Frank András

KOMBINATORIKUS OPTIMALIZÁLÁS, III:

POLIÉDERES KOMBINATORIKA

2012. december 9.

ELTE TTK, Operációkutatási Tanszék

1. Fejezet

TELJESEN UNIMODULÁRIS MÁTRIXOK

1.1 EGÉSZ POLIÉDEREK, TELJESEN DUÁLIS EGÉSZÉRTÉKŰSÉG

1.1.1 Oldalak

Foglaljuk össze a poliéder oldalainak néhány tulajdonságát. Egy $R = \{x : Qx \leq b\}$ (nemüres) poliéder F oldalán az R-nek egy

$$F := \{x \in R : cx = \delta\} \tag{1.1}$$

alakú nemüres részhalmazát értettük, ahol $\delta := \max\{cx : x \in R\}$ valamely cx célfüggvényre, melyre a maximum létezik. Vagyis a poliéder oldala az optimum helyek halmaza valamely cx lineáris célfüggvényre nézve, másként szólva a poliédernek az a része, amely egy hipersíkkal érintkezik, amikor azt kívülről a poliéderhez toljuk.

TÉTEL 1.1.1 *Az $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéder egy nemüres F részhalmaza akkor és csak akkor oldala R-nek, ha létezik a Q bizonyos soraiból álló olyan Q' részmátrix, amelyre $F = \{x \in R : Q'x = b'\}$, ahol b' a Q' sorainak megfelelő részvektora b-nek.*

Biz. Tegyük fel, hogy F oldal, melyet (1.1) definiál. Tekintsük a $\min\{yb : yQ = c, y \geq 0\}$ duális lineáris programnak egy y' optimális megoldását. Legyen Q' a Q azon ${}_iq$ soraiból álló részmátrix, amelyekre a megfelelő $y'(i)$ komponens pozitív. Tetszőleges $x \in R$-re $cx = (y'Q)x = y'(Qx) \leq y'b$. A dualitás tételből következik, hogy egy $x' \in R$ vektor akkor és csak akkor primál optimum (azaz eleme F-nek), ha az y' minden pozitív komponensére a neki megfelelő primál feltétel egyenlőséggel teljesül (azaz $y'(i) > 0$-ból ${}_iqx = b(i)$ következik.) Így tehát $F = \{x \in R : Q'x = b'\}$.

Fordítva, legyen Q' a Q bizonyos sorai által alkotott mátrix, és b' a b megfelelő része, amelyekre $\{x \in R : Q'x = b'\}$ nemüres. Legyen e' a csupa egyes vektor, amelynek annyi komponense van, mint ahány sora Q'-nek. Jelölje c a Q' sorainak összegét (azaz $c = e'Q'$), míg δ a b' komponenseinek összegét ($\delta := e'b'$). Most $cx = (e'Q')x = e'(Q'x) \leq e'b' = \delta$. Ebből adódóan valamely $x \in R$ vektorra $Q'x = b'$ akkor és csak akkor teljesül, ha $cx = \delta$, amiből a tétel következik. •

Az R poliéder maga is oldal (pl. $c = 0$ célfüggvényre az R minden pontja maximalizálja cx-t, vagy másként, amikor semmilyen egyenlőtlenséget nem kötünk meg egyenlőségként.) A poliédernek egy önmagától különböző oldalát **valódi oldal**nak nevezzük. Egy tartalmazásra nézve maximális valódi oldalt **lap**nak hívunk. Fontos szerepet játszanak a (tartalmazásra nézve) **minimális oldal**ak, vagyis az olyan oldalak, melyek valódi részhalmazként már nem tartalmaznak más oldalt. Az R poliéder egy $R = \{x : Px = b_0, Qx \leq b_1\}$ leírásában szereplő $qx \leq \beta$ egyenlőtlenségről azt mondtuk, hogy **lényeges**, ha kihagyása megváltoztatja (bővíti) a poliédert. Az egyenlőtlenség **igazi**, ha egyenlőséggel történő cseréje megváltoztatja (szűkíti) a poliédert.

TÉTEL 1.1.2 *Egy R nemüres poliédernek akkor és csak akkor nincs valódi oldala, ha R affin altér.*

Biz. Ha $R = \{x : Qx = b\}$ affin altér, úgy az 1.1.1 tétel szerint nincs valódi oldala.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az R poliédernek nincs valódi oldala. Tekintsük a poliédernek egy olyan $R = \{x : Px = b_0, Qx \leq b_1\}$ megadását, amelyben minden egyenlőtlenség igazi és lényeges. (Ilyen persze van, hiszen

R egy tetszőleges leírásából kiindulva egymás után kihagyhatjuk az aktuálisan lényegtelen egyenlőtlenségeket, majd az implicit egyenlőségeket explicitté alakíthatjuk). Azt látjuk be, hogy Q üres, és így R valóban affin altér. Tegyük fel indirekt, hogy létezik egy $qx \leq \beta$ igazi és lényeges egyenlőtlenség. Jelölje Q' a q sor kihagyásával Q-ból keletkező részmátrixot és b_1' a megfelelő jobboldalt. Ekkor egyrészt van olyan $x' \in R$ pontja, amelyre $Px' = b_0$, $Q'x' \leq b_1'$ és $qx' > \beta$, másrészt R-nek van olyan x'' pontja, melyre $qx'' < \beta$. Így az $x'x''$ szakasznak van olyan z pontja, amelyre $qz = \beta$ és $z \in R$, vagyis $\{x : Px = b_0, Q'x \leq b_1', qx = \beta\}$ valódi nemüres oldala R-nek, ellentmondásban a feltevéssel, hogy ilyen oldal nem létezik. •

Következmény 1.1.3 *Egy poliéder minimális oldala affin altér.*

Biz. Az 1.1.1 tétel miatt az R poliéder egy oldalának oldala R-nek is oldala, így a minimális oldal olyan poliéder, amelynek már nincs valódi oldala. Alkalmazzuk az 1.1.2 tételt. •

1.1.2 Egész megoldások

Egy poliédert akkor nevezünk egésznek, ha minden oldala tartalmaz egész pontot. Ez avval ekvivalens, hogy minden minimális oldala tartalmaz egész pontot, ami abban a speciális esetben, amikor a poliéder csúcsos (vagy ekvivalensen egyenes-mentes) azzal egyenértékű, hogy minden csúcs egész. Először azt vizsgáljuk meg, hogy egy affin altér mikor tartalmaz egész pontot. Az alábbi eredmény érdekes analógiát mutat a Farkas lemmával, amely arra adott jellemzést, hogy egy affin altérnek mikor nincs nemnegatív eleme.

TÉTEL 1.1.4 *Legyen A egész mátrix és b egész vektor. Az $Ax = b$ rendszernek akkor és csak akkor van egész megoldása, ha minden y vektorra, amelyre yA egész, yb is egész. Ha van olyan y, amelyre yA egész, de yb nem, akkor van ilyen nemnegatív y is.*

Biz. Ha létezik egész x megoldás, és valamely y-ra yA egész vektor, akkor $(yA)x = y(Ax) = yb$, azaz yb is egész.

Az ellenkező irányú következtetés bizonyításához feltehetjük, hogy az $Ax = b$-nek létezik egyáltalán megoldása, mert ha nem létezne, akkor van olyan y, hogy $yA = 0$ és $yb \neq 0$. De akkor y úgy is választható, hogy yb nem egész.

Az is feltehető, hogy az A sorai lineárisan függetlenek, mert ha valamelyik sor lineárisan függ a többiektől, akkor ezt kihagyhatjuk (b megfelelő komponensével együtt), és az új rendszernek, ha van megoldása, akkor az az eredetinek is megoldása, ha pedig nincs, akkor indukcióval van olyan y', amelyre $y'A'$ egész, de $y'b'$ nem. Ha most a kihagyott komponenst 0-nak vesszük, akkor egy olyan y-t kapunk y'-ből, amelyre yA egész, de yb nem az.

Könnyen ellenőrizhető, hogy az eredetivel ekvivalens feladatot kapunk (mind az x, mind az y létezése szempontjából), ha az A egy oszlopát egy másik oszlopához adjuk vagy abból levonjuk. Ezen művelet ismételt alkalmazásával (és esetleges oszlop cserékkel) az A mátrix $[B, 0]$ alakra hozható, ahol B egész háromszög mátrix (azaz a főátló elemei felett minden elem 0) és a főátlóban nem nulla elemek állnak.

Mivel $B^{-1}(B, 0) = (I, 0)$ egész mátrix, a feltevésből következik, hogy $B^{-1}b$ is egész vektor. Így az $x^* := \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ egész vektorra $(B, 0)x^* = b$, azaz $Ax^* = b$.

A tétel utolsó részéhez tegyük fel, hogy valamely y'-re $y'A$ egész, de $y'b$ nem. Legyen y'' olyan egész vektor, amelyre $y^* := y' + y''$ nemnegatív. Mivel $y''A$ és $y''b$ is egész, így y^*A egész, y^*b nem az. •

Alapvető fontosságú az egész poliédereknek a következő jellemzése.

TÉTEL 1.1.5 (Edmonds és Giles) *Az $R := \{x : Qx \leq b\}$ nemüres poliéder (Q, b egész) akkor és csak akkor egész, ha minden olyan c egész vektorra, amelyre $\{cx : x \in R\}$ felülről korlátos, a $\max\{cx : x \in R\}$ szám egész.*

Biz. A feltétel szükségessége nyilvánvaló, így csak az elegendőség bizonyításával foglalkozunk. Tekintsük az R-nek cx-t maximalizáló oldalát és legyen R' ennek egy minimális oldala. Az 1.1.3 következmény miatt R' affin altér, azaz megadható $\{x : Q'x = b'\}$ alakban, ahol Q' az Q bizonyos soraiból álló részmátrix.

A tételhez azt kell bebizonyítani, hogy R' tartalmaz egész pontot. Ha indirekt nem tartalmaz, akkor az 1.1.4 tétel alapján létezik olyan $y' \geq 0$ vektor, amelyre $c' := y'Q'$ egész, de $y'b'$ nem. Ekkor tetszőleges $x \in R'$-re $c'x = y'(Q'x) = y'b'$, és tetszőleges $x \in R$-re $c'x = y'(Q'x) \leq y'b'$, amiből következik, hogy a $\max\{c'x : x \in R\}$ az R' elemein felvétetik és így a maximum értéke $y'b'$. De ez ellentmond a tétel feltevésének, hiszen $y'b'$ nem egész. •

1.1.3 Teljesen duálisan egészértékű rendszerek

Gyakran az 1.1.5 tételt olyan módon fogjuk használni, hogy valamely $\max\{cx : Qx \leq b\}$ lineáris program duálisáról minden egész c-re kimutatjuk, hogy van egész optimális megoldása, feltéve persze, hogy van egyáltalán optimális megoldása. Ekkor a $Qx \leq b$ rendszert **teljesen duálisan egészértékű**nek (total dual integral: TDI) hívják. (Ez tehát az egyenlőtlenség-rendszer tulajdonsága és nem a rendszer által definiált poliéderé. Hogy mennyire nem, azt jelzi Giles és Pulleyblank tétele: *minden egész poliéder leírható TDI rendszerrel.*) Ilyenkor tehát az 1.1.5 tétel miatt a primál poliéder egész és így a primál problémában minden c célfüggvényre (nem csak egészre) az optimum, ha véges, úgy egész vektoron is felvétetik. A TDI-ség definíciójából és az 1.1.5 poli tételből közvetlenül adódik az alábbi eredmény.

TÉTEL 1.1.6 (Edmonds és Giles) *Egy TDI rendszerrel megadott poliéder egész, ha a feltételi mátrix és a korlátozó vektor egész.* •

Igen hasznos az alábbi eredmény, amely azt mondja ki, hogy ha egy TDI rendszer egyik egyenlőtlenségét egyenlőséggel helyettesítjük, akkor továbbra is TDI rendszert kapunk. Ebből persze következik, hogy akárhány egyenlőtlenséget is egyenlőségre cserélhetünk a TDI-ség elrontása nélkül.

TÉTEL 1.1.7 (W. Cook) *Amennyiben a* $\{Qx \leq b, qx \leq \beta\}$ *rendszer TDI* (ahol Q, q, b, β egész)*, úgy a* $\{Qx \leq b, qx = \beta\}$ *rendszer is TDI.*

Biz. Legyen

$$P := \{x : Qx \leq b,\ qx \leq \beta\} \ \text{ és } \ D = \{(y, \pi) :\ yQ + \pi q = c,\ \pi \geq 0,\ y \geq 0\}$$

az eredeti primál illetve duál poliéder. Legyen c olyan egész vektor, amelyre a primál illetve duál

$$P' = \{x : Qx \leq b,\ qx = \beta\} \ \text{ és } \ D' = \{(y, \pi) : yQ + \pi q = c,\ y \geq 0\}$$

poliéderek egyike sem üres. Azt kell igazolnunk, hogy az

$$m' := \min\{yb + \pi\beta : (y, \pi) \in D'\} \tag{1.2}$$

duális lineáris programnak van egészértékű (y, π) optimuma.

Ezt először olyan c-kre igazoljuk, amelyekre (1.2)-nek van egy (y', π') nemnegatív optimális megoldása. Ekkor $(y', \pi') \in D \subseteq D'$ miatt $m' \geq \min\{yb + \pi\beta : (y, \pi) \in D\} \geq m'$. Vagyis ilyenkor D egy optimális eleme optimális D'-ben is, ugyanakkor a tétel feltevése szerint D-nek van egészértékű (y, β) optimuma.

Az általános eset könnyen visszavezethető a fentire. Legyen (y', π') a D' egy optimális megoldása. Legyen ℓ olyan egész szám, amelyre $\lambda' := \ell + \pi' \geq 0$. Legyen $c_\ell := c + \ell q$ és tekintsük a

$$D'_\ell := \{(y, \lambda) :\ yQ + \lambda q = c_\ell,\ y \geq 0\}$$

duális poliédert. A $\lambda = \pi + \ell$ megfeleltetés egy-egy értelmű kapcsolatot definiál a D' és a D'_ℓ poliéder elemei között (éspedig a D'_ℓ nem más, mint a D' ℓ-lel történt eltoltja a β tengely mentén) és így $yb + \lambda\beta = yb + (\pi + \ell)\beta$. Emiatt (y', λ') optimális eleme D'_ℓ-nek, amely nemnegatív, és így az első rész szerint létezik (y^*, λ^*) egész optimuma is D'_ℓ-nek. De ekkor $\pi^* := \lambda^* - \ell$-re (y^*, π^*) egész optimuma D'-nek. • •

1.2 TU-MÁTRIXOK: PÉLDÁK, ALAPTULAJDONSÁGOK

Az alábbiakban egy mátrixot vagy egy vektort akkor nevezünk egésznek vagy egészértékűnek, ha minden elemük (komponensük) egész szám. Gyakran előfordul, hogy egy lineáris egyenlőtlenség-rendszernek egész megoldására vagy egy lineáris programnak egész optimális megoldására van szükségünk. Bebizonyították, hogy mindkét feladat NP-teljes, így általánosságban olyan típusú kerek választ nem várhatunk, mint amilyent a Farkas lemma vagy a dualitás tétel nyújtott a valós (vagy racionális) esetre. Speciális feltételi mátrixok esetén azonban szavatolható egészértékű megoldás vagy optimum létezése. Ennek messzemenő következményei lesznek gráfokon megfogalmazott optimalizálási feladatok megértésében.

Valamely Q mátrixot akkor nevezünk **teljesen unimodulárisnak** (TU: totally unimodular), ha minden aldeterminánsa $(0, \pm 1)$ értékű. Speciálisan, ilyen mátrix minden eleme $0, +1$ vagy -1. Világos, hogy TU-mátrix transzponáltja is az. Sorokat vagy oszlopokat -1-gyel szorozva vagy elhagyva ismét TU-mátrixot kapunk. Továbbá, egységvektorokat sorként vagy oszlopként egy TU-mátrixhoz illesztve TU-mátrixot kapunk. Így, ha a Q TU-mátrixot kiegészítjük egy I egység-mátrixszal, akkor a keletkező (Q, I) mátrix is TU-mátrix. Ha Q TU-mátrix, úgy $(Q, -Q)$ is az. (De ha mondjuk egy csupa 1 oszloppal egészítjük ki Q-t, akkor nem feltétlenül kapunk TU-mátrixot: legyen Q az $\{1, 2, 3, 4\}$ pontokon az $\{12, 13, 14\}$ élekből álló gráf 4×3-as incidencia mátrixa.)

Ha egy TU-mátrix valamely oszlopában van egy $+1$-es és egy -1-es elem, úgy az egyik sorát a másikéhoz adva a keletkező mátrix ugyan $\{0, \pm 1\}$-es lesz, de nem biztosan teljesen unimoduláris. Ha viszont ilyen átalakításokkal egy oszlopot egységvektorrá alakítunk, úgy már szükségképpen TU-mátrixot kapunk, amint ezt a következő tétel állítja.

TÉTEL 1.2.1 *Legyen a Q $m \times n$-es TU-mátrix és q_1 a Q egy oszlopa, melyre $q_1(1) \neq 0$. Legyen $e_i \in \mathbf{R}^m$ az i-edik egységvektor ($i = 1, \ldots, m$). Jelölje Q_1 azt a mátrixot, amelyet akkor kapunk, ha Q-t a $q_1, e_2, \ldots, e_m$ bázisban írjuk fel. Ekkor Q_1 teljesen unimoduláris.*

Biz. Feltehető, hogy q_1 a Q első oszlopa. Sorok esetleges negálásával feltehető, hogy $q_1(1) = 1$ és $j \geq 2$-re $q_1(j)$ 0 vagy -1. Q_1 tehát úgy áll elő Q-ból, hogy a Q első sorát hozzáadjuk minden olyan sorához, amelynek első eleme -1.

Ha a tétel nem igaz, akkor Q_1-nek van egy olyan B négyzetes részmátrixa, amelyre $|\det B| \geq 2$. Az olyan aldeterminánsok értéke a báziscserével nem változik, melyek az első sorból tartalmaznak elemet, így B nem ilyen. Mivel Q_1 első oszlopa az első elemétől eltekintve nulla, a B az első oszlopból sem tartalmaz elemet. Feltehetjük, hogy az első sortól és az első oszloptól eltekintve B tartalmazza a Q_1 összes sorát és oszlopát, mert ha valamelyiket nem tartalmazná, azt egyszerűen kihagyhatjuk Q-ból és Q_1-ből. Most viszont $\det B = \det Q_1 = \det Q \in \{0, \pm 1\}$, ellentmondás. •

Következmény 1.2.2 *Ha Q egy m rangú $m \times n$-es TU-mátrix, és B a Q egy $m \times m$-es nemszinguláris részmátrixa, akkor $B^{-1}Q$ teljesen unimoduláris. Speciálisan, egy* (négyzetes) *nemszinguláris TU-mátrix inverze is teljesen unimoduláris.* •

Példaképp, legyen Q egy $D = (V, A)$ irányított gráf incidencia mátrixa, azaz Q sorai a V-nek, oszlopai E-nek felelnek meg, és az $q_{v,e}$ elem akkor $+1$ illetve -1, ha az e él belép illetve kilép v-ből (egyébként 0). Egy $G = (V, E)$ gráf (pont-él) incidencia mátrixában a soroknak a csúcsok, míg az oszlopoknak az élek felelnek meg. A mátrix egy v csúcshoz és e élhez tartozó eleme akkor 1, ha e egyik végpontja v, különben 0. Tehát az incidencia mátrix minden oszlopában két darab 1-es elem van.

TÉTEL 1.2.3 (a) *Digráf incidencia mátrixa teljesen unimoduláris.* (b) *Páros gráf incidencia mátrixa teljesen unimoduláris.*

Biz. (a) Vegyünk egy Q' négyzetes részmátrixot, amelyről be akarjuk látni, hogy determinánsa $0, \pm 1$. Amennyiben ennek van olyan oszlopa, amelyben legfeljebb csak egy nem-nulla elem van, akkor ezen oszlop szerint kifejtve a determinánst, indukcióval kész vagyunk. Így feltehetjük, hogy minden oszlopban pontosan két nem-nulla van (merthogy több nem lehet). Ezek közül az egyik $+1$, a másik -1, vagyis a sorokat összeadva 0-t kapunk, azaz Q' sorai lineárisan függőek, így a determináns 0.

(b) Szorozzuk meg -1-gyel a mátrix azon sorait, amelyek a páros gráf egyik osztályában lévő pontoknak felelnek meg. Ekkor egy irányított gráf incidencia mátrixát kapjuk, amiről az előbb láttuk, hogy TU. •

Feladat 1.1 *Igazoljuk, hogy ha egy páros gráf incidencia mátrixát kibővítjük egy csupa egyesekből álló sorral, akkor TU-mátrixot kapunk, míg ha az oszlopaihoz veszünk egy csupa egyes oszlopot, akkor az így keletkező mátrix nem feltételenül TU.*

Feladat 1.2 *Igazoljuk, hogy egy D digráf incidencia mátrixának oszlopai akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha D irányított erdő.*

Hipergráfon egy $(V, \mathcal{F})$ párt értünk, ahol V adott alaphalmaz, $\mathcal{F}$ pedig V részhalmazainak egy rendszere, amelyben ugyanaz a részhalmaz több példányban is szerepelhet. Az $\mathcal{F}$ tagjai a hipergráf **hiperélei**. Egy H hipergráfot akkor nevezzünk **teljesen unimoduláris**nak, ha H incidencia mátrixa teljesen unimoduláris. Ez egy olyan $0-1$ értékű mátrix, amelyben a soroknak a V elemei felelnek meg, az oszlopoknak az $\mathcal{F}$ elemei, és a mátrix egy eleme pontosan akkor egy, ha az oszlopának megfelelő hiperél tartalmazza a mátrix-elem sorának megfelelő V-beli elemet. A gráfok speciális hipergráfok, ahol minden hiperél kételemű. Ezek közül már láttuk, hogy a páros gráfok teljesen unimodulárisak. Más gráfok viszont sohasem azok, hiszen egy páratlan kör incidencia mátrixának determinánsa ± 2.

Mint láttuk, minden D digráf ± 1-es incidencia mátrixa TU. Ezt általánosítja a **hálózati mátrix**. Legyen D olyan irányított gráf, amely irányítatlan értelemben összefüggő és legyen F egy feszítő fa. A H_F mátrix sorai az F éleinek felelnek meg, míg az oszlopai az F-en kívüli éleknek. Minden uv nem-fa élre a fában egy egyértelmű (nem feltétlenül irányított) út vezet v-ből u-ba. Ennek egy f elemére a mátrix $a_{f,e}$ elemét definiáljuk 1-nek, ha f iránya megegyezik az útéval és -1-nek, ha azzal ellentétes. A mátrix minden más eleme 0.

Lemma 1.2.1 *Hálózati mátrix részmátrixa is az. Hálózati mátrix sorát vagy oszlopát -1-gyel szorozva hálózati mátrixot kapunk.*

Biz. Egy oszlop eltörlése annak felel meg, hogy a megfelelő nem-fa élt a digráfból kihagyjuk. Egy sor törlése annak felel meg, hogy a megfelelő fa-élt a digráfban összehúzzuk. Egy sor vagy oszlop -1-gyel való szorzása annak felel meg, hogy a megfelelő élt (akár fa-él, akár nem-fa él) átirányítjuk. •

TÉTEL 1.2.4 *A H_F hálózati mátrix teljesen unimoduláris.*

Biz. A lemma alapján elég belátni, hogy egy négyzetes hálózati mátrix determinánsa $0, 1$ vagy -1. Tekintsük a fának egy v végpontját. Ha az F fa v-vel szomszédos éléhez tartozó sorban lévő nem-nulla elemek α száma legfeljebb 1, akkor a determináns kifejtési szabály alapján indukcióval készen vagyunk. Tegyük fel, hogy $\alpha > 1$, vagyis v szomszédos legalább két nem-fa éllel. Átirányítás miatt feltehető, hogy ezek közül pontosan egy van v felé irányítva. Legyen ez sv és legyen vt egy másik nem-fa él. Ha az sv-nek megfelelő oszlopot, hozzáadjuk a vt-nek megfelelő oszlophoz, akkor egyrészt persze a determináns értéke nem változik, másrészt ismét hálózati mátrixot kapunk, éspedig azé a gráfét, amelyben a vt él helyett az st él szerepel.

Ilyen átalakításokkal egy olyan gráfot kaphatunk, amelyben az F feszítő fa változatlan, egyetlen nem-fa él (nevezetesen sv) szomszédos v-vel, vagyis a hozzátartozó hálózati mátrix v-nek megfelelő sorában egy nem-nulla elem van. Ilyen hálózati mátrixról pedig már láttuk, hogy a determinánsa $0, \pm 1$, ugyanakkor a fenti operációk nem változtatták a determináns abszolút értékét. •

Következmény 1.2.5 *Egy olyan hipergráf teljesen unimoduláris, amely egy irányított fa élhalmazán van definiálva és a hiperélek irányított utak.* •

Gyakorlat 1.3 *Legyen M a $G = (V, E)$ gráf F feszítő fája által definiált négyzetes hálózati mátrix. Fogalmazzuk meg a gráf nyelvén az M invertálhatóságának a feltételét.*

Feladat 1.4 *Igazoljuk, hogy az alábbi mátrix teljesen unimoduláris, de sem ő, sem a transzponáltja nem hálózati mátrix:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3 LAMINÁRIS ÉS KERESZTEZÉS-MENTES HIPERGRÁFOK

1.3.1 Lamináris hipergráfok

Egy hipergráfot **lamináris**nak mondunk, ha bármely két hiperéle vagy diszjunkt vagy az egyik tartalmazza a másikat. Például, ha $F = (V, E)$ egy s gyökerű fenyő és minden $e = uv$ éléhez tekintjük a v-ből a fenyőben elérhető pontok halmazát, akkor ezen halmazok lamináris rendszert alkotnak. Valójában ezen állítás megfordítását sem nehéz bebizonyítani, amely szerint minden lamináris halmazrendszer lényegében ilyen alakban áll elő.

TÉTEL 1.3.1 *A V részhalmazaiból álló tetszőleges $\mathcal{F}$ lamináris rendszerhez létezik egy $H = (U, F)$ fenyő valamint egy $\varphi : V \to U$ leképezés úgy, hogy $\mathcal{F}$ tagjai és a fenyő élei 1-1 értelműen megfelelnek egymásnak, éspedig olymódon, hogy tetszőleges $e \in F$ élre $\varphi^{-1}(V_e)$ az e-nek megfelelő halmaz, ahol V_e jelöli a H fenyőből az e kihagyásával keletkező két komponens közül azt, amelybe e belép.*

Biz. Feltehetjük, hogy $\mathcal{F}$ tagjai különbözőek, ha ugyanis egy ilyen lamináris rendszernek már létezik a kívánt fenyő-ábrázolása és az $\mathcal{F}$ egy X tagjának egy újabb példányát bevesszük, akkor a keletkező lamináris rendszernek úgy kaphatjuk meg a kívánt reprezentálását, hogy X-nek megfeleltetett fenyő élt egy új ponttal felosztjuk.

Azt is feltehetjük, hogy V minden v eleme benne van $\mathcal{F}$ valamelyik tagjában. Ezek közül a legszűkebbet jelölje $\sigma(v)$. Minden $X \in \mathcal{F}$ halmaznak feleltessünk meg egy új $f(X)$ pontot és legyen s még egy extra pont. A keletkező pontok U halmaza lesz a fenyő ponthalmaza (U-nak tehát eggyel több eleme van, mint $\mathcal{F}$-nek).

Készítsük el az F fenyőt az U halmazon a következőképpen. Az $\mathcal{F}$ minden maximális X tagjára vezessünk egy élt s-ből $f(X)$-be. Amennyiben X az $\mathcal{F}$-nek nem maximális tagja, úgy létezik egy egyértelmű legszűkebb $Y \in \mathcal{F}$ halmaz, amely tartalmazza X-et. Ebben az esetben vezessünk $f(Y)$-ból $f(X)$-be élt. Így egy H fenyőt kapunk, melynek gyökere a speciális s pont. Végül minden $v \in V$ pontra legyen $\varphi(v) := f(\sigma(v))$. Könnyen ellenőrizhető, hogy az így definiált H fenyő és φ leképezés kielégíti a tételbeli kívánságokat. •

Legyen $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ két lamináris hipergráf az S alaphalmazon. Jelölje A_i ($i = 1, 2$) az $\mathcal{F}_i$ incidencia mátrixának transzponáltját. Ebben az oszlopok az S elemeinek felelnek meg, míg a sorok $\mathcal{F}_i$ elemeinek. Legyen $M := \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$.

TÉTEL 1.3.2 *M teljesen unimoduláris.*

Biz. Vegyük M-nek egy négyzetes részmátrixát. Az ebben lévő egyesek száma szerinti indukcióval ennek determinánsáról kimutatjuk, hogy 0 vagy ± 1. Mivel A_i bármely részmátrixa is egy lamináris rendszer incidencia mátrixa (miért?!), így feltehetjük, hogy a vizsgált részmátrix maga M. Ha M-ben minden elem nulla, akkor persze a determináns is nulla. Ha M-nek van olyan sora vagy oszlopa, amelyben legfeljebb egy nem-nulla elem van, akkor indukcióval (és kifejtési szabállyal) készen vagyunk.

Ha $\mathcal{F}_1$ is és $\mathcal{F}_2$ is partíció, akkor mind A_1, mind A_2 sorainak összege a csupa 1 vektor, tehát A sorai lineárisan függőek, így $\det(M) = 0$. Tegyük fel, hogy mondjuk $\mathcal{F}_1$ nem partíció. Ekkor van egy olyan minimális Z tagja, amely része $\mathcal{F}_1$ egy másik tagjának. Ha most $\mathcal{F}_1$-nek valamennyi Z-t tartalmazó tagjából kivonjuk Z-t, ami azzal ekvivalens (a laminaritás miatt), hogy a megfelelő sorokból kivonjuk Z sorát, akkor a determináns értéke nem változik, viszont a keletkező mátrixban kevesebb egyes szerepel. Miután a módosított halmazrendszer is lamináris, indukcióval készen vagyunk. •

Kimutatjuk, hogy valójában a két lamináris rendszerhez definiált fenti M mátrix hálózati mátrix.

TÉTEL 1.3.3 *M hálózati mátrix* (és így teljesen unimoduláris).

Biz. Legyen $F_i = (V_i, E_i)$ illetve φ_i az $\mathcal{F}_i$ lamináris rendszert ábrázoló fenyő illetve leképezés ($i = 1, 2$), melyek létezését az 1.3.1 tételben igazoltuk és legyen s_i az F_i fenyő gyökere. Tegyük fel, hogy a fenyők diszjunktak. Egyesítsük az s_1 és az s_2 gyökeret egyetlen s ponttá és fordítsuk meg az F_2 fenyő éleinek irányítását. Ekkor egy F irányított fát kapunk, amelyben az S alaphalmaz egy $v \in S$ eleméhez rendelt $\varphi_2(v)$ és $\varphi_1(v)$ pontok között vezető $P(v)$ út irányított. A konstrukcióból könnyen látható, hogy a v elemet az $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ hipergráfnak pontosan azon hiperélei tartalmazzák, melyek a P út éleinek felelnek meg. Az 1.2.5 következmény maga után vonja a tételt. •

Gyakorlat 1.5 *Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{F}$ az S két partíciójának egyesítése, akkor az $\mathcal{F}$ incidencia mátrixa éppen egy páros gráf incidencia mátrixának transzponáltja.*

Legyen V alaphalmaznak $X_B \subseteq X_K$ két részhalmaza. Az $X = (X_K, X_B)$ párt **párhalmaz**nak nevezzük, melynek X_K a **külső** tagja, míg X_B a **belső**. A párhalmazokon értelmezzük a $\cap$ és $\cup$ műveleteket a természetes módon: X, Y párhalmazokra legyen $X \cap Y := (X_K \cap Y_K, X_B \cap Y_B)$, $X \cup Y := (X_K \cup Y_K, X_B \cup Y_B)$. Azt mondjuk, hogy X **része** Y-nak, jelölésben $X \subseteq Y$, ha $X_K \subseteq Y_K$ és $X_B \subseteq Y_B$. Ha $X \subseteq Y$ vagy $Y \subseteq X$, akkor X és Y **összehasonlítható**. Két párhalmaz **metsző**, ha nem összehasonlíthatóak és $X_B \cap Y_B \neq \emptyset$. Két párhalmaz **keresztező**, ha metszők és külső tagjaik egyesítése nem V. Párhalmazok egy rendszere **lamináris**, ha nincs közöttük két metsző. A párhalmazok egy $\mathcal{F}$ részhalmazáról azt mondjuk, hogy **metsző** (**keresztező**), ha $\mathcal{F}$ bármely két metsző (keresztező) tagjával együtt azok metszete és uniója is $\mathcal{F}$-ben van.

Tegyük fel, hogy párhalmazok egy $\mathcal{F}$ rendszere lamináris. Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf. Azt mondjuk, hogy egy e irányított él **lefog** egy X párhalmazt (mással szóval, hogy e belép X-be), ha mindkét tagjába belép. Készítsük el az $A_{\mathcal{F}}$ $0-1$ mátrixot, melynek sorai az $\mathcal{F}$ tagjainak, míg oszlopai a D éleinek felelnek meg. Egy elem akkor 1, ha az oszlopnak megfelelő él lefogja a sornak megfelelő párhalmazt.

TÉTEL 1.3.4 *Egy párhalmazokból álló lamináris $\mathcal{F}$ rendszerhez* (speciálisan egy lamináris halmazrendszerhez) *tartozó $A_{\mathcal{F}}$ mátrix hálózati mátrix* (és így teljesen unimoduláris).

Biz. Az $\mathcal{F}$-beli belső (második) tagjai lamináris halmazrendszert alkotnak. Tekintsük az ezt reprezentáló F fenyőt, a D digráf egy tetszőleges e élét és az általa lefogott párhalmazokat. Ezek belső tagjainak megfelelő fenyő élek irányított utat alkotnak. Márpedig egy fenyő bizonyos részútjai által alkotott hipergráf incidencia mátrixának transzponáltjáról láttuk már, hogy hálózati mátrix. •

1.3.2 Keresztezés-mentes hipergráfok

Egy alaphalmaz két részhalmazát **keresztezés-mentesnek** mondjuk, ha vagy diszjunktak, vagy az egyik tartalmazza a másikat, vagy az uniójuk az alaphalmaz. Egy $\mathcal{F}$ halmazcsaládot **keresztezés-mentes** (cross-free) mondunk, ha nincs két keresztező tagja.

Például, ha adott egy F irányított fa (nem feltétlenül fenyő), és minden e élhez tekintjük a V_e halmazt, amely a fának az e elhagyásával keletkező azon komponensét jelöli, amelybe e belép, akkor az így keletkezett rendszer keresztezés-mentes. Ismét érvényes egyfajta megfordítás.

TÉTEL 1.3.5 *A V részhalmazaiból álló tetszőleges $\mathcal{F}$ keresztezés-mentes rendszerhez létezik egy $H = (U, F)$ irányított fa valamint V pontjainak egy φ leképezése U-ba úgy, hogy $\mathcal{F}$ tagjai és a fa élei 1-1 értelműen megfelelnek egymásnak, éspedig olymódon, hogy tetszőleges e élre $\varphi^{-1}(V_e)$ az e-nek megfelelő halmaz $\mathcal{F}$-ben.*

Biz. Legyen z az alaphalmaz tetszőleges pontja. $\mathcal{F}$ minden z-t tartalmazó tagját helyettesítsük a komplementerével. A keletkező $\mathcal{F}'$ halmazrendszer lamináris. Alkalmazhatjuk az 1.3.1 tételt. A kapott fenyőben fordítsunk meg minden olyan élt, amely az eredeti $\mathcal{F}$ egy z-t tartalmazó tagja komplementerének felel meg. Ekkor a kívánt reprezentációt kapjuk. •

Legyen adott a $D = (V, A)$ irányított gráf ponthalmazán egy $\mathcal{F}$ keresztezés-mentes halmaz-rendszer. Készítsük el a $B_{\mathcal{F}}$ $(0, \pm 1)$-értékű mátrixot, melynek sorai az $\mathcal{F}$ tagjainak, míg oszlopai a D éleinek felelnek meg. Egy elem akkor 1 (illetve -1), ha az oszlopnak megfelelő él belép (illetve kilép) a sornak megfelelő halmazba (halmazból). Minden egyéb elem 0.

TÉTEL 1.3.6 *A $B_{\mathcal{F}}$ mátrix hálózati mátrix* (és így teljesen unimoduláris).

Biz. Az állítás közvetlenül adódik az 1.3.5 tételből. •

Gyakorlat 1.6 *Igazoljuk, az* 1.3.6 *tétel megfordítását, miszerint minden hálózati mátrix előáll $B_{\mathcal{F}}$ alakban.*

Gyakorlat 1.7 *Egy $\mathcal{F}$ keresztezés-mentes halmazrendszerhez és $D = (V, A)$ digráfhoz hozzárendelhetünk egy $0-1$ mátrixot, amelyben a soroknak az $\mathcal{F}$ tagjai, az oszlopoknak D élei felelnek meg, és a mátrix egy $a_{Z,e}$ eleme ($Z \in \mathcal{F}$, $e \in A$) akkor 1, ha e belép Z-be,* (minden más esetben 0). *Példával mutassuk meg, hogy ez a mátrix nem feltétlenül teljesen unimoduláris.*

Bizonyítás nélkül közöljük az alábbi érdekes eredményt.

TÉTEL *Egy D digráf által meghatározott hálózati mátrix transzponáltja akkor és csak akkor hálózati mátrix, ha D* (irányítatlan értelemben) *síkba rajzolható.*

1.4 FARKAS LEMMA, DUALITÁS, OPTIMALITÁSI FELTÉTELEK TU-MÁTRIXOKRA

Az erős bázis-megoldás fogalma már eddig is hasznos volt (mert csak véges sok volt belőlük, és mert minden, a poliéderen felülről korlátos cx célfüggvény esetén $\max cx$ erős bázis-megoldáson felvétetett.) E fogalom most újabb fontos szerephez jut.

Lemma 1.4.1 *Tetszőleges M TU-mátrixszal megadott egyenlőtlenség-rendszer esetén, ha a b jobboldali korlátozó vektor egész, akkor minden erős bázis-megoldás egész.*

Biz. Legyen $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ és tekintsük a

$$Px = b_0, Qx \le b_1 \tag{1.3}$$

rendszert. Az Iránymenti korlátosság című szakaszban megfigyeltük, hogy minden erős bázis-megoldás előáll valamely $M'x' = b'$ egyenletrendszer egyértelmű megoldásának nulla komponensekkel való kiegészítéseként, ahol M' az M egy $[(r(M) \times (r(M)]$-es nem-szinguláris részmátrixa és b' jelöli a b azon részét, amely az M' sorainak felel meg. Mármost, ha M TU-mátrix, akkor a nem-szinguláris M' determinánsa $+1$ vagy -1. A Cramer szabály szerint, miután b' egész, az egyértelmű x' megoldás is az. •

Lemma 1.4.2 *Legyen c tetszőleges* (nem feltétlenül egészértékű) *vektor. Bármely M TU-mátrixszal megadott K metszet-kúpnak, ha van olyan x' eleme, amelyre $cx' > 0$, akkor K-nak van ilyen $(0, \pm 1)$-értékű eleme is.*

Biz. Legyen $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ és tegyük fel, hogy a K kúp a $Px = 0, Qx \leq 0$ rendszer megoldás-halmaza. Mivel x' pozitív számszorosa is K-ban van, feltehető, hogy x' maga olyan, hogy minden komponense a $[-1, +1]$ zárt intervallumba esik. Vagyis a

$$(-1, \ldots, -1) \leq x \leq (1, \ldots, 1), \ Px = 0, Qx \leq 0 \tag{1.4}$$

rendszer által meghatározott korlátos poliédernek x' olyan eleme, amelyre $cx' > 0$. Ekkor az operációkutatásban tanultak szerint van olyan x^* erős bázis-megoldása az (1.4) rendszernek, amelyre $cx^* \geq cx'$. Az 1.4.1 lemma miatt x^* egészértékű, azaz minden komponense $0, \pm 1$. •

A Farkas lemma szerint az (1.3) és az alábbi (1.5) rendszerek közül pontosan az egyik oldható meg. Az alábbi tétel a Farkas lemma TU-mátrixokra vonatkozó élesítését szolgáltatja.

TÉTEL 1.4.1 *Tegyük fel, hogy az $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ mátrix teljesen unimoduláris. Ha az* (1.3) *primál probléma oldható meg és a korlátozó b vektor egész, akkor* (1.3)*-nek van egész megoldása is. Ha az*

$$y_1 \geq 0, yM = 0, yb < 0 \tag{1.5}$$

duális probléma oldható meg, ahol $y = (y_0, y_1)$, akkor van $(0, \pm 1)$-értékű y megoldás is (függetlenül b egészértékűségétől).

Biz. A tétel első fele következik az 1.4.1 lemmából, és abból a korábbi eredményből, hogy ha létezik megoldás, akkor létezik erős bázis-megoldás is. A tétel második fele pedig az 1.4.2 lemma közvetlen folyománya. •

Egy poliédert akkor nevezünk egésznek, ha minden oldala tartalmaz egész pontot. Ez nyilván azzal ekvivalens, hogy minden (tartalmazásra nézve) minimális oldal tartalmaz egész pontot, továbbá azzal (az oldal definíciója folytán), hogy minden lineáris célfüggvény optimuma egész vektoron is felvétetik. Csúcsos poliéder esetén a poliéder akkor egész, ha minden csúcsa egész. Az alábbi tételek mindegyikében az $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ mátrix teljesen unimoduláris és b egész vektor.

TÉTEL 1.4.2 *Ha a* $\max\{cx : Px = b_0, Qx \leq b_1\}$ *lineáris programozási problémának létezik megoldása, akkor az optimum egész vektoron is felvétetik (függetlenül attól, hogy c egészértékű vagy sem).* Ekvivalens alakban: *minden TU-mátrix és egész korlátozó vektor által megadott poliéder egész.*

Biz. Miután az optimum erős bázis-megoldáson is felvétetik, az 1.4.1 lemmából a tétel következik. •

Az alábbi tételek ugyanígy következnek a megfelelő lineáris programozási tételekből az 1.4.1 és 1.4.2 lemmák segítségével.

TÉTEL 1.4.3 *Tegyük fel, hogy $R = \{x : Px = b_0, Qx \leq b_1\}$ nemüres. A következők ekvivalensek.*
(1) *$\{cx : x \in R\}$ felülről korlátos.*
(2) *Nem létezik olyan $(0, \pm 1)$-értékű x' vektor, amelyre $Px' = 0, Qx' \leq 0$, és $cx' > 0$.*
(3) *Létezik olyan $y = (y_0, y_1)$ vektor, amelyre $y_1 \geq 0$ és $yM = c$, és amely egész, amennyiben c egész.* •

TÉTEL 1.4.4 *Legyen x^* az $R := \{x : Px = b_0, Qx \leq b_1)\}$ poliéder egy eleme. Jelölje $Q^=_{x^*}$ a Q aktív részmátrixát. A következők ekvivalensek.*
(1) *x^* maximalizálja cx-t R fölött.*
(2) *Nem létezik olyan $(0, \pm 1)$-értékű x' vektor, amelyre $Px' = 0$, $Q^=_{x^*} x' \leq 0$, és $cx' > 0$.*
(3) *Létezik olyan $y = (y_0, y_1)$ vektor, amelyre $y_1 \geq 0$, $yM = c$, $y(b - Mx^*) = 0$, és y egész, amennyiben c egész.* •

Gyakran (bár nem mindig) a teljesen duális egészértékűség az alábbi tulajdonságon múlik.

Lemma 1.4.3 *Tegyük fel, hogy a $\{Px = b_0, Qx \leq b_1\}$ rendszer olyan, hogy minden egész c-re, amelyre* $\max cx$ *létezik, a*

$$\min\{b_0 y_0 + b_1 y_1 : y_1 \geq 0, y_0 P + y_1 Q = c\} \tag{1.6}$$

duális lineáris programnak van olyan y^* optimuma, amelyre a P és Q azon soraiból álló $M' = \begin{pmatrix} P' \\ Q' \end{pmatrix}$ részmátrix, melyek az y^* nem nulla komponenseinek felelnek meg, teljesen unimoduláris. Ekkor a $\{Px = b_0, Qx \leq b\}$ rendszer TDI.

