, ha w egész értékű volt, akkor (y_1, y_2) is egész értékű lesz.

3. *Irányított vágások lefogása*

A függelék harmadik részében Lucchesi és Younger irányított vágásokra vonatkozó tételére adunk konstruktív bizonyítást. A probléma a következő. Adott egy $G = (V, E)$ irányított gráf, amely összefüggő, de nem erősen összefüggő. Húzzunk be a gráf élei közül minimális számút megfordítva is úgy, hogy a gráf erősen összefüggővé váljék. A kérdés értelmes, mert az összes élt fordítva is behúzva, a gráf nyilván erősen összefüggő lesz. Általánosabb a kérdés, ha az élekhez pozitív egész súlyokat rendelünk, és minimális elemszámú élhalmaz helyett, minimális összsúlyút keresünk.

A gráf akkor nem erősen összefüggő, ha tartalmaz irányított vágásokat. Emlékeztetünk rá, hogy egy irányított vágás valamely X halmaz komplementeréből X-be vezető élek halmaza volt, feltéve, hogy X-ből nem vezetett ki él. Az irányított vágásra gyakran hivatkozunk a definiáló X csúcshalmazzal, amit a vágás *magjának* nevezünk, és ilyenkor a vágást $D(X)$-szel jelöljük.

Feladatunk tulajdonképpen olyan minimális K élhalmazt keresni, amelynek minden irányított vágással van közös éle. Az ilyen élhalmazt *lefogásnak* fogjuk nevezni; az elemeit fordítva is behúzva minden irányított vágás megszűnik, vagyis a gráf erősen összefüggővé vált. A minimális lefogásra vonatkozik Lucchesi és Younger tétele:

1. Tétel [4], [5] Az irányított vágásokat lefogó élek minimális száma az élidegen irányított vágások maximális számával egyenlő.

A súlyozott változathoz tegyük fel, hogy minden e élhez valamilyen $d(e) > 0$ egész súlyt rendeltünk. Az irányított vágások egy családját d-függetlennek nevezzük, ha bármely e él a családnak legfeljebb $d(e)$ elemében van. Az alábbi súlyozott változat $d(e) = 1$ esetén adja meg az 1. tételt.

2. Tétel Az irányított vágásokat lefogó élek minimális τ_d összsúlya a nem feltétlenül különböző d-független vágások maximális ν_d számával egyenlő.

Bizonyítás A tétel bizonyításához először megmutatjuk, hogy $\tau_d \geq \nu_d$, majd keresünk egy olyan K-lefogást és irányított vágásoknak egy olyan $\mathcal{F}$ d-független családját, amelyekre $d(K)=|\mathcal{F}|$.

A $\tau_d \geq \nu_d$ egyenlőtlenség bizonyításához legyen K egy lefogás, $\mathcal{F}$ pedig egy d-független vágás család. Mivel K lefogja az $\mathcal{F}$-ben szereplő vágásokat is, így ezek számára úgy kaphatunk felső becslést, hogy minden K-beli élre ellenőrizzük, $\mathcal{F}$-nek hány vágásában fordul elő, és ezeket a számokat összeadjuk. A d-függetlenség miatt minden e él legfeljebb $d(e)$ $\mathcal{F}$-beli vágásban van, ezért $|\mathcal{F}| \leq d(K)$, és így $\nu_d \leq \tau_d$.

Ebből a meggondolásból az is látható, hogy egy adott K-lefogásra és $\mathcal{F}$ d-független vágás családra akkor és csak akkor áll a $d(K)=|\mathcal{F}|$ egyenlőség, ha (I) minden $e \in K$ él pontosan $d(e)$ $\mathcal{F}$-beli vágásban van és (II) $\mathcal{F}$-ben minden vágás pontosan egy élt tartalmaz K-ból.

Egy rögzített K lefogás esetén kényelmes lesz K elemeit *kéknek* nevezni, míg a többi élt *fehérnek*.

A d-függetlenséget a kritériumokba beépítve olyan K-lefogást és $\mathcal{F}$ vágáscsaládot kell keresni, amelyekre:

(a) Minden kék e él pontosan $d(e)$ vágásban van $\mathcal{F}$-ből.

(b) Minden fehér e él legfeljebb $d(e)$ vágásban van $\mathcal{F}$-ből.

(c) Minden vágás $\mathcal{F}$-ben pontosan egy kék élt tartalmaz.

Az alábbiakban ismertetésre kerülő algoritmus valójában olyan K-lefogást és $\mathcal{F}$ vágáscsaládot fog előállítani, amelyekre *(a')*, *(b)* és *(c)* teljesül, ahol:

(a') Minden kék e él legalább $d(e)$ vágásban van $\mathcal{F}$-ből.

Ebben az esetben azonban egyszerűen elérhetjük, hogy teljesüljön az *(a)* feltétel: minden olyan kék e élre, amely $k > d(e)$ vágásban van $\mathcal{F}$-ből, hagyjunk el ezen vágások közül $k-d(e)$ darabot. A *(c)* feltétel következtében így különböző élek miatt különböző vágásokat fogunk így elhagyni, tehát a visszamaradó vágások családja és a változatlan K már kielégíti *(a)*, *(b)* és *(c)*-t.

Jelölje $c(X)$ $(X \subseteq V)$ az X pontjainak elhagyásával keletkező (gyenge) komponensek számát. (Tehát például, ha a gráf összefüggő, akkor $c(\emptyset)=1$.)

