1 Gallai egy sejtése

Közismert Camion azon tétele, miszerint minden legalább 2 pontú erősen összefüggő turnamentnek van Hamilton köre, vagy másként fogalmazva, ha a digráf (irányítatlan értelemben vett) stabilitás száma 1, akkor a pontok lefedhetők egyetlen irányított körrel, röviden dikörrel. 1963-ban fogalmazta meg Gallai azt a sejtést, hogy tetszőleges erősen összefüggő $D = (V, A)$ digráfra

$$\gamma(D) \leq \alpha(D),$$

ahol $\gamma(D)$ jelöli a gráf pontjait fedő dikörök minimális számát, míg $\alpha(D)$ az irányítatlan alapgráf stabilitás száma (azaz a független pontjainak maximális száma). Más szóval, Gallai sejtése azt állítja, hogy D pontjai mindig lefedhetők $\alpha(D)$ dikörrel. A sejtést Bessy és Thomassé igazolta 2007-ben. Az alábbiakban bemutatott bizonyítás két régebben meglévő dolgon alapul.

A digráf irányított köreinek egy $F \subseteq A$ lefogása **lapos**, ha minden él benne van egyszer lefogott dikörben.

TÉTEL 1.1 (Knuth lemma) *Erősen összefüggő $D = (V, A)$ digráfban létezik a diköröknek lapos lefogása.*

Biz. Ha D egyetlen pontból áll akkor a tétel semmitmondó. A fülfelbontási tétel alapján D megkapható egy erősen összefüggő $D' = (V', A')$ digráfból egy P fül hozzáadásával. Indukció alapján a D' diköreinek van egy B' lapos lefogása. Amennyiben P egy kör, úgy P egy tetszőleges élét B'-höz véve a D egy lapos lefogását kapjuk. Igy feltehetjük, hogy P egy s-ből t-be menő irányított út.

Állítás 1.2 *A D' diköreinek van olyn B^* lapos lefogása, amelyre s elérhető t-ből a $D' - B^*$ digráfban.*

Biz. Ha s benne van a t-ből $D' - B'$-ben elérhető pontok $Z \subseteq V'$ halmazában, akkor $B^* = B'$ jó lesz. Ha s nincs Z-ben, akkor D' minden Z-ből kilépő éle B'-ben van. A B' laposságából következik, hogy D' semelyik Z-be belépő éle sincs B'-ben, hiszen egy Z-be belépő él is benne van egyszer fedett dikörben, márpedig egy ilyen dikör kilép Z-ből és a kilépő élekről már tudjuk, hogy B'-ben vannak.

Módosítsuk most B'-t olyképpen, hogy a Z-be belépő éleket kivesszük belőle, míg a Z-be belépőket bevesszük. A kapott B'' halmaz olyan, hogy $|B'' \cap C| = |B' \cap C|$ minden C dikörre, és ezért B'' is a D' diköreinek egy lapos lefogása. Miután $D' - B''$-ben a tből elérhető pontok halmaza szigorúan bővebb mint Z Z, legfeljebb n ilyen csere után egy olyan B^* lapos lefogást kapunk, amelyre s is elérhető t-ből a $D' - B^*$ digráfban. •

Most $B := B^* + b$ nyilván fedi D minden dikörét, és azt állítjuk, hogy B lapos. Valóban, tekintsünk a $D' - B^*$-ben egy t-ből s-be menő P' irányított utat, aminek a létezését a fenti állítás biztosítja.

Ekkor $C := P' \cup P$ egy olyan dikör, amelynek b az egyetlen B-hez tartozó eleme. Ezért D minden éle hozzátartozik egy egyszer fedett dikörhöz. • •

A másik segédeszköz Gallai egy 1958-as tétele. Legyen $c : A \to \mathbf{Z}_+$ a $D = (V, A)$ erősen összefüggő digráf élhalmazán egy nem-negatív egészértékű függvény. (Az alkalmazáshoz valójában csak a $c := \underline{\chi}_F$ speciális esetre lesz szükségünk.) Egy K kör c-**értéke** az élei c-értékeinek összege, vagyis $\widetilde{c}(K)$. Csúcsoknak egy multihalmazát (ahol tehát egy csúcs több példányban is szerepelhet) c-**független**nek mondunk, ha minden dikörből legfeljebb annyi elemet tartalmaz, mint a dikör c-értéke. Egy multihalmaz egy $x : V \to \mathbf{Z}_+$ egész vektorral azonosítható, és ekkor x c-függetlensége azt jelenti, hogy $\widetilde{x}(V(K)) \leq \widetilde{c}(K)$ minden K körre, ahol $V(K)$ a kör ponthalmaza.