Biz. Az M' teljes unimodularitása miatt a $\min\{b_0' y_0' + b_1' y_1' : y_1' \geq 0, y_0' P' + y_1' Q' = c\}$ lineáris programnak van egész optimuma, amit nulla komponensekkel kiegészítve az (1.6) egy egész optimumát kapjuk. •

1.5 KEREKÍTÉS ÉS EGYENLETES SZÍNEZÉS

1.5.1 Kerekítés

Akkor mondjuk, hogy egy z egész szám az x **szám kerekítése**, ha $|x - z| < 1$. (Tehát az $1,01$-nak az 1 és a 2 is kerekítése.) Ez speciálisan azt jelenti, hogy ha x egész, akkor $x = z$. A z vektor az x **vektor kerekítése**, ha minden komponense kerekítés. Egy x nem-egész szám $\lfloor x \rfloor$ alsó egész részén a legnagyobb x-nél kisebb egész számot értjük, míg $\lceil x \rceil$ felső egész részen a legkisebb x-nél nagyob számot. Egész x-re $\lfloor x \rfloor := \lceil x \rceil := x$. Amennyiben x egy vektort jelöl, úgy $\lfloor x \rfloor$ azt a vektort jelöli, amelyet x-ből nyerünk a komponenseinek alsó egész részét véve. Az x vektor $\lceil x \rceil$ felső egész részét analóg módon definiáljuk.

Lemma 1.5.1 *Legyen A teljesen unimoduláris mátrix és x_0 egy vektor. Ekkor létezik egy olyan q egészértékű vektor, amelyre $\lfloor x_0 \rfloor \leq q \leq \lceil x_0 \rceil$ és $\lfloor Ax_0 \rfloor \leq Aq \leq \lceil Ax_0 \rceil$. Más szóval az x_0-nak van olyan q kerekítése, hogy az A minden a sorára aq kerekítése ax_0-nak.*

Biz. A feltevés szerint az $\lfloor x_0 \rfloor \leq z \leq \lceil x_0 \rceil$ és $\lfloor Ax_0 \rfloor \leq Az \leq \lceil Ax_0 \rceil$ rendszernek van megoldása, így az 1.4.1 tétel szerint van egész megoldása is. •

Érdemes megfogalmazni az alábbi következményt: *Ha $(S, \mathcal{F})$ teljesen unimoduláris hipergráf, úgy bármely $x_0 : S \to \mathbf{R}$ függvénynek létezik olyan q kerekítése, hogy minden $A \in \mathcal{F}$ hiperélre a $\sum[q(v) : v \in A]$ szám kerekítése $\sum[x_0(v) : v \in A]$-nak.*

TÉTEL 1.5.1 *Tetszőleges $m \times n$-es B mátrixnak van olyan kerekítése, hogy a következő mennyiségek mind egynél kevesebbel változnak: minden sorösszeg, minden oszlopösszeg, az első j sor elemeinek összege ($j = 1, 2, \ldots, m$), az első i oszlop elemeinek összege ($i = 1, 2, \ldots, n$).*

Biz. Legyen S a B mátrix mezőinek halmaza. B minden sorához legyen a sorban lévő mezők halmaza tagja $\mathcal{F}_1$-nek valamint minden i-re ($2 \leq i \leq m$) az első i sor mezőinek halmaza legyen tagja $\mathcal{F}_1$-nek (összesen tehát $2m - 1$ tagja van $\mathcal{F}_1$-ben). $\mathcal{F}_2$ analóg módon van definiálva az oszlopok segítségével. Ekkor $\mathcal{F}_i$ lamináris, így az 1.3.2 tétel és az 1.5.1 lemma alapján készen vagyunk. •

TÉTEL 1.5.2 *Egy $x_1, \ldots x_n$ sorozat elemeinek létezik olyan $z_1, \ldots, z_n$ kerekítése, hogy minden $1 \leq i \leq j \leq n$ indexre a $z_i + \ldots + z_j$ összeg kerekítése az $x_i + \ldots + x_j$ összegnek.*

Biz. A $\{v_1, \ldots, v_n\}$ alaphalmazon tekintsük azt a hipergráfot, melynek élei a $\{v_i, \ldots, v_j\}$ típusú halmazok minden $1 \leq i \leq j \leq n$ index párra. Amint már láttuk, ez a hipergráf teljesen unimoduláris, így az 1.5.1 lemma alkalmazható. •

1.5.2 Egyenletes színezések

A teljesen unimoduláris mátrixok egy másik érdekes alkalmazása hipergráfok egyenletes színezésével foglalkozik.

TÉTEL 1.5.3 *Legyen A TU-mátrix, b egész vektor, k pozitív egész. Legyen z olyan egész vektor, amelyre $Az \leq kb$. Ekkor z előáll olyan $z_1, z_2, \ldots, z_k$ egész vektorok összegeként, melyekre $Az_i \leq b$.*

Biz. k szerinti indukció alapján elég egy olyan egész z_1 egész vektort találni, amelyre $Az_1 \leq b$ és $A(z - z_1) \leq (k-1)b$. Ugyanis ilyen z_1 létezése esetén $z' := z - z_1$ olyan, amelyre $Az' \leq (k-1)b$ és az indukciós feltevés alkalmazható $(k-1)$-re.

A fenti z_1 létezéséhez csak azt kell látni, hogy az $Az - (k-1)b \leq Ax \leq b$ poliédernek van egész pontja. A poliéder mindenesetre nemüres, hiszen z/k benne van. Továbbá a feltételek egy TU-mátrixszal adhatók meg, így létezik a kívánt egész pont is. •

A fenti tétel kiterjeszthető arra az esetre, amikor z nemnegativitását is megköveteljük, és az Ax-re nemcsak felső korlát van, hanem alsó is. Valóban, ha A TU-mátrix, akkor az $(A, -A, I)$ mátrix is teljesen unimoduláris. Kapjuk a következőt.

Következmény 1.5.4 *Ha $z \geq 0$ olyan egész vektor, amelyre $kb_1 \leq Az \leq kb_2$, akkor z felbomlik olyan $z_1, z_2, \ldots, z_k$ egész vektorok összegére, melyekre $z_i \geq 0$, és $b_1 \leq Az_i \leq b_2$.* •

Ezt felhasználhatjuk TU-mátrixok oszlopainak egyenletes k-színezésére. Az A oszlopainak egy partícióját („színezését") $A_1, A_2, \ldots, A_k$ részre akkor nevezzük **egyenletes**nek, ha A minden a sorára érvényes, hogy a sornak az egyes A_i részekbe eső elemeinek összege minden A_i-re lényegében ugyanaz, tehát $\lfloor e_n a/k \rfloor$ vagy $\lceil e_n a/k \rceil$.

TÉTEL 1.5.5 *Az A TU-mátrix oszlopainak létezik egyenletes k-színezése.*

Biz. Legyen d az A oszlopainak az összege. Legyen $b_1 := \lfloor d/k \rfloor, b_2 := \lceil d/k \rceil$. Ekkor a $z :\equiv 1$ benne van a $\{kb_1 \leq Ax \leq kb_2, x \geq 0\}$ poliéderben. Az előbbi következmény szerint z felbomlik $z_1, z_2, \ldots, z_k$ egész vektorok összegére, melyekre $z_i \geq 0$, és $b_1 \leq Az_i \leq b_2$. Világos, hogy a z_i-k $0-1$ vektorok. Legyen A_i az oszlopoknak azon halmaza, melyeknek megfelelő komponense z_i-nek 1. Ezek éppen a kívánt egyenletes színezést adják. •

Egy alkalmazás

Következmény 1.5.6 *Adott egy F irányított fa (speciális esetben irányított út) és F irányított részútjainak egy $\mathcal{P} := \{P_1, \dots, P_t\}$ rendszere, ahol minden utat F-élek egy részhalmazának tekintünk. $\mathcal{P}$ tagjai megszínezhetők k színnel* (minden k pozitív egészre) *úgy, hogy F minden e élére az e-t tartalmazó egyszínű utak száma minden színre lényegében ugyanannyi, ahol a ,,lényegében ugyanannyi" azt jelenti, hogy bármely két színosztályra az eltérés legfeljebb egy lehet.* •

Ha a hálózati mátrix transzponáltjára alkalmazzuk az egyenletes színezési tételt, akkor a következőt kapjuk.

Következmény 1.5.7 *Adott egy F irányított fa és F irányított részútjainak egy $\mathcal{P} := \{P_1, \dots, P_t\}$ rendszere, ahol minden utat F-élek egy részhalmazának tekintünk. Az F élei megszínezhetők k színnel* (minden k pozitív egészre) *úgy, hogy $\mathcal{P}$ minden tagjában a színek lényegében egyenletes számban fordulnak elő.* •

Feladat 1.8 *Egyszerű mohó algoritmus megadásával közvetlenül bizonyítsuk be az* 1.5.7 *következményt.*

Az 1.5.5 tétel páros gráfokra vonatkozó következményeit az 1.7.6 tételben tárgyaljuk.

1.6 TU-MÁTRIXOK JELLEMZÉSE

Amint már láttuk, minden TU-mátrixszal meghatározott poliéder egész, amennyiben a korlátozó vektor egész. Mivel az egész poliéderek hasznosak kombinatorikus optimalizálási feladatok megoldásában, felvetődik, hogy léteznek-e általánosabb mátrixok ezzel a tulajdonsággal. Az alábbi tétel szerint a válasz egyfajta értelemben nemleges.

TÉTEL 1.6.1 (Hoffman és Kruskal) *A Q egész mátrix akkor és csak akkor teljesen unimoduláris, ha minden egész b vektorra az $R_b := \{x : x \geq 0, Qx \leq b\}$ poliéder egész.*

Biz. Legyen b olyan, hogy R_b nem üres. Azt már tanultuk, hogy R_b egész. A megfordításhoz indirekt tegyük fel, hogy létezik Q-nak egy Q' négyzetes részmátrixa, amelyre $|\det Q'| \geq 2$. Feltesszük, hogy Q' minimális, azaz Q' minden valódi aldeterminánsa $0, \pm 1$ értékű.

Állítás 1.6.1 *Tetszőleges b' egész vektorra a $Q'x' = b'$ rendszer egyértelmű $x_{b'}$ megoldása egész.*

Biz. Először csak az olyan b' vektorokra igazoljuk az állítást, amelyekre $x_{b'} \geq 0$. Jelölje x^* azt a vektort, amelyet az $x_{b'}$ nullákkal történő kiegészítésével nyerünk. A b'-t alkalmasan nagy (egész) komponensekkel kiegészítve olyan b vektort kapunk, amelyre x^* kielégíti a $Qx \leq b, x \geq 0$ rendszert, azaz x^* benne van R_b-ben, és így az előállítás miatt annak csúcsa. A tétel feltevése szerint x^* egész, és így $x_{b'}$ is az.

Általános b'-re legyen z' olyan egész vektor, amelyre $x_{b'} + z' \geq 0$. Ekkor $b'' := b' + Q'z' = Q'(x_{b'} + z')$ olyan, hogy a $Q'x' = b''$ egyértelmű $x_{b'} + z'$ megoldása nemnegatív, így az első rész szerint egész, de akkor z' egészértékűsége miatt $x_{b'}$ is az. •

Mivel Q' nemszinguláris, így az első sora szerint kifejtve az egyik tag, mondjuk a $q_{1,1}$-hez tartozó, nem nulla. Legyen most $b' = (1, 0, \dots 0)$ egy egységvektor. Ekkor a Cramer szabály szerint $x_{b'}$ első komponense a Q' egy aldeterminánsának, ami ± 1 értékű, és $\det Q'$-nek a hányadosa, és ezért nem egész, ellentmondásban az Állítással. • •

Megjegyzés A Hoffman-Kruskal tételt kézenfekvőnek lehet érezni. Értékét talán még jobban kiemeli, hogy a hasonlóképp természetesnek tűnő azon állítás, miszerint *egy Q négyzetes egész mátrix akkor és csak akkor TU, ha minden b egész vektorra a $Qx = b$ egyértelmű megoldása egész,* **nem igaz**, amint azt az a 3×3-as mátrix példázza, amelynek sorai $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$.

Bemutatjuk a TU-mátrixoknak még egy hasznos jellemzését. Az 1.5.5 tételben láttuk már, hogy TU-mátrixok oszlopai egyenletesen k-színezhetők. Kérdés, hogy ez a tulajdonság mennyire a csak TU-mátrixok sajátja. Az alábbi tétel szerint, már az egyenletes 2-színezhetőségből is következik a TU-ság. Az oszlopok egyenletes 2-színezhetőségének azt az ekvivalens definícióját használjuk, amely egy olyan z $\{\pm 1\}$-es vektor létezését követeli, amelyre Qz $\{0, \pm 1\}$-es vektor.

TÉTEL 1.6.2 (Ghouila-Houri) (ejtsd: Gujla-úri) *Egy Q mátrix akkor és csak akkor teljesen unimoduláris, ha oszlapainak bármely részhalmaza egyenletesen 2-színezhető.*

Biz. TU-mátrix egyenletes k-színezhetőségét már láttuk korábban, így csak a fordított iránnyal foglalkozunk. Megjegyezzük, hogy ha kihagyjuk Q néhány sorát, akkor Q oszlopainak egy egyenletes 2-színezése automatikusan egyenletes 2-színezése a maradéknak. Így Q mindenesetre $\{0, \pm 1\}$-es mátrix.

Tegyük fel, hogy Q minimális méretű ellenpélda. Ekkor tehát Q nem TU, de minden valódi részmátrixa az. Ezért Q négyzetes mátrix, amelyre $K := \det Q \not\in \{0, \pm 1\}$. Így Q nem egyelemű és Q minden valódi aldeterminánsa $\{0, \pm 1\}$ értékű. Tekintsük a Q mátrix Q^{-1} inverzét. A Cramer szabály szerint

$$Q^{-1} \text{ minden nem-nulla eleme } \pm 1/K \text{ alakú.} \tag{1.7}$$

Legyen q_1^* a Q^{-1} első oszlopa és jelölje R azon j indexek halmazát, melyekre $q_1^*(j) \neq 0$. Jelölje ${}_iq$ a Q mátrix i-dik sorát és $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ az első egységvektort. Mivel minden $i \geq 2$ indexre ${}_iqq_1^* = 0$, ezért (1.7) miatt a ${}_iq$ sornak páros sok olyan q_{ij} nem-nulla eleme van, amelyre $j \in R$.

A feltevés szerint a Q mátrix R-hez tartozó oszlopai egyenletesen 2-színezhetők, vagyis létezik egy olyan z $\{0, \pm 1\}$-es vektor, amelyre Qz $\{0, \pm 1\}$ értékű és $z(j)$ pontosan akkor nem nulla, ha $j \in R$. Az előbbi paritási megfigyelés miatt minden $i \geq 2$-re ${}_iqz = 0$. De ekkor ${}_1qz \neq 0$, mert különben $Qz = 0$ volna, ellentmondásban $|\det Q| \geq 2$-vel. z esetleges negálásával feltehetjük, hogy ${}_1qz = 1$, vagyis $Qz = e_1$, és emiatt $z = q_1^*$, ellentmondásban az (1.7) tulajdonsággal. •

2012. december 9. file: tua05

1.7 PÁROS GRÁFOK ÉS LINEÁRIS PROGRAMOZÁS

Mi állhat annak hátterében, hogy páros gráfok párosításaival, irányított gráfokban pedig utakkal, folyamokkal, áramokkal kapcsolatban megannyi szép tételt lehet megfogalmazni és igazolni? Miként lehet ilyen tételeket megsejteni? Ebben és a következő részben megmutatjuk, hogy a szóbanforgó hálózati optimalizálási feladatok egy olyan lineáris programként írhatók fel, amelyben a feltételi mátrix teljesen unimoduláris. Kiderül, hogy a tételek mindegyike úgy tekinthető, mint egy lineáris programozási tétel (Farkas lemma, korlátossági tétel, optimalitási feltétel, dualitás tétel) TU-mátrixokra felírt alakjának speciális esete. Ennek a felismerésnek nem csak az a haszna, hogy már igazolt tételekre újabb bizonyítást nyerünk, hanem olyan hatékony eszköz birtokába jutunk általa, amely általánosabb ilyen irányú tételek megsejtésére és bizonyítására is alkalmas.

A csupa egyesből álló j-dimenziós vektort e_j jelöli, míg a $j \cdot j$-es identitás mátrixot I_j.

1.7.1 Páros gráfok: optimális részgráfok

Optimális párosítások

Először levezetjük Kőnig már megismert tételét:

TÉTEL 1.7.1 (Kőnig) *A $G = (S, T; E)$ páros gráfban a független élek maximális ν száma egyenlő az éleket lefogó pontok minimális τ számával.*

Biz. A gráf pontjainak számát jelölje p az élek számát q. A páros gráf incidencia mátrixát jelölje A, amelyben a soroknak a gráf pontjai, az oszlopoknak a gráf élei felelnek meg. Ekkor tehát A egy $p \times q$ méretű $0-1$-mátrix. Tekintsük a következő primál-duál lineáris program párt:

$$\max\{e_q x : Ax \leq e_p, x \geq 0\}, \tag{1.8}$$

$$\min\{e_p y : yA \geq e_q, y \geq 0\}. \tag{1.9}$$

Az 1.4.2 tétel szerint mindkét programnak az optimuma egész vektoron felvétetik. Jelöljük ezeket rendre x_0-lal és y_0-lal. (1.8) minden egészértékű megoldása $0-1$ értékű, és rögtön látszik, hogy (1.9) minden optimális egészértékű megoldása is $0-1$ értékű. Legyen M azon élek halmaza, melyeken x_0 az 1 értéket vesz fel, és legyen L azon pontok halmaza, amelyeken y_0 egyet vesz fel. Az $Ax \leq e_p$ feltétel azt jelenti, hogy M párosítás a gráfban, míg az $yA \geq e_q$ feltétel azt jelenti, hogy L az éleket lefogó pontrendszer. A primál és duál optimum értékek egyenlősége pedig azt jelenti, hogy $|M| = |L|$, ami a célunk volt. •

E bizonyítás kapcsán azt mondhatjuk, hogy a Kőnig tétel nem más, mint a dualitás tétel TU-mátrixokra vonatkozó egészértékű alakja abban a speciális esetben, amikor a feltételi mátrix a páros gráf incidencia mátrixa, míg a korlátozó vektor és a célfüggvény a (megfelelő dimenziós) azonosan 1 vektor. Természetesen a primál programban az azonosan 1 célfüggvény helyett választhatunk tetszőleges c célfüggvényt. Ekkor a fenti megközelítés Egerváry tételének következő változatát adja.

TÉTEL 1.7.2 *Páros gráfban egy párosítás maximális súlya egyenlő* $\min\{\sum_{v \in V} \pi(v) : \pi \geq 0, \pi(u) + \pi(v) \geq c(uv)$ *minden uv élre*$\}$. *Ha c egészértékű, az optimális π is választható egészértékűnek.* •

Melléktermékként kapjuk:

TÉTEL 1.7.3 *A G páros gráf A incidencia mátrixával felírt*

$$\{x : Ax \leq e_p, x \geq 0\} \tag{1.10}$$

poliéder egész, amelynek csúcsai pontosan a gráf párosításainak incidencia vektorai. •

Egy gráf **párosítás politop**ja a párosítások incidencia vektorainak konvex burka. A lineáris programozásban tanultak szerint tetszőleges politop (korlátos) poliéder, azaz felírható egy lineáris egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmazaként. Az 1.7.3 tétel az (1.10) rendszerrel tehát konkrétan megadja a párosítás politop poliéderként történő előállítását. (Ezek miatt nem okozhat félreértést, hogy a párosítás politopot gyakran párosítás poliédernek hívják.) Megjegyzendő, hogy tetszőleges gráfra is a párosítás politop mindig része a (1.10) poliédernek, de ilyenkor lehet valódi része.

Nevezzünk egy mátrixot **bisztochasztikus**nak, ha négyzetes, nemnegatív és minden sorösszege valamint minden oszlopösszege egy. Legegyszerűbb bisztochasztikus mátrixok a permutáció mátrixok, melyeknek minden eleme 0 vagy 1 és minden oszlopában és minden sorában pontosan egy darab egyes van. Permutáció mátrixok konvex kombinációja is bisztochasztikus. A következő tétel fő mondanivalója az, hogy valójában minden bisztochasztikus mátrix előáll ilyen alakban.

TÉTEL 1.7.4 (Birkhoff és Neumann) *Egy mátrix akkor és csak akkor bisztochasztikus, ha permutáció mátrixok konvex kombinációja.*

Biz. Egy B $n \times n$-es mátrix megfelel egy G $n \times n$-es teljes páros gráf élhalmazán értelmezett x_B vektornak. Figyeljük meg, hogy a permutáció mátrixok éppen a teljes párosításoknak felelnek meg. Ha B bisztochasztikus, akkor $Ax_B = e_{n^2}, x_B \geq 0$, azaz x_B benne van a G párosítás poliéderében, vagyis előáll párosítások (incidencia vektorainak) konvex kombinációjaként. tehát B előáll permutáció márixok konvex kombinációjaként. •

Természetesen megkaphatjuk Egerváry tételét, sőt most már belefoglaljuk azt az esetet is, amikor a súlyfüggvény nem egész.

TÉTEL 1.7.5 (Egerváry) *A $G = (S, T; E)$ teljes párosítással rendelkező páros gráfban a $c \geq 0$ súlyfüggvényre vonatkozó maximális súlyú teljes párosítás ν_c súlya egyenlő a súlyozott lefogások minimális τ_c összértékével. Amennyiben G teljes páros gráf, úgy az optimális súlyozott lefogás választható nemnegatívnak is. Amennyiben c egészértékű az optimális súlyozott lefogás is választható annak.*

Biz. A fenti megközelítéshez képest csak annyit kell változtatni, hogy az $Ax \leq e_p$ egyenlőtlenség rendszer helyett az $Ax = e_p$ egyenletrendszert kell vennünk. Ekkor persze a duálisban a változókra nincs nemnegatívitás előírva. A teljes páros gráf esetén azért igaz mégis, hogy az optimális duális megoldás választható nemnegatívnak, mert ilyenkor az $\{\max cx : Ax \leq e_p, x \geq 0\}$ lineáris program optimális megoldása c nem negativitása valamint a páros gráf teljessége miatt mindig teljes párosításon is felvétetik, márpedig ezen lineáris program duálisában a változók nemnegatívak. •

Mi történik, ha adott k-ra a pontosan k élű párosítások maximális súlyára szeretnénk tételt kapni? Miután egy páros gráf incidenciamátrixát egy csupa egyes sorral kiegészítve továbbra is TU-mátrixot kapunk (figyelem: csupa egyes oszloppal való kiegészítéssel nem), így a következő primál-duál lineáris program pár megadja a választ: $\max\{cx : Ax \leq e_p, e_q x = k\}$ és $\min\{\pi e_p + k\alpha : \pi A + \alpha e_q \geq c, \pi \geq 0\}$. A primál optimum tehát egészértékű, és így szükségképpen egy k elemű párosítás incidencia vektora. A duál optimum is egészértékű, feltéve, hogy c az.

Páros gráf fokszámkorlátozott részgráfjai: a szállítási probléma

További általánosításokat kaphatunk, ha a primál feladatban a jobboldalt valamilyen (nem-negatív) b vektornak választjuk. Ennek az a kombinatorikus jelentése, hogy a páros gráfban maximális súlyú fokszámkorlátozott részgráfot keresünk. Természetesen alsó korlátokat is kitűzhetünk a fokszámokra, mint ahogy korlátozhatjuk alulról és felülről azt is, hogy egy élt hány példányban vehetünk be a keresett részgráfba (megint csak amiatt, hogy az incidencia mátrixot egy csupa egyes sorral kiegészítva TU-mátrixot kapunk). Valójában nem is érdemes explicit megfogalmazni a különböző lehetőségekre vonatkozó min-max tételeket, mert a dualitás tétel és a páros gráf incidencia mátrixának teljes unimodularitása már magában hordozza a szükséges információt. Emlékeztetünk, hogy korábban ezen feladatok körét neveztük szállítási problémának.

Feladat 1.9 *Mikor létezik egy páros gráfnak egy N és egy K részgráfja úgy, hogy minden csúcsban az N fokszáma pontosan eggyel nagyobb, mint K fokszáma?*

1.7.2 Páros gráfok: élszínezések

Közismert Kőnig élszínezési tétele, amely szerint minden Δ-reguláris páros gráf élhalmaza felbomlik Δ élidegen teljes párosításra. (Ez közvetlenül levezethető indukcióval, vagy esetleg a Hall tételre támaszkodva). Ugyanakkor a TU-mátrixokra vonatkozó 1.5.5 egyenletes színezési tételből sokkal általánosabb eredmény nyerhető. Az élszínezési tételt néha kicsit általánosabban fogalmazzák meg: *Ha egy páros gráfban a maximális fokszám Δ, akkor az éleket meg lehet Δ színnel színezni úgy, hogy minden csúcsba különböző színű élek futnak.*

TÉTEL 1.7.6 *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráf éleit meg lehet k színnel úgy színezni, hogy minden v csúcsra és mindegyik j színre ($j = 1, \ldots, k$) a v-be menő $d(v)$ darab él közül $\lfloor d(v)/k \rfloor$ vagy $\lceil d(v)/k \rceil$ darab színe j. Ráadásul még azt is megkövetelhetjük, hogy minden színosztály mérete közel ugyanakkora legyen, vagyis $\lfloor |E|/k \rfloor$ vagy $\lceil |E|/k \rceil$.*

Ha k-t a maximális Δ fokszámnak választjuk, akkor megkapjuk Kőnig élszínezési tételét, amely szerint páros gráf kromatikus indexe (élszínezési száma) a maximális fokszámmal egyenlő. Ha k-t a minimális δ fokszámnak választjuk, akkor Gupta egy tételét kapjuk, amely szerint G páros gráf élhalmaza felbontható δ részre úgy, hogy mindegyik rész fedi az összes pontot. •

A lineáris programozási megközelítés eredményességét egy kevésbé közismert tételen is bemutatjuk.

TÉTEL 1.7.7 (Folkman és Fulkerson) *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik ℓ darab élidegen k élű párosítás, ha*

$$i_G(Z) \geq \ell(k + |Z| - |U|) \tag{1.11}$$

fennáll $U := S \cup T$ minden Z részhalmazára, ahol $i_G(Z)$ jelöli a Z által feszített élek számát.

Biz. Mivel egy M párosítás legfeljebb $|U| - |Z|$ olyan élt tartalmaz, amelynek legalább egyik végpontja nincs Z-ben, így legalább $|M| - (|U| - |Z|)$ darab $|Z|$ által feszített élt tartalmaz. Így, ha létezik ℓ darab k élű párosítás, akkor Z legalább $\ell(k + |Z| - |U|)$ élt feszít, vagyis (1.11) szükséges.

Az elegendőséghez jelölje A a páros gráf pont-él incidencia márixát, p a csúcsok számát, q az élek számát. Az xe_q és ye_q skalárszorzatot szemléletesebben $\widetilde{x}(E)$-vel illetve $\widetilde{y}(E)$-vel jelöljük, míg a πe_p-t $\widetilde{\pi}(U)$-val. Tekintsük a

$$\max \{\widetilde{x}(E) : \ x \geq 0, \ Ax \leq \underline{\ell}, \ I_q x \leq \underline{1}\} \tag{1.12}$$

primál és a

$$\min \{\ell\widetilde{\pi}(U) + \widetilde{y}(E) : \ (\pi, y) \geq 0, \ \pi A + y \geq \underline{1}\} \tag{1.13}$$

duális lineáris programot, ahol $\pi : U \to \mathbf{R}_+$ az A sorainak megfelelő duális változók vektora, míg $y : E \to \mathbf{R}_+$ az I_m sorainak megfelelőké. Az A mátrix TU-sága miatt mind a primál, mind a duál optimum egész vektoron felvétetik, sőt $(0, 1)$ vektoron is, hiszen a primál feltételek között explicit szerepel a $0 \leq x \leq 1$ kikötés, míg a duálisban a jobboldalon azonosan 1 áll, így egy optimális (π, y) vektor minden komponense legfeljebb 1.

Amennyiben a (dualitás tétel miatt létező) közös optimum-érték legalább $k\ell$, úgy a $(0, 1)$-értékű optimális primál vektor 1 értékű komponensei egy olyan legalább $k\ell$ élű $G' = (U, E')$ részgráfot határoznak meg, amelyben minden pont foka legfeljebb ℓ. Élek esetleges törlésével elérhetjük, hogy G' pontosan $k\ell$ darab élből álljon. Az 1.7.6 tétel miatt E' felbomlik ℓ darab párosításra, amelyben mindegyik párosítás közel egyforma méretű, és így szükségképpen pontosan k elemű.

Tételezzük most fel, hogy a közös optimum értéke kisebb, mint $k\ell$. Ekkor létezik egy $(0, 1)$ értékű (π, y) duális optimális megoldás, amelyre $\ell\widetilde{\pi}(U) + \widetilde{y}(E) < k\ell$. Jelölje Z a gráf azon v pontjainak halmazát, melyekre $\pi(v) = 0$. A duális feltételek miatt minden Z által feszített e élre $y(e) = 1$, és ezért $i_G(Z) \leq \widetilde{y}(E)$. Miután $\widetilde{\pi}(U) = |U| - |Z|$, így $\ell(|U| - |Z|) + i_G(Z) \leq \ell - \widetilde{\pi}(U) + \widetilde{y}(E) < k\ell$, ellentmondásban a (1.11) feltétellel. •

Megjegyzés Szub- illetve szupermoduláris függvények gyakran szerepelnek különféle szükséges és elegendő feltételekben (például Hall tételében az X halmaz szomszédainak elemszámát jelölő $|\Gamma(X)|$ függvény szubmoduláris, és erről követeljük meg, hogy legalább $|X|$ legyen). Általában a szubmoduláris függvények felső korlátként szerepelnek, míg a szupermoduláris függvények alsóként. (Például gráfelméletben bizonyított eredmény, hogy *egy 2-élösszefüggő gráfnak akkor és csak akkor van olyan erősen összefüggő irányítása, amelyben minden v csúcs befoka legfeljebb egy előre megadott $g(v)$ érték, ha $g(X) \geq i(X) + c(X)$ a csúcsok minden nemüres X részhalmazára, ahol $c(X)$ az X elhagyásával keletkező komponensek száma.* Itt az $i(X) + c(X)$ függvény szupermoduláris.)

Ebben a tükörben furcsa, hogy a szupermoduláris i_G függvény az (1.11) feltételben felső korlátként szerepel. Valójában a szokásos $\cap$ és $\cup$ műveletek helyett bevezethetünk a páros gráf részhalmazain egy másik hálót a következő műveletekkel: legyen $X \wedge Y := (X \cap Y \cap S) \cup ((X \cup Y) \cap T)$ és $X \vee Y := ((X \cup Y) \cap S) \cup (X \cap Y \cap T)$. Kimutatható, hogy ezekre nézve az i_G függvény már szubmoduláris.

2012. december 9. file: tub05

1.8 HÁLÓZATI OPTIMALIZÁLÁS ÉS LINEÁRIS PROGRAMOZÁS

Ebben a részben áttekintjük a potenciálokra utakra, folyamokra és áramokra vonatkozó tételek lineáris programozási kapcsolatát.

1.8.1 Megengedett potenciálok, legolcsóbb utak

Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, melynek $(0, 1, -1)$-es incidencia mátrixát jelölje Q. Egy $\pi : V \to \mathbf{R}$ vektort akkor neveztünk a $c : A \to \mathbf{R}$ költségfüggvényre nézve megengedett potenciálnak, ha $\pi(v) - \pi(u) \le c(uv)$ fennáll minden $uv \in A$ élre. Figyeljük meg, hogy egy π vektor pontosan akkor megengedett potenciál, ha $\pi Q \le c$. Egy $x : A \to \mathbf{R}$ vektor pedig pontosan akkor áram, ha $Qx = 0$. Megmutatjuk, hogy a megengedett potenciál létezésére vonatkozó tétel rögtön következik a Farkas lemma TU-mátrixokra vonatkozó élesebb alakjából.

TÉTEL 1.8.1 *Adott $c : A \to \mathbf{R}$ költség-függvényre akkor és csak akkor létezik olyan $\pi : V \to \mathbf{R}$ vektor, amelyre $\pi(v) - \pi(u) \le c(uv)$ minden $e = uv \in A$ élre, ha c konzervatív, azaz ha nem létezik negatív költségű irányított kör. Amennyiben c egészértékű, úgy a potenciál is választható annak.*

Biz. A Q mátrix transzponáltja teljesen unimoduláris, így a 1.4.1 tétel miatt vagy létezik a $\pi Q \le c$ rendszernek megoldása (amely egész, ha c az), vagy pedig a duális $\{Qx = 0, x \ge 0, cx < 0\}$ rendszernek létezik egy $(0, \pm 1)$-es megoldása. Az első eset épp egy megengedett potenciál létezését jelenti, míg a második esetben, $x \ge 0$ miatt, x egy $(0, 1)$ értékű, negatív költségű áram, amely élidegen körökre bomlik, és így e körök egyike is negatív. •

A dualitás tétel TU-mátrixokra vonatkozó élesített alakjából könnyen levezethető a legolcsóbb utakra vonatkozó alábbi eredmény is.

TÉTEL 1.8.2 *Konzervatív c költségfüggvény esetén az s-ből t-be vezető utak költségének $l_c(t)$ minimuma egyenlő $\pi(t) - \pi(s)$ maximumával, ahol a maximum az összes megengedett π potenciálon veendő.*

Biz. Tegyük fel, hogy a Q mátrix első és második sora felel meg az s illetve a t pontnak. Tekintsük a $\max\{\pi(t) - \pi(s) : \pi Q \le c\}$ lineáris programot. Ennek duálisa $\min\{cx : Qx = (-1, +1, 0, 0, \dots, 0), x \ge 0\}$. A primál program optimális megoldása épp a tétlben szereplő maximum. Mivel Q TU-mátrix, így a 1.4.2 tétel miatt létezik egészértékű optimális π is, ha c egész. A duális programnak az 1.4.2 szerint a c egészértékűségétől függetlenül létezik egy x^* egészértékű optimuma. Figyeljük meg, hogy a $Qx = (-1, +1, 0, 0, \dots, 0), x \ge 0$ megoldásai éppen az egy nagyságú folyamok. Mivel x^* egészértékű, így előáll, mint egy út és irányított körök (incidencia vektorainak) nemnegatív kombinációjaként. De c konzervatívitása miatt a körök költsége nemnegatív, így ezeket kihagyva feltehetjük, hogy x^* egy st út incidencia vektora. •

1.8.2 Megengedett áramok és folyamok

Egyszerű észrevétel, hogy ha a megmaradási szabály helyett csupán a $\varrho_x(v) \le \delta_x(v)$ egyenlőtlenséget írjuk elő minden v csúcsnál, akkor x automatikusan áram, másszóval a $Qx \le 0$ egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmaza pontosan az áramok halmaza.

TÉTEL 1.8.3 *Ha $f \le g$ egészértékű, akkor a megengedett áramok $\{x : Qx \le 0, f \le x \le g\}$ poliédere, amennyiben nemüres, egész poliéder.*

Biz. Mivel Q TU-mátrix, így ha kiegészítjük egy (negatív) egységmátrixszal, úgy továbbra is TU-mátrixot kapunk, és így a 1.4.2 tételt alkalmazhatjuk. •

Hasonló megfontolással kapjuk:

TÉTEL 1.8.4 *A $D = (V, A)$ digráf élhalmazán adott a $g \ge 0$ egész kapacitásfüggvény. Legyen s és t két kijelölt csúcs, melyekre $\varrho(s) = 0 = \delta(t)$. A k nagyságú megengedett folyamok $\{x \in \mathbf{R}^A : 0 \le x \le g, \varrho_x(v) = \delta_x(v)$ minden $v \in V - \{s, t\}$-re, $\delta_x(s) = k\}$ poliédere, amennyiben nemüres, egész poliéder.* •

Most megmutatjuk, hogy A. Hoffman megengedett áramok létezésére vonatkozó tétele nem más, mint a Farkas lemmának az 1.4.1 tételben TU-mátrixokra vonatkozó élesebb alakja egy digráf incidencia mátrixára felírva.

TÉTEL 1.8.5 (Hoffman, 1960) *A $D = (V, A)$ digráfban adott $f \le g$ kapacitásfüggvényekre vonatkozólag akkor és csak akkor létezik megengedett áram, ha*

$$\varrho_f(X) \le \delta_g(X) \text{ minden } X \subseteq V \text{ halmazra.} \tag{1.14}$$

Továbbá, ha f és g egészértékűek és (1.14) fennáll, úgy létezik egészértékű megengedett áram is.

Biz. Csak az elegendőség igazolásával foglalkozunk. Tekintsük a $Qx \leq 0, x \leq g, -x \leq -f$ rendszert. A 1.4.1 tételt alkalmazva kapjuk, hogy ha a fenti rendszernek nincs megoldása, akkor van olyan (y, u, v) $(0,1)$-értékű vektor, amelyre $(*)$ $yA + u - v = 0$ és $(**)$ $ug - vf < 0$. Mivel $f \leq g$, így minden élre feltehető, hogy $u(e)$ és $v(e)$ közül legalább az egyik nulla (ha ugyanis mindkettő 1, akkor mindkettőt helyettesíthetjük nullával.)

Jelölje Z azon z pontok halmazát, ahol az $y(z) = 1$. Ekkor $(*)$ miatt minden olyan e élre, amelynek mindkét vége vagy Z-ben vagy $V - Z$-ben van, $u(e) = v(e) = 0$. Továbbá minden Z-be belépő e élre $v(e) = 1$, $u(e) = 0$ és minden Z-ből kilépő élre $v(e) = 0, u(e) = 1$. Miután $ug = \delta_g(Z)$ és $vf = \varrho_f(Z)$, így $(**)$ ellentmond a (1.14) feltételnek. •

1.8.3 Minimális költségű áramok és folyamok

Tekintsük most a költséges áram problémát, azaz adott $c : A \to \mathbf{R}$ költségfüggvény esetén keressünk minimális költségű megengedett áramot, más szóval, oldjuk meg a

$$\min\{cx : Qx = 0, f \leq x \leq g\} \tag{1.15}$$

lineáris programot. (Természetesen az $x \leq g$ egyenlőtlenség itt azt jelenti, hogy $x(e) \leq g(e)$ az olyan élekre, ahol $g(e)$ véges. Duális változó tehát csak ilyen egyenlőtlenségekhez tartozik.)

Korlátosság és optimalitás

Először vizsgáljuk meg, hogy cx mikor korlátos alulról. Készítsünk el egy $D' = (V, A')$ digráfot, és élein definiáljuk a c' költségfüggvényt a következőképpen. D'-ben uv akkor él, ha vagy $vu \in A, f(vu) = -\infty$, és ekkor $c'(uv) = -c(vu)$, vagy pedig $uv \in A, g(uv) = \infty$, és ekkor $c'(uv) = c(uv)$. Bár az 1.4.3 tételt specializálva közvetlenül is kiolvasható az alábbi eredmény, újra megadjuk az ottani bizonyítást a mostani helyzetre specializálva.

TÉTEL 1.8.6 *Feltéve, hogy létezik megengedett áram, a következők ekvivalensek.*
(a) *A megengedett c áramok cx költsége alulról korlátos.*
(b) *Nincs negatív összköltségű irányított kör D'-ben.*
(c) *Létezik egy olyan $\pi : V \to \mathbf{R}$ függvény, hogy minden $uv \in A$ esetén*

$$\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv), \text{ ha } g(uv) = \infty, \text{ azaz } c_\pi(uv) < 0 \Rightarrow g(uv) < \infty \tag{1.16}$$

$$\pi(v) - \pi(u) \geq c(uv), \text{ ha } f(uv) = -\infty, \text{ azaz } c_\pi(uv) > 0 \Rightarrow f(uv) > -\infty. \tag{1.17}$$

Amennyiben c egészértékű, úgy a szóbanforgó π is választható annak.

Biz. (a)→(b) Ha létezik negatív kör D'-ben, akkor ennek egy olyan kör felel meg D-ben, melynek az előremenő élein a g végtelen, a hátramenő élein az f minusz végtelen, és az éleinek összköltsége negatív. Márpedig ha a meglévő megengedett áramot az előremenő éleken bármilyen nagy K-val egységesen megnöveljük a hátramenőkön pedig K-val csökkentjük, akkor megengedett áramot kapunk, amelynek költsége így akármilyen kicsi lehet.

(b)→(c) Ha D'-ben nincs negatív kör, akkor az 1.8.1 tétel miatt létezik egy $\pi : V \to \mathbf{R}$ függvény, amelyre $uv \in A, g(uv) = \infty$ esetén (amikor is $uv \in A'$) $\pi(v) - \pi(u) \leq c'(uv) = c(uv)$ azaz (1.16) fennáll, míg $uv \in A, f(uv) = -\infty$ esetén (amikor is $vu \in A'$) $\pi(u) - \pi(v) \leq c'(vu) = -c(uv)$ vagyis $\pi(v) - \pi(u) \geq c(uv)$, azaz (1.17) fennáll.

(c)→(b) Tetszőleges x áram költsége bármely $\Delta_\pi(uv) := \pi(v) - \pi(u)$ pontindukált költségfüggvény esetén nulla. A $c_\pi(uv) := c(uv) - \pi(v) + \pi(u)$ eltolt költségfüggvényre (1.16) azzal ekvivalens, hogy $c_\pi(uv) > 0$ esetén $g(uv) < \infty$, míg (1.17) azzal, hogy $c_\pi(uv) < 0$ esetén $f(uv) > -\infty$. Ezek alapján egy x megengedett áramra és (c)-t kielégítő π-re

$$cx = c_\pi x = \sum_{uv \in A} c_\pi(uv)x(uv) = \sum_{uv \in A} [c_\pi(uv)x(uv) : c_\pi(uv) > 0] + \sum_{uv \in A} [c_\pi(uv)x(uv) : c_\pi(uv) < 0] \geq$$

$$\sum_{uv \in A} [c_\pi(uv)f(uv) : c_\pi(uv) > 0] + \sum_{uv \in A} [c_\pi(uv)g(uv) : c_\pi(uv) < 0],$$

ami a cx-re véges alsó korlát. (Most tehát részletesen kiírogatva azt a már korábban látott egyszerű tényt igazoltuk újfent, hogy ha mind a primál, mind a dual poliéder nemüres, akkor cx alulról korlátos a primál poliéderen.) •

Tegyük most fel, hogy z megengedett áram. Készítsünk el egy $D_z = (V, A_z)$ digráfot és az élhalmazán egy c_z költségfüggvényt a következőképpen. Az uv él akkor tartozzék A_z-hez, ha vagy $uv \in A, z(uv) < g(uv)$, és ekkor legyen $c_z(uv) := c(uv)$, vagy pedig $vu \in A, z(vu) > f(vu)$, és ekkor legyen $c_z(uv) := -c(vu)$. A 1.4.4 tételt specializálva megkapjuk a következőt, de a biztonság kedvéért maga a bizonyítás is újra szerepel: a helyzetre specializálva.

TÉTEL 1.8.7 *Adott z megengedett áram esetén a következők ekvivalensek.*

(a) *A z optimális megoldása a (1.15) minimális költségű megengedett áram feladatnak.*

(b) *A D_z-ben nem létezik negatív összköltségű irányított kör.*

(c) *Létezik egy olyan $\pi : V \to \mathbf{R}$ függvény, hogy minden $uv \in A$ él esetén*

$$\pi(v) - \pi(u) \le c(uv), \text{ ha } z(uv) < g(uv), \quad \text{azaz} \quad c_\pi(uv) < 0 \Rightarrow z(uv) = g(uv) \tag{1.18}$$

$$\pi(v) - \pi(u) \ge c(uv), \text{ ha } z(uv) > f(uv), \quad \text{azaz} \quad c_\pi(uv) > 0 \Rightarrow z(uv) = f(uv). \tag{1.19}$$

Amennyiben c egészértékű, úgy a szóbanforgó π is választható annak. •

Biz. (a)→(b) Tegyük fel létezik negatív kör D_z-ben. Az ebben lévő uv éleknek megfelelő D-beli élek kétfélék lehetnek. Vagy egy olyan $uv \in A$ él, amelyre $z(uv) < g(uv)$, vagy egy olyan $vu \in A$ él, amelyre $z(vu) < f(vu)$. Az első típusú éleken z-t kicsiny pozitív Δ-val növelve, a második típusúakon Δ-val csökkentve megengedett áramot kapunk, amelynek költsége kisebb, mint z költsége, hiszen C negatív kör D'-ben.

(b)→(c) Ha D_z-ben nincs negatív kör, akkor az 1.8.1 tétel miatt létezik egy $\pi : V \to \mathbf{R}$ függvény, amelyre $uv \in A, z(uv) < g(uv)$ esetén (amikor is $uv \in A_z$) $\pi(v) - \pi(u) \le c_z(uv) = c(uv)$, azaz (1.18) fennáll, míg $uv \in A, z(uv) > f(uv)$ esetén (amikor is $vu \in A'$) $\pi(u) - \pi(v) \le c_z(vu) = -c(uv)$ vagyis $\pi(v) - \pi(u) \ge c(uv)$, azaz (1.19) fennáll.