1. Lemma Ha X és Y magok, akkor

$$c(X)+c(Y) \leq c(X \cap Y)+c(X \cup Y).$$

Bizonyítás Tekintsük G-t irányítatlan gráfnak, és jelöljük a $V-X$ halmaz pontjai között vezető élek halmazát $B(X)$-szel. A gráf körmatroidjában a $B(X)$ halmaz rangja $r(B(X))=|V-X|-c(X)$. Igaz továbbá hogy $B(X \cup Y)=B(X) \cap B(Y)$ és $B(X \cap Y)=B(X) \cup B(Y)$. Az utóbbi egyenlőségnél használtuk ki azt a tényt, hogy X és Y irányított vágások magjai, és így $X-Y$ és $Y-X$ között nem vezet él. Könnyen igazolható, hogy egy matroid rangfüggvénye tetszőleges S, T részhalmazra kielégíti az

$$r(S)+r(T)=r(S \cup T)+r(S \cap T)$$

egyenlőtlenséget. Ezt alkalmazva az $S=B(X)$ és $T=B(Y)$ halmazra kapjuk, hogy

$$r(B(X))+r(B(Y)) \geq r(B(X) \cap B(Y))+r(B(X) \cup B(Y)),$$

amelyből a fenti egyenlőtlenségek segítségével a kívánt egyenlőtlenségre jutunk. //

Látható, hogy egy X mag által definiált $D(X)$ irányított vágás felbontható $c(X)$ darab élidegen irányított vágás egyesítésére. Ezen $c(X)$ darab vágásról azt mondjuk, hogy az X-hez *tartoznak* és halmazukat $\alpha(X)$-szel jelöljük. A következőkben rögzítsünk le egy K-lefogást. Jelölje $\varrho_k(X)$ az X-be vezető K-beli élek számát. Nyilván igaz az

$$\varrho_k(X) \geq c(X) \tag{1}$$

egyenlőtlenség.

Egy X magot (és az általa definiált $D(X)$ irányított vágást) *pontosnak* nevezzük a K-lefogásra nézve, ha $\varrho_k(X)=c(X)$. Ha ráadásul $c(X)=1$, akkor X-et *1-pontosnak* hívjuk.

Hasznos lesz a továbbiakban a V halmazt is magnak tekinteni, és ekkor persze V bármely K-lefogás esetén pontos.

Világos, hogy ha X pontos és $X \neq V$, akkor $\alpha(X)$ 1-pontos magokból áll, amelyek particonálják $D(X)$-et.

2. Lemma Ha X és Y egymást metsző pontos magok, akkor mind $X \cap Y$, mind $X \cup Y$ pontos mag.

Bizonyítás A pontosság definíciója szerint $\varrho_k(X)=c(X)$ és $\varrho_k(Y)=c(Y)$. Egyszerű leszámolás mutatja, hogy X és Y magokra

$$\varrho_k(X)+\varrho_k(Y)=\varrho_k(X \cap Y)+\varrho_k(X \cup Y).$$

Tudjuk továbbá, hogy K-lefogás, így (1) miatt $\varrho_k(X \cap Y) \geq c(X \cap Y)$ és $\varrho_k(X \cup Y) \geq c(X \cup Y)$, ahol felhasználtuk, hogy $X \cap Y$ és $X \cup Y$ mindegyike irányított vágás magja, hiszen feltettük, hogy $X \cap Y \neq \emptyset$. ($X \cap Y=\emptyset$ esetén a második egyenlőtlenség nem is volna igaz, mivel $\varrho_k(X \cap Y)=0$ és $c(X \cap Y)=1$.) A fentiek alapján felírhatjuk az alábbi egyenlőtlenség sorozatot:

$$c(X)+c(Y)=\varrho_k(X)+\varrho_k(Y)=\varrho_k(X \cap Y)+\varrho_k(X \cup Y) \geq c(X \cap Y)+c(X \cup Y) \geq c(X)+c(Y).$$

Ez csak akkor állhat fenn, ha $\varrho_k(X \cap Y)=c(X \cap Y)$ és $\varrho_k(X \cup Y)=c(X \cup Y)$, és éppen ezt akartuk igazolni. //

3. Lemma Ha pontos magok egy halmaza összefüggő hipergráfot alkot (azaz a magokat akárhogy két osztályba sorolva az egyik osztály magjainak egyesítése metszi a másik osztályban levőkéit), akkor az egyesítésük is pontos mag.

Bizonyítás Legyenek a szóban forgó magok $X_1, X_2, \ldots, X_k$. Alkalmazzunk k szerinti indukciót! $k=1$-re az állítás triviális. Ha $k>1$, akkor a feltétel szerint valamelyik X_1-től különböző X_i, mondjuk X_2, metszi X_1-et. A második lemma szerint $X'=X_1 \cup X_2$ pontos mag. Alkalmazzuk az indukciós feltevést az $X', X_3, \ldots, X_k$ magokra! //

Rögzített v csúcsot tartalmazó pontos magok metszetét jelöljük $P(v)$-vel. Mivel V mindig pontos, így minden csúcs benne van legalább egy pontos halmazban, ezért a fenti definíció értelmes. Természetesen $P(v)$ függ a megadott K-lefogástól.

4. Lemma $P(v)$ pontos mag.

Bizonyítás A 2. lemma ismételt alkalmazásával az állítás közvetlenül adódik. //

Az algoritmushoz szükségünk lesz majd egy olyan eljárásra, amely tetszőleges v csúcsra, adott K-lefogás mellett, hatékonyan ki tudja számítani $P(v)$-t. Ennek ismertetésére a későbbiekben még visszatérünk.

A pontos és 1-pontos magok mellett használni fogjuk még a zárt mag fogalmát. Egy X magot akkor mondunk a (K-lefogásra nézve) *zártnak*, ha minden $v \in X$ csúcsra $P(v) \subseteq X$.