Legyen $w : V \to \mathbf{Z}_+$ egy súlyfüggvény. A dikörök halmazán értelmezett $y \geq 0$ függvényről azt mondjuk, hogy fedi w-t, ha $\sum[y(K) : v \in V(K), K \text{ dikör}] \geq w(v)$ minden $v \in V$-re fennáll. Egy $z \geq 0$ áramról azt mondjuk, hogy fedi a w-t, ha $\varrho_z(v) \geq w(z)$ minden $z \in V$ csúcsra fennáll. A w-t fedő körök és w-t fedő áramok közötti kapcsolatot adja meg a következő egyszerű megfigyelés.

Lemma 1.3 *Ha $y \geq 0$ a dikörök halmazán értelmezett w-t fedő függvény, akkor a $z(e) := \sum[y(K) : K$ dikör és $e \in K]$ egy w-t fedő nemnegatív z áramot definiál, melyre $cz = \sum[y(K)\widetilde{c}(K) : K$ dikör$]$. Ha y egészértékű, akkor z is az. Megfordítva, egy w-t fedő $z \geq 0$ áram előáll dikörök nemnegatív kombinációjaként, és bármely $z = \sum y(Z)\underline{\chi}(Z)$ előállításra az y egy w-t fedő függvény, melyre $cz = \sum[y(K)\widetilde{c}(K) : K$ dikör$]$. Ha z egészértékű, akkor y is választható annak.*

TÉTEL 1.4 (Gallai) *Legyen $w : V \to \mathbf{Z}_+$ egy súlyfüggvény a D erősen összefüggő digráf ponthalmazán. A w-t fedő dikörök c-értékeinek minimális összege egyenlő a nem-feltétlenül különböző c-független csúcsok maximális w-súlyával.*

Felhasználva a teljesen duális egészértékű rendszerekre vonatkozó Edmonds-Giles féle alaptételt (miszerint egy TDI rendszerrel megadott poliéder egész, ha a feltételi mátrix és a korlátozó vektor egész) Gallai tétele következik az alábbi eredményből (és valójában ekvivalens vele).

TÉTEL 1.5 *Jelölje Q a $D = (V, A)$ erősen összefüggő digráf dikör-csúcs incidencia mátrixát. Jelölje $\widetilde{c}$ azt a vektort, melynek komponensei a Q sorainak (azaz D diköreinek) felelnek meg és a K dikörnek megfelelő komponens értéke $\widetilde{c}(K)$. Ekkor a*

$$\{Qx \leq \widetilde{c},\ x \geq 0\} \tag{1}$$

rendszer teljesen duálisan egészértékű.

Biz. Legyen w egy egészértékű súlyfüggvény V-n és tekintsük a következő duális lineáris programot.

$$\min\{\sum[y(K)\widetilde{c}(K) : K \text{ dikör}] : yQ \geq w,\ y \geq 0\}. \tag{2}$$

Az kell kimutatnunk, hogy ennek létezik olyan y optimuma, amely egészértékű. A lemma alapján elegendő azt igazolni, hogy a $\min\{cz : z \geq 0$ áram, amely fedi w-t$\}$ rendszernek van egészértékű optimuma. Ez viszont a szokásos pontduplázási technikával rögtön következik a megengedett áram poliéder egészértékűségéből. Valóban, minden v pontot helyettesítsünk a v' és v'' pontokkal, az $uv \in A$ éleket helyettesítsük az $u'v''$ éllel (melynek alsó kapacitása 0 és költsége $c(uv)$), végül minden v pontra vegyük be a $v''v'$ élt $w(v)$ alsó kapacitással és 0 költséggel. Ekkor a keletkező D'-gráfban egy megengedett z' áram az eredeti D-ben egy olyan z áramot definiál, amelyre $\varrho_z(v) \geq w(v)$ minden $v \in V$-re, továbbá $c'z' = cz$. •

Nekünk Gallai tételére csak a $w \equiv 1$ és $c := \underline{\chi}_F$ speciális esetben van szükségünk, ahol F egy adott lapos lefogás. Figyeljük meg, hogy ilyenkor egy S c-független ponthalmaz automatikusan különböző pontokból áll, hiszen minden pont benne van egyszer fedett dikörben, továbbá S stabil, hiszen minden él benne van egyszer fedett dikörben. Ekkor tehát a Gallai tétel azt mondja, hogy a maximális F-független stabil halmaz elemszáma egyenlő a pontokat fedő dikörök minimális össz F-értékével. Mivel egy dikör értéke legalább egy, következik, hogy a maximális stabil halmaz elemszáma legalább akkora, mint a pontokat fedő dikörök minimális száma. •

directory: clar, file: rgalsejt December 18, 2010