(c)→(b) Tetszőleges x áram költsége bármely $\Delta_\pi(uv) := \pi(v) - \pi(u)$ pontindukált költségfüggvény esetén nulla. A $c_\pi(uv) := c(uv) - \pi(v) + \pi(u)$ eltolt költségfüggvényre (1.18) azzal ekvivalens, hogy $c_\pi(uv) > 0$ esetén $x(uv) = g(uv)$, míg (1.19) azzal, hogy $c_\pi(uv) < 0$ esetén $x(uv) = f(uv)$. Ezek alapján egy x megengedett áramra és (c)-t kielégítő π-re

$$cx = c_\pi x = \sum_{uv\in A} c_\pi(uv)x(uv) = \sum_{uv\in A} [c_\pi(uv)x(uv) : c_\pi(uv) > 0] + \sum_{uv\in A} [c_\pi(uv)x(uv) : c_\pi(uv) < 0] \ge$$

$$\sum_{uv\in A} [c_\pi(uv)f(uv) : c_\pi(uv) > 0] + \sum_{uv\in A} [c_\pi(uv)g(uv) : c_\pi(uv) < 0] =$$

$$\sum_{uv\in A} [c_\pi(uv)z(uv) : c_\pi(uv) > 0] + \sum_{uv\in A} [c_\pi(uv)z(uv) : c_\pi(uv) < 0] = cz,$$

azaz z minimális költségű megengedett áram. •

Feladat 1.10 *A* 1.8.6 *tétel fenti direkt bizonyításának mintájára adjuk meg a* 1.8.7 *tétel közvetlen bizonyítását is.*

Feladat 1.11 *Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be a* 1.8.6 *és a* 1.8.7 *tételek megengedett potenciálokra vonatkozó ellenpárját.*

Az áramokra megfogalmazott optimalitási feltételt könnyen átvihetjük folyamokra.

TÉTEL 1.8.8 *A $D = (V, A)$ irányított gráf élhalmazán adott a $g : A \to \mathbf{R}_+$ kapacitásfüggvény és a $c : A \to \mathbf{R}$ költségfüggvény. Egy k nagyságú megengedett z folyam akkor és csak akkor minimális költségű a k nagyságú megengedett folyamok között, ha létezik olyan π potenciál, amelyre fennállnak a következő optimalitási feltételek:*

$$\pi(v) - \pi(u) < c(uv) \Rightarrow z(uv) = 0, \tag{i}$$

$$\pi(v) - \pi(u) > c(uv) \Rightarrow z(uv) = g(uv). \tag{ii}$$

Biz. Adjunk a digráfhoz egy ts élt és definiáljuk a költségét 0-nak. Legyen $g(ts) := f(ts) := k$. Minden régi élen legyen $f(e) := 0$. Az így kibővített $D' = (V, A')$ digráfban a megengedett áramok éppen a D-beli k nagyságú folyamoknak felelnek meg, így a 1.8.7 tételt D'-re alkalmazva az (i) és (ii) feltételeket kapjuk. •

A minimális költségű folyamokra vonatkozó algoritmus segítségével már igazoltuk az alábbi tételt, legalábbis abban az esetben, amikor g egészértékű és c nemnegatív. Megmutatjuk, hogy a háttérben most is az 1.4.2 tételben megfogalmazott TU-mátrixokra vonatkozó élesített dualitás tétel áll.

TÉTEL 1.8.9 *A $D = (V, A)$ irányított gráf élhalmazán adott a $g : A \to \mathbf{R}_+$ kapacitásfüggvény és a $c : A \to \mathbf{R}$ költségfüggvény. A k nagyságú megengedett folyamok költségének minimuma egyenlő a*

$$k\pi(t) + \sum [c_\pi(uv)g(uv) : uv \in A, c_\pi(uv) < 0] \tag{1.20}$$

érték maximumával, ahol a maximum az összes $\pi : V \to \mathbf{R}$ függvényre megy, amelyre $\pi(s) = 0$. Amennyiben g egészértékű, az optimális folyam választható egésznek. Amennyiben c egészértékű, az optimális π választható egészértékűnek.

Biz. Tegyük fel, hogy a digráf Q incidencia-mátrixának első és második sora felel meg az s illetve a t pontnak. Tekintsük a $\min\{cx : x \geq 0, Qx = (-k, +k, 0, 0, \ldots, 0), x \leq g\}$ primál programot. Az $x \leq g$ feltételt az ekvivalens $(-I_m)x \geq -g$ alakba téve felírhatjuk a duális problémát: $\max\{k(\pi(t) - \pi(s)) - gz : \pi Q - zI_m \leq c, z \geq 0\}$, ahol $m = |A|$. A primál poliéder elemei a k nagyságú folyamok. A 1.4.2 tétel szerint egész g esetén a primál poliéder egész, függetlenül c egészértékűségétől. Hasonlóképp a duális poliéder is egész, amennyiben c egész. Figyeljük meg, hogy tetszőleges π meghatároz egy hozzá tartozó legjobb z-t: $z(uv) := \pi(v) - \pi(u) - c(uv)$, ha $\pi(v) - \pi(u) > c(uv)$, és $z(uv) = 0$, ha $c(uv) \leq \pi(v) - \pi(u)$. Így tehát adott π-hez tartozó $k(\pi(t) - \pi(s)) - gz$ célfüggvény értéke nem más, mint az (1.20) képletben megadott érték, hiszen a π eltolásával feltehetjük, hogy $\pi(s) = 0$. •

1.8.4 Hálózati mátrixokkal adott lineáris programok

Fontos megjegyezni, hogy a hálózati mátrixokkal megadott lineáris programok megoldhatók áram problémaként. Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, F feszítő fa és legyen $N := A - F$ a nem-fa élek halmaza. Legyen adott $f = (f_F, f_N)$ és $g = (g_F, g_N)$ korlát, melyekre $f \leq g$. Legyen továbbá $c = (c_F, c_N)$ egy olyan vektor, amelyre $c_F = 0$. Jelölje az F-hez tartozó $(0, \pm 1)$-es hálózati mátrixot B, míg a D digráf $(0, \pm 1)$-es pont-él incidencia mátrixát Q_D. Legyen továbbá $x = (x_F, x_N)$. Tekintsük a $\max\{c_N x_N : f_F \leq Bx_N \leq g_F, f_N \leq x_N \leq g_N\}$ lineáris programot. Belátjuk, hogy ez ekvivalens a $\max\{cx : Q_D x = 0, f \leq x \leq g\}$ maximális költségű áram feladattal.

Amennyiben $x = (x_F, x_N)$ áram (azaz $Q_D x = 0$), úgy könnyen látszik, hogy $x_F = Bx_N$, és persze $cx = c_N x_N$. Emiatt $f \leq x \leq g$ ekvivalens a $f_F \leq Bx_N \leq g_F, f_N \leq x_N \leq g_N$ feltételekkel. Fordítva, tegyük fel, hogy x_N kielégíti ezen utóbbi egyenlőtlenségeket. Minden $e \in N$ nem-fa élhez legyen $\underline{\chi}_e$ az $(1, a_e)$ vektor, ahol a_e az A mátrix e-hez tartozó oszlopa. (Másszóval, $\underline{\chi}_e$ az e élhez tartozó C_e alapkör $0, \pm 1$-es incidencia vektora.) Ekkor persze $\underline{\chi}_e$ áram, és így az $x := \sum[x_N(e)\underline{\chi}_e : e \in N]$ is áram, méghozzá olyan, hogy $x(e) = x_N(e)$, ha $e \in N$. Látható, hogy $f_F \leq Bx_N \leq g_F$ azzal ekvivalens, hogy $f_F(e) \leq x(e) \leq g_F(e)$ minden $e \in F$ élre fennáll. •

Következik például, hogy páros gráfok éleinek vagy az irányított fák irányított részútjainak egyenletes színezéseire vonatkozó tételeket egy maximális folyamot kiszámító algoritmussal tudjuk algoritmikusan kezelni. Hasonlóképp a kerekítési eredményeket. A minimális költségű megengedett potenciál meghatározásának problémáját pedig úgy lehet algoritmikusan megoldani, hogy felírjuk a hozzátartozó duális feladatot. Ez minimális költségű megengedett áram problémának tekinthető, majd ennek megoldásaként előállítjuk az optimális áramot és ennek optimális duális megoldást, ami éppen az eredeti potenciál probléma megoldása.

2012. december 9. file: tuc05

1.9 FEDÉS SÉTÁKKAL ÉS UTAKKAL

Az alábbiakban a minimális költségű áramok elméletének két érdekes alkalmazását tekintjük át.

Az irányított kínai postás probléma

Egy $D = (V, A)$ erősen összefüggő digráfot kell egy megadott pontjából kiindulva úgy bejárnunk, hogy minden élén legalább egyszer végigmenjünk és a kiindulási pontba jussunk vissza. Cél a végigjárt élek számának minimalizálása, vagy általánosabban, ha az éleken adott egy végighaladási idő, akkor a teljes bejárás összidejének minimalizálása.

Például egy postásnak a postáról elindulva egy körzet minden utcáján, amelyek mindegyikéről feltesszük, hogy egyirányú, legalább egyszer végig kell haladnia majd a postára visszatérnie. (A kérdést eredetileg irányítatlan gráfra fogalmazta meg Mey-Go Guan kínai matematikus 1960-ban. Ennek megoldása, és a kínai postás elnevezés J. Edmondstól származik, és sokkal mélyebb eszközöket igényel, mint az irányított változat).

Egy másik alkalmazásban áramkör működésének helyességét kell tesztelnünk. Ehhez meg van adva, hogy az áramkör milyen állapotokban lehet. Ezek az állapotok felelnek meg a digráf csúcsainak. Ezen kívül adott még, hogy mely állapotokból mely másokba lehet átmenni, és valójában egy-egy ilyen átmenetnek a helyességét tudjuk mérni. A feladat az összes lehetséges állapot-átmenet ellenőrzése minimális idő alatt. Világos, hogy a digráf bejárási probléma miért modellezi ezen tesztelési feladatot.

Annak érdekében, hogy az irányított postás problémát megengedett áram feladatként megfogalmazzuk, képzeljünk el a digráf éleinek egy adott bejárását. Jelölje $z(uv)$ azt a számot, ahányszor az uv élen áthaladtunk. Rögtön látszik, hogy z egy olyan egészértékű áram, amelynek értéke minden élen legalább 1. Megfordítva, egy olyan z egészértékű áramhoz, amely minden élen legalább 1 tartozik egy bejárás, amely minden e élen pontosan $z(e)$-szer halad végig. Ugyanis ha mindegyik e élt $z(e)$ darab párhuzamos példányával helyettesítjük, akkor Euler-féle digráfot kapunk és az Euler digráfok közismerten bejárhatók úgy, hogy minden élen pontosan egyszer haladunk végig. Ezen megfigyelés alapján az optimális bejárási probléma egy minimális költségű megengedett egészértékű áramnak a meghatározásával egyenértékű a D digráfban az $f \equiv 1$ és $g \equiv +\infty$ korlátozó függvényekre vonatkozóan.

TÉTEL 1.9.1 *Egy $D = (V, A)$ erősen összefüggő digráfban azon új, meglévővel párhuzamosan behúzott élek minimális száma, melyek hozzáadásával Euler-féle digráfot kapunk egyenlő a következő maximummal:*

$$\max\{\sum[\delta(V_i) - \varrho(V_i) : i = 1, \dots, q]\}, \tag{1.21}$$

ahol a maximum a V részhalmazaiból álló olyan $V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_q$ megengedettnek nevezett halmazláncokra megy, melyek tagjaira $\delta(V_i) - \varrho(V_i) \geq 0$, és amelyekre igaz, hogy D semelyik éle sem lép egynél több V_i halmazba.

Biz. Miután egy Euler digráfban minden halmaz befoka megegyezik a kifokával, így mindegyik V_i halmazba legalább $\delta(V_i) - \varrho(V_i)$ új él fog lépni. Tekintve azonban, hogy az új élek mindegyike meglévővel párhuzamos, és a feltevés szerint semmilyen él nem lép egynél több V_i halmazba, így a hozzáadandó új élek minimális száma legalább $\sum[\delta(V_i) - \varrho(V_i) : i = 1, \dots, q]$, tehát max $\leq$ min.

Ez a becslés azt is mutatja, hogy D éleinek egy adott párhuzamos többszörözése, amely D-t Eulerrá teszi valamint egy adott $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_q$ megengedett halmazlánc esetén pontosan akkor áll egyenlőség, ha kizárólag V_i-be menő él került többszörözésre. A fordított irány igazolásához tehát ilyen Eulerrá tévő párhuzamos éltöbbszörözés és megengedett halmazlánc létezését kell kimutatnunk. E célból tekintsünk egy z minimális költségű egészértékű megengedett áramot az $f \equiv 1, g \equiv +\infty$ korlátozó függvényekre és a $c \equiv 1$ költségfüggvényre vonatkozólag. A z meghatározza a párhuzamosan megtöbbszörözendő éleket: minden olyan $e = uv$ élre, amelyre $z(uv) \geq 2$, vegyük az e-nek $z(uv)-1$ párhuzamos példányát. A 1.8.7 tétel miatt létezik egy $\pi : V \to \mathbf{Z}$ függvény, amelyre $\pi(v)-\pi(u) \leq c(uv) = 1$, ha $uv \in A$ és $z(uv) < g(uv)$, és $\pi(v)-\pi(u) \geq c(uv) = 1$, ha $uv \in A$ és $z(uv) > f(uv)$. Tekintettel arra, hogy $g(uv) \equiv +\infty$, így $z(uv) < g(uv)$ mindig fennáll, azaz minden $uv \in A$ élre $\pi(v) - \pi(u) \leq 1$. A második feltételből pedig az adódik, hogy többszörözött uv élen (azaz ha $z(uv) \geq 2$) $\pi(v) - \pi(u) \geq 1$ és így $\pi(v) - \pi(u) = 1$.

A π esetleges eltolásával feltehetjük, hogy a π legkisebb értéke nulla. A legnagyobb π értéket jelölje q. Legyen $i = 1, \dots, q$-ra $V_i := \{v \in V : \pi(v) \geq i\}$. Állítjuk, hogy a z által definiált éltöbbszörözés és az így definiált halmazlánc teljesíti a fenti kívánalmakat.

Valóban, $\pi(v) - \pi(u) \leq 1$ miatt D minden uv éle legfeljebb egy V_i halmazba lép be. Mivel $z(uv) \geq 2$ esetén $\pi(v) - \pi(u) = 1$, így tényleg csak valamilyen V_i-be lépő él került többszörözésre. Végül, mindegyik V_i-re valóban $\delta(V_i) \geq \varrho(V_i)$, mert ha valamely i-re $\delta(V_i) < \varrho(V_i)$ állna, akkor a V_i komplementerébe kell, hogy belépjen (legalább $\varrho(V_i) - \delta(V_i)$) többszörözött él, márpedig ilyen élen $\pi(v) - \pi(v) \leq -1$, ellentétben azzal, hogy többszörözött élen $\pi(v) - \pi(v) = 1$. •

Feladat 1.12 *Dolgozzunk ki modellt az áramkör tesztelési feladat azon változatára, amelyben egy megadott állapotból egy másikba való átmenetnek nem ugyanaz az ideje, ha az állapotváltást mérjük, mintha egyszerűen csak áttérünk az egyik állapotból a másikba.*

Feladat 1.13 *Hogyan lehet a digráf fedési feladatot megoldani, ha nem kötjük ki, hogy a bejárás végén a kiindulási pontba kell visszaérni? És ha a kiindulási pont is szabadon választható?*

1.9.1 Aciklikus digráfok optimális fedése utakkal

Az olimpia egy napján egy hírügynökség a rendelkezésre álló tudósítóit úgy akarja a különféle eseményekre beosztani, hogy együttesen minél több eseményről tudjanak tudósítani. Az egyes eseményeket egy-egy közös pont nélküli irányított éllel ábrázoljuk és ezen élek halmazát F-fel jelöljük. Ha az $x = uv$ esemény annyival megelőzi az $x' = u'v'$ eseményt, hogy x befejeződése után át lehet érni x' kezdetére, akkor bevezetünk egy vu' élt. A feladat úgy fogalmazható meg, hogy egy aciklikus digráfban, amelyben adott az élek egy F részhalmaza, adott számú úttal fedjünk le minél több F-beli élt.

TÉTEL 1.9.2 *Legyen $D = (V, A)$ aciklikus digráfban $F \subseteq A$ az éleknek egy kijelölt részhalmaza, és legyen γ pozitív egész. A γ darab (nem feltétlenül élidegen) irányított úttal lefedhető F-élek maximális száma egyenlő a következő minimummal:*

$$\min\{\gamma q + \text{ az egyik } V_h\text{-ba sem lépő } F\text{-élek száma}\}, \tag{1.22}$$

ahol a minimum a V részhalmazainak olyan q tagú $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_q$ halmazláncaira megy, amelynek tagjaiból nem vezet ki D-beli él.

Biz. Először igazoljuk a triviális max $\leq$ min irányt. Legyenek $P_1, P_2, \ldots, P_\gamma$ irányított utak D-ben és $V_1 \subset \ldots \subset V_q$ egy olyan halmazlánc, hogy

$$\text{semelyik } V_h \text{ halmazból sem lép ki } D\text{-beli él.} \tag{1.23}$$

Ekkor egy P_i út egy V_h halmazba legfeljebb egyszer léphet be. Emiatt γ út a legjobb esetben is a V_h halmazokba $(h = 1, \ldots, q)$ belépő F-élek közül legfeljebb γq darabot valamint az összes olyan F-élt tartalmazhatja, amely nem lép semelyik V_h-ba, és így valóban max $\leq$ min. Ebből azt is megfigyelhetjük, hogy adott P_i utakra és V_h halmazokra pontosan akkor áll egyenlőség, ha

(1) mindegyik P_i út q különböző F-él mentén belép mind a q darab V_h halmazba,
(2) bármelyik V_h-ba belépő F-élt legfeljebb egy P_i út használja,
(3) minden olyan F-él, amely semelyik V_h halmazba sem lép be, rajta van valamely P_i úton.

A tétel nem triviális irányának igazolásához kimutatjuk egy ilyen útrendszer és halmazlánc létezését. Adjunk D-hez egy s forrás pontot és egy t nyelő pontot, továbbá minden $v \in V$ csúcsra új sv és vt éleket. Ezen kívül minden $f = uv \in F$ élre adjunk a digráfhoz az f egy párhuzamos $f' = uv$ példányát. Az így nyert digráfot jelölje $D' = (V', A')$. Definiáljuk a g kapacitásfüggvényt F-éleken 1-nek, a többi élen kellően nagynak (valójában $\gamma + 1$ megteszi). Definiáljuk a c költségfüggvényt az F-éleken -1-nek, a többi élen 0-nak.

Tekintsünk egy z egészértékű minimális költségű γ nagyságú megengedett folyamot valamint egy optimális π potenciált, melyekre tehát teljesülnek a 1.8.7 tételben megfogalmazott optimalitási feltételek:

$$z(uv) > 0 \text{ esetén } \pi(v) - \pi(u) \geq c(uv) \tag{1.24}$$

$$z(uv) < g(uv) \text{ esetén } \pi(v) - \pi(u) \leq c(uv) \tag{1.25}$$

A π esetleges eltolásával feltehetjük, hogy $\pi(t) = 0$. (Figyelem: nem az s π-értékéről tesszük fel, hogy nulla.) A $\pi(s)$ értéket jelöljük q-val. Mivel D aciklikus, így z előáll, mint γ darab olyan D'-beli irányított st-út incidenciavektorának összege, melyek az F-en élidegenek. Jelölje $P'_1, \ldots, P'_\gamma$ ezen utakat és nevezzük az általuk használt éleket fedettnek, míg a nem használtakat fedetlennek.

Mivel minden $e = uv$ nem F-él kapacitása nagy, így ezen éleken mindig $z(e) < g(e)$, ezért a (1.25) optimalitási feltételből $\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv) = 0$, azaz $\pi(v) \leq \pi(u)$. Ráadásul minden F-él párhuzamos egy (újonnan hozzáadott) éllel, így

$$\text{minden } uv \in A' \text{ élre } \pi(v) \leq \pi(u). \tag{1.26}$$

Mivel minden $v \in V$-re sv és vt él D'-ben, így

$$\text{minden } v \in V \text{ csúcsra } 0 = \pi(t) \leq \pi(v) \leq \pi(s) = q. \tag{1.27}$$

Ha egy $uv \in F$ él fedetlen, azaz $z(uv) = 0$, akkor (1.25) miatt $\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv) = -1$, vagyis

$$\text{ha } uv \text{ fedetlen } F\text{-él, akkor } \pi(v) < \pi(u). \tag{1.28}$$

Tekintsük a fedett $e = uv$ éleket, amelyeken tehát $z(uv) > 0$. Ha e nem F-él, akkor $c(e) = 0$ és (1.24) miatt $\pi(v) \geq \pi(u)$, vagyis (1.26) folytán

$$\text{ha } uv \text{ fedett nem } F\text{-él, akkor } \pi(u) = \pi(v). \tag{1.29}$$

Ha pedig e fedett F-él, akkor $c(e) = -1$ és (1.24) miatt, $\pi(v) - \pi(u) \geq -1$, vagyis $\pi(v) \geq \pi(u)$ folytán

$$\text{ha } uv \text{ fedett } F\text{-él, akkor } \pi(u) \geq \pi(v) \geq \pi(u) - 1. \tag{1.30}$$

Így ha egy P'_i úton s-ből elindulva végigmegyünk t-ig, akkor a csúcsokon a π érték a kezdeti $q = \pi(s)$ értékről indulva nem F-élen változatlan, F-élen pedig vagy nem változik vagy pedig eggyel csökken. Ezért minden $h = 1, 2, \ldots, q$ egészre a

$$P'_i \text{ útnak van olyan } uv \in F \text{ éle, amelyre } \pi(u) = h, \pi(v) = h - 1. \tag{1.31}$$

Legyen $h = 1, 2, \ldots, q$-ra $V'_h := \{v \in V' : \pi(v) \leq h - 1\}$ és $V_h := V'_h - \{s, t\}$. (1.28) miatt minden fedetlen F-él belép valamelyik V'_h-ba. Továbbá (1.26) miatt V'_h-ból semmilyen él nem lép ki. Végül (1.31) miatt mindegyik P'_i út valamennyi V'_h halmazba pontosan egyszer lép be éspedig egy olyan F-él mentén, amely egyetlen V'_h halmazba lép be.

Jelölje P_i a P'_i-nek D-ben megfelelő utat, ami tehát úgy keletkezik P'_i-ből, hogy kihagyjuk az első valamint az utolsó élét és az összes többi $f' = uv$ új élét helyettesítjük az f'-t definiáló $f = uv$ F-éllel. Állítjuk, hogy a P_i utak és a V_h halmazok teljesítik az $(1), (2), (3)$ feltételeket. Valóban, (1) következik az (1.30) és (1.31) feltételekből.

A (2) tulajdonsághoz először is figyeljük meg, hogy g definíciója miatt D'-ben a P'_i utak minden F-élt legfeljebb egyszer használnak. Továbbá ha egy $e = uv$ F-éllel párhuzamos új e' élt használ valamelyik P'_i út, akkor (1.29) miatt e nem lép be semelyik V_h-ba, így (2) tényleg fennáll.

Végül (3) azért teljesül, mert ha egy $uv \in F$ él semelyik V_h halmazba nem lép be, akkor $\pi(u) = \pi(v)$, így (1.28) folytán rajta kell lennie valamelyik P_i úton. •

Részbenrendezett halmazok láncfedései

Dilworth tétele arra adott választ, hogy egy P részbenrendezett halmaz mikor fedhető le γ darab lánccal (pontosan akkor, ha nincs γ-nál több elemből álló antilánc). A poláris Dilworth tétel meghatározta az egyetlen lánccal fedhető elemek maximális számát, magyarán a leghosszabb lánc elemszámát. (Ez a P-t fedő antiláncok minimális számával volt egyenlő.) A két probléma közös általánosításaként megfogalmazható a kérdés, hogy egy részbenrendezett halmazban γ darab lánccal maximum hány elem fedhető le. A választ C. Greene tétele adja meg.

TÉTEL 1.9.3 (Greene, 1976) *Egy P részbenrendezett halmazban a γ lánccal fedhető elemek maximális c_γ számára $c_\gamma = \min\{q\gamma + |P - \cup\mathcal{A}_q| : \mathcal{A}_q\}$, ahol a minimum a q darab diszjunkt antiláncból álló $\mathcal{A}_q$ családokra megy $(q = 1, 2, \ldots)$.*

A bizonyítás triviális $\max \leq \min$ irányához figyeljük meg, hogy egy lánc minden antiláncból legfeljebb egy elemet tartalmazhat, így γ lánc egyesítése a legjobb esetben a q antilánc Z egyesítéséből γk elemet valamint az összes $P - Z$-beli elemet tartalmazza.

Feladat 1.14 *Vezessük le Greene tételének nemtriviális* $\max \geq \min$ *irányát a 1.9.2 tétel felhasználásával.*

2012. december 9. file: tud05

1.10 Alkalmazás: Gallai egy sejtése

Közismert Camion azon tétele, miszerint minden legalább 2 pontú erősen összefüggő turnamentnek van Hamilton köre, vagy másként fogalmazva, ha a digráf (irányítatlan értelemben vett) stabilitás száma 1, akkor a pontok lefedhetők egyetlen irányított körrel, röviden dikörrel.

Egy $D = (V, A)$ erősen összefüggő digráfra jelölje $\gamma(D)$ a digráf pontjait fedő dikörök minimális számát, míg $\alpha(D)$ az irányítatlan alapgráf stabilitás száma (azaz a független pontjainak maximális száma). A következő eredményt Gallai sejtette 1963-ban majd Bessy és Thomassé igazolta 2007-ben. Az alábbiakban bemutatandó bizonyítás két korábban meglévő tételén alapul.

TÉTEL 1.10.1 *Egy $D = (V, A)$ erősen összefüggő digráfra*

$$\gamma(D) \leq \alpha(D),$$

más szóval D pontjai mindig lefedhetők $\alpha(D)$ dikörrel.

Mielőtt rátérnénk a bizonyításra, felidézzük az igért két korábbi tételt. A digráf irányított köreinek egy $F \subseteq A$ lefogása **lapos**, ha minden él benne van pontosan egyszer lefogott dikörben.

TÉTEL 1.10.2 (Knuth lemma, 1974) *Erősen összefüggő $D = (V, A)$ digráfban létezik a diköröknek lapos lefogása.*

Biz. Ha D egyetlen pontból áll akkor a tétel semmitmondó. A fülfelbontási tétel alapján D megkapható egy erősen összefüggő $D' = (V', A')$ digráfból egy P fül hozzáadásával. Indukció alapján a D' diköreinek van egy B' lapos lefogása. Amennyiben P egy kör, úgy P egy tetszőleges élét B'-höz véve a D egy lapos lefogását kapjuk. Igy feltehetjük, hogy P egy s-ből t-be menő irányított út.

Állítás 1.10.1 *A D' diköreinek van olyan B^* lapos lefogása, amelyre s elérhető t-ből a $D' - B^*$ digráfban.*

Biz. Ha s benne van a t-ből $D' - B'$-ben elérhető pontok $Z \subseteq V'$ halmazában, akkor $B^* = B'$ jó lesz. Ha s nincs Z-ben, akkor D' minden Z-ből kilépő éle B'-ben van. A B' laposságából következik, hogy D' semelyik Z-be belépő éle sincs B'-ben, hiszen egy Z-be belépő él is benne van egyszer fedett dikörben, márpedig egy ilyen dikör kilép Z-ből és a kilépő élekről már tudjuk, hogy B'-ben vannak.

Módosítsuk most B'-t olyképpen, hogy a Z-ből kilépő éleket kivesszük belőle, míg a Z-be belépőket bevesszük. A kapott B'' halmaz olyan, hogy $|B'' \cap K| = |B' \cap K|$ minden K dikörre, és ezért B'' is a D' diköreinek egy lapos lefogása. Miután $D' - B''$-ben a tből elérhető pontok halmaza szigorúan bővebb mint Z, legfeljebb n ilyen csere után egy olyan B^* lapos lefogást kapunk, amelyre s is elérhető t-ből a $D' - B^*$ digráfban. •

Legyen b a P fül egy tetszőleges éle. Ekkor $B := B^* + b$ nyilván fedi D minden dikörét, és azt állítjuk, hogy B lapos. Valóban, tekintsünk a $D' - B^*$-ban egy t-ből s-be menő P' irányított utat, aminek a létezését a fenti állítás biztosítja. Ekkor $K := P' \cup P$ egy olyan dikör, amelynek b az egyetlen B-hez tartozó eleme. Ezért D minden éle hozzátartozik egy egyszer fedett dikörhöz. • •

A másik segédeszköz Gallai egy 1958-as tétele. Legyen $c : A \to \mathbf{Z}_+$ a $D = (V, A)$ erősen összefüggő digráf élhalmazán egy nem-negatív egészértékű függvény. (Az alkalmazáshoz valójában csak a $c := \underline{\chi}_F$ speciális esetre lesz szükségünk.) Egy K kör ***c*-értéke** az élei c-értékeinek összege, vagyis $\widetilde{c}(K)$. Csúcsoknak egy multihalmazát (ahol tehát egy csúcs több példányban is szerepelhet) ***c*-független**nek mondunk, ha minden dikörből legfeljebb annyi elemet tartalmaz, mint a dikör c-értéke. Egy multihalmaz egy $x : V \to \mathbf{Z}_+$ egész vektorral azonosítható, és ekkor x c-függetlensége azt jelenti, hogy $\widetilde{x}(V(K)) \leq \widetilde{c}(K)$ minden K körre, ahol $V(K)$ a kör ponthalmaza.

Legyen $w : V \to \mathbf{Z}_+$ egy súlyfüggvény. A dikörök halmazán értelmezett $y \geq 0$ függvényről azt mondjuk, hogy fedi w-t, ha $\sum[y(K) : v \in V(K), K \text{ dikör}] \geq w(v)$ minden $v \in V$-re fennáll. Egy $z \geq 0$ áramról azt mondjuk, hogy fedi a w-t, ha $\varrho_z(v) \geq w(z)$ minden $z \in V$ csúcsra fennáll. A w-t fedő körök és w-t fedő áramok közötti kapcsolatot adja meg a következő egyszerű megfigyelés.

Lemma 1.10.1 *Ha $y \geq 0$ a dikörök halmazán értelmezett w-t fedő függvény, akkor a $z(e) := \sum[y(K) : K$ dikör és $e \in K]$ egy w-t fedő nemnegatív z áramot definiál, melyre $cz = \sum[y(K)\widetilde{c}(K) : K$ dikör$]$. Ha y egészértékű, akkor z is az. Megfordítva, egy w-t fedő $z \geq 0$ áram előáll dikörök nemnegatív kombinációjaként, és bármely $z = \sum y(Z)\underline{\chi}(Z)$ előállításra az y egy w-t fedő függvény, melyre $cz = \sum[y(K)\widetilde{c}(K) : K$ dikör$]$. Ha z egészértékű, akkor y is választható annak.*

TÉTEL 1.10.3 (Gallai, 1958) *Legyen $w : V \to \mathbf{Z}_+$ egy súlyfüggvény a D erősen összefüggő digráf ponthalmazán. A w-t fedő dikörök c-értékeinek minimális összege egyenlő a nem-feltétlenül különböző c-független csúcsok maximális w-súlyával.*

Felhasználva a teljesen duális egészértékű rendszerekre vonatkozó 1.1.6 tételt (miszerint egy TDI rendszerrel megadott poliéder egész, ha a feltételi mátrix és a korlátozó vektor egész) Gallai tétele következik az alábbi eredményből (és valójában ekvivalens vele).

TÉTEL 1.10.4 *Jelölje Q a $D = (V, A)$ erősen összefüggő digráf dikör-csúcs incidencia mátrixát. Jelölje $\widetilde{c}$ azt a vektort, melynek komponensei a Q sorainak (azaz D diköreinek) felelnek meg és a K dikörnek megfelelő komponens értéke $\widetilde{c}(K)$. Ekkor az*

$$\{Qx \leq \widetilde{c},\ x \geq 0\} \tag{1.32}$$

rendszer teljesen duálisan egészértékű.

Biz. Legyen w egy egészértékű súlyfüggvény V-n és tekintsük a következő duális lineáris programot.

$$\min\{\sum[y(K)\widetilde{c}(K) : K \text{ dikör}] : yQ \geq w,\ y \geq 0\}. \tag{1.33}$$

Az kell kimutatnunk, hogy ennek létezik olyan y optimuma, amely egészértékű. A lemma alapján elegendő azt igazolni, hogy a $\min\{cz : z \geq 0$ áram, amely fedi w-t$\}$ rendszernek van egészértékű optimuma. Ez viszont a szokásos pontduplázási technikával rögtön következik a megengedett áram poliéder egészértékűségéből. Valóban, minden v pontot helyettesítsünk a v' és v'' pontokkal, az $uv \in A$ éleket helyettesítsük az $u'v''$ éllel (melynek alsó kapacitása 0 és költsége $c(uv)$), végül minden v pontra vegyük be a $v''v'$ élt $w(v)$ alsó kapacitással és 0 költséggel. Ekkor a keletkező D'-gráfban egy megengedett z' áram az eredeti D-ben egy olyan z áramot definiál, amelyre $\varrho_z(v) \geq w(v)$ minden $v \in V$-re, továbbá $c'z' = cz$. •

Bizonyítás (1.10.1 tétel) Legyen F egy adott lapos lefogás és alkalmazzuk Gallai 1.10.3 tételét a $w \equiv 1$ és $c := \underline{\chi}_F$ speciális esetben. Figyeljük meg, hogy ilyenkor egy S c-független ponthalmaz automatikusan különböző pontokból áll, hiszen minden pont benne van egyszer fedett dikörben, továbbá S stabil, hiszen minden él benne van egyszer fedett dikörben. Ekkor tehát az 1.10.3 tétel azt mondja ki, hogy *a maximális F-független stabil halmaz elemszáma egyenlő a pontokat fedő dikörök minimális össz F-értékével* (ahol az F-függetlenség a $\underline{\chi}_F$-függetlenséget rövidíti, vagyis az S halmaz F-független, ha minden K dikör legfeljebb $|F \cap K|$ pontban metszi). Mivel egy dikör értéke legalább 1, következik, hogy a maximális stabil halmaz elemszáma legalább akkora, mint a pontokat fedő dikörök minimális száma. •

Legyen $U \subseteq V$ a csúcsok egy adott részhalmaza. A 1.10.1 tétel bizonyításában használt megfontolást a $w \equiv 1$ helyett a $w := \underline{\chi}_U$ függvényre alkalmazva rögtön kapjuk az alábbi kiterjesztést.

TÉTEL 1.10.5 *Legyen U a $D = (V, A)$ erősen összefüggő digráf csúcsainak egy részhalmaza. Ekkor U lefedhető $\alpha(D|U)$ dikörrel, ahol $\alpha(D|U)$ jelöli az U által feszített digráf stabilitás számát.* •

Feladat 1.15 *Adjunk direkt bizonyítást az 1.10.5 tétel azon speciális esetére, amikor U klikket feszít.*

Megjegyzés Felvetődik a kérdés, hogy ha a bizonyítás két fő összetevője már legkésőbb 1974-ben ismert volt, akkor miért csak 2007-ben jelent meg az első bizonyítás. Egyrészt Bessy és Thomassé nem ismerte ezen korábbi eredményeket, ők egy más megközelítést alkalmaztak. De ha még valaki ismerte volna is (mint ahogy az egyik segédtétel magától Gallaitól való és bizonyosra vehető, hogy Gallai látta Knuth lemmáját), a bizonyítást Bessy és Thomassénak az az alapvető észrevétele tette lehetővé, hogy valójában nem közvetlenül a Gallai sejtést kell igazolni, hanem a fentebb már megfogalmazott sokkal élesebb min-max tételt: *a maximális F-független stabil halmaz elemszáma egyenlő a pontokat fedő dikörök minimális össz F-értékével.*

directory: clar, file: rgalsejt 2012. december 9.

2. Fejezet

PÁROSÍTÁSOK NEMPÁROS GRÁFOKBAN

2.1 PÁROSÍTÁSOK POLIÉDEREI

Ebben a fejezetben végig feltesszük, hogy a szereplő gráfok hurok-mentesek. Célunk egyenlőtlenségekkel (azaz félterek metszeteként) megadni egy $G = (V, E)$ gráf párosításai illetve teljes párosításai incidencia vektorainak konvex burkát, melyeket B_P illetve B_{TP}-vel fogunk jelölni. Továbbiakban rövidség kedvéért egyszerűen csak párosítások konvex burkáról beszélünk. Miután tetszőleges politop felírható véges sok féltér metszeteként, ilyen leírás biztosan létezik. Ennek explicit megadása azzal az előnnyel jár, hogy a lineáris programozás dualitás tételét alkalmazva egy min-max tételt nyerhetünk a maximális súlyú párosítás illetve a minimális súlyú teljes párosítás súlyára. Ilyen tétel ismeretében már lehetőség nyílik olyan kombinatorikus algoritmusok kidolgozására, melyek a szóbanforgó optimumokat kiszámítják. Ezen algoritmusok, melyek meglehetősen ravaszok (és a Kombinatorikus Algoritmusok II. c. előadásban kerülnek tárgyalásra) egyúttal új, alternatív bizonyítást is jelentenek majd az alábbi eredményekre. Jelen célunk az, hogy minél tömörebb, áttekinthetőbb bizonyításokkal szolgáljunk a szóbanforgó eredményekre.

Páros gráfok esetén a páros gráf incidencia mátrixának teljes unimodularitása miatt az $\{x : x \in \mathbf{R}^E_+, d_x(v) \leq 1$ minden $v \in V$ csúcsra$\}$ poliéder csúcsai egészek, és így $0-1$ vektorok, vagyis párosítások incidencia vektorai, tehát ez a poliéder éppen a párosítás poliéder. Hasonlóképp, ha a $d_x(v) \leq 1$ egyenlőtlenségeket egyenlőségekre cseréljük, úgy megkapjuk a páros gráf teljes párosítás poliéderét. Nem páros gráf esetén azonban az így kapott poliéderek már nem feltétlenül írják le B_P-t illetve B_{TP}-t. Például egy háromszög esetén a mindenütt $1/2$ vektorra $d_x(v) = 1$ teljesül, de ez nem lehet B_T-ben, mert abban minden vektor komponens-összege legfeljebb 1.

Jelölje $\mathcal{O}$ a V legalább háromelemű páratlan elemszámú részhalmazainak rendszerét. Ennek bármely Z tagja olyan, hogy tetszőleges párosítás legfeljebb $(|Z|-1)/2$ darab Z által feszített élt tartalmaz és tetszőleges teljes párosítás páratlan sok, így legalább egy élt tartalmaz a $[Z, V - Z]$ vágásból.

2.1.1 A teljes párosítás poliéder

Legyen $G = (V, E)$ teljes párosítással rendelkező irányítatlan gráf. Jelölje a teljes párosítások (incidencia vektorainak) konvex burkát P_G. Tekintsük a következő poliédert

$$P' := \tag{2.1}$$

$$\{x \in \mathbf{R}^E, x \geq 0, d_x(v) = 1 \text{ minden } v \in V \text{ csúcsra}, \tag{2.2}$$

$$d_x(Z) \geq 1 \text{ minden } Z \in \mathcal{O}\text{-re.}\} \tag{2.3}$$

TÉTEL 2.1.1 (Edmonds) $B_{TP} = P'$

Biz. Paritási megfontolásból adódik, hogy egy M teljes párosításra és egy páratlan elemszámú Z halmazra $d_M(Z)$ páratlan és így legalább 1. Emiatt $B_{TP} \subseteq P'$. A fordított irányú tartalmazás igazolásához tekintsünk P'-nek egy x elemét. Erről fogjuk kimutatni, hogy előáll teljes párosítások konvex kombinációjaként.

Feltehetjük, hogy x minden élen pozitív, mert azon éleket, ahol 0, kihagyhatjuk a gráfból. Nevezzünk egy $Z \subseteq V$ halmazt **pontos**nak (x-re nézve), ha $|Z|$ páratlan és $d_x(Z) = 1$. Egy pontos halmaz komplementere is pontos. Z pontos halmaz **valódi**, ha $|Z| \geq 3, |V - Z| \geq 3$.

Lemma 2.1.1 *Ha Z és Z' olyan pontos halmazok, melyek metszete páratlan elemszámú, akkor metszetük és uniójuk is pontos. Továbbá ilyenkor $d(Z, Z') = 0$.*

Biz. Ha a metszet páratlan, akkor az unió is, ezért $1 + 1 = d_x(Z) + d_x(Z') = d_x(Z \cap Z') + d_x(Z \cup Z') + 2d_x(Z, Z') \geq 1 + 1 + 0$, amiből a lemma következik. •

Nevezzünk egy M teljes párosítást (az x-re nézve) **feszes**nek, ha $d_M(Z) = 1$ fennáll minden Z pontos halmazra. (Geometriailag ez azt jelenti, hogy P'-nek az x-t tartalmazó legszűkebb oldala tartalmazza az M incidencia vektorát). A tétel bizonyításához arra lesz csak szükségünk, hogy létezik feszes párosítás, de kényelmesebb kicsit többet igazolni:

Lemma 2.1.2 *Minden $e = uv \in E$ élhez létezik e-t tartalmazó feszes párosítás.*

Biz. Először nézzük meg azt az esetet, amikor nem létezik valódi pontos halmaz. Ekkor csak azt kell igazolnunk, hogy létezik e-t tartalmazó teljes párosítás, hiszen ez automatikusan feszes. Ha indirekt nem létezne ilyen, akkor Tutte tétele nyomán létezik olyan $A \subseteq V - \{u, v\}$ halmaz, amelyre a $G - \{u, v\} - A$ gráfban a páratlan komponensek t száma nagyobb, mint A elemszáma. Legyen $A' := A \cup \{u, v\}$, jelölje a szóbanforgó páratlan komponenseket $Z_1, Z_2, \ldots, Z_t$, és legyen E' az A' és a páratlan komponensek között vezető élek halmaza. Mivel $|V|$ páros, ezért t és $|A|$ ugyanolyan paritású, így $t \geq |A| + 2 = |A'|$. Ekkor egyrészt $x(E') = \sum[d_x(Z_i) : i = 1, \ldots, t] \geq t$, másrészt $x(E') \leq \sum[d_x(w) : w \in A'] - x(uv) \leq |A'| - x(uv) < |A'|$, amiből $|A'| > t$ adódik, és ez az ellentmondás bizonyítja a lemmát amikor nincs valódi pontos halmaz.

Tegyük most fel, hogy Z_1 valódi pontos halmaz. Legyen $Z_2 := V - Z_1$ és jelölje rendre $G_1 = (Z_1 + z_2, E_1)$ és $G_2 = (Z_2 + z_1, E_2)$ a Z_2 illetve a Z_1 halmazok összehúzásával keletkező gráfokat, ahol z_i a Z_i halmaz összehúzásával keletkező csúcsot jelöli. Jelölje x_1 illetve x_2 az x vektor megszorítását az E_1 illetve az E_2 éleire. Miután $d_x(Z_1) = 1$, a G_i minden csúcsára teljesül $d_{x_i}(v) = 1$. Továbbá G_i minden páratlan elemszámú Z halmazára $d_{x_i}(Z) \geq 1$.

Tegyük először fel, hogy az $e = uv$ él mindkét vége ugyanabban a Z_i-ben van, mondjuk Z_1-ben. Indukcióval létezik G_1-nek egy M_1 feszes párosítása, amely tartalmazza e-t. Legyen f' az M_1-nek a z_2-t fedő éle. Jelölje f a G-nek azt az élét, amelyből a Z_2 összehúzásakor f' keletkezett és jelölje f'' a G_2-nek azt az élét, amely f-ből keletkezett a Z_1 összehúzásakor. (Vagyis f'' szomszédos a z_1 csúccsal.) Indukcióval létezik G_2-ben egy f''-t tartalmazó M_2 feszes párosítása. Ekkor $M := (M_1 - f') \cup (M_2 - f'') + f$ teljes párosítása G-nek, amely tartalmazza e-t.

Abban az esetben, ha e végpontjai különböző Z_i-khez tartoznak, akkor G_1-ben létezik e'-t tartalmazó M_1 feszes párosítás és G_2-ben létezik e''-t tartalmazó M_2 feszes párosítás és ilyenkor $M := (M_1 - e') \cup (M_2 - e'') + e$ teljes párosítása G-nek, amely tartalmazza e-t.