Hasznos az alábbi lemma.

5. Lemma Egy X mag akkor és csak akkor zárt, ha X diszjunkt, pontos magok egyesítése.

BIZONYÍTÁS Ha egy Y mag pontos, akkor persze $v \in Y$ esetén $P(v) \subseteq Y$, így a feltétel elegendősége nyilvánvaló. Megfordítva, ha X zárt, akkor a $\{P(v): v \in X\}$ hipergráf komponensei a 3. lemma alapján pontos magokból állnak, amelyek a zártság definíciójából adódóan particionálják X-et. //

A zárt X halmaznak az előző bizonyításban egyértelműen definiált $X_1, X_2, \ldots, X_k$ pontos magokból álló partícióját *X-pontos partíciójának* nevezzük. Emlékezzünk rá, hogy $\alpha(Y)$ jelölte az Y pontos maghoz tartozó 1-pontos vágások halmazát. Jelölje $\mathcal{K}(X) = \cup(\mathcal{L}(X_i): i=1, 2, \ldots, k)$ az egyes X_i pontos magokhoz tartozó 1-pontos vágások összességét. $\mathcal{K}(X)$ tehát 1-pontos vágásokból áll, amelyek particionálják az X által definiált $D(X)$ vágást.

6. Lemma Legyen K' egy másik lefogás. Ha X zárt K-ra nézve és $\varrho_K(X) = \varrho_{K'}(X)$, akkor X zárt K'-re nézve is.

BIZONYÍTÁS Az X pontos partícióját tekintve azt kapjuk, hogy $\varrho_K(X) = \sum_i \varrho_K(X_i) = \sum_i c(X_i) \geq \sum_i \varrho_{K'}(X_i) = \varrho_{K'}(X)$, így az X_i magok pontosak K'-re nézve is. Az 5. lemmából az állítás következik. //

Tudjuk, hogy a tétel bizonyításához olyan K-lefogást és $\mathcal{F}$ vágáscsaládot kell keresni, amelyek kielégítik az *(a')*, *(b)* és *(c)* feltételeket. A *(c)* feltétel éppen azt mondja, hogy $\mathcal{F}$ 1-pontos vágásokból álljon. Az eddigi előkészületekre azért volt szükség, mert 1-pontos vágásokkal meglehetősen kényelmetlen dolgozni. Ehelyett durván szólva zárt vágásokkal operálunk, és csak az algoritmus végén particionáljuk a kapott zárt vágásokat 1-pontos vágásokra.

Tegyük fel, hogy adott egy $\pi(v)$ nemnegatív egész értékű függvény a V halmazon, amelyet *potenciálnak* fogunk nevezni. Rögzített π potenciálra vonatkozóan bevezetjük a $\bar{d}(u, v) = d(u, v) - \pi(v) + \pi(u)$ jelölést. Tegyük fel, hogy egy adott π potenciálra és K-lefogásra fennáll az alábbi három feltétel:

(A) Kék (u, v) élre $\bar{d}(u, v) \leq 0$.

(B) Fehér (u, v) élre $\bar{d}(u, v) \geq 0$.

(C) Ha $v \in P(u)$, akkor $\pi(v) \geq \pi(u)$.

Feltehetjük, hogy π minimális értéke 0, mert π-hez konstanst adva a három feltétel érvényessége változatlan marad. Most elő fogunk tudni állítani egy $\mathcal{F}$ 1-pontos vágásokból álló halmazt, amely K-val együtt kielégíti az *(a')*, *(b)* és *(c)* feltételeket. $\mathcal{F}$-et úgy kényelmes megadni, hogy minden D vágásra megmondjuk azt az x_D számot, ahány példánya szerepel D-nek az $\mathcal{F}$-ben.

A potenciál különböző értékeit jelölje $0 = p_0 < p_1 < \ldots < p_m$. Legyen $V_i = \{v: \pi(v) \geq p_i\}$ $i = 1, 2, \ldots, m$-re. Ekkor $\emptyset \subset V_i \subset V$.

7. Lemma A *(C)* feltétel azzal ekvivalens, hogy mindegyik V_i mag zárt.

BIZONYÍTÁS Ha mindegyik V_i zárt mag és $v \in P(u)$, akkor $\pi(v) < \pi(u)$ esetén, ez utóbbi értéket p_i-vel jelölve, $u \in V_i$ és $v \notin V_i$ volna, ellentmondásban V_i zártságával. Megfordítva, ha *(C)* fennáll, akkor azt kell kimutatnunk, hogy $V_i = \cup(P(u): u \in V_i)$. Itt nyilván $V_i \subseteq \cup(P(u): u \in V_i)$, másrészt, ha létezne $v \in P(u) - V_i$ elem valamely u-ra, akkor $v \notin V_i$ és $u \in V_i$ folytán $\pi(v) < \pi(u)$ volna, ellentmondásban a *(C)* feltétellel. //

Legyen mármost $x_D = \Sigma(p_i - p_{i-1})$, ahol az összegzés azon i indexekre megy, amelyekre $D \in \mathcal{K}(V_i)$. (Az üres összeget 0-nak definiáljuk.)

Azt állítjuk, hogy K és az x_D változók segítségével meghatározott $\mathcal{F}$ vágás család kielégíti az *(a')*, *(b)* és *(c)* optimalitási feltételeket. $\mathcal{F}$ nyilván 1-pontos vágásokból áll, így *(c)* teljesül. Ha az e él kék (fehér) akkor az *(A)* (*(B)*) feltétel alapján e legalább (legfeljebb) $d(e)$-ben van a $D(V_i)$ vágások közül, így V_i és $\mathcal{F}$ definíciója alapján *(a')* és *(b)* teljesül.

A fenti okfejtés alapján nem marad más hátra, mint hogy egy *(A)*, *(B)* és *(C)* kritériumokat kielégítő K-lefogást és π potenciált állítsunk elő.

Az eljárás szíve a következő algoritmus:

Belső algoritmus

Bemenet: K-lefogás

(a, b) K-beli (kék) él,

π potenciál,

amelyek kielégítik *(B)* és *(C)*-t, de (a, b) biztosan nem teljesíti *(A)*-t.

Kimenet: K' lefogás,

π' potenciál,

amelyek kielégítik a *(B)* és *(C)* feltételeket, (a, b) már kielégíti *(A)*-t, és egy él csak akkor sértheti meg az *(A)* feltételt, ha a kiindulásnál is megsértette.

Világos, ha ez a belső algoritmus a rendelkezésünkre áll, akkor kiindulva egy tetszőleges lefogásból és például az azonosan 0 potenciálból, a belső algoritmus ismételt alkalmazása után *(A)*, *(B)* és *(C)* mindegyike teljesülni fog. Kiinduló lefogásnak jobb híján választhatunk egy tetszőleges feszítőfát, amikor is a belső algoritmust legfeljebb $(|V|-1)$-szer kell alkalmaznunk.

Megjegyezzük, hogy az algoritmus kimenetén kétféleképpen képzelhető el, hogy az (a, b) él már teljesítse az *(A)* feltételt. Vagy úgy, hogy kék marad, és végpontjainak potenciál különbsége alkalmasan megváltozik, vagy pedig úgy, hogy fehérré változik.

A belső algoritmus leírásához definiálunk egy (a gráftól, az adott lefogástól és potenciáltól függő) $H = (V, A)$ segédgráfot. Az A élhalmaz három részből áll: A_K, A_F és A_P:

$$A_K = \{(u, v): (u, v \in K \text{ és } \bar{d}(u, v) \geq 0\},$$

$$A_F = \{(v, u): (u, v) \in E - K \text{ és } \bar{d}(u, v) \leq 0\},$$

$$A_P = \{(u, v): v \in P(u) \text{ és } \pi(u) = \pi(v)\}.$$

Keressünk most a címkézési technika segítségével H-ban utat a b csúcsból az a-ba! Két eset lehetséges:

1. *Eset* A kérdéses út nem létezik.

Más szóval a nem eleme a b-ből irányított úttal elérhető csúcsok T halmazának. Változtassuk meg a potenciált a következőképpen:

$$\pi'(v)=\begin{cases}\pi(v,) & \text{ha} \quad v\notin T,\\ \pi(v)+\delta, & \text{ha} \quad v\in T.\end{cases}$$

ahol $\delta=\min\{\delta_e, \delta_k, \delta_F, \delta_P\}$, amelyben

$$\delta_e=\bar{d}(a, b),$$

$$\delta_K=\min\{-\bar{d}(u, v):(u, v)\in K \quad \text{és} \quad u, v \text{ kilép } T\text{-ből},$$

$$\delta_F=\min\{\bar{d}(u, v):(u, v)\in E-K \quad \text{és} \quad u, v \text{ belép } T\text{-be}\},$$

$$\delta_P=\min\{\pi(v)-\pi(u): u\in T \quad es \quad v\in P(u)-T\}.$$

(A minimumot itt végtelennek definiáljuk, ha az üres halmazon vesszük.)

Megjegyezzük, hogy T definíciójából rögtön következik, hogy
(*) H-ban nem lép ki T-ből él.

8. Lemma $\delta>0$.

Bizonyítás $\delta_e>0$ azzal ekvivalens, hogy az (a, b) él nem tesz eleget az (A) feltételnek (K-ra és π-re vonatkozóan), ezt pedig feltettük.

$\delta_K>0$: ha ez nem volna igaz, akkor $\bar{d}(u, v)\geqq 0$ volna valamely T-ből kilépő $(u, v)\in K$ élre. Ekkor $(u, v)\in A_K$, ellentmondva (*)-nak.

$\delta_F>0$: ha ez nem volna igaz, akkor $\bar{d}(u, v)\leqq 0$ volna valamely T-be menő $(u, v)\in E-K$ élre. Ekkor $(v, u)\in A_F$, ellentmondva (*)-nak.

$\delta_P>0$: A (C) feltétel alapján $\pi(v)\geqq\pi(u)$. Így $\delta_P\leqq 0$-ből $\pi(u)=\pi(v)$ következne, azaz (u, v) egy T-ből kilépő A_P-beli él volna, ellentmondva (*)-nak. //

Az új $\bar{d}'(u, v)-d(u, v)-\pi'(v)+\pi(u)$ most így alakul:

$$\bar{d}'(u, v)=\begin{cases}\bar{d}(u, v)+\delta, & \text{ha } (u, v) \text{ kilép } T\text{-ből},\\ \bar{d}(u, v)-\delta, & \text{ha } (u, v) \text{ belép } T\text{-be},\\ \bar{d}(u, v), & \text{egyébként.}\end{cases} \tag{2}$$

Állítás Ha egy kék élre a belső algoritmus elején (A) fennállt, akkor a leírt potenciál leírt cseréje után is fenn fog állni.