Állítjuk, hogy mindkét esetben M feszes. Valóban, tetszőleges $Z \subseteq V$ pontos halmazra $|Z \cap Z_1|$ és $|Z \cap Z_2|$ egyike páratlan, mondjuk $|Z \cap Z_1|$. A 2.1.1 lemma alapján $|Z \cup Z_1|$ és így $|Z_2 - Z|$ is páratlan és pontos, továbbá $|Z \cap Z_1|$ pontos és $d_x(Z, Z_1) = 0$. Emiatt $d_M(Z \cap Z_1) = d_{M_1}(Z \cap Z_1) = 1$, $d_M(Z_2 - Z) = d_{M_2}(Z_2 - Z) = 1$ és $d_M(Z, Z_1) = 0$. Ebből $1 + d_M(Z) = d_M(Z_1) + d_M(Z) = d_M(Z_1 \cap Z) + d_M(Z_1 \cup Z) + 2d_M(Z_1, Z) = 1 + 1 + 0$, amiből $d_M(Z) = 1$ következik, vagyis M valóban feszes. •

A tétel bizonyításához visszatérve, azt feltettük, hogy x mindenütt pozitív. Azt is feltehetjük, hogy G összefüggő. A tétel nyilvánvalóan igaz, ha G-nek egyetlen éle van. Tegyük fel tehát, hogy nem ez a helyzet. Ekkor $(*)$ x-nek van olyan komponense, amely kisebb, mint 1.

A 2.1.2 lemma szerint létezik egy M feszes párosítás. Legyen $0 < \alpha < 1$ és tekintsük az $\frac{x_\alpha := (x - \alpha\underline{\chi}_M)/(1-\alpha) = x + \alpha}{\alpha - 1(x - \underline{\chi}_M)}$ vektort. Mivel M teljes párosítás, minden v csúcsra $d_{x_\alpha}(v) = 1$ teljesül. Mivel M feszes, kicsiny pozitív α-ra $d_{x_\alpha}(Z) \geq 1$ fennáll minden páratlan Z-re. Mivel x mindenütt pozitív, kicsiny pozitív α-ra $x_\alpha \geq 0$. Válasszuk α-t maximálisra úgy, hogy $x_\alpha \in P'$, vagyis α a legnagyobb olyan szám, amelyre $\alpha \leq x(e)$ minden $e \in E$ élre és $(d_x(Z) - \alpha d_M(Z))/(1 - \alpha) \geq 1$. (Konkrétan $\alpha := \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$, ahol $\alpha_1 = \min\{x(e) : e \in M\}$, és $\alpha_2 := \min\{(d_x(Z) - 1))/(d_M(Z) - 1) : Z$ nem-pontos páratlan halmaz$\}$). Ekkor $(*)$ miatt $0 < \alpha < 1$, $x_\alpha \in P'$ és az α maximális választása miatt vagy x_α-nak van 0 komponense vagy x_α-ra nézve szigorúan több pontos halmaz létezik. Így indukcióval feltehetjük, hogy x_α benne van B_{TP}-ben, azaz előáll teljes párosítások konvex kombinációjaként. De akkor $x = \alpha\underline{\chi}_M + (1 - \alpha)x_\alpha$ miatt x is előáll teljes párosítások konvex kombinációjaként. • •

Tegyük fel, hogy $c : E \to \mathbf{R}_+$ egy adott súly- (vagy költség) függvény. A teljes párosítás poliéder leírását és a dualitás tételt felhasználva kapjuk az alábbi formulát a teljes párosítások minimális súlyára.

TÉTEL 2.1.2 *A teljes párosítások minimális súlya egyenlő az alábbi maximummal:*

$$\max \sum[y(Z) : Z \subseteq V, |Z| \text{ páratlan }] \tag{2.4}$$

ahol $y(Z) \geq 0$, ha $|Z| > 1$ és minden $e = uv \in E$ élre $\sum[y(Z) : |Z \cap \{u, v\}| = 1] \leq c(e)$. •

A 2.2 szakaszban megvizsgáljuk, hogy egészértékű c esetén mi mondható a duális lineáris program egészértékűségéről.

2.1.2 A párosítás poliéder

A teljes párosítások poliéderének leírását felhasználva egyszerű elemi konstrukció segítségével megadhatjuk a párosítások poliéderét.

TÉTEL 2.1.3 *Tetszőleges $G = (V, E)$ gráf párosításai incidencia vektorai által feszített politop pontosan a következő poliéder:*

$$P_0 := \{x \in \mathbf{R}^E : x \geq 0, \tag{2.5}$$

$$d_x(v) \leq 1 \text{ minden } v \in V \text{ -re} \tag{2.6}$$

$$i_x(Z) \leq (|Z| - 1)/2 \text{ minden páratlan elemszámú } Z \subseteq V \text{ halmazra}\}. \tag{2.7}$$

Biz. Egy M párosítás $x := \underline{\chi}_M$ incidencia vektorára nyilván mindkét egyenlőtlenség fennáll, így a párosítások konvex burkának elemeire is.

Megfordítva, legyen x egy olyan vektor, amely az egyenlőtlenségeket kielégíti. Készítsük el a G gráfot két példányban, melyeket jelölje $G' = (V', E')$, $G'' = (V'', E'')$. Kössük össze a megfelelő v' és v'' pontokat egy-egy éllel és az így kapott gráfot (a $V' \cup V''$ ponthalmazon) jelöljük H-val. Készítsünk el egy y vektort a H gráf élein. G minden e élére legyen $y(e') := y(e'') := x(e)$, ezenkívül minden $v \in V$ csúcsra legyen $y(v'v'') := 1 - d_x(v)$.

Állítjuk, hogy y benne van a H teljes párosítás poliéderében. A definícióból nyilvánvaló, hogy $d_y(u) = 1$ fennáll H minden csúcsára. Legyen most $Z = A' \cup B''$ egy páratlan elemszámú halmaz. Ekkor $A - B$ és $B - A$ egyike páratlan elemszámú, mondjuk $A - B$, és így, $i_x(A - B) \leq (|A - B| - 1)/2$ miatt, $d_y(Z) \geq \sum[d_y(v') : v' \in (A' - B')] - 2i_y(A' - B') - d_y(A' - B', A' \cap B') + \quad d_y(A'' - B'', A'' \cap B'') = |A - B| - 2i_x(A - B) \geq 1$. A 2.1.1 tétel miatt y a H teljes párosításainak konvex kombinációja, ami miatt ezen párosításokat a G-re megszorítva az x a G párosításainak konvex kombinációjaként áll elő. •

Figyeljük meg, a tétel azzal ekvivalens, hogy a P_0 poliéder egész. Ez ugyanis P_0 korlátossága folytán azzal egyenértékű, hogy P_0 csúcsai egészek, ami a (2.6) miatt azt jelenti, hogy P_0 csúcsai $0-1$-vektorok. Miután a P_0-ban lévő (így (2.6)-et) kielégítő $0-1$-vektorok pont a párosítások incidencia vektorai, a tétel valóban P_0 egészségével ekvivalens. A 2.1.3 tételben megadott leírást és a dualitás tételt összetéve, a következő eredmény adódik.

TÉTEL 2.1.4 *Legyen $G = (V, E)$ gráf élein adott a $c : E \rightarrow \mathbf{R}$ súlyfüggvény. A gráf maximális súlyú párosításának súlya egyenlő a*

$$\min \sum_{v \in V} \pi(v) + \sum_{Z \in \mathcal{O}} y(Z)(|Z| - 1)/2) \tag{2.8}$$

értékével, ahol $\pi : V \rightarrow \mathbf{R}_+, y : \mathcal{O} \rightarrow \mathbf{R}_+$ nemnegatív és minden $uv \in E$ élre

$$\pi(u) + \pi(v) + \sum[y(Z) : u, v \in Z] \geq c(uv). \bullet \tag{2.9}$$

2.2 DUÁLIS (FÉL-)EGÉSZÉRTÉKŰSÉG

Páros gráfok esetén a párosítás poliédert teljesen unimoduláris mátrix írta le, és emiatt egész célfüggvény esetén a duális lineáris problémának is mindig létezett egészértékű optimuma. A 2.1.1 tételben megadott primál poliéderről, bár a megadott leíró rendszere nem teljesen unimoduláris, mégis kimutattuk, hogy egész (merthogy a csúcsai a teljes párosítások). Ennek nyomán felvetődik a kérdés, vajon egész c esetén a duális feladatnak is mindig létezik-e egész optimuma. A válasz sajnálatos módon nemleges, amint azt a teljes négypontú gráf mutatja a $c \equiv 1$ súlyozás esetén. Ekkor persze a primál optimum értéke 2 (:bármely teljes párosítás súlya 2), a duál optimum egyetlen megoldása (amint az könnyen ellenőrizhető) az, amikor az y mind a négy egyelemű halmazon 1/2, másutt 0. Az egészértékű duális optimum értéke 1, vagyis kisebb, mint 2. Ki fogjuk mutatni azonban, hogy mindig létezik félegész duális optimum. Sőt, ennek felhasználásával azt is igazolni fogjuk, hogy ha minden kör éleinek súlyösszege páros, úgy már biztosan létezik egész duális optimum is. Ennek messzemenő kombinatorikus következményei lesznek: segítségével például megoldható a kínai postás probléma, vagy síkgráfok esetén az úgynevezett élidegen utak problémája.

Érdekes módon a 2.11 tételben a duális optimum egész c esetén mindig eléretik egész vektoron is (szemben a teljes párosítás poliéder leírása előbb említett esetével).

TÉTEL 2.2.1 *A $G = (V, E)$ gráf párosítás poliéderét leíró $\{x \geq 0, d_x(v) \leq 1$ minden $v \in V$ csúcsra, $i_x(Z) \leq (|Z| - 1)/2$ minden páratlan elemszámú $Z \subseteq V$ halmazra$\}$ rendszer teljesen duálisan egészértékű, vagyis tetszőleges egész $c : E \to \mathbf{Z}$ súlyfüggvényre a gráf maximális súlyú párosításának súlya egyenlő a*

$$\min \sum_{v \in V} \pi(v) + \sum_{Z \in \mathcal{O}} y(Z)(|Z| - 1)/2) \tag{2.10}$$

értékével, ahol $\pi : V \to \mathbf{Z}_+, y : \mathcal{O} \to \mathbf{Z}_+$ nemnegatív, egészértékű, és minden $uv \in E$ élre

$$\pi(u) + \pi(v) + \sum [y(Z) : u, v \in Z] \geq c(uv). \tag{2.11}$$

Ráadásul létezik olyan y optimális duális megoldás is, amelyre az $\mathcal{O}_y := \{Z \in \mathcal{O}, y(Z) > 0\}$ halmaz-rendszer lamináris.

Biz. Jelölje a maximális súlyú párosítás súlyát ν_c. Adott (π, y) duális megoldásra legyen

$$b(\pi, y) := \sum_{v \in V} \pi(v) + \sum_{Z \in \mathcal{O}} y(Z)(|Z| - 1)/2. \tag{2.12}$$

A dualitás tétel triviális max $\leq$ min iránya miatt $\nu_c \leq b(\pi, y)$.

A tétel első részének igazolásához tegyük fel indirekt, hogy a min-max összefüggés nem érvényes és válasszunk egy olyan (G, c) ellenpéldát, amelyre a $|V| + |E| + \sum_{e \in E} |c(e)|$ összeg minimális. Ekkor minden e élre $c(e) \geq 1$ (különben a nempozitív élek kitörölhetők.) A most következő állítások mind erre a legkisebb ellenpéldára vonatkoznak.

Állítás 2.2.1 *Minden v csúcsot elkerül egy maximális súlyú párosítás.*

Biz. Tegyük fel indirekt, hogy egy v csúcsot minden maximális súlyú párosítás fedi. Ekkor a c-értékeket a v végű éleken eggyel csökkentve a maximális súlyú párosítás súlya is csökken, éspedig eggyel, azaz a keletkező c' súlyfüggvényre nézve $\nu_{c'} = \nu_c - 1$. Mivel (G, c') már nem ellenpélda, így létezik egy egészértékű (π', y') duális optimális megoldás, amelyre $b(\pi', y') = \nu_{c'}$. Ha most π' értékét a v csúcson eggyel megnöveljük, akkor olyan (y', π'') duális megoldást kapunk c-re nézve, amelyre $\nu_c = \nu_{c'} + 1 = b(\pi', y') + 1 = b(y', \pi'') \geq \nu_c$, amiből $\nu_c = b(y', \pi'')$ adódik, ellentmondásban (G, c) ellenpélda voltával. •

Állítás 2.2.2 *Legyen (π, y) egy optimális duális megoldás és M egy maximális súlyú párosítás. Ekkor M fed minden olyan v csúcsot, amelyre $\pi(v) > 0$. Továbbá $y(Z) > 0$ esetén az M-nek azon élei, melyek Z-be esnek a Z-nek egy majdnem teljes* (azaz $(|Z| - 1)/2$ elemű) *párosítását adják.*

Biz. A 2.1.3 tétel szerint a primál optimum párosításon felvétetik. Az állítás nem más, mint a duál egyenlőtlenségeknek megfelelő optimalitási kritérium. •

A fenti két állítást összevetve kapjuk, hogy:

Állítás 2.2.3 *Tetszőleges (π, y) optimális duális megoldás esetén $\pi \equiv 0$.* •

Állítás 2.2.4 *Létezik olyan (π, y) optimális duális megoldás, amelyre az $\mathcal{O}_y := \{Z \in \mathcal{O}, y(Z) > 0\}$ halmaz-rendszer lamináris.*

Biz. Induljunk ki egy (π, y) duális optimumból. Az y mindenesetre választható racionálisnak, hiszen egy bázis-megoldás racionális és mindig létezik optimális bázis-megoldás. (A 2.2.3 Állítás szerint $\pi \equiv 0$.)

Tegyük fel, hogy $\mathcal{O}_y$ nem lamináris, azaz tartalmaz két halmazt, A-t és B-t, melyekre $A \cap B, A - B, B - A$ egyike sem üres. Állítjuk, hogy $|A \cap B|$ páratlan. Ha ugyanis páros lenne, akkor egy $v \in A \cap B$ csúcsra a 2.2.2 állítás első része miatt létezik maximális súlyú v-t elkerülő M párosítás. Másrészt, a 2.2.2 állítás második része miatt M-nek A-ba illetve B-be eső élei teljes párosítását adják $A - v$-nek illetve $B - v$-nek, de akkor $|A \cap B - v|$ páros.

Jelölje az $y(A)$ és $y(B)$ értékek minimumát α, és csökkentsük mind $y(A)$-t, mind $y(B)$-t α-val. Most $|A \cap B|$ páratlan, így persze $|A \cup B|$ is az. Növeljük $y(A \cup B)$-t α-val, és amennyiben $|A \cap B| \geq 3$, úgy $y(A \cap B)$-t is növeljük α-val. Ezt az átalakítást egy kikeresztezési lépésnek nevezzük. Könnyen ellenőrizhető, hogy a létrejövő (π', y') teljesíti (2.11)-t. Azt sem nehéz belátni, hogy $b(\pi, y) = b(\pi', y')$, azaz (π', y') is optimális duális megoldás.

Ismételjük ezt az eljárást egészen addig, amíg a szóbanforgó $\mathcal{Z}_y$ halmazrendszer nem lamináris. Állítjuk, hogy a kikeresztezési eljárás véges sok lépés után véget ér. Ezt elég csak arra az esetre igazolni, amikor y egészértékű, mert ha nem az, akkor komponenseinek közös nevezőjével felszorozhatjuk. Egy kikeresztezési lépésnél a $\sum(y(Z)|Z| : Z \in \mathcal{O})$ összeg vagy változatlanul marad (amikor $|A \cap B| > 1$) vagy csökken (ha $|A \cap B| = 1$). Világos, hogy ezen utóbbi eset csak véges sokszor fordulhat elő. Az első esetben viszont a

$\sum(y(Z)|Z|^2 : Z \in \mathcal{O})$ kisérő összeg szigorúan nő, így véges sok ilyen lépés után a $\sum(y(Z)|Z| : Z \in \mathcal{O})$ összegnek kell változnia, így tehát kikeresztezési lépésből valóban csak véges sok lehet.

Rendelkezésünkre áll tehát egy (y, $\pi = 0$) duális optimális megoldás, amelyre $\mathcal{O}_y$ lamináris. Mivel (G, c) ellenpélda, y nem egészértékű, azaz van olyan $A \in \mathcal{O}_y$ halmaz, amelyre $y(A)$ nem egész, azaz $\beta := y(A) - \lfloor y(A) \rfloor$ pozitív. Tegyük fel, hogy A maximális ilyen. Módosítsuk most y-t úgy, hogy $y(A)$-t csökkentjük β-vel, míg $\mathcal{O}_y$ azon tagjain (ha vannak egyáltalán), melyek részhalmazai A-nak és maximális ilyenek (és melyek a laminaritás miatt diszjunktak) az y értéket növeljük β-val. Az A maximális választása és c egészértékűsége miatt így egy másik duális megoldást kapunk, de ez ellentmond y optimális voltának, hiszen ezen változtatás során a $\sum_{X \in \mathcal{O}_y} y(X)(|X|-1)/2$ összeg szigorúan csökken. Az ellentmondás mutatja, hogy nem létezhet ellenpélda.

A második részhez csak azt kell észrevennünk, hogy a fent leírt kikeresztezési eljárás az egészértékűséget nem rontja el, így egy tetszőleges egészértékű duális optimumból kiindulva végül kapott "lamináris" optimum is egészértékű. •

Felhasználva a 1.1.7 tételt kapjuk:

Következmény 2.2.2 *Az $\{x \geq 0, d_x(v) = 1$ minden $v \in V$ csúcsra, $i_x(Z) \leq (|Z|-1)/2$ minden páratlan elemszámú $Z \subseteq V$ halmazra$\}$ rendszer TDI.*

A TDI-ségből adódik, hogy a következménybeli rendszer által leírt poliéder egész, így csúcsai a teljes párosítások. Vagyis íly módon a teljes párosítás poliédernek egy TDI leírását kaptuk. Ennek segítségével kimutatjuk, hogy a 2.1.1 tételben korábban megadott leírás "duálisan félegész".

TÉTEL 2.2.3 *Legyen $G = (V, E)$ olyan gráf, amelynek van teljes párosítása és $c : E \to \mathbf{R}$ egész költségfüggény. A minimális költségű teljes párosítás költsége egyenlő a*

$$\max\ b^*(\pi, y) := \sum_{v \in V} \pi(v) + \sum_{Z \in \mathcal{O}} y(Z) \tag{2.13}$$

értékkel, ahol mind $y \geq 0$, mind π (ami lehet negatív) *félegész és*

$$\pi(u) + \pi(v) + \sum[y(Z) : Z \in \mathcal{O}, |\{u, v\} \cap Z| = 1] \leq c(uv) \tag{2.14}$$

fennáll a gráf minden uv élére.

Biz. A tétel rögtön adódik az előbbi következményből, amint megfigyeljük, hogy az $i_x(Z) \leq (|Z|-1)/2$ egyenlőtlenség előáll, mint a $-d_x(Z) \leq -1$ egyenlőtlenség és a $d_x(v) = 1$ ($v \in Z$) egyenlőségek összegének a fele. •

Nevezzünk egy egész költségfüggvényt páros **körösszegű**nek, ha minden kör költsége páros.

TÉTEL 2.2.4 *Amennyiben a* 2.2.3 *tételben c páros körösszegű, úgy az optimális (π, y) egészértékűnek is választható.*

Biz. Mivel minden kör összköltsége páros, a gráf pontjainak van egy olyan $T \subseteq V$ részhalmaza, hogy egy él költsége pontosan akkor páratlan, ha kilép T-ből. Jelölje $\bar{c}$ azt a költségfüggvényt, amelyet úgy kapunk c-ből, hogy minden uv élre $c(uv)$-t $|T \cap \{u, v\}|$-vel megnöveljük. Ekkor $\bar{c}$ páros, azaz $\bar{c}/2$ egész, és így a 2.2.4 tétel miatt létezik $\bar{c}$-re nézve egy (π, y) egészértékű duális optimum. A π értékeit a T pontjaiban eggyel csökkentve a c-re nézve kapunk egy egészértékű duális optimumot. •

Jelölje $\mathcal{Q}$ a V alaphalmaz összes páratlan elemszámú részhalmazának halmazát.

TÉTEL 2.2.5 *Legyen $G^* = (V, E^*)$ páros csúcsú teljes gráf és legyen c egy olyan nemnegatív páros körösszegű költségfüggvény E^*-n, amely teljesíti a háromszög egyenlőtlenséget. Ekkor a minimális költségű teljes párosítás költsége egyenlő a*

$$\max \sum_{Z \in \mathcal{Q}} y(Z) \tag{2.15}$$

értékkel, ahol $y \geq 0$ egész és

$$\sum[y(Z) : Z \in \mathcal{Q}, |\{u, v\} \cap Z| = 1] \leq c(uv) \tag{2.16}$$

fennáll a gráf minden uv élére.

Biz. A 2.2.3 tétel nyomán csak azt kell kimutatnunk, hogy létezik olyan (π, y) egészértékű optimális megoldás, amelyben $\pi \geq 0$, hiszen ekkor egy olyan v csúcsra, amelyre $\pi(v) > 0$, a $\pi(v)$ duál változót lecserélhetjük $y(\{v\}) := \pi(v)$ duális változóra.

Legyen tehát (π, y) egy egészértékű optimális duál megoldás, amelyet a 2.2.4 tétel biztosít. Tegyük fel, hogy π a legkevésbé negatív, azaz a $\sum[\pi(v) : \pi(v) < 0]$ összeg a lehető legnagyobb. Még azt is feltehetjük, hogy a $\{Z : y(Z)\}$ halmazrendszer lamináris. Nevezzünk egy élt pontosnak, ha 2.14-t egyenlőséggel teljesíti. Tegyük fel indirekt, hogy létezik olyan z olyan csúcs, amelyre $\pi(z) < 0$.

z-ből vezet ki pontos él, mert különben $\pi(z)$ értékét eggyel növelve jobb duális megoldást kapnánk. Ha z-ből egyetlen $e = uz$ pontos él vezet ki, akkor $c(e) \geq 0$ miatt vagy $\pi(u) > 0$ vagy van olyan $S \in \mathcal{O}$ halmaz, amelyre $y(S) > 0$ és e belép S-be. Mindkét esetben $\pi(z)$-t eggyel növelve és $\pi(u)$-t vagy $y(S)$-t eggyel csökkentve egy másik, kevésbé negatív optimális duális megoldást kapnánk.

Állítjuk, hogy ha $e = zu$ és $f = zv$ pontos élek, akkor van olyan $S \in \mathcal{O}$ halmaz, amelyre $y(S) > 0$ és S-be mind e, mind f belép. Ha ugyanis nem létezne, akkor $c(uv) \leq c(uz) + c(vz) = \pi(u) + \pi(z) + \sum[y(Z) : Z \in \mathcal{O}, |\{u, z\} \cap Z| = 1] + \pi(v) + \pi(z) + \sum[y(Z) : Z \in \mathcal{O}, |\{v, z\} \cap Z| = 1] = 2\pi(z) + \pi(u) + \pi(v) + \sum[y(Z) : Z \in \mathcal{O}, |\{u, v\} \cap Z| = 1] < \pi(u) + \pi(v) + \sum[y(Z) : Z \in \mathcal{O}, |\{u, v\} \cap Z| = 1] \leq c(uv)$ adódna. A laminaritás miatt létezik egyetlen $S \in \mathcal{O}$ halmaz, amelyre $y(S) > 0$ és minden pontos uz él belép S-be. De ekkor $\pi(z)$-t eggyel növelve, $y(S)$-t eggyel csökkentve egy másik duális optimumot kapunk, amely kevésbé negatív, mint (π, y). •

Egy páros elemszámú $T \subseteq V$ részhalmazra a $G = (V, E)$ gráf éleinek egy J részhalmazáról azt mondtuk, hogy T-kötés, ha $d_J(v)$ pontosan a $v \in T$ pontokra páratlan. A gráf egy $[Z, V - Z]$ vágását T-vágásnak neveztük, ha $|Z \cap T|$ páratlan.

TÉTEL 2.2.6 (Seymour) *Egy G összefüggő páros gráfban a T-kötések minimális elemszáma egyenlő az élidegen T-vágások maximális számával.*

Biz. Mivel minden T-kötés metsz minden T-vágást, így a max $\leq$ min irány triviális. A fordított irány igazolásához először a $V = T$ speciális esettel foglalkozunk. Jelölje $c(uv)$ az u és v csúcsok közötti legrövidebb út hosszát. c nyilván teljesíti a háromszög egyenlőtlenséget, és mivel G páros, így c páros körösszegű. A 2.2.5 tétel miatt létezik egy M teljes párosítás G^*-ban és $c(M)$ darab páratlan elemszámú halmaz, úgy hogy minden $uv \in E^*$ él legfeljebb $c(uv)$ darab halmazba lép be. Mivel G éleire $c(uv) = 1$, így ezek a halmazok $c(M)$ darab G-ben élidegen V-vágást határoznak meg. Másrészt az M teljes párosítás mindegyik uv éléhez tartozik G-ben egy $c(uv)$ darab élből álló út, amelyek $c(M)$ minimalitás miatt élidegenek, és így egyesítésük egy V-kötés, amelynek elemszáma $c(M)$.

A $T \subset V$ esetben minden $V - T$-beli v pontra adjunk a gráfhoz egy új v' pontot és egy új vv' élt. A keletkező $G' = (V, E')$ páros gráf V'-kötései és G T-kötései között egy-egy értelmű kapcsolat teremt az új élek halmazának elvétele. Így egy minimális T-kötés és egy minimális V'-kötés elemszámának eltérése az új élek száma. Másrészt G'-ben egy maximális V'-vágás pakolásról feltehető, hogy elemi vágásokból áll, vagyis az új élek mindegyike, mint egyelemű vágás benne van a pakolásban. Vagyis az élidegen V'-vágások maximális száma éppen az új élek számával több, mint az élidegen T-vágások maximális száma. Emiatt az első részből következik a teljes tétel. •

2.2.1 Egy másik felépítés

A fentiekben először megadtuk a teljes párosítások politopját poliéderként, majd erre támaszkodva a párosítások politopját, végül ezen lineáris leírás TDI-ségét igazoltuk. Most közvetlenül belátunk egy min-max tételt, amely a TDI-séggel ekvivalens.

TÉTEL 2.2.7 *Legyen $G = (V, E)$ összefüggő gráf. Tetszőleges egész $c : E \to \mathbf{Z}$ súlyfüggvényre a gráf maximális súlyú párosításának ν_c súlya egyenlő a*

$$\min \sum_{v \in V} \pi(v) + \sum_{Z \in \mathcal{O}} y(Z)(|Z| - 1)/2) \tag{2.17}$$

értékével, ahol $\pi : V \to \mathbf{Z}_+, y : \mathcal{O} \to \mathbf{Z}_+$ nemnegatív, egészértékű, és minden $uv \in E$ élre

$$\pi(u) + \pi(v) + \sum [y(Z) : u, v \in Z \in \mathcal{O}] \geq c(uv). \tag{2.18}$$

Biz. Csak a nem-triviális max $\geq$ min irány igazolásával foglalkozunk, vagyis azt szeretnénk kimutatni, hogy létezik egy olyan (π, y) duális megoldás, amelyre $\nu_c = \sum_{v \in V} \pi(v) + \sum_{Z \in \mathcal{O}} y(Z)(|Z| - 1)/2$.

Feltehető, hogy $c(e)$ minden élre pozitív, mert ha $c(e) \leq 0$, akkor e-t kihagyva indukció miatt létezik (π, y) egész duális megoldás, melyre $\nu_c = \pi(v) + \sum_{Z \in \mathcal{O}} y(Z)(|Z| - 1)/2)$. Mivel $c(e) \leq 0$, ugyanez a (π, y) az eredeti c-re is duális megoldás.

Lemma 2.2.1 *Amennyiben* $(*)$ *minden pontot elkerül egy* ν_c *(azaz max) súlyú párosítás, úgy* $|V|$ *páratlan és minden max-súlyú párosítás* $(|V|-1)/2$ *elemű.*

Biz. Azt látjuk be, hogy minden max-súlyú párosítás legfeljebb egy pontot nem fed. Ebből ugyanis már következik, hogy minden max-súlyú párosítás pontosan egy pontot nem fed. Valóban, paritási okból nem lehet, hogy van minden pontot fedő párosítás és van egyetlen pontot nem fedő párosítás is, márpedig a $(*)$ feltétel miatt minden pontot elkerül max-súlyú párosítás.

Tegyük fel indirekt, hogy van olyan M max-súlyú párosítás, amely legalább két pontot nem fed. Válasszuk meg ezt és a fedetlen s és t pontokat úgy, hogy az s-et és t-t összekötő legrövidebb P út a lehető legkevesebb élből álljon. Az nem lehet, hogy P egyetlen e élből áll, mert $c(e) > 0$ miatt $M + e$ egy M-nél nagyobb súlyú párosítás volna.

Legyen z a P út egy belső pontja. A hipotézis szerint létezik egy z-t elkerülő M_z max-súlyú párosítás. Ekkor az $M \ominus M_z$ szimmetrikus differencia minden K komponense kör vagy út, amelyben ráadásul az M-élek súlya egyenlő az M_z élek súlyával. Emiatt $M' := M \ominus K$ is egy max-súlyú párosítás. Ha most K az a komponens, amely z-t tartalmazza, akkor K út (hiszen M_z nem fedi z-t). Az s és t egyike, mondjuk s, biztosan nem végpontja K-nak. De ekkor M' egy olyan max-súlyú párosítás, amelyik nem fedi s-et és z-t, ellentmondásban (M, s, t) választásával. •

A tétel bizonyítására térve két esetet különböztetünk meg.

1. eset Létezik egy olyan s pont, amelyet minden max-súlyú párosítás fed. Ekkor könnyen látható, hogy $\nu_{c'} = \nu_c - 1$, ahol c' úgy keletkezik c-ből, hogy az s-ben végződő élek c-költségét 1-gyel csökkentjük. Indukcióval, létezik olyan (π', y)-nal jelölt c'-re vonatkozó duális megoldás, amelyre $\nu_{c'} = \sum_{v \in V} \pi'(v) + \sum_{Z \in \mathcal{O}} y(Z)(|Z| - 1)/2$. Most a $\pi'(s)$ értéket 1-gyel megnövelve az eredeti c-re vonatkozó (π, y) duális megoldást kapunk, amelynek értéke $\nu_{c'} + 1 = \nu_c$.

2. eset Minden pontot elkerül egy max-súlyú párosítás. A 2.2.1 lemma szerint ekkor a max-súlyú párosítások mind $|V| - 1/2$ eleműek. Csökkentsük a c értékét minden élen 1-gyel és jelölje c' az így nyert költségfüggvényt.

Lemma 2.2.2 *Ha* M *c-re nézve maximális súlyú párosítás, akkor* c'*-re nézve is maximális súlyú.*

Biz. Tegyük fel indirekt, hogy létezik egy M' párosítás, amelyre

$$\widetilde{c}'(M') \geq \widetilde{c}'(M) + 1. \tag{2.19}$$

Ekkor az $M \ominus M'$ valamelyik K komponensére

$$\widetilde{c}'(M' \cap K) \geq \widetilde{c}'(M \cap K) + 1. \tag{2.20}$$

Nyilván $|M' \cap K| \geq |M \cap K| - 1$, és mivel M max c-súlyú, így $\widetilde{c}(M \cap K) \geq \widetilde{c}(M' \cap K)$. Emiatt

$$\widetilde{c}(M \cap K) \geq \widetilde{c}(M' \cap K) = \widetilde{c}'(M' \cap K) + |M' \cap K| \geq [\widetilde{c}'(M \cap K) + 1] + [|M \cap K| - 1] = \widetilde{c}(M \cap K),$$

amiből mindkét egyenlőtlenségre egyenlőség adódik. Ezért $\widetilde{c}(M \cap K) = \widetilde{c}(M' \cap K)$ miatt az $M'' := M \ominus K$ párosítás is maximális c-súlyú, továbbá $|M' \cap K| = |M \cap K| - 1$ miatt $|M''| < |M|$, ellentmondásban a 2.2.1 lemmával. •

A 2.2.2 lemmából adódik, hogy $\nu_c = \nu_{c'} + (|V| - 1)/2$. Indukcióval kapjuk, hogy létezik a c'-re nézve egy olyan (π, y') duális megoldás, amelyre $\nu_{c'} = \sum_{v \in V} \pi(v) + \sum_{Z \in \mathcal{O}} y'(Z)(|Z| - 1)/2$. Most az $y'(V)$ értéket 1-gyel megnövelve az eredeti c-re vonatkozó (π, y) duális megoldást kapunk, amelynek értéke $\nu_{c'} + (|V| - 1)/2 = \nu_c$.
• •

2012. december 9.file: ulmatch

3. Fejezet

SZUBMODULÁRIS FÜGGVÉNYEK ÉS POLIÉDEREIK

Ismeretes, hogy egy matroid rangfüggvénye szubmoduláris, ugyanakkor gráfelméletben gyakran feltűnnek olyan szubmoduláris függvények, melyek nem matroid rangfüggvényei. Például, a $G = (S,T;E)$ páros gráfban az S részhalmazain értelmezhetjük a $|\Gamma(X)|$ függvényt, ahol $\Gamma(X)$ jelöli az $X \subseteq S$ halmaz T-beli szomszédainak halmazát. Nem nehéz kimutatni, hogy ez a halmazfüggvény szubmoduláris, monoton növő (azaz $X \subseteq Y \subseteq S$ esetén $|\Gamma(X)| \leq |\Gamma(Y)|$) és persze az üres halmazon nulla. Ugyanakkor $|\Gamma(X)|$ tipikusan nem szubkardinális. Találkozhatunk olyan szubmoduláris függvényekkel is, amelyek még csak nem is monotonak (például egy irányított gráf csúcsainak részhalmazain értelmezett ϱ befok függvény). Még az is előfordulhat, hogy a függvény nem minden részhalmazon értelmezett, a $\pm\infty$ értéket is felveheti, vagy hogy a szubmodularitás nem minden halmazpárra teljesül.

3.1 ÁLTALÁNOSÍTOTT POLIMATROIDOK

3.1.1 Definíciók, elemi tulajdonságok

A S véges alaphalmaz X és Y részhalmazaira azt mondjuk, hogy **metsző**, ha $X \cap Y$ nem üres és **átmetsző**, ha $X - Y, X \cap Y, Y - X$ egyike sem üres. X és Y **ko-metsző**, ha komplementereik metszők, azaz uniójuk nem S. Ha X, és Y ko-metsző és átmetsző, akkor X, Y **keresztező**. Egy halmazrendszer **lamináris** (ill. **keresztezésmentes**), ha tagjai páronként nem átmetszőek (nem keresztezőek). Metszet-unióra zárt halmazrendszert **halmazgyűrű**nek mondunk.

Az alábbiakban a halmazfüggvények alaphalmaza S, értékkészletükben megengedjük a $\pm\infty$-t, és végig megkívánjuk, hogy az üres halmazon az értékük 0. Egy h halmazfüggvény **monoton növő**, ha $h(X) < \infty$ és $X \subseteq Y \subseteq S$ esetén $h(X) \leq h(Y)$. h **monoton csökkenő**, ha negatívja monoton növő. $h(\emptyset) = 0$ miatt adódik, hogy véges értékű monoton növő függvény nemnegatív. Egy h halmazfüggvény **szimmetrikus**, ha $h(X) = h(S - X)$ minden $X \subseteq S$-re.

Tetszőleges $m : S \to \mathbf{R} + \{\infty\}$ vagy $m : S \to \mathbf{R} + \{-\infty\}$ függvényt kiterjeszthetünk az S részhalmazaira az $m(X) := \sum[m(s) : s \in X]$ formulával (és a későbbiekben ezt a kiterjesztést külön hivatkozás nélkül használni fogjuk). Az így kapott halmazfüggvény **moduláris** abban az értelemben, hogy $m(X) + m(Y) = m(X \cap Y) + m(X \cup Y)$ fennáll minden $X, Y \subseteq S$-re. Könnyen ellenőrizhető, hogy minden moduláris halmazfüggvény, amelynek értéke az üres halmazon nulla, előáll ilyen alakban.

A $b : 2^S \to \mathbf{R} + \{\infty\}$ halmazfüggvény **teljesen** (**metsző**, **ko-metsző**, **keresztező**) **szubmoduláris**, ha minden (metsző, ko-metsző, keresztező) $X, Y \subseteq S$ részhalmazra fennáll a

$$b(X) + b(Y) \geq b(X \cap Y) + b(X \cup Y) \tag{3.1}$$

szubmodularitási egyenlőtlenség. A teljesen szubmoduláris függvényt röviden szubmodulárisnak hívjuk. A p halmazfüggvény **szupermoduláris**, ha negatívja szubmoduláris. Egy véges értékű, monoton növő, teljesen szubmoduláris függvényt **polimatroid-függvény**nek hívunk. A matroid rangfüggvények pontosan az egészértékű szubkardinális polimatroid-függvények.

Egy p véges értékű szupermoduláris függvény pontosan akkor nemnegatív, ha monoton növő. Valóban, $p(\emptyset) = 0$ miatt monoton növő függvény nemnegatív, másrészt, ha p nemnegatív, akkor $X \subseteq Y$ esetén $p(X) \leq p(X) + p(Y - X) \leq p(X \cap (Y - X)) + p(X \cup (Y - X)) = p(\emptyset) + p(Y) = p(Y)$.

Tetszőleges $h : 2^S \to \mathbf{R}$ halmazfüggvényre, amelyre $h(S)$ véges, értelmezhetjük a $\overline{h}$ függvényt a

$$\overline{h}(X) := h(S) - h(S - X) \tag{3.2}$$

formulával. A $\overline{h}$ függvényt a h **komplementer**ének nevezzük. Nyilván $\overline{h}(\emptyset) = 0$, $\overline{h}(S) = h(S)$ és $\overline{\overline{h}} = h$. Szubmoduláris függvény komplementere szupermoduláris és megfordítva. Moduláris függvény komplementre saját maga. Egy matroid rang és ko-rang függvénye egymás komplementerei.

Állítás 3.1.1 *Egy b teljesen szubmoduláris függvény értékeit az egyelemű halmazokon tetszés szerint csökkentve vagy az összes nemüres részhalmazon ugyanannyival csökkentve metsző szubmoduláris függvényt kapunk. Egy b metsző szubmoduláris függvény értékeit az egyelemű halmazok komplementerein tetszés szerint csökkentve vagy az összes S-től különböző nemüres részhalmazon ugyanannyival csökkentve keresztező szubmoduláris függvényt kapunk. Analóg állítások érvényesek szupermoduláris függvényekre csökkentés helyett növeléssel.*

Azt mondjuk, hogy a (p, b) halmazfüggvényekből álló pár **paramoduláris** (vagy röviden **erős pár**), ha $p(S) = b(S) = 0$, p teljesen szupermoduláris, b teljesen szubmoduláris és **összeillők** (compliant), azaz a

$$b(X) - p(Y) \geq b(X - Y) - p(Y - X) \tag{3.3}$$

kereszt-egyenlőtlenség fennáll minden $X, Y \subseteq S$ halmazra. **Metsző paramoduláris** (röviden **gyenge**) párról beszélünk, ha p és b metsző szuper- illetve szubmoduláris és a kereszt-egyenlőtlenséget csupán átmesző halmazpárokra írjuk elő.

Gyakorlat 3.1 *Igazoljuk, hogy egy M matroidra (t, r) paramoduláris, ahol r a matroid rangfüggvénye, míg t a ko-rangfüggvénye* (azaz $t(X)$ az X és egy bázis metszetének minimális elemszáma, más szóval $t = \overline{r}$).

Gyakorlat 3.2 *Igazoljuk, hogy ha b szubmoduláris és $b(S)$ véges, akkor $(\overline{b}, b)$ paramoduláris.*

Feladat 3.3 *Igazoljuk, hogy egy $G = (V, E)$ gráfra az (i_G, e_G) pár paramoduláris, ahol $i_G(X)$ az X által feszített élek száma, míg $e_G(X)$ a legalább egyik végpontjukkal X-ben lévő élek száma.*

Ha b teljesen szubmoduláris, akkor az $\{X : b(X) < \infty\}$ halmazrendszer halmazgyűrű, és megfordítva, ha egy $\mathcal{F}$ halmazgyűrűn értelmezünk egy véges értékű szubmoduláris függvényt, akkor ezt kiterjeszthetjük az S összes részhalmazára azáltal, hogy értékét $+\infty$-nek definiáljuk a nem $\mathcal{F}$-ben lévő halmazokon, és így szubmoduláris függvényt kapunk. Magyarán, egy-egy értelmű kapcsolat van az esetleg $+\infty$ értéket felvevő szubmoduláris függvények valamint egy halmazgyűrűn értelmezett véges értékű szubmoduláris függvények között. Ugyanakkor technikailag gyakran kényelmesebb az utóbbival dolgozni.

Feladat 3.4 *Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{F}$ az S részhalmazaiból álló olyan halmazgyűrű, amelyre $\emptyset, S \in \mathcal{F}$, akkor létezik egy olyan* (tranzitív) *D digráf, amelyre $\mathcal{F} := \{X : \varrho_D(X) = 0\}$.*

Gyakorlat 3.5 *Adott $(S, T; E)$ páros gráf és a T alaphalmazon egy r rangfüggvényű matroid. Az S részhalmazaira legyen $b(X) := r(\Gamma(X))$. Igazoljuk, hogy b polimatroid-függvény.*

Feladat 3.6 *Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, $f : A \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $g : A \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ két függvény, melyekre $f \leq g$. Mutassuk meg, hogy a $p(X) := \varrho_f(X) - \delta_g(X)$ formulával definiált halmazfüggvény teljesen szupermoduláris. Az X és Y halmazokra pontosan akkor teljesül $p(X) + p(Y) = p(X \cap Y) + p(X \cup Y)$, ha $f(e) = g(e)$ minden olyan e élre, amelynek egyik vége $X - Y$-ban van, a másik pedig $Y - X$-ben.*

Gyakorlat 3.7 *Egy irányítatlan gráf éleinek minden részhalmazához rendeljük hozzá az általa fedett pontok elemszámát. Igazoljuk, hogy így polimatroid-függvényt kapunk.*

Gyakorlat 3.8 *Adott hipergráf pontjainak X részhalmazaira az X-et metsző hiperélek száma polimatroid-függvényt definiál. Az X-től diszjunkt hiperélek száma szupermoduláris függvényt definiál. Az X-et és $V - X$-et egyaránt metsző hiperélek száma szimmetrikus szubmoduláris függvényt definiál.*

Szubmoduláris függvények jellemzése

TÉTEL 3.1.1 *Egy b halmazfüggvény akkor és csak akkor szubmoduláris, ha az S alaphalmaz minden s elemére a $b(X + s) - b(X)$ különbség függvény az $S - s$ részhalmazain monoton csökkenő, azaz $X \subset Y \subseteq S - s$ esetén*

$$b(X + s) - b(X) \geq b(Y + s) - b(Y). \tag{3.4}$$

Biz. Tegyük fel, hogy b szubmoduláris. Ekkor $b(X+s)+b(Y) \geq b[(X+s)\cap Y]+b(X+s\cup Y) = b(X)+b(Y+s)$, és így (3.4) fennáll.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $b(X+s) - b(X)$ monoton csökkenő. A szubmodularitási egyenlőtlenséget az $X, Y \subseteq S$ halmazokra $|X - Y|$ szerinti indukcióval igazoljuk. Ha ez a szám nulla, azaz ha $X \subseteq Y$, úgy az egyenlőtlenség (egyenlőséggel) teljesül. Legyen $s \in X - Y$ és $X' := X - s$. Indukció miatt $b(X') + b(Y) \geq b(X'\cap Y)+b(X'\cup Y) = b(X\cap Y)+b(X'\cup Y)$. A monotonitás miatt $b(X'+s)-b(X') \geq b(X'\cup Y+s)-b(X'\cup Y)$. A kettőt összevetve kapjuk, hogy $b(X') + b(Y) \geq b(X \cap Y) + b(X' \cup Y + s) - b(X' + s) + b(X') = b(X \cap Y) + b(X \cup Y) - b(X) + b(X')$, azaz $b(X) + b(Y) \geq b(X \cap Y) + b(X \cup Y)$. •

Feladat 3.9 *Igazoljuk, hogy ha b teljesíti a szubmodularitási egyenlőtlenséget minden olyan X-re és Y-ra, amelyre $|X - Y| = |Y - X| = 1$, akkor b teljesen szubmoduláris.*

Következmény 3.1.2 *A b véges-értékű szubmoduláris függvény akkor és csak akkor moduláris, ha $b(v) + b(S - v) = b(S)$ minden $v \in S$ elemre.*

Biz. Ha b moduláris, akkor nyilván $b(v) + b(S - v) = b(S)$. A megfordításhoz legyen $Z \subseteq S$ és $s \in Z$. A $b(X + s) - b(s)$ függvény monotonitását használva azt kapjuk, hogy $b(s) = b(s) - b(\emptyset) \geq b(Z) - b(Z - s) \geq b(S) - b(S - s) = b(s)$, amiből $b(Z) = b(Z - s) + b(s)$, és így indukcióval $b(Z) = \sum_{z\in Z} b(z)$ következik minden $Z \subseteq S$ halmazra. •

Két szubmoduláris függvény minimuma

Két szubmoduláris függvény minimuma általában nem szubmoduláris. Kimutatható azonban, hogy mégis csak az, ha a két függvény egyike monoton növő, a másik monoton csökkenő. Ennél még több is igaz.