Bizonyítás Legyen $(u, v)\in K$ és $\bar{d}(u, v)\leqq 0$. Ha indirekt $\bar{d}'(u, v)>0$ volna, akkor a 8. lemma és (2) miatt (u, v) kilép T-ből, és így $-\bar{d}(u, v)\geqq\delta_K\geqq\delta$ vagyis $\bar{d}'(u, v)\leqq 0$, ami ellentmondás. //

Állítás A potenciál fenti cseréjénél (B) érvényben maradt.

Bizonyítás Ha $(u, v)\in E-K$, akkor $\bar{d}(u, v)\geqq 0$ és az indirekt $\bar{d}'(u, v)>0$ feltevésből a 8. lemma és (2.) alapján következik, hogy (u, v) belép T-be. Ekkor $\bar{d}(u, v)\geqq\delta_F\geqq\delta$, vagyis $\bar{d}'(u, v)\geqq 0$, ami ellentmondás. //

Állítás A potenciál cseréjénél (C) érvényben maradt.

Bizonyítás Ha $v\in P(u)$ ($P(u)$ nem függ a potenciál cseréjétől!) és indirekt feltesszük, hogy $\pi'(v)<\pi'(u)$, akkor $u\in T$ és $v\in P(u)-T$. Ily módon $\pi'(v)=\pi'(v)$ és $\pi'(u)=\pi(u)+\delta$, ahonnan $\pi(v)-\pi(u)<\delta$. Másrészről viszont $\pi(v)-\pi(u)\geqq\delta_P\geqq\delta$, és ez is ellentmondás. //

Mármost, ha a belső algoritmus alkalmazásakor a $\delta=\delta_e$) eset lép fel, akkor a potenciál cseréjének elvégzése után az (a, b) él már teljesíteni fogja az (A) feltételt, és így a belső algoritmus véget ér. Ha $\delta<\delta_e$, akkor ismételjük meg a belső algoritmust, bemenetként a változatlan K-lefogást, az új $\pi:=\pi'$ potenciált, valamint az (A) feltételt még mindig megsértő (a, b) élt használva.

Megfigyelhetjük, hogy az új H' segédgráfban a T által feszített élek ugyanazok lesznek, mint H-ban voltak. Ezenkívül a δ választása biztosítja, hogy H'-ben legalább egy él elhagyja T-t (amely A_K', A_F', ill. A_P'-ben van, annak megfelelően, hogy δ a δ_K-val, δ_F-fel, ill. δ_P-vel volt egyenlő). Következésképp H'-ben a b-ből irányított úttal elérhető csúcsok T' halmaza szigorúan tartalmazza T-t. Ily módon legfeljebb $|V|-1$ iteráció után vagy a $\delta=\delta_e$ eset fog előfordulni, vagy az a csúcs elérhetővé válik b-ből, amely épp a 2. eset.

2. *Eset* H-ban vezet b-ből a-ba irányított út.

Az ilyen utak közül jelöljön U egy olyant, amely minimális számú élt használ. (Valójában csak annyit fogunk kihasználni, hogy az U úthoz, amelynek csúcspontjai sorrendben $x_0=b, x_1, \ldots, x_k=a$, nem létezik piros „levágó" él, vagyis (x_i, x_{i+j}) $j\geqq 2$-re nem piros él. Itt és továbbiakban A_P elemeit nevezzük *pirosaknak*.)

Mivel $(a, b)\in A_K$, az U út és az (a, b) él együtt egy C irányított kört alkot H-ban. A C kör élei közül az A_K-ban levőknek kék élek felelnek meg G-ben, míg az A_F-ben levő élek megfordítottjainak fehér élek. Ezek halmazát jelölje rendre C_K és C_F. (Tehát C_K, $C_F\subseteq E$.) Legyen az új K'-lefogásra $K'=(K-C_K\cup C_F$.

9. Lemma Az előbb definiált K' az irányított vágásoknak lefogása.

Bizonyítás Egy adott X magra jelölje $\varrho_p(X)$ ($\delta_p(X)$) az U út piros éleinek X-be belépő (X-ből kilépő) számát. //

Állítás

$$\varrho_{K'}(X)=\varrho_k(X)+\varrho_p(X)-\delta_p(X). \tag{3}$$

Bizonyítás Ez az egyenlőség nyilván igaz a $\varrho_p(X)=\delta_p(X)=0$ esetben, és innen $\varrho_p(X)+\delta_p(X)$ szerinti indukcióval könnyen megkapjuk általában. //

Jelölje $\varepsilon(X)$ egy X mag „túlfogásának" az értékét, vagyis $\varepsilon(X)=\varrho_k(X)-c(X)$. Az 1. lemmából látható, hogy egymást metsző X és Y magokra:

$$\varepsilon(X)+\varepsilon(Y)\geqq\varepsilon(X\cap Y)+\varepsilon(X\cup Y).$$

A lemma igazolásához azt kell látnunk, hogy minden X magra $\varrho_K(X) \geq c(X)$. Ez következni fog (3)-ból és az alább bizonyítandó $\varepsilon(X) \geq \delta_p(X)$ egyenlőtlenségből. Tekintsünk ehhez egy olyan X magot, amelyre $\delta_p(X) > 0$. Legyen (u, v) olyan piros éle U-nak, amely kilép X-ből és $\pi(v)$ $(=\pi(u)!)$ a lehető legnagyobb. Ha több ilyen él létezik, akkor (u, v) jelölje közülük azt, amely az U úton a legelső b felől elindulva. Legyen $X' = X \cup P(u)$. ($P(u)$ a K-lefogásra vonatkozik.)

Állítás

(4) $$\delta_p(X') = \delta_p(X) - 1.$$

BIZONYÍTÁS Mivel $P(u)$-t nem hagyja el piros él, és (u, v) nem lép ki X'-ből, ezért $\delta_p(X') \leq \delta_p(X) - 1$. Másrészről viszont, ha (s, t) az U útnak másik olyan piros éle volna, amely kilép X-ből, akkor $t \notin P(u)$ (azaz (s, t) az X'-ből is kilép): ellenkező esetben ugyanis a C feltétel alapján $\pi(t) \geq \pi(u)$, és így $\pi(v)$ maximalitása folytán $\pi(t) = \pi(u)$. Következésképp (u, t) egy piros levágó él volna az U úthoz, amelynek lehetőségét kizártuk. //

Állítás

$$\varepsilon(X) \geq \delta_p(X).$$

BIZONYÍTÁS $\delta_p(X)$ szerinti indukció. $\varepsilon(X) \geq 0$ lévén feltesszük, hogy $\delta_p(X) > 0$. (3)-ból kapjuk, hogy $\varepsilon(X) = \varepsilon(X) + \varepsilon(P(u)) \geq \varepsilon(X \cap P(u)) + \varepsilon(X') > \varepsilon(X')$. (4) alapján, az indukciós feltevést X'-re alkalmazva, azt kapjuk, hogy $\varepsilon(X) > \varepsilon(X') \geq \delta_p(X') = \delta_p(X) - 1$, vagyis $\varepsilon(X) \geq \delta_p(X)$, ami bizonyítja az állítást. //

Ezáltal a 9. lemma bizonyítása teljes.

Tekintsük most át, mi történt a lefogás cseréjekor az *(A)*, *(B)* és *(C)* optimalitási kritériumokkal!

Állítás Új kék élekre (azaz a $K' - K$ elemeire) az *(A)* feltétel érvényes.

BIZONYÍTÁS Ha (u, v) új kék él, akkor (v, u) eleme volt A_F-nek, és így $\bar{d}(u, v) \leq 0$. //

Állítás A *(B)* feltétel érvényessége a lefogás cseréjénél nem változott.

BIZONYÍTÁS Ha (u, v) új fehér él (azaz $K - K'$-nek eleme), akkor (u, v) eleme volt A_K-nak, és így $d(u, v) \geq 0$. //

Itt megjegyezzük, hogy a lefogás cseréjénél az (a, b) él fehér lett, így már nem sérti meg az *(A)* feltételt.

Állítás A lefogás cseréjénél a *(C)* feltétel érvényben maradt.

BIZONYÍTÁS Feltesszük ismét, hogy az aktuális potenciál legkisebb értéke nulla, és képezzük a $V_i\{v: \pi(v) \geq p_i\}$ halmazokat $i = 1, 2, \ldots, m$-re, ahol a p_i számok a potenciál különböző értékeit jelölik. A 6. lemma alapján elég azt megmutatni, hogy mindegyik V_i mag zárt a K'-lefogásra nézve is. A_p és V_i definíciója alapján $\varrho_p(V_i) = \delta_p(V_i) = 0$, így (3) szerint $\varrho_K(V_i) = \varrho_{K'}(V_i)$. Alkalmazzuk a 6. lemmát. //

Idáig tehát bebizonyítottuk a belső algoritmus érvényességét és ezáltal a 2. tétel bizonyítása is teljessé vált.

A következőkben az algoritmus közvetlen felhasználhatósága érdekében megvizsgáljuk, hogy miként lehet rögzített K lefogás esetén a $P(v)$ halmazt hatékonyan kiszámítani.

10. Lemma Egy mag akkor és csak akkor pontos, ha 1-pontos magok metszete.

A bizonyítást egyszerű gyakorlatként az Olvasóra hagyjuk.

Álljon K az $e_i = (u_i, v_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$ élekből. G_i jelölje azt a gráfot, amelyet úgy kapunk G-ből, hogy $K - e_i$ elemeit fordítva is behúzzuk. Legyen továbbá $P_i(u) = \{v: v$ elérhető u-ból irányított úttal G_i-ben$\}$. E definíció szerint $P_i(u)$ a címkzési technika segítségével könnyen meghatározható, és így az összes $P_i(u)$ $R(u)$-val jelölt metszetét is ki tudjuk számolni.

11. Lemma $P(u) = R(u)$.

BIZONYÍTÁS Mindegyik $P_i(u)$ halmaz vagy V-vel egyenlő, vagy pedig 1-pontos magok metszete. A 10. lemma szerint $P(u)$ vagy V-vel egyenlő, vagy az u csúcsot tartalmazó 1-pontos magok metszete, ily módon $P(u) \subseteq R(u)$. Másrészt, ha létezik $R(u) - P(u)$-ban egy v csúcs, akkor valamely X 1-pontos magra $u \in X$ és $v \notin X$. Ha e_i az egyetlen K-beli él, amely belép X-be, akkor $P_i(u) \subseteq X$, azaz $V \notin P_i(u)$, ami ellentmondás. //

A 11. lemma lehetővé teszi, hogy rögzített u-ra $P(u)$-t $O(n^3)$ lépésben kiszámítsuk, így az összes $P(u)$ meghatározása legfeljebb $O(n^4)$ lépést igényel.

A belső algoritmus másik része egy b-ből a-ba vezető út megkeresésére irányul a H gráfban. Ecélból ismét alkalmazhatjuk a címkézési technikát. Ha az 1. eset fordul elő, vagyis ha a keresett út nem létezik, akkor a T halmaz éppen azokból a csúcsokból fog állni, melyek címkét kaptak az eljárás során. A 2. esetben a címkézési technika megfelelő alkalmazásával könnyen biztosítható, hogy a megkonstruált U úthoz ne legyen levágó él.