TÉTEL 3.1.3 (Lovász) *Legyenek b_1 és b_2 szubmoduláris függvények, melyekre $b_1 - b_2$ monoton növő. Ekkor a*

$$b(X) := \min\{b_1(X), b_2(X)\} \tag{3.5}$$

formulával definiált b függvény szubmoduláris.

Biz. Amennyiben $b_1(X) \leq b_2(X)$ és $b_1(Y) \leq b_2(Y)$, akkor $b(X) + b(Y) = b_1(X) + b_1(Y) \geq b_1(X \cap Y) + b_1(X \cup Y) \geq b(X \cap Y) + b(X \cup Y)$, vagyis a szubmoduláris egyenlőtlenség fennáll (és még a monotonitást sem használtuk). Ugyanez a helyzet, ha $b_1(X) \geq b_2(X)$ és $b_1(Y) \geq b_2(Y)$. Így feltehetjük, hogy $b(X) = b_1(X)$ és $b(Y) = b_2(Y)$. A monotonitást az $X \cap Y \subseteq X$ halmazokra felírva kapjuk, hogy $b_1(X) - b_2(X) \geq b_1(X \cap Y) - b_2(X \cap Y)$, amiből $b(X) + b(Y) = b_1(X) + b_2(Y) \geq [b_1(X \cap Y) - b_2(X \cap Y) + b_2(X)] + b_2(Y) \geq b_2(X \cap Y) + b_2(X \cup Y) + b_1(X \cap Y) - b_2(X \cap Y) = b_2(X \cup Y) + b_1(X \cap Y) \geq b(X \cap Y) + b(X \cup Y)$. •

Ugyanígy következik, hogy b metsző (keresztező) szubmoduláris, ha mind b_1, mind b_2 metsző (keresztező) szubmoduláris és a különbségük monoton. Speciális esetként kapjuk, hogy egy monoton növő szubmoduláris és egy monoton csökkenő szubmoduláris függvény minimuma is szubmoduláris.

3.1.2 Szub- és szupermoduláris függvények poliéderei

Matroidelméletben igazoltuk, hogy az $M = (S, r)$ matroidban a független halmazok incidencia vektorainak konvex burka pontosan a $P(r) := \{x : x \geq 0, x(Z) \leq r(Z)$ minden $Z \subseteq S$-re$\}$ poliéder. Rögtön láthatóan ez azzal ekvivalens, hogy $P(r)$ egész poliéder. Az alábbiakban szub- vagy szupermoduláris függvényekkel definiálható hasonló jellegű poliédereket vizsgálunk. Adott p és b halmazfüggvényekre definiáljuk az alábbi poliédereket, melyeknél a $B(b)$ és $B'(p)$ definíciójában feltesszük, hogy $b(S)$ illetve $p(S)$ véges értékű.

$$P(b) := \{x \in R^S : x \geq 0, x(A) \leq b(A) \text{ minden } A \subseteq S\}$$
$$S(b) := \{x \in R^S : x(A) \leq b(A) \text{ minden } A \subseteq S\}$$
$$B(b) := \{x \in R^S : x(S) = b(S), x(A) \leq b(A) \text{ minden } A \subseteq S\}$$

$$C(p) := \{x \in R^S : x \geq 0, x(A) \geq p(A) \text{ minden } A \subseteq S\}$$
$$S'(p) := \{x \in R^S : x(A) \geq p(A) \text{ minden } A \subseteq S\}$$
$$B'(p) := \{x \in R^S : x(S) = p(S), x(A) \geq p(A) \text{ minden } A \subseteq S\}$$

$$Q(p, b) := \{x \in R^S : p(A) \leq x(A) \leq b(A) \text{ minden } A \subseteq S\}\text{-re.} \tag{3.6}$$

Ha b polimatroid-függvény, $P(b)$-t **polimatroid**nak hívjuk, b-t pedig a **határfüggvény**ének. Az üres halmazt is polimatroidnak tekintjük. Ha b teljesen szubmoduláris, $S(b)$ **szubmoduláris poliéder**, melynek szubmoduláris (vagy felső) határfüggvénye b. (Bár nem igazán szerencsés, hogy az alaphalmaz és a szubmoduláris poliéder jelölésére is ugyanazt az S betűt használjuk, remélhetőleg eme megjegyzés nyomán ez mégsem fog zavart okozni.) Ha b teljesen szubmoduláris és $b(S)$ véges, $B(b)$ **bázis-poliéder**, melynek b a szubmoduláris határfüggvénye. Az üres halmazt is bázis-poliédernek tekintjük. Amennyiben $b(S) = 0$, **0-bázis poliéder**ről beszélünk. Szupermoduláris p esetén, ha $p(S)$ véges, akkor a $\overline{p}(X) := p(S) - p(S - X)$ által definiált $\overline{p}$ komplementer függvény szubmoduláris, (amelyre $\overline{p}(\emptyset) = 0$ és $\overline{p}(S) = p(S)$), és könnyen láthatóan $B(\overline{p}) = B'(p)$. Emiatt a $B'(p)$ poliédert is bázis-poliédernek fogjuk hívni, amelynek p a szupermoduláris (vagy alsó) határfüggvénye. Később igazolni fogjuk, hogy keresztező szubmoduláris b függvény esetén is $B(b)$ (esetleg üres) bázis-poliéder.

Ha p teljesen szupermoduláris, $S'(p)$ **szupermoduláris poliéder**. Ha ráadásul p nemnegatív (amiből következik, hogy véges értékű és monoton növő), úgy az $S'(p)$ szupermoduláris poliéder neve **kontra-polimatroid**.

Figyeljük meg, hogy $S(b)$ valamint $S'(p)$ szerepe szimmetrikus abban az értelemben, hogy $S(b)$ és $S'(-b)$ egymásnak az origóra vett tükörképei, és hasonló igaz $B(b)$-re illetve $B'(p)$-re. Ugyanakkor polimatroidok és kontra-polimatroidok között nincs ilyen megfelelés, mint ahogy $P(b)$ és $C(p)$ között sincs. Például látjuk majd, hogy egy $P(b)$ polimatroid egyértelműen meghatározza az őt definiáló b polimatroid-függvényt, ugyanakkor $C(p)$ csak nemnegatív szupermoduláris p-re határozza meg p-t (amikoris $S'(p) = C(p)$). A 3.4.4 állításban belátjuk, hogy bármilyen szupermoduláris p esetén a $C(p)$ poliéder kontra-polimatroidot alkot.

Végül, ha (p, b) paramoduláris, akkor $Q(p, b)$ **általánosított polimatroid** (vagy röviden **g-polimatroid**.) A (p, b) pár a Q **határpár**ja, p a Q **alsó**, b pedig a **felső határfüggvény**e. Megállapodunk abban, hogy az üres halmazt is g-polimatroidnak tekintjük, bár látni fogjuk, hogy ez nem definiálható paramoduláris párral, más szóval, paramoduláris pár által definiált g-polimatroid sohasem üres. Később igazolni fogjuk, hogy metsző paramoduláris (p, b) pár esetén is $Q(p, b)$ (esetleg üres) g-polimatroid. Ugyanakkor a 3.3.6 tételben látjuk majd, hogy nemüres g-polimatroid egyértelműen meghatározza a határpárját. Az alábbi tétel előre jelzi, hogy az általánosított polimatroid fogalma rászolgál a nevére.

TÉTEL 3.1.4 *Polimatroid, szub- és szupermoduláris poliéder* (és így egy kontra-polimatroid)*, bázis-poliéder mindegyike g-polimatroid.*

Biz. Legyen b polimatroid-függvény. Definiáljuk a p függvényt azonosan nullának. Ekkor b monotonitása miatt fennáll a kereszt-egyenlőtlenség és így (p, b) paramoduláris. A definícióból adódik, hogy $P(b) = Q(p, b)$.

Legyen b teljesen szubmoduláris. Definiáljuk a p függvényt az üres halmazon nullának, másutt $-\infty$-nek. Ekkor (p, b) paramoduláris és $S(b) = Q(p, b)$. Hasonlóképp, adott p teljesen szupermoduláris függvényre definiáljuk a b függvényt az üres halmazon nullának, másutt $+\infty$-nek. Ekkor (p, b) paramoduláris és $S'(p) = Q(p, b)$.

Végül legyen $B(b)$ bázis-poliéder. Legyen p a b komplementere, (azaz $p(X) := b(S) - b(S - X)$). Ekkor p szupermoduláris, illeszkedik b-hez és $Q(p, b) = B(b)$. $\bullet$

A 3.1.3 tételből rögtön kiolvasható az alábbi eredmény.

Következmény 3.1.5 *Ha a b_1 és b_2 szubmoduláris függvények különbsége monoton növő, akkor az $S(b_1)$ és $S(b_2)$ szubmoduláris poliéderek metszete is szubmoduláris poliéder, nevezetesen $S(b)$, ahol b-t (3.5) definiálja.*

Gyakorlat 3.10 *Legyen p olyan teljesen szupermoduláris függvény, amelynek véges értékei nemnegatívok. Definiáljuk a p' függvényt a $p'(X) := \max\{p(X), 0\}$ képlettel,* (ami a monotonitás miatt azzal ekvivalens, hogy a $-\infty$ függvényértékeket nullára cseréljük)*. Igazoljuk, hogy p' teljesen szubmoduláris.*

Gyakorlat 3.11 *Igazoljuk, hogy tetszőleges b nemnegatív szubmoduláris függvényre $P(b)$ polimatroid.*

Feladat 3.12 *A (p, b) paramoduláris párral megadott $Q(p, b)$ g-polimatroid akkor és csak akkor bázis-poliéder, ha $p(S) = b(S)$.*

3.1.3 Példák

Tégla, sáv

Legyenek $f : S \to \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$ és $g : S \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ egészértékű függvények, melyekre $f \leq g$. A $T(f, g) := \{x \in \mathbf{R}^S : f \leq x \leq g\}$ poliédert **téglá**nak nevezzük. A $g \equiv \infty$ speciális esetben a $T(f\leq)$, míg $f \equiv -\infty$ esetén a $T(\leq g)$ jelölést használjuk, melyek neve **felső** illetve **alsó térszöglet**. Ennek megfelelően, amikor az S alaphalmazra nem akarunk utalni, az $\mathbf{R}^S_+$ nemnegatív térszögletre a $T(0_\leq)$ jelölést használjuk. Legyen $\alpha \leq \beta$ két szám. A $K(\alpha, \beta) := \{x \in \mathbf{R}^S : \alpha \leq x(S) \leq \beta\}$ poliéder neve **sáv**. Ha $\alpha = \beta$, úgy a sáv egy hipersíkot alkot, melynek jele $K(= \alpha)$. Ha $\alpha = -\infty$ vagy ha $\beta = \infty$, úgy a megfelelő sávokra a $K(\leq \beta)$ illetve $K(\alpha \leq)$ jelölést használjuk. Ilyenkor a sáv egy féltér.

Gyakorlat 3.13 *Igazoljuk, hogy mind a tégla, mind a sáv g-polimatroid.*

Később látni fogjuk, hogy g-polimatroid metszete téglával és sávval g-polimatroid.

Irányításokból

Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf. Egy $m : V \to \mathbf{Z}$ egészértékű vektort **befok-vektor**nak nevezünk, ha G-nek létezik olyan irányítása, amelyben minden v pont befoka $m(v)$.

Lemma 3.1.1 (Irányítási lemma) *Adott $m : V \to \mathbf{Z}$ vektor akkor és csak akkor befok-vektor, ha $m(V) = |E|$ és*

$$m(X) \geq i_G(X) \text{ minden } X \subseteq V\text{-re,} \tag{3.7}$$

vagy ekvivalensen

$$m(Y) \leq e_G(Y) \text{ minden } Y \subseteq V\text{-re,} \tag{3.8}$$

ahol $i_G(X)$ az X által feszített élek száma, míg $e_G(Y)$ azon éleké, melyeknek legalább az egyik végpontja X-ben van (azaz $e_G(Y) = |E| - i_G(V - Y)$). •

Következmény 3.1.6 *Egy gráf irányításainak befok-vektorai bázis-poliédert feszítenek, éspedig $B(e_G) = B'(i_G)$-t .*

Biz. Az e_G függvény szubmoduláris, ezért $B(e_G)$ bázis-poliéder és így csúcsai egészek, vagyis $B(e_G)$ éppen a befok-vektorok konvex burka. Az e_G és i_G függvények definíciójából kiolvasható, hogy $B(e_G) = B'(i_G)$. •

Feladat 3.14 *Igazoljuk, hogy ha b szubmoduláris, p szupermoduláris és a $b(X) + p(\bar{X})$ függvény monoton növő, akkor (p, b) paramoduláris.*

2012. december 9. szub1

3.2 Két alaperedmény

3.2.1 Diszkrét szeparáció

Ismeretes, hogy ha egy konvex függvény majorál egy konkávot, akkor elválaszthatók lineáris függvénnyel. Ezért a tételből következik, hogy ha p és b teljesen szuper- illetve szubmoduláris függvények, melyekre $p \leq b$, akkor Ekkor van olyan $m : S \to \mathbf{R}$ függvény, amelyre $p(X) \leq m(X) \leq b(X)$ minden $X \subseteq S$ részhalmazra fennáll. Ennek diszkrét megfelelője az alábbi eredmény.

TÉTEL 3.2.1 (Diszkrét szeparációs tétel) *Legyen az S alaphalmazon $p : 2^S \to \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$ egészértékű szupermoduláris függvény és $b : 2^S \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ egészértékű szubmoduláris függvény, melyekre $p(\emptyset) = b(\emptyset) = 0$ és $p \leq b$. Ekkor van olyan egészértékű $m : S \to \mathbf{Z}$ függvény, amelyre $p(X) \leq m(X) \leq b(X)$ minden $X \subseteq S$ részhalmazra fennáll, vagy tömören van olyan egészértékű moduláris m függvény, amelyre $p \leq m \leq b$.*

Biz. A 3.4.5 következmény miatt feltehető, hogy b mindenütt véges-értékű. Indirekt tegyük fel, hogy nem létezik szeparáló m, és vegyünk egy olyan ellenpéldát, amelyben $|S|$ minimális és ezen belül a két függvény $\delta(p, b) := \sum_{X \subseteq S}[b(X) - p(X)]$ 'távolsága' minimális. Ekkor nem létezik olyan b_1 szubmoduláris függvény, amelyre $p \leq b_1 \leq b, b_1 \neq b$, mert különben $\delta(p, b_1) < \delta(p, b)$ miatt létezne b_1-t és p-t elválasztó moduláris m, ami persze b-t és p-t is elválasztaná.

A szubmodularitás miatt minden $v \in S$-re $b(v) + b(S - v) \geq b(S)$. Amennyiben minden $v \in S$-re egyenlőség állna, akkor a 3.1.2 következmény miatt b moduláris és persze elválasztja p-t és b-t. Van tehát olyan s elem, amelyre $b(S - s) + b(s) > b(S)$. Definiáljuk a b_1 függvényt: $X \subseteq S - s$ esetén $b_1(X) := b(X)$, míg $s \in X$ esetén $b_1(X) := \min\{b(X), b(X - s) + b(s) - 1\}$. Könnyű ellenőrizni, hogy b_1 szubmoduláris. (A tisztánlátás végett megjegyezzük, hogy b_1 amúgy nem más, mint azon metsző szubmoduláris függvény reszeltje, amely b-ből keletkezik a $b(s)$ értékének eggyel való csökkentésével.)

Nyilván $b_1 \leq b$, és $b_1 \neq b$, hiszen $b_1(s) = b(s) - 1$, ugyanakkor minden $X \subseteq S$-re fennáll $b_1(X) \geq b(X) - 1$, miután $b(X - s) + b(s) \geq b(X)$. Amint az előbb láttuk, nem lehet $p \leq b_1$, ezért van olyan T halmaz, amelyre $p(T) > b_1(T)$. Itt T nem lehet üres halmaz és S sem, hiszen $b(S-s)+b(s) > b(S)$ folytán $b_1(S) = b(S) \geq p(S)$. Mivel $p(T) \geq b_1(T) + 1 \geq b(T) \geq p(T)$, így $p(T) = b(T)$.

Mármost T mentén "kettévághatjuk" a problémát a következő értelemben. Legyen b' és p' rendre a b és p megszorítása T-re. Mivel $|T| < |S|$, létezik egy $m' : T \to \mathbf{Z}$ függvény, melyre $p' \leq m' \leq b'$.

Minden $X \subseteq S - T$ halmazra legyen $b''(X) := b(X \cup T) - b(T)$ és $p''(X) := p(X \cup T) - p(T)$ (vagyis a b illetve p összehúzása $S - T$-re). Ekkor b'' szubmoduláris, p'' szupermoduláris, és $b(T) = p(T)$ valamint $p \leq b$ miatt $p'' \leq b''$. Mivel $|S - T| < |S|$, létezik egy $m'' : (S - T) \to \mathbf{Z}$ függvény, melyre $p'' \leq m'' \leq b''$. Legyen $m(s) := m'(s)$, ha $s \in T$, és $m(s) := m''(s)$, ha $s \in S - T$. Tetszőleges $X \subseteq S$ halmazra $m(X) = m'(X \cap T) + m''(X - T) \leq b'(X \cap T) + b''(X - T) = b(X \cap T) + [b(X - T \cup T) - b(T)] = b(X \cap T) + b(X \cup T) - b(T) \leq b(X)$, vagyis $m(X) \leq b(X)$, és analóg módon kapjuk, hogy $p(X) \leq m(X)$. Vagyis m szeparálja p-t és b-t, ellentmondásban az indirekt feltevéssel. •

A szeparációs tétel ekvivalens megfogalmazásban azt mondja ki, hogy ha p és b teljesen szuper- illetve szubmoduláris függvények, melyekre $p \leq b$, akkor $S'(p) \cap S(b)$ nem üres és egész p, b esetén tartalmaz egész pontot.

A 3.5.1 tétel és a diszkrét szeparációs tétel összeillesztéséből közvetlenül kapjuk az alábbit.

TÉTEL 3.2.2 *Legyen S alaphalmaz, $p : 2^S \to \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$ lényegében szupermoduláris függvény és $b : 2^S \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ lényegében szubmoduláris függvény, melyekre $p(\emptyset) = b(\emptyset) = 0$. Akkor és csak akkor van olyan egészértékű (teljesen) moduláris m függvény, amelyre $p \leq m \leq b$, ha bármely $Z \subseteq S$ részhalmazra és a Z-nek $\{X_1, \ldots, X_k\}$ illetve $\{Y_1, \ldots, Y_l\}$ partícióira fennáll, hogy*

$$\sum_i p(X_i) \leq \sum_j b(Y_j). \tag{3.9}$$

Matroid metszettétel

Megjegyzendő, hogy a 3.2.1 tételből rögvest következik Edmonds matroid metszettételének az az alakja, miszerint az $M_i = (S, r_i)$ matroidoknak ($i = 1, 2$) akkor és csak akkor van közös bázisa, ha $(*)$ $r_1(X) + r_2(S - X) \geq k$ fennáll minden $X \subseteq S$ részhalmazra, ahol $k = r_i(S)$. Valóban, legyen $b := r_1$ és definiáljuk p-t a $p(X) := k - r_2(S - X)$ képlettel. A 3.2.1 tétel feltételei fennállnak, így létezik $m : S \to \mathbf{Z}$ szeparáló függvény. Mivel $p(s) = 0$ és $b(s) \leq 1$, így m $0-1$ értékű. Legyen $B := \{s : m(s) = 1\}$. $p(S) = b(S) = k$ miatt $|B| = m(S) = k$. Az $m \leq b$ miatt B független M_1-ben, hiszen $|B \cap X| = m(X) \leq b(X) = r_1(X)$. A $p \leq m$ miatt B az M_2-ben is független, mivel $|B \cap X| = k - m(S - X) \leq k - p(S - X) = r_2(X)$.

3.2.2 Szubmoduláris áramok

Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, $f : A \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $g : A \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ két kapacitás függvény, melyekre $f \leq g$. Ezen kívül $b : 2^V \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ teljesen szubmoduláris halmazfüggvény, amelyre $b(\emptyset) = b(V) = 0$. Az élhalmazon értelmezett $x : A \to \mathbf{R}$ vektort **szubmoduláris áram**nak nevezzük, ha minden $Z \subseteq V$-re

$$\lambda_x(Z) := \varrho_x(Z) - \delta_x(Z) \leq b(Z). \tag{3.10}$$

A szubmoduláris áram **megengedett**, ha $f \leq x \leq g$. A megengedett szubmoduláris áramok $Q(f, g; b)$-vel jelölt halmazát **szubmoduláris áram poliéder**-nek hívjuk. Amennyiben b azonosan 0, visszajutunk az áram fogalmához, hiszen $\lambda_x \leq 0$-ból $\lambda_x = 0$ automatikusan következik.

Állítás 3.2.1 *Minden x-re λ_x moduláris.*

Biz. Tetszőleges $Z \subseteq V$ halmazra $\sum_{v\in Z} \lambda_x(v) = \sum_{v\in Z} \varrho_x(v) - \sum_{v\in Z} \delta_x(v) = [\varrho_x(Z) + i_x(Z)] - [\delta_x(Z) + i_x(Z)] = \varrho_x(Z) - \delta_x(Z) = \lambda_x(Z)$. •

Ebből következik, hogy egy $x \in \mathbf{R}_A$ vektor pontosan akkor szubmoduláris áram, ha a $(\lambda_x(v) : v \in V) \in \mathbf{R}^V$ vektor benne van a b által meghatározott $B(b) \subseteq \mathbf{R}^V$ 0-bázis-poliéderben. Miután egy bázis-poliédert többféleképp is meg lehet adni, a szubmoduláris áramokra is hasonló igaz. Például, ha p teljesen szupermoduláris, akkor $B'(p)$ bázis poliéder és ilyenkor $(\lambda_x(v) : v \in V) \in B'(p)$ azzal ekvivalens, hogy $\varrho_x(Z) - \delta_x(Z) \geq p(Z)$ minden $Z \subseteq V$-re. Másszóval a $Q'(f, g; p) := \{x : f \leq x \leq g, \lambda_x(Z) = \varrho_x(Z) - \delta_x(Z) \geq p(Z)$ minden $Z \subseteq V$-re$\}$ „szupermoduláris áram" poliéder is szubmoduláris áram poliéder, és ennek alapján tehát szubmoduláris áram helyett épp oly joggal beszélhetnénk szupermoduláris áramról is.

Hasonlóképp, mivel b nagyrészt szubmoduláris függvényre $B(b)$ (esetleg üres) bázis poliédert definiál, ezért $Q(f, g; b)$ ilyenkor is szubmoduláris áram poliéder.

Az áramok megengedettségére vonatkozó Hoffman tétel mintájára levezetjük a szubmoduláris áramokra vonatkozó analóg jellemzést.

TÉTEL 3.2.3 *Adottak $f \leq g$ korlátok az éleken, továbbá b teljesen szubmoduláris függvény. Akkor és csak akkor létezik megengedett szubmoduláris áram, ha*

$$\varrho_f(Z) - \delta_g(Z) \leq b(Z) \text{ minden } Z \subseteq V\text{-re.} \tag{3.11}$$

Ha f, g, b mindegyike egészértékű, akkor (4.7) *fennállás esetén létezik egészértékű megengedett szubmoduláris áram.*

Biz. Tegyük fel, hogy z megengedett szubmoduláris áram. Ekkor $\varrho_f(Z) - \delta_g(Z) \leq \varrho_z(Z) - \delta_z(Z) = \varrho_z(Z) - \delta_z(Z) \leq b(Z)$, vagyis a feltétel szükséges.

Az elegendőség igazolásához szükségünk van az alábbi lemmára.

Lemma 3.2.1 *Legyen $X \subseteq V$-re*

$$p(X) := \varrho_f(X) - \delta_g(X). \tag{3.12}$$

Ekkor $p(U) + p(Z) \leq p(U \cap Z) + p(U \cup Z)$ minden $U, Z \subseteq V$ részhalmazra, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $f(e) = g(e)$ minden olyan e élre, amelynek egyik vége $U - Z$-ban van, a másik pedig $Z - U$-ban.

Biz. A lemma következik az alábbi azonosságból:

$$p(U) + p(Z) = p(U \cap Z) + p(U \cup Z) + \sum [f(e) - g(e) : e \text{ az } U - Z \text{ és a } Z - U \text{ között vezet}]. \tag{3.13}$$

Ez pedig azért igaz, mert minden élnek a két oldalhoz könnyen ellenőrizhetően ugyanaz a hozzájárulása. •

Ha egy e élen nincs alsó korlát (azaz $f(e) = -\infty$), úgy $f(e)$-t kellően kicsiny, de véges értékre változtatva a (4.7) feltétel fennmarad. Így minden e élre feltehető, hogy $f(e) > -\infty$ és analóg módon $g(e) < \infty$.

Egy e **élt pontos**nak hívunk, ha $f(e) = g(e)$. Egy $Z \subseteq V$ **részhalmaz pontos**, ha $p(Z) = b(Z)$. Tegyük fel indirekt, hogy a tétel nem igaz és legyen D olyan ellenpélda, amelyben a pontos élek és a pontos halmazok együttes száma maximális.

1. eset *Minden él pontos.* Legyen $x :\equiv f$. Most $\varrho_x(Z) - \delta_x(Z) = \varrho_f(Z) - \delta_f(Z) = \varrho_f(Z) - \delta_g(Z) \leq b(Z)$, vagyis x megengedett szubmoduláris áram, ellentmondás.

2. eset $f(e_0) < g(e_0)$ *valamely e_0 élre.* Állítjuk, hogy van olyan U pontos halmaz, amelybe e_0 belép. Ha nem volna, akkor $f(e_0)$-t növelhetjük (4.7) megsértése nélkül egészen addig, amíg vagy egy új pontos halmaz keletkezik (amelybe e_0 belép) vagy e_0 válik pontossá. A módosított alsó korlát f'-ra nézve a pontos élek és halmazok együttes száma nagyobb, mint f-re nézve, így ez már nem ellenpélda, azaz létezik x szubmoduláris áram, amelyre $f' \leq x \leq g$. Ekkor x megengedett f és g-re nézve is, ellentmondás.

Hasonlóan belátható, hogy létezik olyan Z pontos halmaz, amelyből e_0 kilép. Most $b(U) + b(Z) = p(U) + p(Z) \leq p(U \cap Z) + p(U \cup Z) \leq b(U \cap Z) + b(U \cup Z) \leq b(U) + b(Z)$. Ezért mindenhol egyenlőség áll, speciálisan $p(U) + p(Z) = p(U \cap Z) + p(U \cup B)$. De ez ellentmond a lemmának, mivel $f(e_0) < g(e_0)$. Ezen ellentmondás mutatja, hogy nem létezhet ellenpélda, ami a (4.7) feltétel elegendőségét igazolja. • •

A megengedettségi tételből levezetjük a szeparációs tételt, melynek bizonyítása ugyan standard lépéseket követett (elválasztás pontos halmaz mentén, elemi redukció) de azért szükség volt néhány megelőző észrevételre is.

Alternatív bizonyítás a szeparációs tételre

Biz. Az elegendőséghez legyen S' és S'' az S-nek két diszjunkt példánya. Legyen $V := S' \cup S''$, $A := \{s's'' : s \in S\}$ és $D = (V, A)$. Legyen $-f := g := \infty$ és $X \subseteq S$ esetén legyen $b(X'') := b^*(X)$ és $b(X') := -p^*(X)$. Nyilván b szubmoduláris. Alkalmazzuk a 4.1.5 tételt erre a szubmoduláris áram problémára. Állítjuk, hogy (4.7) fennáll. Ez automatikusan teljesül, amikor $\varrho_f(Z) - \delta_g(Z) = -\infty$, így feltehetjük, hogy $Z = X' \cup X''$ valamely ($X \subseteq S$) halmazra. Ekkor $\varrho_f(Z) - \delta_g(Z) = 0$, és akkor (4.7) tényleg következik a $p^* \leq b^*$ feltevésből. A 4.1.5 tétel szerint létezik x szubmoduláris áram, amely rádásul egészértékű, ha p^* és b^* azok. Most az $m(s) := x(s's'')$ $(s \in S)$ választással megkapjuk a keresett elválasztó moduláris függvényt. •

Fordítva

A tisztánlátás kedvéért megmutatjuk, hogy a 4.1.5 megengedettségi tétel is levezethető a szeparációs tételből. Ehhez szükségünk van Hoffman megengedett áram tételének arra a kitejesztésére, amely szerint adott $m : V \to \mathbf{Z}$ egészértékű függvényhez, amelyre $m(V) = 0$ egy D digráfban akkor és csak akkor létezik olyan $x : A \to \mathbf{Z}$ egész vektor, amelyre $f \leq x \leq g$ és $\lambda_x = m$, ha $\varrho_f(X) - \delta_g(X) \leq m(X)$ minden $X \subseteq V$-re. Ez $m \equiv 0$-ra éppen a Hoffman tétel, de de rögtön következik is belőle: a digráfot bővítsük ki egy új t ponttal és minden u csúcsra egy ut éllel, melyekre legyen $f(ut) := g(ut) := m(u)$, majd a kapott digráfra alkalmazzuk a Hoffman tételt.

A 4.1.5 tétel (nemtriviális irányának) bizonyítására térve a (4.7) feltétel miatt $b(V) \geq 0$, és valójában feltehetjük, hogy $b(V) = 0$, mert $b(V)$ értékének csökkentése a szubmodularitást nem rontja el. Definiáljuk a p függvényt a $p(X) := \varrho_f(X) - \delta_g(X)$ képlettel. A 4.1.2 lemma alapján p teljesen szupermoduláris. A (4.7) feltétel szerint $p \leq b$, így létezik $m : V \to \mathbf{Z}$ szeparáló függvény, amelyre $p(V) = 0 = b(V)$ miatt $m(V) = 0$. A fenti Hoffman variáció miatt létezik olyan $x : A \to \mathbf{Z}$ egész vektor, amelyre $f \leq x \leq g$ és $\lambda_x = m$. De ekkor $\varrho_x(Z) - \delta_x(Z) = \lambda_x(X) = m(X) \leq b(X)$, vagyis x megengedett szubmoduláris áram.

2012. december 9. ketalap

3.3 KONSTRUKCIÓK, MŰVELETEK

3.3.1 Néhány egyszerűbb művelet

Direkt összeg

Legyen b_1 és b_2 a diszjunkt S_1 illetve S_2 halmazokon értelmezett szubmoduláris függvény. Ekkor az $S = S_1 \cup S_2$ alaphalmazon a $b(X) := b_1(X \cap S_1) + b_2(X \cap S_2)$ képlettel értelmezett függvény szubmoduláris, amelyet a b_1 és a b_2 **direkt összegé**nek nevezünk és $b = b_1 \oplus b_2$-vel jelölünk. A direkt összeg értelemszerűen kiterjeszthető több összeadandóra. Az $S(b)$ szubmoduláris poliédert az $S(b_1)$ és $S(b_2)$ **direkt összegé**nek nevezzük. Általánosított polimatroidokra a direkt összeg fogalmát analóg értelmezzük. Adódik, hogy bázis-poliéderek direkt összege is bázis-poliéder.

Eltolás, tükrözés

Állítás 3.3.1 *Egy $Q(p, b)$ g-polimatroid vektorral való eltoltja és origóra való tükörképe is g-polimatroid.*

Biz. A $Q(p, b)$ g-polimatroid v vektorral való eltoltja $Q(p, b) + v = Q(p_1, b_1)$, ahol $p_1(X) = p(X) + v(X), b_1(X) = b(X) + v(X)$. $Q(p, b)$ origóra való tükörképe $Q(-b, -p)$. •

Gyakorlat 3.15 *Igazoljuk, hogy bázis-poliéder eltoltja és tükörképe bázis-poliéder.*

Feladat 3.16 *Igazoljuk, hogy egy M matroid duálisának poliéderét úgy kaphatjuk meg, hogy a matroid poliédernek origóra vett tökörképét eltoljuk az $(1, 1, \dots, 1)$ vektorral.*

Megszorítás, összehúzás

Legyen b az S alaphalmazon értelmezett szubmoduláris függvény és $T \subseteq S$. A b megszorítása a T részhalmazaira szintén szubmoduláris, melynek jele $b|T$. Amennyiben $b(T)$ véges, az $S-T$ halmazon a $b'(X) := b(X \cup T) - b(T)$ képlettel definiált b' függvény könnyen láthatóan szubmoduláris. Ezt a b összehúzottjának nevezzük $S - T$-re. Jele b/T vagy $b \cdot (S-T)$. Ez a matroid összehúzási fogalom általánosítása (ahol az elnevezés a grafikus matroid esetén a gráf bizonyos éleinek gráfbeli összehúzásából eredt).

Elem párhuzamos többszörözése vagy felfújása

Legyen b halmazfüggvény az S alaphalmazon. Egy $t \in S$ elem párhuzamos többszörözésén azt a műveletet értjük, amikor a t elemet egy T nemüres halmazzal cseréljük ki és a keletkező $S' = S - t \cup T$ halmazon b'-n azt a függvényt értjük, amelyre $X \subseteq S' - T$ esetén $b'(X) := b(X)$, míg $X \cap T \neq \emptyset$-re $b'(X) := b(X - T + t)$. Nyilván, ha b szubmoduláris, úgy b' is az.

3.3.2 Vetítés

Legyen s az S valamely eleme. Egy v vektor s mentén történő **vetület**én azt az eggyel kisebb dimenziós vektort értjük, amely v-ből az s-nek megfelelő komponens eltörlésével keletkezik. Egy Q **poliéder s-mentén történő vetítése** azt jelenti, hogy Q összes elemét vetítjük s mentén. Természetesen a vetítés fogalma kiterjeszthető az S valamely Z részhalmaza mentén történő vetítésre is.

Legyen $Q = Q(p, b)$ g-polimatroid, $T \subset S$ és $S' := S - T$. Jelölje a p illetve a b megszorítását S'-re rendre p' és b'. Ekkor (p', b') paramoduláris, és így $Q(p', b')$ g-polimatroid.

TÉTEL 3.3.1 (Vetítési tétel) *A (p, b) paramoduláris párhoz tartozó $Q = Q(p, b)$ g-polimatroid egy $T \subset S$ halmaz elemei mentén való Q' vetülete a $Q(p', b')$ g-polimatroid. Egészértékű (p, b) esetén a vetület bármely egész eleme előáll a Q egy egész elemének vetületeként.*

Biz. Indukció miatt elég a tételt arra az esetre igazolni, amikor T az egyetlen s elemből áll. Világos, hogy Q' bármely eleme benne van $Q(p', b')$-ben, azaz $Q' \subseteq Q(p', b')$.

A fordított irányú tartalmazáshoz belátjuk, hogy tetszőleges $x' \in Q(p', b')$ elem előáll egy $x \in Q$ elem s menti vetületeként. Ennek érdekében legyen X, Y két s-t tartalmazó halmaz. Állítjuk, hogy

$$b(X) - x'(X - s) \geq p(Y) - x'(Y - s). \tag{3.14}$$

Valóban, a kereszt-egyenlőtlenséget használva kapjuk, hogy $b(X) - p(Y) \geq b(X - Y) - p(Y - X) \geq x'(X - Y) - x'(Y - X) = x'(X - s) - x'(Y - s)$, azaz (3.14) fennáll. Ebből adódik, hogy $m := \min\{b(X) - x'(X - s) : s \in X \subseteq S\} \geq M := \max\{p(X) - x'(X - s)\}$. Most tetszőleges α értékre, amelyre $m \geq \alpha \geq M$ az $x := (x', \alpha)$ benne van Q-ban. Ráadásul, ha p, b, x' mind egészértékű, akkor α is választható annak. •

Ez a bizonyítás nem más, mint a Fourier-Motzkin elimináció alkalmazása a (3.6) poliéderre.

Következmény 3.3.2 *Paramoduláris (p,b) párral adott $Q(p,b)$ g-polimatroid nem üres, sőt egészértékű (p,b) esetén egész pontot is tartalmaz.* •

Bázis-poliéderek és g-polimatroidok kapcsolata

Azt már láttuk hogy minden bázis-poliéder g-polimatroid. Most megmutatjuk, hogy minden g-polimatroid egy bázis-poliéder vetülete. E célból legyen s^* egy új elem az S-en kívül. Legyen adott az S részhalmazain értelmezett p és b függvény. Definiáljuk az $S^* := S + s^*$ részhalmazain értelmezett b^* és p^* függvényeket a következőképpen:

$$b^*(X) = \begin{cases} b(X) & \text{ha } X \subseteq S \\ -p(S-X) & \text{ha } s^* \in X, \end{cases} \tag{3.15}$$

$$p^*(X) = \begin{cases} b(X) & \text{ha } X \subseteq S \\ -b(S-X) & \text{ha } s^* \in X. \end{cases} \tag{3.16}$$

A definíciókból rögtön adódik:

Állítás 3.3.2 *$b^*(S^*) = p^*(S^*) = 0$. $B(b^*) = B'(p^*) = Q(p^*, b^*)$. $Q(p,b)$ a $B(b^*)$ s^* menti vetülete. b^* akkor és csak akkor teljesen* (keresztező) *szubmoduláris, ha (p,b)* (metsző) *paramoduláris.* •

TÉTEL 3.3.3 *Paramoduláris (p,b) párral adott $Q := Q(p,b)$ g-polimatroid előáll 0-bázis-poliéder vetületeként, nevezetesen Q a $B(b^*)$ vetülete s^* mentén.* •

Ez a kapcsolat lehetővé teszi, hogy a bázis-poliéderekre megfogalmazott tételeket majd g-polimatroidokra is átvigyük.

Oldal

Legyen b teljesen szubmoduláris és adott $T \subseteq S$ halmazra tekintsük a $B(b)$ bázis-poliédernek a T által meghatározott $B_T := \{x \in B(b), \widetilde{x}(T) = b(T)\}$ oldalát. Jelölje b_T a $b_1 := b|T$ és a $b_2 : b \cdot (S-T)$ függvények direkt összegét, azaz $b_T(X) = b(T \cap X) + [b((X-T) \cup T) - b(T)] = b(T \cap X) + b(T \cup X) - b(T)$.

TÉTEL 3.3.4 *A $B(b)$ bázis-poliéder $T \subseteq S$ által meghatározott oldala nemüres bázis-poliéder, nevezetesen a $B(b_1)$ és a $B(b_2)$ bázis-poliéderek direkt összege, azaz $B_T = B(b_T)$.*

Biz. Mivel $B(b_T)$ (nemüres) bázis-poliéder, elegendő a $B_T = B(b_T)$ egyenlőséget belátni.

$x \in B_T$ esetén egyrészt $\widetilde{x}(S) = b(S)$ és $\widetilde{x}(T) = b(T) = b_T(T)$ és így $\widetilde{x}(S-T) = b_T(S-T)$, másrészt $\widetilde{x}(X) = \widetilde{x}(T \cap X) + \widetilde{x}(T \cup X) - \widetilde{x}(T) \leq b(T \cap X) + b(T \cup X) - b(T) = b_T(X)$, azaz $x \in B(b_T)$, vagyis $B'_T \subseteq B(b_T)$.

Fordítva, $x \in B(b_T)$ esetén egyrészt $\widetilde{x}(T) = b_T(T) = b(T)$, másrészt $b_T(X) = b(T \cap X) + b(T \cup X) - b(T) \leq b(X)$ miatt $\widetilde{x}(X) \leq b_T(X) \leq b(X)$, és így $x \in B_T$, tehát $B(b_T) \subseteq B_T$. •

TÉTEL 3.3.5 *Egy $Q = Q(p,b)$ g-polimatroid T által meghatározott $Q_T := \{x \in Q : \widetilde{x}(T) = b(T)\}$ oldala nemüres g-polimatroid, amely egész, ha (p,b) egészértékű.*

Biz. A 3.3.3 tétel szerint Q egy $B(b^*)$ bázis-poliéder vetülete és ezért Q_T a $B' := \{x^* \in B(b^*) : x^*(T) = b^*(T)\}$ oldal vetülete. A 3.3.4 tétel szerint B' is bázis-poliéder, így B' minden vetülete (nemüres) g-polimatroid. •

Ebből rögtön kiolvasható az alábbi fontos eredmény.

TÉTEL 3.3.6 *$Q = Q(p,b)$ g-polimatroid egyértelműen meghatározza az őt definiáló paramoduláris párt, éspedig*

$$b(Z) = \max\{\widetilde{x}(Z) : x \in Q\} \quad \text{és} \quad p(Z) = \min\{\widetilde{x}(Z) : x \in Q\}. \tag{3.17}$$

Egészértékű (p,b) esetén az optimalizáló x is választható egésznek. •

A tételből következik, hogy ha Q nemüres Q g-polimatroid, akkor az őt definiáló (p,b) paramoduláris pár, Q határpárja egyértelmű. A 3.3.6 és 3.1.4 tételből következik, hogy $S(b)$ szubmoduláris poliéder határfüggvénye egyértelmű. Hasonlóképp, egy nemüres $P(b)$ polimatroidé és egy B(b) bázis-poliéderé is. Az $S'(p)$ szupermoduláris poliéder is meghatározza a határfüggvényét, ugyanakkor a $C(p)$ kontra-polimatroid csak akkor, ha p nemnegatív.

Speciális esetként megfogalmazzuk a 3.3.6 tétel alábbi következményét.

Következmény 3.3.7 *Ha b szubmoduláris, akkor minden $Z \subseteq S$-re* $b(Z) = \max\{\widetilde{x}(Z) : x \in S(b)\}$. •

TÉTEL 3.3.8 *Egészértékű paramoduláris (p,b) pár által definiált $Q = Q(p,b)$ g-polimatroid egész poliéder.*

Biz. A Q egy $\{x \in Q, \widetilde{x}(Z) = b(Z)\}$ oldala a 3.3.6 tétel miatt nemüres és tartalmaz egész pontot. •

2012. december 9. uszub2

3.4 METSZET TÉGLÁVAL ÉS SÁVVAL

Két matroid közös független halmazainak rendszere általában nem alkot matroidot, és erre alapítva nem nehéz belátni, hogy két g-polimatroid metszete sem mindig g-polimatroid. Van azonban néhány fontos speciális eset, amikor mégis az, és ebben a szakaszban ezekről nyújtunk áttekintést. Nevezetesen, belátjuk, hogy egy g-polimatroid metszete téglával vagy sávval g-polimatroidot alkot. További célunk lesz meghatározni a metszet nemürességének a feltételét valamint nemüresség esetén a metszet határpárjának meghatásozását. Ezek különösen hasznosnak bizonyulnak olyasféle gráf-optimalizálási feladatok megoldásánál, mint amilyen egy gráf fokszám-korlátozott k-élösszefüggővé irányításának vagy növelésének kérdése.

3.4.1 Redukció és konvolúció

Legyen b szubmoduláris, $s \in S$ és γ adott (véges) szám. Definiáljuk a b' függvényt a következőképp.

$$b'(X) := \begin{cases} b(X) & \text{ha } X \subseteq S - s \\ \min\{b(X), b(X - s) + \gamma\} & \text{ha } s \in X \subseteq S. \end{cases} \tag{3.18}$$

A b'-t a b s-menti belső redukáltjának, vagy röviden, **redukált**jának hívjuk. Nyilván $b' \leq b$ és ha $\gamma \geq b(s)$, akkor $b(X-s)+b(s) \geq b(X)$ miatt $b' = b$. Egyszerű eset szétválasztással közvetlenül kiolvasható a definícióból:

Állítás 3.4.1 *Szubmoduláris függvény redukáltja is szubmoduláris.* •

Természetesen a redukálást egyszerre több elemen is elvégezhetjük. Legyen $g : S \to \mathbf{R}+\{\infty\}$ függvény, amelyet automatikusan kiterjesztünk a szokásos $\widetilde{g}(X) := \sum[g(v) : v \in X]$ formulával minden $X \subseteq S$ részhalmazra. Legyen

$$(b \bigtriangledown g)(Z) := \min\{b(X) + g(Z - X) : X \subseteq Z\}. \tag{3.19}$$

A $b \bigtriangledown g$ függvényt a b és g **konvolúció**jának nevezzük. A 3.4.1 állítás ismételt alkalmazásával kapjuk a következőt.