A címkézési technika legfeljebb cn^2 lépést igényel. Ezenkívül, ha az 1. esetnél $\delta < \delta_e$ fordul elő, és újra indítjuk a belső algoritmust a módosított potenciállal, akkor a korábban kiszámított címkéket újra fel lehet használni (emlékezzünk rá: $T \subset T'$!). (Figyeljük meg, hogy hasonló jelenséggel találkoztunk a súlyozott matroidok metszetére vonatkozó algoritmusnál is.)

Ily módon a teljes belső algoritmus legfeljebb $c_1 n^2 + c_2 n^4$ lépést igényel. Mivel a belső algoritmus alkalmazására legfeljebb $(n-1)$-szer kerül sor. Az egész algoritmus lépésszámát cn^5-nel becsülhetjük felülről.

Legvégül összefoglaljuk az algoritmus lépéseit.

0. Lépés (Start) Legyen K egy lefogás és π egy potenciál, amelyekre fennáll a *(B)* és *(C)* feltétel. Kezdetben lehet például K egy feszítőfa, π pedig azonosan nulla.

1. Lépés

(1.0) Határozzuk meg minden u csúcsra $P(u)$-t!

(1.1) Ha minden él K-ban teljesíti az A feltételt, akkor STOP: az adott K optimális.

(1.2) Válasszunk ki egy $e = (a, b) \in K$ élt, amelyre *(A)* nem áll fenn!

(1.3) Készítsük el a H segédgráfot, és keressünk a címkézési technika segítségével irányított utat b-ből a-ba (felhasználva a korábban definiált, de még nem törölt címkéket)! Ha létezik U út, akkor menjünk a 3. lépésre!

2. Lépés (Potenciálcsere)

(2.0) Legyen T a címkézett csúcsok halmaza. Számítsuk ki δ-t. Legyen $\pi(v):=\pi(v)+\delta$ minden $v\notin T$ csúcsra.

(2.1) Ha $\delta=\delta_\varepsilon$, akkor töröljünk minden címkét, és menjünk az 1.1 lépésre.

(2.2) Menjünk 1.3)-ra!

3. Lépés (Lefogáscsere)

Az U útból állapítsuk meg a C_K és C_F halmazokat, és legyen $K:=(K-C_K)\cup C_F$. Menjünk az (1.0) lépésre!

FELADATOK

1. Igazoljuk a 10. lemmát!

2. Bizonyítsuk be, hogy egy minimális K-lefogás éleit a gráfból eltörölve, majd fordítva behúzva, erősen összefüggő gráfot kapunk, feltéve, hogy a gráf nem tartalmaz elvágó élt!

4. *Élidegen irányított fák*

A függelék utolsó részeként ismertetünk egy Edmondstól származó érdekes eredményt. A 8. fejezet 7.1. tételét specializálva, választ kaphatunk arra a kérdésre, hogy egy irányítatlan gráfban mikor létezik k élidegen feszítőfa, és levezethető Tutte egy tétele.

1. Tétel *(Tutte)* Egy irányítatlan gráfban akkor és csak akkor létezik k élidegen feszítőfa, ha a csúcsok bármely $V_1, V_2, \ldots, V_t$ partíciójára a részek között vezető élek száma legalább $k(t-1)$. (Javasoljuk az Olvasónak, hogy gyakorlatként próbálja meg e tétel levezetését az említett 7.1. tételből.)

Edmonds tétele Tutte tételének egyfajta irányított analogonja. Ehhez bevezetjük a fenyő fogalmát. A *fenyő* egy irányított fa, amelyben egy csúcs kivételével valamennyi csúcs be-foka egy. A fenyő *gyökerének* nevezett kivételes csúcs be-foka nulla. Könnyen látható, hogy a fenyő bármely csúcsa a gyökérből irányított úton elérhető.

Legyen G-(V, E) irányított gráf és $r\in V$. A G gráfnak egy *r-fenyőjén* egy r gyökerű feszítőfenyőt értünk, amely G-nek részgráfja.

2. Tétel *(Edmonds* [8]) A G gráfban akkor és csak akkor létezik k élidegen r-fenyő, ha minden r-et nem tartalmazó X halmaz $\varrho(X)$ be-foka (az X-be lépő élek száma) legalább k.

BIZONYÍTÁS Szükséges bizonyítását gyakorlatként az Olvasóra hagyjuk. Az elegendőség bizonyítására egy Lovász Lászlótól származó eljárást [5] ismertetünk. Az eljárás nagymértékben támaszkodik a maximális folyam algoritmusára. Alapgondolata az, hogy felépíthető egy olyan r-fenyő, amelynek éleit elhagyva a visszamaradó gráfban minden (r-et nem tartalmazó) halmazba legalább $k-1$ él menjen. Ilyen eljárás k-szori alkalmazásával nyilván célt érünk. Ezt az egyetlen r-fenyőt pedig az r gyökérből kiindulva, fokozatosan egy-egy él hozzávételével építjük fel, ezek az élek mindig a már meglevő részfenyő valamely csúcsától vezetnek egy új csúcshoz.

Az egyes élek hozzávételénél csak arra kell ügyelnünk, hogy a maradék gráfban a fokszámra vonatkozó feltétel érvényben maradjon.

Legyen tehát F egy r gyökerű részfenyője G-nek, amelyre igaz, hogy $\varrho_{E-F}(X)\geqq k-1$, ha $r\notin X$. Egy élt pontosan akkor nem vehetünk hozzá az F fenyőhöz, ha belép egy olyan X halmazba, amelybe a maradék gráfban pontosan $k-1$ él lép, azaz $\varrho_{E-F}(X)=k-1$. Az ilyen X halmazokat (F-re nézve) *veszélyesnek* fogjuk nevezni.