TÉTEL 3.4.1 *Ha b szubmoduláris, akkor $b \bigtriangledown g$ szubmoduláris.* •

TÉTEL 3.4.2 *A b szubmoduláris függvény által definiált $S(b)$ szubmoduláris poliéder és a $g : S \to \mathbf{R} + \{\infty\}$ függvény által definiált $T(\leq g) := \{x \in \mathbf{R}^S : x \leq g\}$ alsó térszöglet $M := S(b) \cap T(\leq g)$ metszete szubmoduláris poliéder, melynek határfüggvénye $b' := b \bigtriangledown g$, azaz $M = S(b')$. Ha b és g egészértékű, akkor M egész poliéder.*

Biz. Ha $x \in M$, akkor $X \subseteq Z \subseteq S$ esetén $\widetilde{x}(Z) = \widetilde{x}(X) + \widetilde{x}(Z - X) \leq b(X) + \widetilde{g}(Z - X)$, így $\widetilde{x}(Z) \leq \min\{b(X) + \widetilde{g}(Z - X)\} = b'(Z)$, azaz $x \in S(b')$. A fordított $S(b') \subseteq M$ irány nyilvánvaló és így valóban $M = S(b')$. A 3.4.1 tétel miatt b' teljesen szubmoduláris, ezért M határfüggvénye. Ha b és g egészértékű, úgy a b' konvolúciójuk is az, így a 3.3.8 tétel miatt M egész. •

Monotonná tevés

Rokon konstrukció a külső redukció. Ehhez legyen $s \in S$ adott elem és φ olyan szám, amelyre $\varphi \leq b(s)$. Definiáljuk a b'' függvényt úgy, hogy $s \in X \subseteq S$ esetén $b''(X) := b(X)$, míg $X \subseteq S - s$-re $b''(X) := \min\{b(X), b(X + s) - \varphi)\}$. A b''-t a b s-menti **külső redukált**jának hívjuk. Nyilván $b'' \leq b$, továbbá $b(\emptyset) = 0$ és $\varphi \leq b(s)$ miatt $b''(\emptyset) = \min\{b(\emptyset), b(\{s\}) - \varphi\} = 0$. Könnyen látszik, hogy b'' is szubmoduláris. Természetesen a külső redukálást is végezhetjük egyszerre több elemen. Legyen $f : S \to \mathbf{R} + \{-\infty\}$ függvény, amelyre $\widetilde{f}(X) \leq b(X)$ minden $X \subseteq S$-re. Definájuk b és f-nek $b_{\downarrow f}$-fel jelölt **divolúció**ját a következőképpen:

$$b_{\downarrow f}(Z) := \min\{b(Y) - \widetilde{f}(Y - Z) : Y \supseteq Z\}. \tag{3.20}$$

TÉTEL 3.4.3 *Legyen $f : S \to \mathbf{R} + \{-\infty\}$, melyre $\widetilde{f}(Y) \leq b(Y)$ minden $Y \subseteq S$-re. Ha b szubmoduláris és $b(S) = 0$, akkor a $b_{\downarrow f}$ divolúció is szubmoduláris és $b_{\downarrow f}(\emptyset) = 0$.* •

Egy h halmazfüggvényt kétféleképpen is monoton növővé tehetünk. A h **külső** illetve **belső monotonizált**ját a következő formulákkal definiáljuk.

$$h_{omin}(Z) := \min\{h(X) : X \supseteq Z\}, \tag{3.21}$$

$$h_{imax}(Z) := \max\{h(X) : X \subseteq Z\}. \tag{3.22}$$

Mivel a külső monotonizálást kizárólag nemnegatív szubmoduláris függvényekre alkalmazzuk, a belsőt pedig szupermodulárisokra, a külső-belső jelzőket általában elhagyjuk. A definíció alapján könnyen ellenőrizhető, hogy mindkét függvény monoton növő.

TÉTEL 3.4.4 (i) *Ha $b \geq 0$ szubmoduláris és $b(S)$ véges, akkor b_{omin} polimatroid-függvény és $P(b) = P(b_{\mathrm{omin}})$, azaz $P(b)$ polimatroid.*

(ii) *Ha p szupermoduláris, akkor p_{imax} szupermoduláris és $C(p) = S'(p_{\mathrm{imax}})$, azaz $C(p)$ kontra-polimatroid.*

Biz. A b_{omin} függvény nem más, mint a b függvényre és az azonosan nulla m-re felírt $b_{\downarrow m}$ divolúció, amelyre $b \geq 0$ miatt $b_{omin}(\emptyset) = 0$. Így a 3.4.3 tétel miatt b_{omin} szubmoduláris vagyis b_{omin} polimatroid függvény. Hasonlóképp kapjuk, hogy p_{imax} szupermoduláris és nemnegatív.

$P(b) = P(b_{omin})$ igazolásához egyrészt figyeljük meg, hogy $b_{omin} \leq b$ miatt $P(b) \supseteq P(b')$. Másrészt Z-hez létezik $X \supseteq Z$ halmaz, melyre $b'(Z) = b(X)$, és így $x \in P(b)$ esetén $\widetilde{x}(Z) = \widetilde{x}(X) - \widetilde{x}(Z - X) \leq \widetilde{x}(X) - 0 = b_{omin}(Z)$ miatt $x \in P(b_{omin})$, és így $P(b) \subseteq P(b_{omin})$, tehát valóban $P(b) = P(b_{omin})$.

$C(p) = S'(p_{imax})$ igazolásához egyrészt figyeljük meg, hogy $x \in S'(p_{imax})$ esetén $\widetilde{x}(Z) \geq p_{imax}(Z) \geq \max\{0, p(Z)\}$ miatt $x \in C(p)$, és így $C(p) \supseteq S'(p_{imax})$. Másrészt Z-nek létezik egy X részhalmaza, melyre $p_{imax}(Z) = p(X)$, és így $x \in C(p)$ esetén $\widetilde{x}(Z) = \widetilde{x}(X) + \widetilde{x}(Z - X) \geq p(X) + 0 = p_{imax}(Z)$ miatt $x \in S'(p_{imax})$, és így $C(p) \subseteq S'(p_{imax})$, tehát valóban $C(p) = S'(p_{imax})$. •

Végessé tevés

A konvolúció segítségével belátjuk, hogy tetszőleges szubmoduláris függvény véges értékűvé tehető az eredetileg véges értékek megváltoztatása nélkül:

Következmény 3.4.5 *A b szubmoduláris függvényre legyen $\mathcal{F} := \{x : b(X) < \infty\}$. Tetszőleges nagy $K \geq 0$ számra létezik olyan b' véges értékű szubmoduláris függvény, amelyre $Z \in \mathcal{F}$ esetén $b'(Z) = b(Z)$, míg $Z \in \mathcal{F}$ esetén $b'(Z) \geq K$.*

Biz. Legyen $\mu := K + \max\{|b(X)| : X \in \mathcal{F}\}$ és legyen az $m : S \to \mathbf{Z}$ függvény az azonosan μ. A 3.4.1 tétel miatt a $b' := b \bigtriangledown m$ függvény teljesen szubmoduláris és $b'(Z) = \min\{b(X) + \mu|Z - X|\}$. A μ (kellően nagy) választása miatt egy $Z \in \mathcal{F}$ halmazra a minimum az $X = Z$ halmazon vétetik fel, így $b'(Z) = b(Z)$, míg $Z \in \mathcal{F}$ esetén $b'(Z) = b(X) + \mu|Z - X|$ valamely $X \subset Z$-re, így $b'(Z) \geq b(X) + \mu \geq K$. •

3.4.2 G-polimatroid metszete téglával

TÉTEL 3.4.6 *A $Q(p, b)$ g-polimatroid és a $T(f, g)$ tégla M metszete g-polimatroid. Ha p, b, f, g mind egészértékű, úgy M egész poliéder.*

Biz. Nincs mit bizonyítani, ha M üres, így feltesszük, hogy nem az. A 3.4.2 tételből adódik, hogy egy B bázis-poliéder metszete alsó térszöglettel bázis-poliéder. Miután bázis-poliéder origóra vett tükörképe is az, ezért B metszete egy $T(\geq f)$ felső térszöglettel is bázis-poliéder. A kettő egymás utáni alkalmazásával kapjuk, hogy $B \cap T(f, g)$ bázis-poliéder.

A 3.3.3 tétel szerint Q előáll egy $B(b^*)$ 0-bázis poliéder vetületeként, ahol b^* az $S^* := S + s^*$ alaphalmazon (3.15) által definiált függvény. Legyen $f^*(s) = f(s)$, ha $s \in S$ és $f(s^*) := -\infty$ és legyen $g^*(s) = g(s)$, ha $s \in S$ és $g(s^*) := \infty$. Legyen $M^* := B(b^*) \cap T(f^*, g^*)$. Ekkor egyrészt M^* bázis-poliéder, másrészt M az M^* vetülete s^* mentén. Márpedig a 3.3.1 vetítési tétel miatt bármely M^* g-polimatroid vetülete g-polimatroid, amely ráadásul egész, ha M^* az. •

TÉTEL 3.4.7 *Tegyük fel, hogy az $M := Q(p, b) \cap T(f, g)$ metszet nemüres. Az M g-polimatroid (p', b') határpárja a következő:*

$$p'(Z) = \max\{p(X) - \widetilde{g}(X - Z) + \widetilde{f}(Z - X) : X \subseteq S\}, \tag{3.23}$$

$$b'(Z) = \min\{b(X) - \widetilde{f}(X - Z) + \widetilde{g}(Z - X) : X \subseteq S\}. \tag{3.24}$$

Biz. Csak a b'-re vonatkozó formulát igazoljuk, (3.23) analóg adódik. Jelölje a (3.24)-ben szereplő minimum értékét $\mu(Z)$. A 3.3.6 tételből tudjuk, hogy M-nek van olyan x eleme, amelyre $b'(Z) = \widetilde{x}(Z)$. Emiatt minden $X \subseteq S$ részhalmazra $b'(Z) = \widetilde{x}(Z) = \widetilde{x}(X) - \widetilde{x}(X - Z) + \widetilde{x}(Z - X) \leq b(X) - \widetilde{f}(X - Z) + \widetilde{g}(Z - X) \leq \mu(Z)$. A $b'(Z) = \mu(Z)$ egyenlőség kimutatásához egy olyan X halmazt kell találnunk, amelyre teljesülnek az

$$\widetilde{x}(X) = b(X), \quad \widetilde{x}(X - Z) = \widetilde{f}(X - Z) \text{ és } \widetilde{x}(Z - X) = \widetilde{g}(Z - X) \tag{3.25}$$

optimalitási feltételek.

Nevezzünk egy X halmazt b'-pontosnak, ha $\widetilde{x}(X) = b'(X)$ és p'-pontosnak, ha $\widetilde{x}(X) = p'(X)$. A szokásos szubmodularitási technikával látható, hogy a b'-pontos halmazok metszet-unió zártak továbbá egy b'-pontos és egy p'-pontos halmaz különbsége b'-pontos.

Minden $z \in Z$ elem, amelyre $x(z) < g(z)$, benne van b'-pontos halmazban, különben $x' := x + \Delta \cdot \underline{\chi}_z$ kis Δ-ra M-ben volna, ellentétben x maximális választásával. A z-t tartalmazó b'-pontos halmazok $T_x(z)$ metszete b'-pontos.

Minden $u \in T_x(z)$ elemre egy u-t tartalmazó Y p'-pontos halmaz tartalmazza z-t, mert ha nem tartalmazná, akkor a kereszt-egyenlőtlenség miatt $T_x(z) - Y$ egy z-t tartalmazó b'-pontos halmaz volna. Emiatt bármely

$$t \in T_x(z) - Z \text{ elemre } x(t) = f(t), \tag{3.26}$$

mert ha $x(t) > f(t)$ volna, akkor $x' := x + \Delta \cdot (\underline{\chi}_z - \underline{\chi}_t)$ kis Δ-ra M-ben volna, ellentétben x maximális választásával.

Az $X := \cup\{T_x(z) : z \in Z, x(z) < g(z)\}$ halmaz b'-pontos halmazok uniója lévén maga is b'-pontos, amelyre az X definíció miatt $\widetilde{x}(Z - X) = \widetilde{g}(Z - X)$, továbbá (3.26) miatt $\widetilde{x}(X - Z) = \widetilde{f}(X - Z)$, vagyis teljesülnek az optimalitási feltételek. •

G-polimatroid metszete sávval

Belátjuk, hogy egy g-polimatroid és egy sáv metszete is g-polimatroid.

TÉTEL 3.4.8 *Az $M := Q(p, b) \cap K(\alpha, \beta)$ metszet g-polimatroid. Ha M nemüres, akkor az M (p', b') határpárja a következő.*

$$p'(Z) := \max\{p(Z), \alpha - b(S - Z)\} \tag{3.27}$$

és

$$b'(Z) := \min\{b(Z), \beta - p(S - Z)\}. \tag{3.28}$$

Ha p, b, α, β mind egészértékű, akkor M egész poliéder.

Biz. Mivel M nemüres, így $\beta \geq p(S)$ és $\alpha \leq b(S)$ és ezért $p'(\emptyset) = 0$ és $b'(\emptyset) = 0$. A 3.3.3 következmény szerint Q előáll $Q(p^*, b^*)$ 0-bázis-poliéder vetületeként, ahol b^* és p^* az $S^* = S + s^*$ halmazon (3.15) és (3.16) által definiált függvények. Definiáljuk az $f^* : S^* \to \mathbf{R} + \{-\infty\}$ és $g^* : S^* \to \mathbf{R} + \{\infty\}$ függvényeket a következőképp: $f^*(s) := -\infty$, ha $s \in S$ és $f^*(s^*) := -\beta$ illetve $g^*(s) := \infty$, ha $s \in S$ és $g^*(s^*) := -\alpha$. Tekintsük az $M' := Q(p^*, b^*) \cap T(f^*, g^*)$ metszetet, amely a 3.4.6 tétel szerint egy $Q(p', b')$ g-polimatroid, és amelynek s^*-menti vetülete M. A 3.4.7 tételt S^*, b^*, f^*, g^*-ra alkalmazva azt kapjuk, hogy egy $Z \subseteq S$ halmazra a (3.24)-beli minimumban számbavett érték csak az $X = Z$ és az $X = Z + s^*$ helyen véges, éspedig, rendre $b^*(Z) = b(Z)$ illetve $b^*(Z + s^*) - f^*(s^*) = -p(S - Z) - (-\beta) = \beta - p(S - Z)$, amiből kapjuk (3.28)-t. Hasonlóképp adódik (3.23)-ből (3.27). •

3.4.3 A nemüresség feltétele

Vizsgáljuk meg, hogy egy g-polimatroid metszete téglával vagy sávval mikor nemüres.

TÉTEL 3.4.9 *Legyen (p, b) paramoduláris pár. Tegyük fel az $f : S \to \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$, $g : S \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ függvényekre, hogy $f \leq g$. Az $M := Q(p, b) \cap T(f, g)$ metszet pontosan akkor nemüres, ha*

$$\widetilde{f}(X) \leq b(X) \text{ minden } X \subseteq S\text{-re, és} \tag{3.29}$$

$$\widetilde{g}(X) \geq p(X) \text{ minden } X \subseteq S\text{-re. } \bullet \tag{3.30}$$

Biz. A feltétel nyilván szükséges. Az elegendőséget elég véges értékű f-re és g-re igazolni, hiszen ha például $g(v) = \infty$ valamely $v \in S$ elemre, akkor $g(v)$ értékét kellően nagy (véges) számra módosítva a tégla szűkebb lesz és (3.30) fennmarad. Feltehető továbbá, hogy f maximális abban az értelemben, hogy az $f(s)$ érték semelyik s elemre sem növelhető az $f \leq g$ vagy (3.29) megsértése nélkül, azaz vagy $f(s) = g(s)$ vagy létezik olyan s-t tartalmazó X halmaz, amelyre $\widetilde{f}(X) = b(X)$. (Ha ugyanis valamely s elemen $f(s)$ növelhető lenne, akkor értékét $\min\{g(s), \min\{b(X) - \widetilde{f}(X) : s \in X \subseteq S\}\}$-re növelve egy szűkebb téglát kapunk, amelyre (3.29) és (3.30) továbbra is teljesül.) Hasonlóképp feltesszük, hogy g minimális.

Ha minden elemre $f(s) = g(s)$, akkor (3.29) és (3.30) miatt $p(X) \leq \widetilde{g}(X) = \widetilde{f}(X) \leq b(X)$ minden $X \subseteq S$-re, azaz $f \in M$. Legyen $s \in S$ olyan elem, amelyre $f(s) < g(s)$. Az f maximalitása miatt létezik egy s-t tartalmazó X halmaz, melyre $\widetilde{f}(X) = b(X)$, míg a g minimalitása miatt létezik egy s-t tartalmazó Y halmaz, melyre $\widetilde{g}(Y) = p(Y)$. De ekkor $\widetilde{f}(X) - \widetilde{g}(Y) = b(X) - p(Y) \geq b(X - Y) - p(Y - X) \geq \widetilde{f}(X - Y) - \widetilde{g}(Y - X) = \widetilde{f}(X) - \widetilde{f}(X \cap Y) - [\widetilde{g}(Y) - \widetilde{g}(X \cap Y)]$, amiből $\widetilde{f}(X \cap Y) \geq \widetilde{g}(X \cap Y)$, ami ellentmond az $f \leq g, f(s) < g(s)$ feltevéseknek. •

A tételből kiolvasható a g-polimatroidok linking tulajdonsága.

Következmény 3.4.10 (Linking tulajdonság) *Legyen p, b, f, g ugyanaz, mint a 3.4.9 tételben. Ha létezik Q-nak olyan x' eleme, melyre $x' \geq f$ és létezik Q-nak olyan x'' eleme, amelyre $x'' \leq g$ eleme, akkor létezik olyan x eleme is, amelyre $f \leq x \leq g$. Ha p, b, f, g mindegyike egészértékű, úgy x is választható annak.*

Biz. $\widetilde{f}(X) \leq \widetilde{x}(X) \leq b(X)$ folytán teljesül (3.29), $\widetilde{g}(X) \geq \widetilde{x}(X) \geq p(X)$ miatt pedig (3.30) és így a 3.4.9 tétel alkalmazható. •

Érdemes a fenti eredményeket bázis-poliéderekre külön is megfogalmazni.

TÉTEL 3.4.11 *Szubmoduláris b-re, melyre $b(S)$ véges, a $B(b) \cap T(f, g)$ poliéder akkor és csak akkor nemüres, ha*

$$\widetilde{f}(Y) \leq b(Y) \text{ minden } Y \subseteq S\text{-re} \tag{3.31}$$

és

$$\widetilde{g}(Y) \geq \bar{b}(Y) \quad [= b(S) - b(S - Y)] \text{ minden } Y \subseteq S\text{-re.} \tag{3.32}$$

Szupermoduláris p-re, melyre $p(S)$ véges, a $B'(p) \cap T(f, g)$ poliéder akkor és csak akkor nemüres, ha

$$\widetilde{f}(X) \leq \bar{p}(X) \quad [= p(S) - p(S - X)] \text{ minden } X \subseteq S\text{-re} \tag{3.33}$$

és

$$\widetilde{g}(X) \geq p(X) \text{ minden } X \subseteq S\text{-re.} \tag{3.34}$$

Biz. A 3.1.4 tételből tudjuk, hogy $B(b) = Q(p, b)$, ahol $p := \bar{b}$. Ekkor a (3.29) és (3.31) feltétel ugyanaz, továbbá $X = S - Y$-ra a (3.30) és (3.32) feltételek ekvivalensek. Analóg kapjuk a szupermoduláris függvényre vonatkozó alakot. •

A 3.4.11 tételnek egyfajta önerősítő jellege van, mert segítségével megadhatjuk egy g-polimatroid, egy tégla és egy sáv metszetének nemürességére vontakozó feltételt.

TÉTEL 3.4.12 *Legyen (p, b) paramoduláris pár és legyen $\alpha \leq \beta$ két szám* (ahol α lehet $-\infty$, β pedig ∞). *Tegyük fel az $f : S \to \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$, $g : S \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ függvényekre, hogy $f \leq g$. Az $M := Q(p, b) \cap T(f, g) \cap K(\alpha, \beta)$ metszet pontosan akkor nemüres, ha*

$$\widetilde{f}(X) \leq b(X) \text{ és } \widetilde{f}(X) \leq \beta - p(S - X) \text{ minden } X \subseteq S\text{-re} \tag{3.35}$$

és

$$\widetilde{g}(X) \geq p(X) \text{ és } \widetilde{g}(X) \geq \alpha - b(S - X) \text{ minden } X \subseteq S\text{-re.} \tag{3.36}$$

Biz. Ha $x \in M$, akkor $\widetilde{f}(X) \leq \widetilde{x}(X) \leq b(X)$ és $\widetilde{f}(X) \leq \widetilde{x}(X) = \widetilde{x}(S) - \widetilde{x}(S - X) \leq \beta - p(S - X)$, így (3.35) szükséges, és $\widetilde{g}(X) \geq \widetilde{x}(X) \geq p(X)$ valamint $\widetilde{g}(X) \geq \widetilde{x}(X) = \widetilde{x}(S) - x(S - X) \geq \alpha - b(S - X)$ miatt (3.36) is az.

Az elegendőséghez emlékezzünk a 3.3.3 következményre, amely szerint $Q(p, b)$ előáll a $B(b^*)$ 0-bázis-poliéder vetületeként, ahol b^* az $S^* = S + s^*$-n (3.15) által definiált függvény, azaz $X \subseteq S$-re $b^*(X) := b(X)$, $s^* \in X \subseteq S^*$ esetén $b^*(X) = -p(S - X)$, és így speciálisan $b^*(S^*) = 0$. Jelölje f^* az f kiterjesztését S^*-ra, ahol $f^*(s^*) := -\beta$, míg g^* a g kiterjesztését S^*-ra, ahol $g^*(s^*) := -\alpha$.

Az f^*-ra és b^*-ra teljesül (3.31), hiszen (3.35) miatt $Y \subseteq S$ esetén $f^*(Y) = \widetilde{f}(Y) \leq b(Y) = b^*(Y)$, míg $s^* \in Y$ esetén $X := Y - s^*$-ra $f^*(Y) = \widetilde{f}(X) - \beta \leq -p(S - X) = b^*(Y)$. Hasonlóképp, g^*-ra és b^*-ra teljesül (3.32), hiszen (3.36) miatt $Y \subseteq S$-re $g^*(Y) = \widetilde{g}(Y) \geq p(Y) = -b^*(S^* - Y) = \overline{b^*}(Y)$, míg $s^* \in Y$ esetén $X := Y - s^*$-ra $g^*(Y) = \widetilde{g}(X) - \alpha \geq -b(S - X) = -b^*(S - X) = \overline{b^*}(Y)$. Így a 3.4.11 tétel miatt létezik $x^* \in B(b^*)$ és a konstrukció miatt x^* megszorítása S-re benne van M-ben. •

A bizonyításbeli konstrukcióból (vagy magából a tételből) kiolvasható a linking tulajdonság alábbi kiterjesztése.

TÉTEL 3.4.13 (Erős linking tulajdonság) *Ha egy g-polimatroidnak létezik olyan x' eleme, amelyre $x' \geq f$ és $x'(S) \leq \beta$, továbbá létezik olyan x'' eleme, amelyre $x'' \leq g$ és $x''(S) \geq \alpha$, akkor olyan x eleme is létezik, amelyre $f \leq x \leq g$ és $\alpha \leq \widetilde{x}(S) \leq \beta$. Ha $p, b, f, g, \alpha, \beta$ mindegyike egészértékű, úgy x is választható annak.* •

Az $f \equiv -\infty$, $\alpha = -\infty$ speciális esetben kapjuk a következőt.

Következmény 3.4.14 *Ha egy g-polimatroidnak létezik olyan x eleme, amelyre $x'(S) \leq \beta$, továbbá létezik olyan x'' eleme, amelyre $x'' \leq g$, akkor létezik olyan x eleme is, amelyre $\widetilde{x}(S) \leq \beta$ és $x \leq g$.* •

Megjegyzés Abból, hogy Q-nak létezik olyan x' és x'' eleme, melyekre $x' \geq f$ és $x'(S) \geq \alpha$ illetve $x'' \leq g$ és $x''(S) \leq \beta$, már egy dimenzióban sem következik, hogy létezik olyan $x \in Q$ is, amelyre $f \leq x \leq g$ és $\alpha \leq \widetilde{x}(S) \leq \beta$. Legyen ugyanis $S := \{s\}$ az alaphalmaz, $f(s) := g(s) := 0$ és $\alpha := \beta := 1$.

Következmény 3.4.15 *Legyen (p, b) paramoduláris pár és legyen $\alpha \leq \beta$ két szám* (ahol α lehet $-\infty$, β pedig ∞). *A $Q(p, b)$ g-polimatroid és a $K(\alpha, \beta)$ sáv M metszete pontosan akkor nemüres, ha*

$$\beta \geq p(S) \text{ és } \alpha \leq b(S). \tag{3.37}$$

Biz. Alkalmazzuk a 3.4.12 tételt arra a speciális esetre, amikor $f \equiv -\infty$ és $g \equiv \infty$. Figyeljük meg, hogy a (3.35) feltétel az $X = \emptyset$-re vonatkozó $\widetilde{f}(\emptyset) \leq \beta - p(S - \emptyset)$ egyenlőtlenség kivételével automatikusan teljesül, míg a (3.36) a $\widetilde{g}(\emptyset) \geq \alpha - b(S - \emptyset)$ kivételével. A (3.37) feltételben épp ezen két egyenlőtlenség $\beta \geq p(S)$-re illetve $\alpha \leq b(S)$-re átírt alakját kötöttük ki. •

Fogalmazzuk meg a 3.4.12 tétel szub- illetve szupermoduláris poliéderekre vonatkozó speciális esetét. Legyen b és p szub- illetve szupermoduláris függvény. Legyen $\alpha \leq \beta$ két szám (ahol α lehet $-\infty$, β pedig ∞). Tegyük fel az $f : S \to \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$, $g : S \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ függvényekre, hogy $f \leq g$.

TÉTEL 3.4.16 *Az $M := S(b) \cap T(f, g) \cap K(\alpha, \beta)$ metszet pontosan akkor nemüres, ha*

$$\widetilde{f}(S) \leq \beta, \tag{3.38}$$

$$\widetilde{f}(X) \leq b(X) \text{ minden } X \subseteq S\text{-re} \tag{3.39}$$

és

$$\widetilde{g}(X) \geq \alpha - b(S - X) \text{ minden } X \subseteq S\text{-re.} \tag{3.40}$$

Az $M := S'(p) \cap T(f, g) \cap K(\alpha, \beta)$ metszet pontosan akkor nemüres, ha

$$\widetilde{g}(S) \geq \alpha, \tag{3.41}$$

$$\widetilde{g}(X) \geq p(X) \text{ minden } X \subseteq S\text{-re} \tag{3.42}$$

és

$$\widetilde{f}(X) \leq \beta - p(S - X) \text{ minden } X \subseteq S\text{-re.} \tag{3.43}$$

Biz. Definiáljuk a p halmazfüggvényt az üres halmazon nullának, máshol $-\infty$-nek. Ekkor $S(b) = Q(p, b)$ és alkalmazhatjuk a 3.4.12 tételt. A (3.35) feltétel első fele épp (3.39). A második fele $X \subset S$-re automatikusan teljesül, $X = S$-re pedig (3.38)-t adja. A (3.36) első fele automatikusan teljesül, a második pedig (3.40). Analóg kapjuk a szupermoduláris poliéderre vonatkozó esetet. •

2012. december 9. uszub3

3.5 A SZUBMODULARITÁS GYENGÍTÉSE

3.5.1 Jórészt szub- és szupermoduláris függvények

Alkalmazásokban gyakran van szükség olyan függvényekre, melyekre a szub- vagy szupermodularitási egyenlőtlenséget nem minden $\{X, Y\}$ halmazpárra követeljük meg. A 3.1 szakaszban már bevezettük a metsző és keresztező szub- és szupermoduláris függvények valamint a metsző paramoduláris (röviden gyenge) (p, b) pár fogalmát. Ez utóbbiakról a 3.3.2 állításban megfigyeltük, hogy egy-egy értelmű kapcsolatban állnak az eggyel nagyobb elemszámú S^* alaphalmazon értelmezett keresztező b^* szubmoduláris függvényekkel, melyekre $b^*(S^*) = 0$. Ebben a részben megmutatjuk, hogy metsző paramoduláris párral adott $Q(p, b)$ poliéder is g-polimatroid.

Érdemes azonban a metsző szub- és szuper- és paramodularitás fogalmát még tovább gyengíteni. Az $X \subseteq S$ részhalmazt a b halmazfüggvényre nézve **alulról b-szeparálható**nak nevezzük (rövidebben alulról szeparálható), ha X felbontható olyan nemüres, diszjunkt $X_1, X_2, \dots, X_t$ részhalmazok egyesítésére, melyekre $\sum_i b(X_i) \leq b(X)$. Azt mondjuk, hogy b **jórészt** (vagy **lényegében**) **szubmoduláris**, ha bármely két alulról lényeges X, Y halmazra, melyekre $X \cap Y \neq \emptyset$, fennáll a szubmodularitási egyenlőtlenség. Például metszőn szubmoduláris függvény jórészt szubmoduláris. Analóg módon beszélhetünk egy p halmazfüggvény esetén arról, hogy az X halmaz **felülről p-szeparálható** és hogy p **jórészt** (vagy **lényegében**) **szupermoduláris**. Amennyiben a szövegösszefüggésből világos, az alulról vagy felülről jelzőket kihagyjuk. Végül, azt mondjuk, hogy a (p, b) pár **jórészt paramoduláris**, ha p és b jórészt szuper- illetve szubmoduláris és a kereszt-egyenlőtlenség teljesül minden olyan átmetsző X, Y halmazpárra, melyre X alulról nem b-szeparálható és Y felülről nem p-szeparálható.

Pozitívan metsző, keresztező és ferde szupermodularitás

Azt mondjuk, hogy a p nem-negatív halmazfüggvény **pozitívan metsző** (**keresztező**) **szupermoduláris**, ha $p(X) > 0, p(Y) > 0$ valamint $X \cap Y \neq \emptyset$ (és a keresztező esetben $X \cup Y \neq S$) esetén $p(X) + p(Y) \leq p(X \cap Y) + p(X \cup Y)$. A p-t **ferdén szupermodulárisnak** mondjuk, ha nemnegatív és minden átmetsző $X, Y \subseteq S$-re, amelyre $p(X) > 0, p(Y) > 0$, a következő egyenlőtlenségek közül legalább az egyik teljesül:

$$p(X) + p(Y) \leq p(X \cap Y) + p(X \cup Y),$$
$$p(X) + p(Y) \leq p(X - Y) + p(Y - X).$$

Ebből látszik, hogy pozitívan metsző szupermoduláris függvény ferdén szupermoduláris.

Lemma 3.5.1 *Szimmetrikus és pozitívan keresztező szupermoduláris függvény ferdén szupermoduláris. Ferdén szupermoduláris függvény jórészt szupermoduláris.*

Biz. Az első részben ha X, Y keresztező halmazok, melyekre $p(X) > 0,\ p(Y) > 0$, akkor a szupermodularitás fennáll, így elég azt az esetet nézni, amikor $X \cup Y = S$. A szimmetria miatt $p(X)+p(Y) = p(S-X)+p(S-Y) = p(Y - X) + p(Y - X)$, azaz p valóban ferdén szupermoduláris.

A második részhez legyenek X, Y átmetsző halmazok, melyek nem szeparálhatók felülről. Ekkor $p \geq 0$ miatt $p(X) > 0, p(Y) > 0$. Most $p(X) > p(X-Y)+p(X\cap Y) \geq p(X-Y)$ és $p(Y) > p(Y-X)+p(X\cap Y) \geq p(Y-X)$. Tehát $p(X) + p(Y) > p(X - Y) + p(Y - X)$ és így $p(X) + p(Y) \leq p(X \cup Y) + p(X \cap Y)$. •

3.5.2 Reszelés

A moduláris függvénnyel való konvolúció általánosításaként bemutatunk egy fontos konstrukciót, a reszelést (Dilworth truncation), amely egy jórészt szubmoduláris függvényből teljesen szubmodulárisat hoz létre. A b jórészt szubmoduláris függvény $b^\vee$ (**alsó**) **reszelt**jén a következő halmazfüggvényt értjük:

$$b^\vee(Z) := \min\{\textstyle\sum_i^t b(X_i) : \{X_1, \dots, X_t\} \text{ a } Z \text{ partíciója, } t \geq 1\}. \tag{3.44}$$

Mivel most az egytagú $\{Z\}$ is a Z partíciójának számít, így $b^\vee \leq b$. A reszelt külső monotonizálásával nyert $(b^\vee)_{\downarrow mon}$ függvényt a b **monoton reszelt**jének nevezzük. Erre tehát

$$(b^\vee)_{\downarrow mon}(Z) = \min\{\textstyle\sum_i^t b(X_i) : \{X_1, \dots, X_t\} \text{ az } S \text{ részpartíciója } (t \geq 1), \text{ ahol } Z \subseteq \cup X_i\}. \tag{3.45}$$

A p jórészt szupermoduláris függvény $p^\wedge$ (**felső**) **reszelt**jén a következő halmazfüggvényt értjük:

$$p^\wedge(Z) := \max\{\textstyle\sum_i^t p(X_i) : \{X_1, \dots, X_t\} \text{ a } Z \text{ partíciója, } t \geq 1\}. \tag{3.46}$$

Mivel most az egytagú $\{Z\}$ is az Z partíciójának számít, így $p^\wedge \geq p$. A reszelt belső monotonizálásával nyert $(p^\wedge)_{\uparrow mon}$ függvényt a p **monoton reszelt**jének nevezzük. Erre tehát

$$(p^\wedge)_{\uparrow mon}(Z) = \max\{\textstyle\sum_i^t p(X_i) : \{X_1, \dots, X_t\} \text{ a } Z \text{ részpartíciója } (t \geq 1)\}. \tag{3.47}$$

A következő értelemben egy moduláris függvénnyel való konvolúció a reszelés speciális esetének tekinthető.

Lemma 3.5.2 *Egy teljesen szubmoduláris b függvény és egy* $g : S \to \mathbf{R} + \{\infty\}$ *függvényre* $b \bigtriangledown g = (b')^\vee$*, ahol* $|X| \geq 2$ *esetén* $b'(X) := b(X)$*, míg* $X = \{v\}$*-re* $b'(X) := \min\{b(v), g(v)\}$.

Biz. A definíció nyomán b' metsző szubmoduláris. A b' alsó reszeltjére vonatkozó (3.44) formulában tekintsük azt a minimalizáló $\{X_i\}$ partíciót, amely a legkevesebb részből áll. Ekkor b' semelyik X_i, X_j halmazpárra sem teljesíti a szubmodularitási egyenlőtlenséget. Emiatt a partíciónak csak egy olyan tagja lehet, mondjuk X_1, amelyre $b'(X_1) = b(X_1)$, a többi X_i tagra $b'(X_i) < b(X_i)$. Ekkor X_i egyelemű és $b'(X_i) = g(v_i)$, ahol v_i az X_i egyetlen eleme. Vagyis $(b')^\vee(Z) = \min\{\sum_i b'(X_i) : \{X_i\}$ a Z partíciója$\} = \min\{b(X_1) + g(v_2) + \ldots + g(v_k) : \{X_1, \{v_2\}, \ldots, \{v_k\}\}$ a Z partíciója$\} = \min\{b(X) + g(Z - X) : X \subseteq Z\} = (b \bigtriangledown g)(Z)$. •

Matroidelméletben már igazoltuk, hogy metsző szubmoduláris függvény reszeltje teljesen szubmoduláris. Ezt általánosítjuk most.

TÉTEL 3.5.1 (Reszelési tétel) *Jórészt szubmoduláris b függvény* $b^\vee$ *alsó reszeltje teljesen szubmoduláris. Ha ráadásul* $b \geq 0$*, akkor b monoton reszeltje teljesen szubmoduláris és monoton növő.*

Jórészt szupermoduláris p függvény $p^\wedge$ *felső reszeltje teljesen szupermoduláris, monoton reszeltje teljesen szupermoduláris és monoton növő.*

Biz. A monoton reszeltekre vonatkozó rész a 3.4.4 tétel miatt következik a reszeltekre vontakozó megfelő állításból. Szimmetria miatt ezek közül elég a szubmoduláris függvényre vonatkozót igazolni.

Valamely $\mathcal{F}$ halmazrendszerre használjuk a $b(\mathcal{F}) := \sum[b(X) : X \in \mathcal{F}]$ jelölést. Legyen $A, B \subseteq S$. Létezik A-nak olyan $\{A_1, \ldots, A_k\}$ és B-nek olyan $\{B_1, \ldots, B_l\}$ partíciója, melyekre $b^\vee(A) = \sum b(A_i)$ és $b^\vee(B) = \sum b(B_j)$. Ekkor $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_l\}$ olyan, hogy $b(\mathcal{F}) = b^\vee(A) + b^\vee(B)$ és

(∗) $\mathcal{F}$ az $A \cap B$ minden elemét kétszer fedi és $(A - B) \cup (B - A)$ minden elemét egyszer.

Válasszunk most egy olyan $\mathcal{F}_1$ halmazrendszert, (amelyben egy halmaznak két példánya is szerepelhet), amely kielégíti (∗)-t, $b(\mathcal{F}_1)$ minimális, ezen belül $|\mathcal{F}_1|$ maximális, és ezen belül $\sum[|X|^2 : X \in \mathcal{F}_1]$ maximális. Ekkor persze $b(\mathcal{F}) \geq b(\mathcal{F}_1)$. Könnyen látszik $|\mathcal{F}_1|$ maximalitásából, hogy $\mathcal{F}_1$ tagjai nem-szeparálhatók. Ekkor $\mathcal{F}_1$ bármely két egymást metsző tagjára teljesül a szubmodularitási egyenlőtlenség. Most $\mathcal{F}_1$ lamináris, mert ha lenne két metsző tagja, akkor helyettesítve ezeket a metszetükkel és az uniójukkal, a keletkező $\mathcal{F}_2$ kielégíti (∗)-t, $b(\mathcal{F}_1) \geq b(\mathcal{F}_2)$, $|\mathcal{F}_1| = |\mathcal{F}_2|$ és $\sum[|X|^2 : X \in \mathcal{F}_1] < \sum[|X|^2 : X \in \mathcal{F}_2]$.

Mivel $\mathcal{F}_1$ lamináris, felbontható két diszjunkt részre, $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$-re, ahol $\mathcal{P}_1$ az $A \cap B$ partíciója és $\mathcal{P}_2$ az $A \cup B$ partíciója. $b^\vee$ definíciójából $b^\vee(A \cap B) \leq b(\mathcal{P}_1)$ és $b^\vee(A \cup B) \leq b(\mathcal{P}_2)$. Ezért $b^\vee(A) + b^\vee(B) = b(\mathcal{F}) \geq b(\mathcal{F}_1) = b(\mathcal{P}_1) + b(\mathcal{P}_2) \geq b^\vee(A \cap B) + b^\vee(A \cup B)$, tehát $b^\vee$ valóban teljesen szubmoduláris. •

3.5.3 Jórészt szub- és szupermoduláris függvények poliéderei

Lemma 3.5.3 *Tetszőleges b halmazfüggvényre* $S(b) = S(b^\vee)$*. Amennyiben* $b^\vee(S) = b(S)$ (vagyis S minden $\{S_1, \ldots, S_k\}$ partíciójára $\sum_i b(S_i) \geq b(S)$)*, úgy* $B(b^\vee) = B(b)$*. Tetszőleges p halmazfüggvényre* $S'(p) = S'(p^\wedge)$ *és* $C(p) = C(p^\wedge)$*. Amennyiben* $p^\wedge(S) = p(S)$*, úgy* $B'(p^\wedge) = B'(p)$.

Biz. Egyrészt $b^\vee \leq b$ miatt $S(b^\vee) \subseteq S(b)$. Másrészt legyen $x \in S(b)$ és egy $Z \subseteq S$ halmazra tekintsük azt a $\{Z_i\}$ partícióját Z-nak, amelyre $b^\vee(Z) = \sum_i b(Z_i)$. Ekkor $x(Z) = \sum_i x(Z_i) \leq \sum_i b(Z_i) = b^\vee(Z)$, és így $x \in S(b^\vee)$, amiből $S(b) = S(b^\vee)$. Ebből $b^\vee(S) = b(S)$ esetén következik, hogy $B(b) = S(b) \cap \{x : x(S) = b(S)\} = S(b^\vee) \cap \{x : x(S) = b^\vee(S)\} = B(b^\vee)$. A p-re vonatkozó állítások analóg adódnak. •

Ezt a reszelési tétellel összetéve kapjuk a következőt.

TÉTEL 3.5.2 *Legyen b jórészt szubmoduláris. Ekkor* $S(b)$ *szubmoduláris poliéder, melynek határfüggvénye* $b^\vee$*. Ha* $b(S)$ *véges, akkor* $B(b)$ *bázis-poliéder, amelynek felső határfüggvénye* $B(b) \neq \emptyset$ *esetén* $b^\vee$*. Ha ráadásul* $b \geq 0$*, akkor* $P(b)$ *polimatroid, melynek* b' *határfüggvénye a b monoton reszeltje, azaz*

$$b'(Z) := \min\{\textstyle\sum_i b(X_i) : \{X_1, \ldots, X_t\} \textit{ részpartíció, } Z \subseteq \cup X_i \subseteq S\}. \tag{3.48}$$

Legyen p jórészt szupermoduláris. $S'(p)$ *szupermoduláris poliéder, melynek határfüggvénye* $p^\wedge$*. Ha* $p(S)$ *véges értékű, akkor* $B'(p)$ *bázis-poliéder, amelynek alsó határfüggvénye* $B'(p) \neq \emptyset$ *esetén* $p^\wedge$*.* $C(p)$ *kontra-polimatroid, melynek* p' *határfüggvénye* (amelyre tehát $C(p) = S'(p')$) *a p monoton reszeltje, azaz*

$$p'(Z) := \max\{\textstyle\sum_i p(X_i) : \{X_1, \ldots, X_t\} \textit{ a } Z \textit{ részpartíciója}\}. \bullet \tag{3.49}$$

Megjegyezzük azonban, hogy (p, b) metsző paramoduláris pár esetén a reszeltekből álló $(p^\wedge, b^\vee)$ pár nem szükségképpen paramoduláris, mert a kereszt-egyenlőtlenség nem biztosan teljesül minden X, Y halmazpárra. Ugyanakkor látni fogjuk, hogy metsző (sőt jórészt) paramoduláris (p, b) párra is $Q(p, b)$ g-polimatroid, bár határpárját már nem annyira egyszerű formula adja meg, mint amilyen a reszelt.

3.5.4 Nemüresség

A 3.3.7 következményt és a 3.5.3 lemmát összevetve kapjuk:

TÉTEL 3.5.3 *Nagyrészt szubmoduláris függvénnyel adott $B(b)$ bázis-poliéder akkor és csak akkor nem üres, ha S minden $\{S_1, \dots, S_k\}$ partíciójára $\sum_i b(S_i) \geq b(S)$ (azaz $b^\vee(S) = b(S)$). Nagyrészt szupermoduláris függvénnyel adott $B'(p)$ bázis-poliéder nemürességének a feltétele $\sum_i p(S_i) \geq p(S)$ minden partícióra.*

A 3.4.11 tétel szupermoduláris részének és a reszelési tételnek az összetevésével a következő általánosítást kapjuk.

TÉTEL 3.5.4 *Legyen p_1 jórészt szupermoduláris, melyre $k := p_1(S)$ véges és $f : S \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $g : S \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ két függvény, melyekre $f \leq g$.*

(i) *A $B'(p_1) \cap T(f \leq)$ poliéder akkor és csak akkor nemüres, ha*

$$f(S) \leq k \tag{3.50}$$

és

$$f(X_0) + \textstyle\sum_{i=1}^{t} p_1(X_i) \leq k \tag{3.51}$$

az S minden olyan $\{X_0, X_1, \dots, X_t\}$ $(t \geq 1)$ partíciójára, amelyben csak X_0 lehet üres.