1. Lemma Ha X és Y két metsző veszélyes halmaz, akkor metszetük is, uniójuk is veszélyes.

BIZONYÍTÁS $\varrho_{E-F}(X)$-et $\varepsilon(X)$-szel jelölve, érvényes az alábbi egyenlőtlenségsorozat:

$$k-1+k-1=\varepsilon(X)+\varepsilon(Y)\geqq\varepsilon(X\cap Y)+\varepsilon(X\cup Y)\geqq k-1+k-1,$$

amely csak akkor állhat fenn, ha $\varepsilon(X\cap Y)=k-1$, és $\varepsilon(X\cup Y)=k-1$, és ez az, amit igazolni kellett. //

Jelöljük az F fenyőben nem levő csúcsok halmazát T-vel. Azt kell kimutatnunk, hogy van olyan T-be lépő él, amely semelyik veszélyes halmazba sem lép be. Ezt az élt ugyanis F-hez lehet venni, majd az eljárást addig ismételni, amíg T üres nem lesz.

A tétel feltétele szerint T-nek semelyik része sem veszélyes. Ha minden veszélyes halmaz diszjunkt T-től, akkor bármely T-be vezető él megfelel a kívánalmaknak. Ha vannak T-t metsző veszélyes halmazok, akkor legyen X ezek közül az, amelyre $|X-T|$ minimális. (Tudjuk: $X-T\neq\emptyset$).

2. Lemma $(X-T)$-ből vezet él $(X\cap T)$-be.

BIZONYÍTÁS Ha ilyen él nem létezne, akkor $k-1\leqq\varepsilon(T\cap S)\leqq\varepsilon(X)=k-1$, azaz $\varepsilon(T\cap X)=k-1$ volna. De már látjuk, hogy T részhalmaza nem lehet veszélyes. //

3. Lemma A 2. lemma által biztosított e él nem lép veszélyes halmazba.

BIZONYÍTÁS Ha indirekt feltesszük, az e él belépne az Y veszélyes halmazba, akkor az 1. lemmából adódóan $X'=X\cap Y$ is veszélyes volna. Ezenkívül $X'\cap T\neq\emptyset$ és $|X'-T|<|X-t|$, ami ellentmond az X minimális választásának. //

Ezzel a tétel bizonyítását is befejeztük.

A bizonyításból kiolvasható egy algoritmus, amely arra a tényre épül, hogy a bizonyítás alapján biztosan van olyan T-be lépő él, amely nem lép veszélyes halmazba. Ezt az élt kell csupán megkeresnünk.

Egy $e=(u, v)$ rögzített élre könnyű eldönteni, hogy belép-e veszélyes halmazba vagy sem. Azt kell ehhez ellenőrizni, hogy a $G'=(V, E-F)$ gráfban létezik-e u-ból v-be k értékű folyam (ekvivalensen, k számú élidegen út). Ha létezik, akkor e nem lép veszélyes halmazba, különben pedig (a maximális folyam—minimális vágás tétel szerint) igen. Így tehát a T-be lépő összes $e=(u, v)$ élre ezt ellenőrizni kell, majd azt az élt, amelyre a k értékű folyam létezik, az F fenyőhöz vehetjük. Ezután a kibővített új fenyőre újból kezdjük az eljárást.

MEGJEGYZÉSEK ÉS HIVATKOZÁSOK

A függelék anyagából magyar nyelvű irodalom eddig nem jelent meg.

Az 1. szakaszban szereplő Greene, ill. Greene—Kleitman-tételek és ezekhez kapcsolódó témák kitűnő összefoglalása található az alábbi munkában:

[1] *C. Greene:* Sperner families and partitions of a partially ordered set. Advanced

Study Institute, Series C. Math. and Physical Sciences, Vol 16, Eds. M. Hall and J. H. Lint, Breukelen, 1974.

Az itt közölt eljárás és az 5. tétel a következő cikkben található:

[2] *A. Frank:* On chain and antichain families of a partially ordered set, Journal of Combinatorial Theory, Series B, Vol 29, No 2., October, 1980.

A 2. szakaszban leírt matroidmetszet algoritmus a függelék szerzőjétől való:

[3] *A. Frank:* A weighted matroid intersection algorithm. (Megjelenés alatt a Journal of Algorithms című folyóiratban.)

A 3. szakasz 1. tétele Lucchesi és Younger eredménye:

[4] *C. Lucchesi—D. H. Younger:* A minimax theorem for directed graphs. J. London Math. Soc. (2) **17**, 1978.

A tételre Lovász László adott egyszerű bizonyítást:

[5] *L. Lovász:* On two minimax theorems in graph theory. J. Combinatorial Theory, Ser, B. **2**, 1976.

A súlyozott változat könnyen levezethető a Lucchesi—Younger-tételből. Ennek és a matroidmetszet problémának közös általánosítására nézve l.:

[6] *J. Edmonds—R. Giles:* A min—max relation for submodular functions in graphs. Annals of Discrete Math. **1** (1977).

A leírt konstruktív bizonyítás az alábbi cikkben szerepel:

[7] *A. Frank:* How to make a directed graph strongly connected. Combinatorica, Vol 1, No 2, 1981.

A 4. szakaszban szereplő tételt Edmonds bizonyította be:

[8] *J. Edmonds:* Edge-disjoint branchings, in: „Combinatorial algorithms". Academic Press, New York, 1973, 91...96.

Az itt szereplő algoritmikus bizonyítás Lovász László fentebb hivatkozott cikkében található.