(ii) *A $B'(p_1) \cap T(\leq g)$ poliéder akkor és csak akkor nemüres, ha*

$$g(X) \geq p_1(X) \text{ minden } X \subseteq S\text{-re.} \tag{3.52}$$

(iii) *A $B'(p_1) \cap T(f, g)$ poliéder akkor és csak akkor nemüres, sem $B'(p_1) \cap T(f\leq)$, sem $B'(p_1) \cap T(\leq g)$ nem üres. Ha ráadásul p_1, f, g mindegyike egészértékű, akkor a szóbanforgó poliéderek egészek.*

Biz. A feltételek szükségessége nyilvánvaló. Jelölje p a p_1 felső reszeltjét. Ekkor p teljesen szupermoduláris és (3.51)-t olyan partíciókra alkalmazva, melyekben $X_0 = \emptyset$ azt kapjuk, hogy $p(S) = k$. Emiatt $B'(p) = B'(p_1)$. A 3.4.11 tétel szerint $B'(p) \cap T(f \leq)$ pontosan akkor nemüres, ha $k \geq p(X) + f(S - X)$ minden $X \subseteq S$-re. Ez $X = \emptyset$-re épp (3.50), míg nemüres X-re (3.51)-vel ekvivalens, így az (i) rész következik.

Az (ii) rész is rögtön adódik a 3.5.4 tétel (ii) részéből, amint megfigyeljük, hogy (3.50) folytán egy X halmaz minden $\{X_1, \dots, X_t\}$ partíciójára $g(X) = \sum g(X_i) \geq \sum p_1(X_i)$ és emiatt $g(X) \geq p(X)$.

A tétel harmadik része is a 3.4.11 tétel következménye. •

TÉTEL 3.5.5 *Legyen $p_1 \geq 0$ jórészt szupermoduláris. Legyen $\beta \geq 0$ egész és $g : S \to \mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$ egy függvény. A $Q := C(p_1) \cap T(\leq g) \cap K(\leq \beta)$ poliéder g-polimatroid, amely egész, ha p_1, g, β mind egészértékű. Q akkor és csak akkor nemüres, ha*

$$g(X) \geq p_1(X) \text{ minden } X \subseteq S\text{-re} \tag{3.53}$$

és

$$\textstyle\sum_i p_1(X_i) \leq \beta \text{ az } S \text{ minden } \{X_i\} \text{ részpartíciójára.} \tag{3.54}$$

Biz. Jelölje p a p_1 reszeltjét. Állítjuk, hogy a $p, g, f \equiv -\infty, \alpha = -\infty$ választás mellett teljesülnek a 3.4.16 tétel feltételei. A $g(S) \geq \alpha$ feltétel automatikusan teljesül. A $g(X) \geq p(X)$ feltétel is fennáll, hiszen X azon $\{X_1, \dots, X_q\}$ partíciójára, melyre $p(X) = \sum p_1(X_i)$ fennáll $g(X) = \sum g(X_i) \geq \sum p_1(X_i) = p(X)$.

Végül az $f(X) \leq \beta - p(S - X)$ feltétel automatikusan fennáll minden nemüres X-re, míg $X = \emptyset$ esetén a $0 \leq \beta - p(S)$ egyenlőtlenségbe megy át, ami éppen (3.54)-vel ekvivalens.

A 3.4.16 tételt alkalmazva azt kell csupán megfigyelnünk, hogy az ottani $S'(p) \cap T(f, g) \cap K(\alpha, \beta)$ poliéder éppen Q lesz. •

2012. december 9. uszub4

3.6 A MOHÓ ALGORITMUS

3.6.1 A mohó algoritmus bázis-poliéderen

Edmonds megfigyelte, hogy a matroidokra vonatkozó mohó algoritmus kiterjeszthető polimatroidokra is. Edmonds eredményét először bázis-poliéderekre ismertetjük. Legyen b teljesen szubmoduláris, és a technikai bonyodalmak elkerülése érdekében tegyük fel, hogy b véges értékű. Adott $c : S \to \mathbf{R}$ vektorra tekintsük a $\max\{cx : x \in B(b)\}$ optimalizálási feladatot. Ez nem más, mint a

$$\max\{cx : x(S) = b(S) \text{ és minden } Z \subset S \text{ -re } x(Z) \leq b(Z)\} \tag{3.55}$$

lineáris program, amelynek duálisa:

$$\min\{yb : y \in D(c)\}, \tag{3.56}$$

ahol $yb := \sum_{Z \subseteq S} y(Z)b(Z)$ és

$$D(c) := \{y \in \mathbf{R}^{2^S} : y(Z) \geq 0, \text{ ha } Z \neq S, \text{ és } \sum_{Z \subseteq S} y_Z \chi_Z = c\} \tag{3.57}$$

a duális poliéder. Megmutatjuk, hogy mind a primál, mind a duál program optimális megoldása explicit ('mohó') módon közvetlenül megadható.

Feltehető, hogy c komponensei nagyság szerint csökkenő sorrendben vannak elrendezve, azaz $c(s_1) \geq c(s_2) \geq \ldots \geq c(s_n)$. Jelölje S_i az első i elem halmazát. Definiáljuk az x_{mo} vektort a következőképp.

$$x_{mo}(s_1) := b(s_1), \text{ és } i = 2, \ldots, n\text{-re } x_{mo}(s_i) := b(S_i) - b(S_{i-1}). \tag{3.58}$$

A definícióból következik, hogy minden $i = 1, \ldots, n$-re $x_{mo}(S_i) = b(S_i)$, ahol $x_{mo}(Z) := \sum_{z \in Z} x_{mo}(z)$. Érvényes továbbá, hogy x_{mo} egész vektor.

Lemma 3.6.1 *Az* (3.58)*-ben megadott x_{mo} vektor benne van a $B(b)$ bázis-poliéderben.*

Biz. Azt kell belátnunk, hogy minden Z halmazra

$$x_{mo}(Z) \leq b(Z). \tag{3.59}$$

Jelölje $m(Z)$ a legnagyobb i indexet, amelyre $s_i \in Z$. $m(Z)$ szerinti indukciót használunk. Ha $m(Z) = 1$, akkor $Z = \{s_1\}$, és ezért $x_{mo}(Z) = b(Z)$. Legyen most $i := m(z) \geq 2$. A szubmodularitást használva kapjuk, hogy $b(Z) + b(S_{i-1}) \geq b(Z \cap S_{i-1}) + b(Z \cup S_{i-1})$. Az indukciót $Z \cap S_{i-1}$-re alkalmazva, és a $Z \cup S_{i-1} = S_i$ egyenlőséget megfigyelve kapjuk, hogy $b(Z \cap S_{i-1}) + b(Z \cup S_{i-1}) \geq x_{mo}(Z \cap S_{i-1}) + b(S_i)$, amiből $b(Z) \geq x_{mo}(Z \cap S_{i-1}) + b(S_i) - b(S_{i-1}) = x_{mo}(Z \cap S_{i-1}) + x_{mo}(s_i) = x_{mo}(Z)$ adódik. •

Definiáljuk most az y^* vektort a következőképp.

$$y^*(S_n) := c(s_n), \text{ és } i = 1, 2, \ldots, n-1 \text{ -re } y^*(S_i) := c(s_i) - c(s_{i+1}) \tag{3.60}$$

és S tetszőleges más részhalmazán legyen $y^*(Z) := 0$. Könnyen látszik, hogy y^* megoldása a (3.56) duális lineáris programnak, továbbá y^* egészértékű, amennyiben c az.

TÉTEL 3.6.1 *x_{mo} optimális megoldása az* (3.55) *primál programnak, y^* optimális megoldása az* (3.56) *duál programnak.*

Biz. Mivel x_{mo} primál megoldás, y^* duál megoldás és persze max $\leq$ min, így csak azt kell kimutatnunk, hogy $cx_{mo} = y^*b$. Ez pedig a lináris programozás optimalitási feltételéből rögtön adódik, hiszen a duális programban $y(Z)$ csak akkor lehet pozitív, ha a $Z = S_i$ és az ilyen Z-hez tartozó $x(Z) \leq b(Z)$ egyenlőtlenséget x_{mo} a defíniciója folytán valóban egyenlőséggel teljesíti. (Ha nem akarunk erre hivatkozni, akkor is egyszerű átösszegzéssel kapjuk: $cx_{mo} = c(s_1)b(S_1) + \sum_{i=2}^{n} c(s_i)[b(S_i) - b(S_{i-1})] = c(s_n)b(S_n) + \sum_{i=1}^{n-1}[c(s_i) - c(s_{i+1})]b(S_i) = \sum_{Z \subseteq S} y^*(Z)b(Z) = y^*b$.) •

A mohó algoritmusból is következik, hogy egy teljesen szubmoduláris b függvény által definiált $B(b)$ bázis-poliéder sohasem üres. A mohó algoritmust a $c := \chi(A)$ célfüggvényre alkalmazva ($A \subseteq S$) azt nyerjük, hogy $B(b)$-nek létezik olyan x_0 eleme, amelyre $x_0(A) = b(A)$, és amely ráadásul egész, ha b az. (Lásd a 3.3.6 tételt.)

Végtelen értékek

Vizsgáljuk, most meg a $\max\{cx : x \in B(b)$ probléma általános esetét, amikor b a ∞ értéket is felveheti (de $b(S)$ véges). Jelölje $\mathcal{F}$ azon halmazok rendszerét, melyeken b véges. Az $\mathcal{F}$ metszet-unió zárt, így $S \in \mathcal{F}$ miatt minden s elemhez az s-t tartalmazó F $\mathcal{F}$-beli halmazok $T(s)$ metszete az egyértelmű legszűkebb s-t tartalmazó $\mathcal{F}$-beli halmaz.

Ha létezik $v \in T(u)$ elem, amelyre $c(u) > c(v)$, akkor $\{cx : x \in B(b)\}$ nem korlátos felülről, hiszen $B(b)$ tetszőleges z elemére $z(u)$-t bármely nagy δ-val növelve, míg $z(v)$-t δ-val csökkentve egy másik $z' \in B(b)$-beli elemet kapunk, amelyre $cz' = cz + \delta(c(u) - c(v))$. Feltesszük tehát, hogy

$$v \in T(u) \text{ esetén } c(v) \geq c(u). \tag{3.61}$$

Nevezzünk két elemet ekvivalensnek, ha $c(u) = c(v)$ és $b(X) = \infty$ minden $X \subset S$-re, amelyre $|X \cap \{u, v\}| = 1$. Ilyenkor az u és v összevonásával az eredetivel ekvivalens feladatot kapunk, ezért feltehető, hogy nincs két ekvivalens elem. Következik, hogy

$$v \in T(u) \text{ esetén vagy } c(v) > c(u), \text{ vagypedig } c(v) = c(u) \text{ és } T(v) \subseteq T(u) - u. \tag{3.62}$$

Lemma 3.6.2 *Ha nincs két ekvivalens elem, akkor létezik az elemeknek egy olyan $s_1, \ldots, s_n$ sorrendje, amelyre $c(s_1) \geq \ldots \geq c(s_n)$ és minden $S_i = \{s_1, \ldots, s_i\}$ kezdőszeletre $b(S_i) < \infty$.*

Biz. Rendezzük c szerinti csökkenő sorrendbe az elemeket úgy, hogy az aktuálisan következő elem a legnagyobb súlyú még kiválasztatlan elem legyen, és ha több ilyen is van, akkor közülük egy olyan u-t válasszunk, melyre $T(u)$ minimális. Az így kapott $s_1, \ldots, s_n$ sorrend (3.62) miatt olyan, hogy minden i-re $T(s_i) \subseteq S_i$.

Állítás 3.6.1 *Minden $i = 1, \ldots, n$-re $b(S_i) < \infty$.*

Biz. Legyen $i = 1$. $T(s_1)$ egyelemű, mert ha $v \in T(s_1) - s_1$, akkor $c(s_1) \geq c(v)$ a $c(s_1)$ maximalitása miatt, de (3.61) miatt $c(s_1) = c(v)$, és miután nincs két ekvivalens elem, így $T(v) \subset T(s_1)$, ellentmondásban a választási szabállyal. Kaptuk, hogy $T(s_1) = \{s_1\} = S_1$, azaz $b(S_1)$ tényleg véges.

Tegyük fel, hogy indukcióval $i - 1 < n$-re már igazoltuk, hogy $b(S_{i-1}) < \infty$. Ekkor $\infty > b(S_{i-1} + b(T(s_i)) \geq b(S_{i-1} \cup T(s_i)) + b(S_{i-1} \cap T(s_i))$, amiből $S_i = S_{i-1} \cup T(s_i))$ miatt következik, hogy $b(S_i)$ véges. • •

A lemma által biztosított sorrendre változtatás nélkül alkalmazhatjuk a fentebb leírt mohó algoritmust és bizonyítást.

Következmény 3.6.2 $\{cx : x \in B(b)\}$ *akkor és csak akkor korlátos felülről, ha* (3.61) *teljesül.*

Biz. Feltehetjük, hogy nincs két ekvivalens elem. Az előbbiekben azt már láttuk, hogy ha (3.61) nem teljesül, akkor $\{cx : x \in B(b)\}$ nem korlátos felülről. Ha viszont (3.61) fennáll, akkor a mohó algoritmus egy véges maximumot szolgáltat. •

3.6.2 A mohó algoritmus geometriailag

Matroidokban egy maximális súlyú bázis megkeresésére vonatkozó mohó algoritmus úgy működik, hogy a $c(s_i)$ szerint csökkenő sorrendben egymás után tekinti az elemeket, és a soron következőt akkor választja ki, ha az a már kiválasztottakkal együtt független halmazt alkot. A fentebb leírt algoritmus x_{mo} meghatározására egyrészt nagyon hasonlít a matroid mohó algoritmusra, ugyanakkor egyfajta értelemben még annál is mohóbb, ugyanis az x_{mo} soron következő komponensének meghatározásakor nem ellenőrizzük az összes Z részhalmazra a megkívánt $x(Z) \leq b(Z)$ egyenlőtlenséget, hanem csupán a $Z = S_i$ kezdőszeletekre, melyekből csak n van. Ezért kellett külön ellenőriznünk, hogy x_{mo} valóban benne van a $B(b)$ bázispoliéderben.

Előfordulhat, hogy a B bázis-poliéder nem teljesen szubmoduláris függvénnyel van megadva. Ekkor a fenti algoritmust nem tudjuk közvetlenül használni. Mégis a mohó algoritmus következő interpretációja sokszor segíthet.

A célfüggvény által meghatározott csökkenő sorrendben végigmegyünk az elemeken és egymás után megállapítjuk az $x(s_i)$ értékeket. Az aktuális $x_i = x(s_i)$ értéket a lehető legnagyobbra választjuk úgy, hogy létezzék olyan $(x_1, \ldots, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)$ vektor $B(b)$-ben. Itt $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ a már kiszámított komponenseket jelöli. Ennek az értelmezésnek az az előnye, hogy független attól, hogy a bázis-poliéder milyen formában van megadva és így reményt nyújt arra, hogy az aktuális x_i-t esetleg akkor is ki tudjuk számolni, ha az egyértelmű definiáló teljesen szubmoduláris függvény nem áll rendelkezésre.

3.6.3 A mohó algoritmus változatai

Szubmoduláris poliéder

Mi a helyzet, ha szubmoduláris poliéder felett akarjuk a cx célfüggvény maximumát megkeresni? A (3.55) maximalizálási probléma duálisában az $y(S)$ kivételével minden $y(Z)$ változóra nem-negativitást követeltünk. Az algoritmus szerinti $y^*(S)$ pontosan akkor lesz negatív, ha a célfüggvény legkisebb, $c(s_n)$ komponense negatív. Amennyiben az $S(b)$ szubmoduláris poliéder felett akarjuk maximalizálni cx-t és $c(s_n) \geq 0$, úgy a fent kapott primál és duál megoldás erre is jó lesz. Ha viszont $c(s_n) < 0$, akkor a $\max\{cx : x \in S(b)\}$ feladat nem is korlátos felülről, hiszen $S(b)$ tetszőleges x eleméből kiindulva az $x(s_n)$ komponenst tetszőlegesen csökkenthetjük és ezzel a célfüggvény értéke is tetszőlegesen naggyá válhat.

Polimatroid

Legyen b polimatroid függvény. Legyen S^+ azon s elemek halmaza, melyekre $c(s) > 0$. Legyen b' illetve c' a b és c megszorítása S^+-ra. Alkalmazzuk a szubmoduláris poliéderekre vonatkozó mohó algoritmust b'-re és c'-re. Jelölje az így kapott optimális primál illetve duál megoldást $x' \in \mathbf{R}^{S^+}$ és y^*, melyekre tehát $c'x' = y^*b'$. Jelölje $x^* \in \mathbf{R}^S$ azt a vektort, amelyet x'-ből kapunk nulla komponensekkel kiegészítve. Ekkor $x^* \in P(b)$ és y^* eleme a $\{y \in \mathbf{R}^{2^S} : y(Z) \geq 0, \sum_{Z \subseteq S} y_Z \chi_Z \geq c\}$ duális poliédernek, és mind a kettő optimális, hiszen $cx^* = c'x' = y^*b' = y^*b$.

Figyeljük meg, hogy az eljárást egy matroid rangfüggvényére speciálizálva megkapjuk a matroid maximális súlyú függetlenjének megkeresésére szolgáló mohó algoritmust, amely amíg csak lehet, a súlyok csökkenő sorrendjében egymás után választ ki pozitív súlyú elemeket csak arra ügyelve, hogy a kiválsztott elemek független halmazt alkossanak.

Kontra-polimatroid

Most minimalizálni akarjuk a cx célfüggvényt a C kontra-polimatroid felett. Rendezzük c szerint csökkenő sorrendbe az S elemeit. Az aktuális $x_i = x(s_i)$ értéket a lehető legkisebbre választjuk úgy, hogy létezzék $(x_1, \ldots, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)$ vektor C-ben. (Ez a mohó algoritmus a közismert Kruskal féle algoritmus 'óvatos' változatának felel meg, ahol egy összefüggő gráf minimális költségű feszítő fájának meghatározása úgy történik, hogy minden lépésben a legdrágább élt hagyjuk ki a gráfból csak arra ügyelve, hogy összefüggő maradjon.)

Hogyan tudjuk meghatározni az aktuális s_i-re a minimális $x(s_i)$ értéket? Egy egyszerű megfigyelés segít. Jelölje k a $p(X)$ maximális értéket. Könnyű igazolni, hogy ha $(x_1, \ldots, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)$ benne van C-ben, akkor $(x_1, \ldots, x_i, k, k, \ldots, k)$ is benne van. Ennek megfelelően a mohó algoritmus úgy módosul, hogy az aktuális x_i-t minimálisra választjuk arra való tekintettel, hogy $(x_1, \ldots, x_i, k, k, \ldots, k)$ benne van C-ben.

3.6.4 A reszelt kiszámítása

A bázis poliéderekre vonatkozó mohó algoritmus alkalmazásaként megmutatjuk, hogy miképp lehet egy b jórészt szubmoduláris függvényre a $b^\vee(S)$ értéket kiszámítani. Valójában b-ről csak annyit használunk, hogy $b^\vee$ teljesen szubmoduláris. Ismét feltesszük, hogy b véges értékű.

A 3.3.7 következményben láttuk, hogy tetszőleges b^* teljesen szubmoduláris függvény esetén $b^*(S) = \max\{x(S) : x \in B(b^*)\}$. A mohó algoritmus elvileg ki tud számítani egy optimális x-et, feltéve, hogy egy bizonyos szubrutin rendelkezésre áll.

Legyen $s_1, \ldots, s_n$ az elemek tetszőleges sorrendje és legyen $S_i := \{s_1, \ldots, s_i\}$. Tegyük fel, hogy az $x^*(s_1), \ldots, x^*(s_{k-1})$ értékeket már meghatároztuk. Válasszuk $x^*(s_k)$-t a lehető legnagyobb olyan α értékre, hogy ezen választással még ne sérüljön $x^*(X) \leq b(X)$ egyenlőtlenség, vagyis legyen

$$\alpha := \min\{b(Z) - x^*(Z - s_k) : s_k \in Z \subseteq S_k\}. \tag{3.63}$$

A bázis poliéderekre vonatkozó mohó algoritmus szerint az ezen szabállyal kiszámolt x^* vektor olyan lesz, hogy $x^*(S) = b^\vee(S) = \min\{\sum_i b(T_i) : \{T_1, \ldots, T_t\}$ partíciója S-nek$\}$. Konkrét b esetén a számolást akkor tudjuk végrehajtani, ha rendelkezésre áll egy szubrutin (3.63)-ben α kiszámítására.

Amennyiben a szubrutin nem csak a minimum értékét számítja ki, hanem azt is megmondja, hogy az mely Z halmazon vétetik fel, úgy a $b^\vee(S)$-et megvalósító optimális $\{T_1, \ldots, T_t\}$ partíciót is kiszámolhatjuk. Ehhez tekintsük a szubrutin által szolgáltatott minimalizáló $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ halmazokat. Tudjuk, hogy x^* benne van $B(b^\vee)$-ben, és a Z_i halmazok mind pontosak (abban az értelemben, hogy $x^*(Z_i) = b^\vee(Z_i)$. Márpedig pontos halmazok metszete és uniója is pontos, így a $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ hipergráf komponensei az alaphalmaznak egy pontos halmazokból álló $\{T_1, \ldots, T_t\}$ partícióját adják, amiből $b^\vee(S) = x^*(S) = \sum_i x^*(T_i) = \sum_i b(T_i)$ miatt $\{T_1, \ldots, T_t\}$ valóban a keresett partíció.

3.6.5 Lineáris kiterjesztés

A mohó algoritmus segítségével megmutatjuk, hogy a szubmodularitási egyenlőtlenség általánosítható kettőnél több halmazra is. Tetszőleges $b : 2^S \to \mathbf{R}$ halmazfüggvény, amelyre $b(\emptyset) = 0$, kézenfekvő módon kiterjeszthető n-dimenziós vektorokra, ahol $n = |S|$, a következőképpen. Adott $c \in \mathbf{R}^n$ vektorra indexeljük úgy S elemeit, hogy $c(s_1) \geq \ldots \geq c(s_n)$ és legyen $S_i := \{s_1, \ldots, s_i\}$. Definiáljuk $\hat{b}(c)$-t a

$$\hat{b}(c) := c(s_n)b(S_n) + \sum_{i=1}^{n-1}[c(s_i) - c(s_{i+1})]b(S_i) \tag{3.64}$$

képlettel. Látszik, hogy tetszőleges $Z \subseteq S$ halmazra $b(Z) = \hat{b}(\chi_Z)$, ahol χ_Z jelöli a Z halmaz karakterisztikus függvényét, (amelynek értéke tehát a Z elemein 1, míg az $S - Z$ elemein 0). Azt mondjuk, hogy $\hat{b}$ a b halmazfüggvény **lineáris kiterjesztése**.

Gyakorlat 3.17 *Igazoljuk, hogy $\hat{b}$* **pozitívan homogén**, *azaz minden nemnegatív α számra $\hat{b}(\alpha c) = \alpha\hat{b}(c)$. Igazoljuk, hogy $X, Y \subseteq S$ esetén $\hat{b}(\chi_X + \chi_Y) = b(X \cap Y) + b(X \cup Y)$.*

Gyakorlat 3.18 *Igazoljuk, hogy nem feltétlenül különböző halmazokból álló $Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \ldots \subseteq Z_m$ halmazláncra $\hat{b}(\sum_i \chi_{Z_i}) = \sum_i b(Z_i)$.*

Gyakorlat 3.19 *Tegyük fel, hogy a c súlyozás különböző értékei $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_t$. Legyen $T_i := \{s : c(s) \geq \lambda_i\}$. Ekkor $\hat{b}(c) = \lambda_t b(S) + \sum_{i=1}^{t-1}(\lambda_i - \lambda_{i+1})b(T_i)$.*

Következmény 3.6.3 *Legyen c olyan súlyfüggvény, melyre $c(s_1) \geq c(s_2) \geq \ldots \geq c(s_n)$. Legyen b teljesen szubmoduláris és $B(b)$ a bázis-poliédere. Ekkor*

$$\max\{cx : x \in B(b)\} = \hat{b}(c). \bullet \tag{3.65}$$

TÉTEL 3.6.4 *Ha b szubmoduláris, akkor $\hat{b}$* **szubadditív**, *azaz tetszőleges $c_1, c_2, \ldots, c_l \in \mathbf{R}^S$ vektorokra*

$$\sum_i \hat{b}(c_i) \geq \hat{b}(\sum_i c_i). \tag{3.66}$$

Biz. Legyen $c_0 := \sum_i c_i$. A 3.6.3 következmény szerint mindegyik c_i-re van a $B(b)$ bázis-poliédernek egy olyan x_i eleme, amelyre $c_i x_i = \hat{b}(c_i) \geq c_i x$ fennáll $B(b)$ minden x elemére. Ebből $\hat{b}(\sum_{i=1}^l c_i) = \hat{b}(c_0) = c_0 x_0 = (\sum_{i=1}^l c_i)x_0 = \sum_{i=1}^l c_i x_0 \leq \sum_{i=1}^l c_i x_i = \sum_{i=1}^l \hat{b}(c_i)$. $\bullet$

A tételt $0-1$ értékű c_i-kre specializálva kapjuk a szubmodularitási egyenlőtlenség több tagra történő alábbi kiterjesztését.

Következmény 3.6.5 *Legyen b teljesen szubmoduláris függvény az S alaphalmazon. Tetszőleges $X_1, X_2, \ldots, X_m \subseteq S$ halmazokra*

$$\sum_i^m b(X_i) \geq \hat{b}(\sum_i^m \chi_{X_i}). \tag{3.67}$$

TÉTEL 3.6.6 (Lovász) *A b halmazfüggvény akkor és csak akkor szubmoduláris, ha $\hat{b}$ konvex.*

Biz. Tegyük fel, hogy b szubmoduláris. Mivel $\hat{b}$ pozitívan homogén és szubadditív, így $c_1, \ldots, c_k$ vektorokra $\sum_i \hat{b}(c_i) \geq \hat{b}(\sum_i c_i) = k\hat{b}((\sum_i c_i)/k)$, azaz $\hat{b}$ konvex. Megfordítva, legyen $\hat{b}$ konvex. Az X és Y halmazokra legyen $c := (\chi_X + \chi_Y)/2$. Ekkor $\hat{b}(c) = [b(X \cap Y) + b(X \cup Y)]/2$ és így $b(X) + b(Y) = \hat{b}(\chi_X) + \hat{b}(\chi_Y) \geq 2\hat{b}(c) = b(X \cap Y) + b(X \cup Y)$. $\bullet$

Feladat 3.20 *A $B(b)$ bázis-poliéder $X_1, \ldots, X_q \subseteq S$ részhalmazok által meghatározott oldala akkor és csak akkor nem üres, ha $\sum b(X_i) = \hat{b}(\sum_i \chi(X_i))$.*

3.7 AGGREGÁLT, ÖSSZEG ÉS METSZET

3.7.1 Elemek összevonása

Legyen t_1, t_2 két eleme S-nek, $T := \{t_1, t_2\}$ és t egy S-en kívüli új elem. Legyen b halmazfüggvény S-n. Definiáljuk $S' := S - T + t$ alaphalmazon a b' függvényt a következőképp: $X \subseteq S' - t$-re legyen $b'(X) := b(X)$, míg $t \in X \subseteq S'$-re legyen $b'(X) := b((X - t) \cup T)$. Azt mondjuk, hogy b' a t_1 és t_2 elemek **összevonás**ával keletkezik b-ből. Nyilván ha b szubmoduláris, akkor b is az és ha (p, b) paramoduláris, akkor (p', b') is az.

TÉTEL 3.7.1 *Ha b szubmoduláris, akkor $S(b')$ bármely x' eleméhez létezik $S(b)$-nek olyan x eleme, amelyre $x(T) = x'(t)$ és $s \in S - T$-re $x(s) = x'(s)$. Ha b, x' egészértékű, úgy x is választható annak.*

Biz. Legyen $s \in S - T$-re $x(s) := x'(s)$. Legyen $\alpha_1 := \min\{b(X) - x'(X - t_1) : t_1 \in X \subseteq S - t_2\}$ és $\alpha_2 := \min\{b(X) - x'(X - t_2) : t_2 \in X \subseteq S - t_1\}$. Ezek egészek, ha b és x' egészértékű. Ekkor $\alpha_1 + \alpha_2 \geq x'(t)$, mert különben létezik olyan t_1-t tartalmazó $X_1 \subseteq S - t_2$ és t_2-t tartalmazó $X_2 \subseteq S - t_1$ halmaz, melyekre $[b(X_1) - x'(X_1 - t_1)] + [b(X_2) - x'(X_2 - t_2)] < x'(t)$, és ekkor $x'(t) + x'(X_1 - t_1) + x'(X_2 - t_2) > b(X_1) + b(X_2) \geq b(X_1 \cap X_2) + b(X_1 \cup X_2) \geq x'(X_1 \cap X_2) + x'((X_1 - t_1) \cup (X_2 - t_2) + t) = x'(t) + x'(X_1 - t_1) + x'(X_2 - t_2)$, ami lehetetlen. Emiatt léteznek $x(t_1) \leq \alpha_1$ és $x(t_1) \leq \alpha_2$ számok (ráadásul egészek, amennyiben b és x' egészértékű) úgy, hogy az összegük $x'(t)$. Az α_i-k definíciója folytán az így kapott x $S(b)$-ben van. •

3.7.2 Aggregált

Természetesen egyszerre több elemet is össze lehet vonni és a kapott függvény független az összevonás sorrendjétől, sőt azt is megtehetjük, hogy az S alaphalmaz egy $\{S_1, \ldots, S_t\}$ partíciójára szimultán vonjuk össze az egyes S_i halmazokat. E művelet egy másik interpretációja a következő.

Az S halmaz egy $\varphi : S \to S'$ leképezése meghatározza az S egy $\{S_1, \ldots, S_q\}$ partícióját, ahol S_i jelöli azon $v \in S$ elemek halmazát, melyekre $\varphi(v) = s_i$ és $S' := \{s_1, \ldots, s_q\}$. Az S' részhalmazain értelmezett $\varphi(b) = b'$ aggregált függvényt a $b'(X) := b(\varphi^{-}(X))$ formula definiálja. Egy $x \in \mathbf{R}^S$ vektor $x' = \varphi(x)$ képét pedig $x'(s_i) := x(S_i)$. Egy $R \subseteq \mathbf{R}^S$ halmaz aggregáltja $\varphi(R) := \{\varphi(x) : x \in R\}$.

Figyeljük meg, hogy a b halmazfüggvény aggregáltja ugyanaz, mint a b-ből az S_i $(i = 1, \ldots, q)$ elemeinek összevonásával keletkező függvény. Emiatt a 3.7.1 tétel alkamazásával rögtön kapjuk a következőt.

TÉTEL 3.7.2 *Ha b szubmoduláris függvény, akkor $\varphi(S(b)) = S(\varphi(b))$. Ráadásul, ha b egészértékű, akkor $S(\varphi(b))$ minden x' egész eleme előáll egy egész $x \in S(b)$ elem képeként.* •

Analóg tétel érvényes bázis-poliéderekre és így a vetítési tétel nyomán minden g-polimatroidra is:

TÉTEL 3.7.3 *Ha (p, b) paramoduláris, akkor a $Q = (p, b)$ g-polimatroidra $\varphi(Q) = Q(\varphi(p), \varphi(b))$. Ráadásul, ha p és b egészértékű, úgy $Q(\varphi(p), \varphi(b))$ minden x' egész eleme előáll egy egész $x \in Q$ elem képeként.* •

Legyen M matroid az S alaphalmazon r rang- és t ko-rangfüggvényel. Legyen $\mathcal{P} := \{S_1, \ldots, S_q\}$ az alaphalmaz egy részpartíciója. Az $(m_1, \ldots, m_q)$ vektort **bázis-vetület**nek mondjuk, ha létezik M-nek olyan B bázisa, melyre $|B \cap S_i| = m_i$ minden $i = 1, \ldots, q$-ra.

Következmény 3.7.4 *Egy $(m_1, \ldots, m_q)$ egész vektor akkor és csak akkor bázis-vetület, ha az m bármely j komponensének összege legalább $t(X)$ és legfeljebb $r(X)$, ahol X a j komponensnek megfelelő j darab S_i halmaz uniója. A bázis-vetületek egy g-polimatroid* (éspedig a $B(r)$ aggregáltjának vetülete) *egész pontjai.* •

3.7.3 Összeg

Emlékeztetünk, hogy az $R_1, \ldots, R_k$ $\mathbf{R}^S$-beli halmazok összegén (néha Minkowski összegén) azon elemek halmazát értik, melyek előállnak az R_i-kből vett egy-egy elem összegeként. Adott (p_i, b_i) $(i = 1, \ldots, k)$ paramoduláris párok összege nyilván paramoduláris.

TÉTEL 3.7.5 (Összegtétel) $\sum_i Q(p_i, b_i) = Q(\sum_i p_i, \sum_i b_i)$. *Ráadásul, ha mindegyik p_i, b_i egészértékű, akkor $Q(\sum_i p_i, \sum_i b_i)$ minden egész eleme előáll a Q_i-kből vett egy-egy egész elem összegeként.*

Biz. Legyen $S_1, \ldots, S_k$ az S halmaz k diszjunkt példánya, melyek unióját jelölje S^*. legyen $\varphi : S^* \to S$ az a leképezés, amelyben minden S_i-beli elem képe a neki megfelelő S-beli elem. Jelölje (p'_i, b'_i) a (p_i, b_i) pár másolatát az S_i halmazra. Legyen a (p'_i, b'_i) párok direkt összege (p^*, b^*), míg a $Q(p'_i, b'_i)$ g-polimatroidok direkt összege Q^*. Ekkor a definíciókból közvetlenül adódóan egyrészt $Q(\sum p_i, \sum b_i) = \varphi(Q(p^*, b^*))$, másrészt $\sum p_i = \varphi(p^*)$ és $\sum b_i = \varphi(b^*)$, így a 3.7.3 tétel alkalmazható. •

Matroidok összege

Ha a b egészértékű polimatroid-függvény és a $g_1 : S \to \mathbf{Z}$ azonosan 1 vektor b' alsó konvolúcióját tekintjük, akkor $b'(Z) = \min\{b(X) + |Z - X| : X \subseteq Z\}$. A b' nemcsak szubmoduláris, hanem monoton növő és szubkardinális is, vagyis egy matroid rangfüggvénye. Magyarán egy polimatroid metszete a $T(0,1)$ egységkockával egy matroid függetlenjeinek poliédere, amely matroidban egy $F \subseteq S$ halmaz akkor és csak akkor független, ha $x = \underline{\chi}_F$ benne van $P(b')$-ben, ami azzal ekvivalens, hogy $|F \cap X| \leq b(X)$ minden $X \subseteq F$-re. A Matroidelméletben előadásban már találkoztunk ezzel a matroid konstrukcióval.

Ebből könnyen levezethetjük Edmonds és Fulkerson tételét matroidok összegéről. Emlékeztetőül, az S alaphalmaz egy F részhalmazát akkor nevezzük particionálhatónak az $M_i = (S, r_i)$ $(i = 1, \dots, k)$ matroidokra nézve, ha F előáll az M_i matroidok egy-egy független halmazának egyesítéseként.

TÉTEL 3.7.6 (Edmonds és Fulkerson) *Adott $M_i = (S, r_i)$ matroidokra vonatkozó partícionálható halmazok egy* (az M_i-k összegének nevezett) *matroidot alkotnak, melynek r rangfüggvényét a következő formula adja.*

$$r(Z) = \min\{\textstyle\sum_i r_i(X) + |Z - X| : X \subseteq Z\}. \tag{3.68}$$

Biz. Az $M_i = (S, r_i)$ matroidokra legyen $b := \sum r_i$. Az előbbiek szerint az $P(b) \cap T(0,1)$ metszet egy polimatroid a $T(0,1)$ egységkockában, azaz egy M matroid függetlenjeinek poliédere, amelynek határfüggvénye $r(Z) = \min\{\sum_i r_i(X) - |Z - X| : X \subseteq Z\}$. A 3.7.5 tételből tudjuk, hogy $P(b)$ minden egész eleme előáll a $P(r_i)$-kből vett egy-egy egész vektor összegeként, és ezért M független halmazai pont a partícionálható halmazok. •

3.7.4 Metszet

Amiképp két matroid közös függetlenjei általában nem alkotnak matroidot, úgy két g-polimatroid metszete sem feltétlenül g-polimatroid. A nemürességre vonatkozó feltétel azonban, Edmonds matroid metszettételének általánosításaként, könnyen levezethető az összegtételből.

TÉTEL 3.7.7 (G-polimatroid metszettétel) *A (p_1, b_1) és (p_2, b_2) paramoduláris párok által definiált $Q_1 := Q(p_1, b_1)$ illetve $Q_2 := Q(p_2, b_2)$ g-polimatroidok $M := Q_1 \cap Q_2$ metszete akkor és csak akkor nemüres, ha*

$$p_1 \leq b_2 \text{ és } p_2 \leq b_1. \tag{3.69}$$

Amennyiben a szereplő függvények egészértékűek és M nemüres, úgy M tartalmaz rácspontot is.

Biz. A feltétel nyilván szükséges. Az elegendőséghez tekintsük a $Q_1 + Q_2'$ összeget, ahol Q_2' a Q_2-nek az O origóra vett tükörképe, azaz $Q_2' = Q(-b_2, -p_2)$. Az összegtétel alapján $Q = Q(p_1 - b_2, b_2 - p_1)$ és így egy m vektor pontosan akkor van Q-ban, ha $p_1 - b_2 \leq m \leq b_2 - p_1$. Márpedig az $m \equiv 0$-ra ez a (3.69) feltétel miatt teljesül, és így az O origó Q-ban van. Emiatt O előáll, mint egy $x_1 \in Q_1$ és egy $x_2' \in Q_2'$ vektor összege, amelyek ráadásul egészek, ha (p_i, b_i) egészértékű. Ekkor $x_2 := -x_2' \in Q_2$ vagyis $x_1 = x_2$ közös eleme Q_1 és Q_2-nek. •

Ha az egyik g-polimatroid egy $T(f, g)$ tégla, speciális esetként megkapjuk a 3.4.9 tételt.

TÉTEL 3.7.8 *Az egészértékű (p_1, b_1) és (p_2, b_2) paramoduláris párok által definiált $Q_1 := Q(p_1, b_1)$ illetve $Q_2 := Q(p_2, b_2)$ g-polimatroidok $M := Q_1 \cap Q_2$ metszete egész poliéder.*

Biz. Az M minden M' oldala a Q_1 és Q_2 egy-egy oldalának metszeteként áll elő. Mivel Q_1 és Q_2 egész poliéderek, így a 3.7.7 tétel alapján M' tartalmaz egész pontot, azaz M egész. •

Megfogalmazunk néhány más következményt is.

TÉTEL 3.7.9 *Legyen $B_1 = B(b_1)$ és $B_2 = B(b_2)$ két bázis-poliéder, melyekre $b_1(S) = b_2(S) =: k$. Az $M := B_1 \cap B_2$ metszet akkor és csak akkor nemüres, ha minden $X \subseteq S$-re*

$$b_1(X) + b_2(S - X) \geq k. \tag{3.70}$$

Ha b_1 és b_2 egészértékű, és M nemüres, akkor M tartalmaz rácspontot.

Biz. Jelölje p_i a b_i komplementerét. Láttuk, hogy $B_i = Q(p_i, b_i)$. Így 3.7.7 tétel alapján $B_1 \cap B_2$ pontosan akkor nemüres, ha $p_1 \leq b_2$ és $p_2 \leq b_1$, ami kiírva azt jelenti, hogy minden $X \subseteq S$-re $k - b_1(S - X) \leq b_2(X)$ és $k - b_2(S - X) \leq b_1(X)$. Ezek ekvivalensek egymással és a 3.70 feltétellel. •

Speciális esetként rögtön kiolvasható Edmonds matroid metszettételének közös bázisokra vonatkozó változata.

TÉTEL 3.7.10 (Edmonds matroid metszettétele) *Az $M_1 = (S, r_1)$ és $M_2 = (S, r_2)$ k rangú matroidoknak akkor és csak akkor létezik közös bázisa, ha minden $X \subseteq S$-re $r_1(X) + r_2(S - X) \geq k$.*

Megfogalmazzuk a g-polimatroid metszettétel szub- és szupermoduláris poliéderre vonatkozó speciális esetét is, ráadásul rögön a reszelési tétellel ötvözve.

TÉTEL 3.7.11 *Legyen b jórészt szubmoduláris és p jórészt szupermoduláris. A $M = S(b) \cap S'(p)$ metszet akkor és csak akkor nemüres, ha*

$$p^\wedge \leq b^\vee, \tag{3.71}$$

vagyis, ha az S minden Z részhalmazának bármely két $\{X_i\}$ és $\{Y_j\}$ partíciójára

$$\sum_i p^*(X_i) \leq \sum_j b^*(Y_j). \tag{3.72}$$

Ha p és b egészértékű, úgy M egész poliéder. Amennyiben p^* teljesen szupermoduláris és/vagy b^* teljesen szubmoduláris, úgy a (3.71) feltételben $p^\wedge$ illetve $b^\vee$ helyettesíthető p-vel illetve b-vel. •

Diszkrét szeparáció

Teljesen szuper- illetve szubmoduláris p-re és b-re a 3.7.11 tétel az alábbi ekvivalens alakban fogalmazható meg, amelynek külön érdekességet ad a konvex és konkáv függvények hipersíkkal való elválasztásáról szóló közismert tétellel való analógiája.

TÉTEL 3.7.12 (Diszkrét szeparációs tétel) *Legyen S alaphalmaz, $p : 2^S \to \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$ szupermoduláris függvény és $b : 2^S \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ szubmoduláris függvény, melyekre $p(\emptyset) = b(\emptyset) = 0$. Akkor és csak akkor van olyan m moduláris függvény, amelyre $p \leq m \leq b$, ha*

$$p \leq b. \tag{3.73}$$

Ha p és b egészértékű és $p \leq b$, akkor az elválasztó m is választható egészértékűnek. •

A 3.7.11 tételben szereplő (3.72) feltétel akkor is egyszerűsödik, ha (p, b) jórészt paramoduláris.

TÉTEL 3.7.13 *Legyen (p, b) jórészt* (speciálisan, metsző) *paramoduláris pár. A $Q(p, b)$ poliéder akkor és csak akkor nemüres,* (másszóval p és b szeparálható m moduláris függvénnyel)*, ha az S alaphalmaz minden $\{Z_1, \ldots, Z_t\}$ részpartíciójára*

$$p(\cup Z_i) \leq \sum_i b(Z_i) \ \text{ és } \ \sum_i p(Z_i) \leq b(\cup Z_i). \tag{3.74}$$

Ha ráadásul (p, b) egészértékű és (3.74) teljesül, úgy $Q(p, b)$ tartalmaz egész pontot (m választható egészértékűnek).

Biz. A feltétel nyilván szükséges. Az elegendőség igazolásához tegyük fel, hogy nem létezik szeparáló m. Ekkor az 3.7.11 tétel szerint létezik egy $Z \subseteq S$ halmaz és annak $\mathcal{X} := \{X_1, \ldots, X_k\}$ illetve $\mathcal{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_l\}$ partíciója, melyekre

$$\sum_i p(X_i) > \sum_j b(Y_j). \tag{3.75}$$

Válasszuk ezeket úgy, hogy Z minimális legyen. Ekkor a két rész-partíció együtt egy $\mathcal{F}$ lamináris rendszert alkot, mert ha nem, akkor az egyik X_i metszi valamelyik Y_j-t és akkor a kereszt-egyenlőtlenség alapján X_i-t $X_j - Y_j$-vel, Y_j-t pedig $Y_j - X_i$-vel helyettesítve a $Z - (X_i \cap Y_j)$ halmaznak kapnánk két (3.75)-t teljesítő rész-partícióját, ellentétben Z minimális választásával.

Tekintsük most az $\mathcal{F}$ egy maximális tagját, amely mondjuk legyen X_1. Mivel $\mathcal{F}$ lamináris és kétszer fed, X_1 felpartícionálódik $\mathcal{Y}$-beli $Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_h}$ halmazokra. Az (3.74) feltétel első fele szerint $p(X_1) \leq b(Y_{i_1}) + \ldots + b(Y_{i_h})$. De ekkor a $Z' := Z - X_1$ halmaz és annak $\{X_2, \ldots, X_k\}$ valamint $\mathcal{Y} - \{Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_h}\}$ partíciója is teljesíti (3.75)-t, ellentmondásban Z minimális választásával. •

Feladat 3.21 *Vezessük le a 3.7.13 tételből a $Q(p, b) \cap T(f, g) \cap K(\alpha, \beta)$ metszet nemürességére vonatkozó 3.4.12 tételt.*

2012. december 9. uszub5

3.8 ALKALMAZÁSOK

3.8.1 Előírt fokszámú fák

A 3.7.4 következmény speciális eseteként tekintsünk egy összefüggő $G = (V, E)$ gráfot, amelynek V_S legyen egy stabil halmaza. Egy $m : V_S \to \mathbf{Z}_+$ vektorról azt mondjuk, hogy **fafok-vektor**, ha G-nek létezik egy olyan F feszítő fája, amelyre $d_F(v) = m(v)$ minden $v \in V_S$ csúcsra. Jelölje $S \subseteq E$ a V_S-ben végződő élek halmazát. Az egyes V_S-beli csúcsokkal szomszédos élek az S-nek egy $\mathcal{S}$ partícióját határozzák meg (merthogy V_S stabil). Tekintsük a gráf körmatroidja bázis-poliéderének S-ra való vetületének az $\mathcal{S}$ által definiált Q homomorf képet. A 3.7.4 következmény szerint Q egy g-polimatroid, melynek rácspontjai éppen a fafok-vektorok. Annak érdekében, hogy ennek határpárját G nyelvén felírjuk $X \subseteq V$-re jelölje $c(X)$ az X elhagyásával keletkező komponensek számát, míg $\hat{c}(X)$ az X által feszített részgráf koponenseinek a számát, (azaz $\hat{c}(X) = c(V - X)$.)

TÉTEL 3.8.1 *A fafok vektorok g-polimatroidjának (p, b) határpárját a következő formula adja meg.*

$$b(X) := |X| + |\Gamma(X)| - \hat{c}(X \cup \Gamma(X)) \text{ és } p(X) := |X| + c(X) - 1. \tag{3.76}$$

Egy $m : V_S \to \mathbf{Z}_+$ függvény akkor és csak akkor fafok-vektor, ha

$$m(X) \leq |X| + |\Gamma(X)| - 1 \text{ minden } \emptyset \subset X \subseteq V_S \text{ halmazra} \tag{3.77}$$

és

$$m_S(X) \geq |X| + c(X) - 1 \text{ minden } \emptyset \subset X \subseteq V_S \text{ halmazra.} \tag{3.78}$$

Biz. Jelölje r és t a gráf körmatroidjának rang- illetve ko-rang függvényét. Ekkor $F \subseteq E$-re $r(F) = |V(F)| - \hat{c}(V(F))$. Jelölje az X-szel szomszédos élek halmazát E_X. A homomorfia tétel miatt $b(X) = r(E_X) = |V(E_X)| - \hat{c}(V(E_X)) = |X| + |\Gamma(X)| - \hat{c}(X \cup \Gamma(X))$ és $p(X) = t(E_X) = r(E) - r(E - E_X) = (|V| - 1) - [|V - X| - c(X)] = |X| + c(X) - 1$. A $Q(p, b)$ g-polimatroidnak m definíció szerint akkor eleme, ha $p \leq m \leq b$. Ebből $p \leq m$ éppen (3.78).

Az $m(X) \leq b(X) = |X| + |\Gamma(X)| - \hat{c}(X \cup \Gamma(X))$ egyenlőtlenség formálisan erősebb, mint a (3.77)-ban megadott $m(X) \leq |X| + |\Gamma(X)| - 1$ egyenlőtlenség, de valójában ekvivalens vele, mert az $X \cup \Gamma(X)$ által feszített $k := \hat{c}(X \cup \Gamma(X))$ darab $X_i \cup \Gamma(X_i)$ komponens mindegyikére (3.77)-t felírva, kapjuk, hogy $m(X) = \sum_i^k m(X_i) \leq \sum_i^k [|X_i| + |\Gamma(X_i)| - 1] = |X| + \Gamma(X) - k$. •

Megjegyezzük, hogy ha nem csak egy stabil halmaz pontjaiban írjuk elő a fa fokszámait, akkor a kérdés NP-teljes, hiszen ha az előírás két adott ponton 1, a többin pedig 2, akkor a kérdéses feszítő fa éppen egy Hamilton-út, márpedig két megadott pont között vezető Hamilton-út létezésének problémája NP-teljes.

Korlátozott fafok-vektorok

A 3.8.2 tételben láttuk, hogy ha G összefüggő gráf és V_S a csúcsok egy stabil részhalmaza, akkor a feszítő fák V_S-beli fokszámai, az ún. fafok-vektorok egy $Q(p, b)$ g-polimatroidot határoznak meg, melynek határpárját a (3.76) képlettel felírtuk. Ezt a $T(f, g)$ téglával metszve alkalmazhatjuk a fenti eredményeket.

TÉTEL 3.8.2 *Legyen G összefüggő irányítatlan gráf és $V_S \subset V$ a G pontjainak egy stabil részhalmaza. Legyen továbbá $f_S : V_S \to \mathbf{Z}_+$ és $g_S : V_S \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ két függvény, melyekre $f_S \leq g_S$. Akkor és csak akkor létezik G-nek olyan F feszítő fája,*
(i) *amelyre $d_F(v) \geq f_S(v)$ minden $v \in S$-re, ha*

$$f_S(X) \leq |X| + |\Gamma(X)| - 1 \text{ minden } \emptyset \subset X \subseteq V_S \text{ halmazra,} \tag{3.79}$$

(ii) *amelyre $d_F(v) \leq g_S(v)$ minden $v \in V_S$-re, ha*

$$g_S(X) \geq |X| + c(X) - 1 \text{ minden } \emptyset \subset X \subseteq S \text{ halmazra,} \tag{3.80}$$

(iii) *amelyre $f_S(v) \leq d_F(v) \leq g_S(v)$ minden $v \in V_S$-re, ha mind* (3.79), *mind* (3.80) *teljesül.* •

Feladat 3.22 *Írjuk fel olyan feszítő fa létezésének a feltételét, amelyre $f_S(v) \leq d_F(v) \leq g_S(v)$ minden $v \in V_S$-re, továbbá $\alpha \leq d_F(V_S) \leq \beta$.*

3.8.2 Fenyő-pakolások

Emlékeztetünk Edmonds fenyő-tételének gyenge alakjára.

TÉTEL 3.8.3 (Edmonds) *A $D' = (V, A')$ digráfban akkor és csak akkor létezik k élidegen s-gyökerű feszítő fenyő, ha minden s-t nem tartalmazó nemüres csúcshalmaz befoka legalább k.*

A tételre támaszkodva g-polimatroidok segítségével levezetjük egy általánosítását.

Lemma 3.8.1 *Legyen $D = (U, A)$ irányított gráf és $m : V \to \mathbf{Z}_+$ egészértékű vektor, amelyre $m(U) = k$. D-ben akkor és csak akkor létezik k élidegen feszítő fenyő úgy, hogy mindegyik v csúcs pontosan $m(v)$ fenyőnek a gyökere, ha*

$$\varrho_D(X) \geq k - m(X) \text{ fennáll minden } \emptyset \subset X \subseteq V \text{ halmazra.} \tag{3.81}$$

Biz. Egy új s pontból vezessünk minden v pontba $m(v)$ párhuzamos irányított élt. A kibővített D' digráfban (3.81) miatt $\varrho'(X) = \varrho_D(X) + m(X) \geq k$ teljesül, így az Edmonds tétel nyomán létezik k élidegen s gyökerű feszítő fenyő. Miután s-ből pontosan k él vezet ki, így a k fenyő mindegyike pontosan egy s-ből induló élt használ. Emiatt az s pontot kihagyva az eredeti digráfnak kapjuk k élidegen feszítő fenyőjét, melyekre a konstrukció miatt érvényes, hogy minden v csúcs $m(v)$ fenyőnek a gyökere. •

Nevezzünk egy ilyen m vektort **gyökérvektor**nak. Kérdés, hogy mikor létezik gyökérvektor (magyarán, hogy D-ben mikor létezik k élidegen feszítő fenyő), vagy általánosabban, mikor létezik adott $f \leq g$ korlátok közé eső gyökérvektor. Az U alaphalmazon értelmezzük a p_1 függvényt a $p_1(X) := (k - \varrho(X))^+$ képlettel, ha $X \neq \emptyset$. Ekkor p_1 pozitívan metsző szupermoduláris, és ezért $B'(p_1)$ bázis-poliéder. A lemmából adódik a következő.

Állítás 3.8.1 *A gyökérvektorok a $B'(p_1)$ bázis-poliéder egész pontjai.* •

A 3.5.3 tétel alapján $B'(p_1)$ pontosan akkor nemüres, ha U minden $\{X_1, \ldots, X_q\}$ partíciójára $\sum p_1(X_i) \geq p_1(U)$, ami azzal ekvivalens, hogy U minden $\{U_1, \ldots, U_t\}$ részpartíciójára $\sum_i [k - \varrho_D(U_i)] \geq k$, azaz $\sum \varrho_D(U_i) \geq k(t-1)$.

A 3.5.4 tételből a következő általánosítást kapjuk.

TÉTEL 3.8.4 *Legyenek adottak $f : U \to \mathbf{Z}_+$ alsó és $g : U \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ felső korlátok, melyekre $f \leq g$. Egy $D = (U, A)$ irányított gráfban akkor és csak akkor létezik k páronként élidegen feszítő fenyő úgy, hogy mindegyik v csúcs közülük legalább $f(v)$-nek és legfeljebb $g(v)$-nek a gyökere, ha*

$$f(U) \leq k, \tag{3.82}$$

$$\sum_{i=1}^{t} \varrho_D(X_i) \geq k(t-1) + f(X_0) \tag{3.83}$$

fennáll U minden olyan $\{X_0, X_1, \ldots, X_t\}$ partíciójára, amelyben $t \geq 1$ és csak X_0 lehet üres, és

$$g(X) \geq k - \varrho_D(X) \text{ minden } X\text{-re, } \emptyset \subset X \subseteq U. \bullet \tag{3.84}$$

3.8.3 Irányítások

Emlékeztetünk a 3.1 szakasz végén idézett irányítási lemmára, amelyből következett, hogy egy gráf irányításainak befok-vektorai egy bázis-poliédert kitöltve feszítenek.

Most megmutatjuk, hogy gyökeresen k-élösszefüggő irányításokat miként lehet kezelni g-polimatroidokkal. Érdemes azonban az irányítási problémát egyfajta absztrakt alakban megfogalmazni. Legyen h a V részhalmazain értelmezett halmazfüggvény, amelyet **igényfüggvény**nek nevezünk. Az alábbiakban az igényfüggvényekre automatikusan feltesszük, hogy $h(\emptyset) = h(V) = 0$. Azt mondjuk, hogy a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf egy irányítása **fedi** a h-t, ha $\varrho(X) \geq h(X)$ fennáll minden $X \subset V$-re. Kérdés, hogy G-nek mikor létezik h-t fedő irányítása.

A válaszhoz figyeljük meg, hogy egy irányításban a csúcsok befokai meghatározzák a halmazok befokait, nevezetesen

$$\varrho(Z) = \sum [\varrho(v) : v \in Z] - i_G(Z), \tag{3.85}$$

így a h-t fedő irányítás létezése (3.85) alapján egy olyan $m : V \to \mathbf{Z}$ befok-vektor létezésével ekvivalens, amelyre

$$m(Z) \geq h(Z) + i_G(Z) \text{ minden } Z \subseteq V\text{-re.} \tag{3.86}$$

TÉTEL 3.8.5 *Legyen $h \geq 0$ metsző szupermoduláris függvény. G-nek akkor és csak akkor létezik h-t fedő irányítása, ha minden $\mathcal{P} = \{V_1, \ldots, V_t\}$ partícióra a kereszt-élek száma $e(\mathcal{P})$ számára*

$$e(\mathcal{P}) \geq \sum h(V_i). \tag{3.87}$$

A h-t fedő irányítások befok-vektorai kitöltve feszítenek egy bázis-poliédert.

Biz. A feltétel nyilván szükséges. Az elegendőséghez tekintsük a $p := h + i_G$ függvényt. Ez metsző szupermoduláris, amelyre (3.87) alapján $\sum p(V_j) = \sum[h(V_j) + i_G(V_j)] = \sum h(V_j) + [|E| - e(\mathcal{P})] \leq |E| = p(V)$. A 3.5.3 tétel szerint $B(p)$-nek létezik egy m egész eleme. Mivel h nemnegatív, így $m(X) \geq i_G(X)$ automatikusan teljesül, ezért m egy irányítás befok-vektora és (3.86) nyomán az irányítás fedi h-t. E megfontolásból az is látszik, hogy a h-t fedő irányítások befok-vektorai pontosan a $B'(p)$ bázis-poliéder rácspontjai. •

Következmény 3.8.6 *Egy $G = (V, E)$ gráfnak akkor és csak akkor létezik gyökeresen k-élösszefüggő irányítása, ha V minden $\{V_1, \ldots, V_t\}$ partíciójára a kereszt-élek száma legalább $k(t-1)$. A gyökeresen k-élösszefüggő irányítások befok-vektorai kitöltve feszítenek egy bázis-poliédert.*

Biz. Legyen s a gyökérpont. Definiáljuk a h igényfüggvényt úgy, hogy az s-t tartalmazó X halmazokon $h(X) = 0$, míg az s-t nem tartlmazó nemüres X halmazokon $h(X) = k$. Ekkor h metsző szupermoduláris és alkalmazhatjuk a 3.8.5 tételt. •

Feladat 3.23 *A 3.5.4 tétel alkalmazásával adjunk feltételt arra, hogy a gráfnak létezik olyan gyökeresen k-élösszefüggő irányítása, amelynek befok-vektora adott f és g korlátok közé esik.*

Következik, hogy a gyökeresen k-élösszefüggő irányítások befok-vektoraira érvényes a lánctulajdonság. Nézzük most meg azt az általánosabb feladatot, amikor egy vegyes gráf (irányítatlan éleit) kell úgy megirányítanunk, hogy gyökeresen k-élösszefüggő digráfot kapjunk. Itt is érdemesebb az absztrakt irányítási problémát tekinteni.

TÉTEL 3.8.7 *Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és h metsző G-szupermoduláris függvény, amelyre $h(\emptyset) = h(V) = 0$* (és amelynek lehetnek negatív értékei). *G-nek akkor és csak akkor létezik h-t fedő irányítása, ha V minden $\mathcal{P} = \{V_1, \ldots, V_t\}$ részpartíciójára azon élek $e'(\mathcal{P})$ száma, melyek valamelyik V_i-be belépnek legalább $\sum_{i=1}^{t} h(V_i)$.*

Biz. A feltétel nyilván szükséges. Az elegendőséghez először figyeljük meg, hogy ha a $\mathcal{P} = \{V_1, \ldots, V_t\}$ részpartícióra Z-vel jelöljük a V_i halmazok unióját, akkor $e'(\mathcal{P}) = e_G(Z) - \sum i_G(V_i)$ miatt $e_G(Z) - \sum i_G(V_i) \geq \sum h(V_i)$.

Legyen $p := h + i_G$ és $b := e_G$. Ekkor p metsző szupermoduláris, míg b teljesen szubmoduláris, és $p(V) = b(V) = |E|$. Továbbá $\sum p(V_i) = \sum[h(V_i) + i_G(V_i)] \leq e_G(Z) = b(Z)$, így a 3.7.11 tétel nyomán létezik egészértékű $m : V \to \mathbf{Z}$ függvény, amelyre $p \leq m \leq b$. Ebből $m(V) = |E|$, így az irányítási lemma miatt létezik G-nek olyan irányítása, amelyre $\varrho(v) = m(v)$ minden $v \in V$-re. De ekkor minden $X \subseteq V$-re $m(X) \geq p(X)$ folytán $\varrho(X) = \sum[\varrho(v) : v \in X] - i_G(X) = m(X) - i_G(X) \geq [h(X) + i_G(X)] - i_G(X) = p(X)$, tehát az irányítás fedi p-t. •

TÉTEL 3.8.8 *Egy $M = (V, A + E)$ vegyes gráfnak legyen $s \in V$ a gyökérpontja. M akkor és csak akkor irányítható gyökeresen k-élösszefüggővé, ha V minden $\{V_0, V_1, \ldots, V_q\}$ partíciójára, ahol $s \in V_0$, a köztes E-beli élek száma legalább $\sum_{i=1}^{q}[k - \varrho_A(V_i)]$.*

Biz. Tekintsük a $G = (V, E)$ irányítatlan gráfot és definiáljuk a h függvényt a következőképpen. $h(\emptyset) = h(V) = 0$, nemüres $X \subseteq V - s$-re $h(X) := k - \varrho_A(X)$ és minden más $X \subseteq V$-re $h(X) := -\infty$. Ekkor h metsző szupermoduláris és a tétel feltétele pontosan a 3.8.7 tétel feltételébe megy át, így alkalmazhatjuk a tételt. •

Gyakorlat 3.24 *Példán mutassuk meg, hogy vegyes gráf gyökeresen k-élösszefüggő irányításaira már nem érvényes a lánctulajdonság.*

2012. december 9. alkalmaz

3.9 A TELJES RESZELT

Matroidelméletben szerepelt, hogy keresztező szubmoduláris függvény egy matroid függetlenjeinek definiálására ugyan már nem alkalmas, de a bázisaiéra igen. Ennek kiterjesztése a következő. Legyen b keresztező szubmoduláris függvény, melyre $b(S)$ véges és tekintsük a $Q := B(b) := \{x \in \mathbf{R}^S : x(Z) \leq b(Z)$ minden $Z \subset S$-re, és $x(S) = b(S)\}$ poliédert. Nemsokára be fogjuk látni, hogy $B(b)$ (esetleg üres) bázis-poliéder, amely ráadásul egész, ha b egészértékű. Először azonban vizsgáljuk meg $B(b)$ a nemürességének feltételét.

3.9.1 A nemüresség feltétele

TÉTEL 3.9.1 (Fujishige) *Legyen b keresztező szubmoduláris, melyre $b(S) = 0$. A $B(b)$ poliéder akkor és csak akkor nemüres, ha minden $\mathcal{P}$ partícióra vagy ko-partícióra*

$$b(\mathcal{P}) \geq 0, \tag{3.88}$$

másszóval, minden $\{S_1, \dots, S_t\}$ partícióra ($t \geq 2$)

$$\textstyle\sum_i b(S_i) \geq 0 \tag{3.89}$$

és

$$\textstyle\sum_i b(S - S_i) \geq 0. \tag{3.90}$$

Ha b egészértékű és $B(b)$ nemüres, úgy $B(b)$ tartalmaz rácspontot is.

Biz. A feltételek nyilván szükségesek. Az elegendőség igazolásához legyen s az S tetszőleges pontja és definiáljuk az $S' := S - s$ részhalmazain a p' és b' függvényeket a következőképpen. $b'(X) = b(X), p'(X) = -b(S - X)$. Mivel b keresztező szubmoduláris, így (p', b') metsző paramoduláris.

Az S' valamely $\{Z_1, \dots, Z_t\}$ részpartíciójához rendeljük hozzá az S-nek a $\{Z_0, Z_1, \dots, Z_t\}$ partícióját, ahol $Z_0 := S - \cup_{i=1}^t Z_i$. Közvetlenül adódik, hogy $p'(\cup_{i=1}^t Z_i) \leq \sum_{i=1}^t b'(Z_i)$ és $\sum_{i=0}^t b'(Z_i) \geq 0$ ekvivalens, valamint $\sum_{i=1}^t p'(Z_i) \leq b'(\cup_{i=1}^t Z_i)$ és $\sum_{i=0}^t b(S - Z_i) \geq 0$ ekvivalens. Így a 3.7.13 tételből következik, hogy létezik olyan $m' : S \to \mathbf{Z}$ függvény, amelyre $p'(X) \leq m'(X) \leq b'(X)$ minden $X \subseteq S$-re fennáll, amely ráadásul egészértékű, ha p' és b' azok, vagyis, ha b egészértékű. Definiáljuk az $m : S \to \mathbf{Z}$ függvényt a következőképp. Legyen $m(v) = m'(v)$, ha $v \in S$ és $m(s) := -m'(S)$. Ekkor m benne van a $B(b)$ poliéderben. •

Direkt bizonyítás

Fujishige tételét a korábban kiépített elméletből egyszerűen kaptuk meg, ugyanakkor ebben a felépítésben szükségünk volt (visszafelé haladva) a metszettételre, a homomorfia tételre, a reszelési tételre. Ezért bemutatunk egy direkt bizonyítást is, amely csak a reszelési tételre támaszkodik, és az az előnye is megvan, hogy algoritmussá alakítható.

Előkészületként emlékeztetünk rá, hogy a b függvény $p := \overline{b}$ komplementere (azaz $b(S) - b(S - X)$) keresztező szupermoduláris és $\overline{b}(\emptyset) = b(\emptyset) = 0$ és $\overline{b}(S) = b(S)$). Az S alaphalmazon egy nemüres $\mathcal{K}$ hipergráfot nevezzünk az S **kompozíció**jának vagy röviden kompozíciónak, ha $\mathcal{K}$ reguláris, azaz minden elemet ugyanannyi hiperél tartalmaz. Ez a közös szám a kompozíció **fedési száma**. Speciális kompozíció az S partíciója vagy ko-partíciója (amely egy partíció tagjainak komplementereiből áll). Hasznos lesz az alábbi egyszerű megfigyelés.

Lemma 3.9.1 *Ha $\mathcal{K}$ az S egy keresztezés-mentes kompozíciója, akkor $\mathcal{K}$ felbontható partíciókra és ko-partíciókra.*

Biz. Indukció miatt elég azt igazolnunk, hogy $\mathcal{K}$ tartalmaz partíciót vagy ko-partíciót, hiszen egy ilyent $\mathcal{K}$-ból kihagyva továbbra is keresztezés-mentes kompozíciót kapunk.

Ismeretes, hogy $\mathcal{K}$ reprezentálható egy $F = (U, A)$ irányított fával és egy $\varphi : V \to V(F)$ leképezéssel úgy, hogy $\mathcal{K}$ minden X tagjának a fa egy a éle felel meg olyképpen, hogy $X = \varphi(U_a)$ ahol U_a jelöli a $F - a$ két komponense közül azt, amelybe a belép.

A fa pontjait szintekbe lehet úgy osztani, hogy minden él egy szintet lépjen fel. Legyen u és v a fa egy leghosszabb irányított útjának kezdő illetve végpontja. Ekkor $\varphi^{-1}(u)$ és $\varphi^{-1}(v)$ egyike szükségképpen üres, hiszen $x \in \varphi^{-1}(u)$ és $y \in \varphi^{-1}(v)$ esetén y pontosan annyival több tagjában van $\mathcal{K}$-nak, ahány éle van az útnak, márpedig $\mathcal{K}$ reguláris. Amennyiben $\varphi^{-1}(u)$ üres, úgy az u-ból induló fa-beli éleknek megfelelő $\mathcal{K}$-beli tagok partíciót alkotnak, míg ha $\varphi^{-1}(v)$ üres, úgy az v-be belépő fa-beli éleknek megfelelő $\mathcal{K}$-beli tagok ko-partíciót. •

A Fujishige tétel alternatív bizonyítása A feltétel szükséges, hiszen ha létezik $x \in B(b)$, akkor tetszőleges $\mathcal{K}$ kompozícióra (és így speciálisan partícióra vagy ko-partícióra is) $0 = fx(S) = \sum[x(Z) : z \in \mathcal{K}] \leq \sum[b(Z) : z \in \mathcal{K}] = b(\mathcal{K})$, ahol Δ jelöli a $\mathcal{K}$ fedési számát. Az elegendőség igazolásához feltesszük, hogy $|S| \geq 2$.

Állítás 3.9.1 *Minden $\mathcal{K}$ kompozícióra $b(\mathcal{K}) \geq 0$.*

Biz. Ha létezne sértő kompozíció, akkor a kikeresztezési ejárást alkalmazva a b keresztező szubmodularitása folytán $\mathcal{K}$ keresztezés-mentes is létezne. A 3.9.1 lemma miatt viszont $\mathcal{K}$ felbomlik partíciókra és ko-partíciókra, így ezek egyikére szükségképpen $b(\mathcal{P}) < 0$ állna, ellentmondásban a (3.88) feltétellel. •

Egy $\mathcal{P}$ kompozíciót nevezzünk **pontos**nak, ha $b(\mathcal{P}) = 0$. A b értékét egy egyelemű $\{s\}$ halmazon csökkentve a keresztező szubmodularitás érvényben marad. Ezért $b(s)$ esetleges csökkentésével feltehetjük, hogy az $\{s\}$ halmaz benne van egy pontos partícióban vagy ko-partícióban. Miután egy ko-partíció, amely tartalmazza az egyelemű $\{s\}$ halmazt szükségképpen két tagból áll ($\{s\}$-ből és $V - \{s\}$-ből), ezért partíció is. Tehát feltehető, hogy minden $s \in S$ elemre $\{s\}$ tagja egy $\mathcal{P}_s$ pontos partíciónak.

Legyen $z(s) := b(s)$ minden $s \in S$-re. Belátjuk, hogy $z \in B(b)$ vagyis hogy $z(S) = 0$ és minden $Z \subset S$-re $z(Z) \leq b(Z)$.

Legyen $\mathcal{K}$ az S-nek a $\mathcal{P}_s$ partíciók uniójából álló kompozíciója (abban az értelemben, hogy minden X halmaznak annyi példánya szerepel $\mathcal{K}$-ban, ahány $\mathcal{P}_s$ tartalmazza). Ekkor $b(\mathcal{K}) = 0$ és az egyelemű halmazokból álló $\mathcal{P}_S := \{\{s\} : s \in S\}$ partícióra $\mathcal{P}_S \subseteq \mathcal{K}$. Emiatt $\mathcal{K}' := \mathcal{K} - \mathcal{P}_S$ kompozíció. A 3.9.1 állítás miatt $b(\mathcal{K}') \geq 0$, és így $0 \leq b(\mathcal{P}_S) = b(\mathcal{K}) - b(\mathcal{K}') \leq 0$, azaz $\mathcal{P}_S$ pontos partíció, mással szóval $z(S) = 0$.

Tetszőleges $Z \subset S$ nemüres halmazra legyen $\mathcal{K}_Z$ az $s \in Z$ elemekhez tartozó $\mathcal{P}_s$ partíciók egyesítése és legyen $\mathcal{P}_Z := \{\{s\} : s \in Z\}$. Ekkor $\mathcal{K}_Z$ kompozíció, melyre $b(\mathcal{K}_Z) = 0$ és $\mathcal{P}_Z \subseteq \mathcal{K}_Z$. Emiatt $\mathcal{K}' := \mathcal{K}_Z - \mathcal{P}_Z \cup \{Z\}$ is kompozíció. Ezért a 3.9.1 állítás nyomán $0 \leq b(\mathcal{K}') = b(\mathcal{K}_Z) - b(\mathcal{P}_Z) + b(Z) = 0 - z(Z) + b(Z)$, amiből $z(Z) \leq b(Z)$. • •

Fujishige tétele kicsit általánosabb alakban is érvényes.

TÉTEL 3.9.2 (Fujishige) *Legyen b keresztező szubmoduláris, melyre $b(S)$ véges. A $B(b)$ poliéder akkor és csak akkor nemüres, ha az S minden $\mathcal{F} = \{S_1, \ldots, S_t\}$ partíciójára*

$$\sum_i b(S_i) \geq b(S) \tag{3.91}$$

és

$$\textstyle\sum_i b(S - S_i) \geq (t-1)b(S) \quad (\text{azaz } \sum_i \overline{b}(S_i) \leq b(S)). \tag{3.92}$$

Legyen p keresztező szupermoduláris. A $B'(p)$ poliéder akkor és csak akkor nemüres, ha az S minden $\mathcal{F} = \{S_1, \ldots, S_t\}$ partíciójára

$$\sum_i p(S_i) \leq p(S) \tag{3.93}$$

és

$$\textstyle\sum_i p(S - S_i) \leq (t-1)p(S) \quad (\text{azaz } \sum_i \overline{p}(S_i) \leq p(S)). \tag{3.94}$$

Biz. A két rész ekvivalens, így csak az elsőt igazoljuk. Válasszunk ki egy $s \in S$ elemet és az ezt tartalmazó X halmazok mindegyikén csökkentsük $b(X)$ értékét $b(S)$-sel. Az így kapott b^* halmazfüggvény szintén keresztező szubmoduláris, amelyre $b^*(S) = 0$. A b^*-ra felírt (3.89) illetve (3.90) feltétel a (3.91) illetve (3.92) feltételekbe transzformálódik. Másrészt $B(b^*)$ nem más, mint a $B(b)$ eltoltja azzal a vektorral, amelyben az s-nek megfelelő komponens értéke $b(S)$, míg az összes többié 0. •

Teljesen szubmoduláris b-re a 3.4 szakaszban meghatároztuk a $B(b)$ bázis-poliéder és egy $T(f, g)$ tégla metszetének nemürességére vonatkozó feltételt (3.4.11 tétel). Ez valójában Fujishige tétel speciális esetének tekinthető.

Feladat 3.25 *Felhasználva, hogy egy szubmoduláris függvény értékét az egyelemű halmazokon és/vagy ilyenek komplementerein csökkentve keresztező szubmoduláris függvényt kapunk, vezessük le a* 3.4.11 *tételt Fujishige* 3.9.2 *tételéből.*

3.9.2 Bázis-poliéderek keresztező szubmoduláris függvényekből

A 3.4 szakaszban beláttuk, hogy bázis-poliéder és tégla metszete bázis-poliéder. Ennek általánosításaként most igazolni fogjuk, hogy ha b keresztező szubmoduláris és $b(S)$ véges, akkor $B(b)$ bázis-poliéder. A $B(b)$ (teljesen szubmoduláris) felső határfüggvényét meghatározása azonban bonylolultabb annál, mint amilyen a reszelt volt a speciálisabb metsző szubmoduláris esetben. Ezért szükségünk van egy partíciónál bonyolultabb fogalomra.

Egy $\mathcal{K}$ hipergráfról azt mondjuk, hogy a $Z \subset S$ nemüres részhalmaz **kompozíció**ja, ha $\mathcal{K}^+ := \mathcal{K} \cup \{S - Z\}$ kompozíciója S-nek. $\mathcal{K}$ **alapfedési** száma a $\mathcal{K}^+$ fedési száma minusz 1. Speciálisan a Z egy partíciója kompozíciója Z-nek, melynek alapfedési száma 0. A Z egy ko-partíciója is kompozíciója Z-nek, (ahol a **ko-partíció** egy $\{S - V_1, S - V_2, \ldots, S - V_t\}$ halmazrendszer, melyre $\{V_1, \ldots, V_t\}$ az $S - Z$ partíciója). Ennek alapfedési száma $t - 1$.

A ko-partíciónál általánosabb kompozíció a dupla-partíció. Ehhez legyen $\{Z_1, \ldots, Z_t\}$ a Z egy partíciója. Mindegyik Z_i-re legyen $\{Z_i^1, \ldots, Z_i^{t_i}\}$ az $S - Z_i$ halmaz egy partíciója ($t_i \geq 1$). Ekkor az $\{S - Z_i^j\}$ halmazok rendszerét a Z egy **dupla-partíció**jának nevezzük. A dupla-partíció tehát a Z valamely partíciójában szereplő halmazok ko-partícióiból áll. Könnyen látható, hogy Z dupla-partíciója valóban a Z kompozícióját alkotja, amelynek alapfedési száma a $(t_i - 1)$ értékek összege.

Tegyük fel, hogy a keresztező szubmoduláris b függvényre $B(b)$ nemüres. Jelölje $b^\downarrow$ azt a függvényt, amely úgy áll elő, hogy b komplementerének felső reszeltjét komplementáljuk, majd ennek vesszük az alsó reszeltjét, azaz

$$b^\downarrow = (\overline{(\overline{b})^\wedge})^\vee. \tag{3.95}$$

Figyeljük meg, hogy ha b egészértékű, akkor $b^\downarrow$ is az. A $b^\downarrow$-re adott definíciót a $b(S) = 0$ esetben részletesen kiírva, egy nemüres $Z \subset S$ halmazra a következőt kapjuk:

$$b^\downarrow(Z) = \min\{\textstyle\sum_{\{i,j\}} b(Z_i^j) : \{Z_i^j\} \text{ az } Z \text{ dupla-partíciója}\}. \tag{3.96}$$

Tömörebben,

$$b^\downarrow(Z) = \min\{b(\mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ a } Z \text{ dupla-partíciója}\}. \tag{3.97}$$

Feladat 3.26 *Igazoljuk, hogy az általános esetben $b^\downarrow(Z) = \min\{b(\mathcal{D}) - \Delta b(S)\}$, ahol a minimum a Z halmaz $\mathcal{F}$ dupla-partícióira megy és Δ az $\mathcal{D}$ alapfedési száma.*

TÉTEL 3.9.3 *Keresztező szubmoduláris b függvényre $B(b)$ bázis-poliéder. Amennyiben $B(b)$ nemüres, úgy felső határfüggvénye $b^\downarrow$.*

Biz. A 3.9.2 tétel bizonyításában látottakhoz hasonlóan ismét feltehetjük, hogy $b(S) = 0$. A reszelési tételt fogjuk kétszer alkalmazni. Jelölje p a b komplementerét, azaz $p(X) := b(S) - b(S - X) = -b(S - X)$. Ekkor p keresztező szupermoduláris és $B(b) = B'(p)$. Legyen $p^\wedge$ a p függvény felső reszeltje. Erre $p^\wedge(S) = 0$, hiszen $p^\wedge(S) \geq p(S) = 0$ a felső reszelt definíciójából adódik, így a feltevés szerint $B(b) = B'(p)$ nemüres, ezért nem lehet $p^\wedge(S) > 0$. Tehát $p^\wedge(S) = 0$ és így $B'(p^\wedge) = B'(p)$.

Állítjuk, hogy $p^\wedge$ ko-metsző szupermoduláris. Valóban, az S bármely valódi nemüres S' részhalmazára való megszorítással kapott $p|S'$ függvény metsző szupermoduláris az S' alaphalmazon. Nyilván $p|S'$ felső reszeltje ugyanaz, mint a $p^\wedge$ megszorítása S'-re. A 3.5.1 reszelési tételt $p^\wedge|S'$-re alkalmazva, azt kapjuk, hogy $p^\wedge|S'$ teljesen szupermoduláris S'-n, vagyis $p^\wedge$ teljesíti X-re és Y-ra a szupermodularitási egyenlőtlenséget valahányszor X és Y ko-metsző, vagyis $p^\wedge$ tényleg ko-metsző szupermoduláris.

Jelölje b' a $p^\wedge$ komplementerét. Ekkor b' metsző szubmoduláris és így a reszelési tétel miatt a b' alsó reszeltje, ami definíció szerint pont $b^\downarrow$, teljesen szubmoduláris. Érvényes továbbá, hogy $b^\downarrow(S) = 0$, hiszen $(b')^\vee(S) \geq b'(S) = 0$ az alsó reszelt definíciójából adódik, de a feltevés szerint $B(b) = B'(p) = B'(p^\wedge)$ nemüres, így nem lehet $(b')^\vee(S) < 0$. Emiatt $B(b^\downarrow) = B(b') = B'(p) = B(b)$. • •

A $b^\downarrow$ függvényt a b **teljes (alsó) reszelt**jének nevezzük. (Analóg módon definiálható egy keresztező szupermoduláris függvény teljes felső reszeltje.)

3.9.3 Egyszerűbb formula a teljes reszeltre

A tétel esztétikai hiányossága, hogy egy dupla-partícióban lévő halmazok kuszán helyezkedhetnek el. Kimutatjuk azonban, hogy elegendő keresztezés-mentes dupla-partíciókra szorítkozni. Továbbra is feltesszük, hogy b olyan keresztező szubmoduláris függvény, amelyre a $B(b)$ bázis-poliéder nemüres és $b(S) = 0$.

Egy S részhalmazaiból álló keresztezés-mentes halmazrendszert lehet reprezentálni egy F irányított fa és egy $\varphi : S \to V(F)$ leképezés segítségével. A $Z \subset S$ halmaz egy dupla-partícióját **fa-kompozíció**nak hívjuk, ha keresztezés-mentes, az őt reprezentáló irányított fa mindegyik éle valamely $\varphi(S - Z)$-beli pontból vezet valamely $\varphi(Z)$-ben lévő pontba, és a fa mindegyik pontjának φ szerinti őseképe nemüres. Másszóval, Z egy fa-kompozícióját a Z-nek egy $\{Z_1, \ldots, Z_k\}$ ($k \geq 1$) partíciójával, az $S - Z$-nak egy $\{U_1, \ldots, U_l\}$ ($l \geq 1$) partíciójával, valamint a $\{z_1, \ldots, z_k, u_1, \ldots, u_l\}$ ponthalmazon adott olyan F irányított fával lehet megadni, melynek minden éle egy u_i pontból vezet egy z_j pontba. A fa-kompozíció tagjai és az F élei között egy-egy értelmű megfeleltetés van a következő szerint. A fa egy e élének elhagyásával keletkező két komponens közül jelölje Z_e azt, amelyikbe e belép. A Z_e-ben lévő z_i illetve u_j fabeli csúcsoknak megfelelő Z_i illetve U_j halmazok uniója legyen az a tagja a fa-kompozíciónak, amelyek az e faélnek megfelel.

Megállapodunk még abban, hogy az S alaphalmaz fa-kompozícióján az S egy partícióját vagy ko-partícióját értjük.

TÉTEL 3.9.4 *Legyen b olyan keresztező szubmoduláris függvény, amelyre $b(S) = 0$ és $B(b)$ nemüres. Ekkor $b^\downarrow(Z) = \min\{b(\mathcal{F}) : \mathcal{F}$ a Z fa-kompozíciója.$\}$*

Biz. Könnyen ellenőrizhető, hogy a Z tetszőleges $\mathcal{F}$ kompozíciójára $b^{\downarrow}(Z) \leq b(\mathcal{F})$. Valóban, tudjuk, hogy $B(b)$-nek van olyan x eleme, amelyre $x(Z) = b^{\downarrow}(Z)$. Legyen Δ az $\mathcal{F}$ alapfedési száma. Ekkor $b(\mathcal{F}) \geq \sum[x(X) : X \in \mathcal{F}] = \Delta x(S) + x(Z) = x(Z) = b^{\downarrow}(Z)$.

A (3.97) formula szerint $b^{\downarrow}(Z) = \min\{b(\mathcal{D}) : \mathcal{D}$ a Z dupla-partíciója$\}$, azaz Z-nek van olyan kompozíciója, amelyre $b^{\downarrow}(Z) = b(\mathcal{D})$. A kikeresztezési technika felhasználásával elérhetjük, hogy $\mathcal{D}$ keresztezés-mentes legyen. Feltehető továbbá, hogy $|\mathcal{D}|$ minimális.

Állítjuk, hogy az alaphalmaz minden $\mathcal{R}$ kompozíciójára $b(\mathcal{R}) \geq 0$. Valóban, ha $\mathcal{R}$ minden elemet Δ-szer fed, akkor $B(b)$ egy x elemére (amely $B(b)$ nemürességе miatt létezik) $0 = \Delta x(S) = \sum[x(Z) : Z \in \mathcal{R}] \leq \sum[b(Z) : Z \in \mathcal{R}] = b(\mathcal{R})$.

Ezért $\mathcal{D}$ nem foglalhatja magában S-nek semmilyen kompozícióját, speciálisan S-nek partícióját vagy kopartícióját sem. (Ugyanis ennek tagjait ki lehetne hagyni $\mathcal{D}$-ből.)

Tekintsük most a $\mathcal{D}$-nek az (F, φ) fa-reprezentációját. Nevezzük a fa egy v pontját üresnek, ha $\varphi^{-1}(v)$ üres. Az F fa pontjait szintekbe lehet rendezni úgy, hogy a fa minden éle egy szintről az eggyel magasabb szint felé vezessen.

Legyen u és v a fa egy leghosszabb irányított útjának kezdő illetve végpontja. Nem lehet sem u, sem v üres, mert ha $\varphi^{-1}(u)$ üres volna, úgy az u-ból induló fa-beli éleknek megfelelő $\mathcal{D}$-beli tagok partíciót alkotnának, míg ha $\varphi^{-1}(v)$ volna üres, úgy az v-be belépő fa-beli éleknek megfelelő $\mathcal{D}$-beli tagok ko-partíciót, márpedig $\mathcal{D}$ nem foglalja magában az S semmilyen kompozícióját. Így tehát létezik $x \in \varphi^{-1}(u)$ és $z \in \varphi^{-1}(v)$. A fa-reprezentáció definíciója folytán z pontosan annyival több tagjában van $\mathcal{D}$-nek, ahány éle van az útnak. Mivel $\mathcal{D}$ a Z kompozíciója, így az út egyetlen élből áll és $z \in Z, x \in S - Z$.

Az kaptuk tehát, hogy D-ben nincs kétélű irányított út, azaz F pontjai két szinten helyezkednek el, továbbá nincs üres pont. Szükségképpen a Z elemeinek (φ szerinti) képei a felső szinten vannak, míg $S - Z$ elemeinek a képei az alsón. Magyarul, $\mathcal{D}$ a Z-nek fa-kompozíciója. •

Feladat 3.27 *Igazoljuk, hogy ha b keresztező szubmoduláris függvény, amelyre $B(b)$ nemüres, akkor* $b^{\downarrow}(Z) = \min\{b(\mathcal{F}) - \Delta b(S) : \mathcal{F}$ *a Z fa-kompozíciója és Δ ennek alapfedési száma.*$\}$

3.9.4 Metsző paramoduláris párral adott g-polimatroidok

TÉTEL 3.9.5 *A (p, b) metsző paramoduláris párral adott $Q = Q(p, b)$ poliéder g-polimatroid, amely ráadásul egész, ha (p, b) egészértékű.*

Biz. Az üres halmaz definíció szerint g-polimatroid, így feltesszük, hogy $Q \neq \emptyset$. Tekintsük a (3.15) által definiált b^* függvényt. A 3.3.2 állítás szerint b^* keresztező szubmoduláris és és $Q(p, b)$ a $B(b^*)$ s-menti vetülete. A 3.9.3 tétel miatt $B(b^*)$ bázis-poliéder, így annak vetülete a 3.3.1 vetítési tétel szerint g-polimatroid. Ha b egészértékű, akkor b^* is az, és ezért $B(b^*)$ valamint ennek vetülete egész poliéder. •

Feladat 3.28 *Vezessük le Fujishige tételéből a 3.7.13 tétel metsző paramoduláris párokra vonatkozó speciális esetét.*

TÉTEL 3.9.6 *Tegyük fel, hogy a (p, b) metsző paramoduláris párral adott $Q = Q(p, b)$ g-polimatroid nemüres. Ekkor a Q paramoduláris (p', b') határpárja a következő.*

$$b' = (b_{\downarrow(p^{\wedge})})^{\vee}, \quad p' = (p_{\uparrow(b^{\vee})})^{\wedge}. \tag{3.98}$$

A 3.4 részben már láttuk, hogy g-polimatroid metszete téglával, sávval ugyancsak g-polimatroid. Kimutatjuk, hogy ez az eredmény valójában a 3.9.5 tétel speciális esete:

TÉTEL 3.9.7 *$Q = Q(p, b)$ g-polimatroid metszete egy $T(f, g) := \{x : f \leq x \leq g\}$ téglával g-polimatroid. Q metszete egy $\{x : \alpha \leq x(S) \leq \beta\}$ sávval g-polimatroid.*

Biz. Az állítás semmitmondó, ha $Q = \emptyset$. Ha Q nem üres, akkor feltehetjük hogy (p, b) paramoduláris pár. Definiáljuk a (p', b') párt a következőképpen. Legyen $p'(X) := p(X)$, ha $|X| \geq 2$ és $p'(X) = \max\{p(s), f(s)\}$, ha $X = \{s\}$, és legyen $b'(X) := b(X)$, ha $|X| \geq 2$ és $b'(X) = \min\{b(s), g(s)\}$, ha $X = \{s\}$. Könnyen látható, hogy (p', b') metsző paramoduláris, így $Q(p', b')$ g-polimatroid. Ugyanakkor $Q(p', b') = Q \cap T$.

A második részhez definiáljuk (p'', b'')-t a következőképp. Legyen $p''(S) := \max\{p(S), \alpha\}$ és $b''(S) := \min\{b(S), \beta\}$, míg $X \subset S$-re $p''(X) := p(X)$, $b''(X) := b(X)$. Könnyen látható, hogy (p', b') metsző paramoduláris, így $Q(p'', b'')$ g-polimatroid. Ugyanakkor $Q(p'', b'')$ éppen Q-nak és a sávnak a metszete. •

3.10 EGÉSZ G-POLIMATROIDOK MEGADÁSA

Amint láttuk, egy-egy értelmű kapcsolat van nemüres g-polimatroidok és paramoduláris párok között. Azt is igazoltuk, hogy bázis-poliéderek keresztező-szubmoduláris függvények segítségével is megadhatók, illetve, ami ezzel ekvivalens, hogy még metsző paramoduláris (p, b) esetén is $Q(p, b)$ g-polimatroid. Mostani célunk azt megmutatni, hogy már jórészt paramoduláris egészértékű párok is g-polimatroidot határoznak meg. (Az ezzel ekvivalens állítást bázis-poliéderekre már nem fogalmazzuk át: az mindenesetre nem igaz, hogy jórészt keresztező szubmoduláris függvény bázis-poliédert definiál.).

Legyen $p : 2^S \to \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$ és $b : 2^S \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ két egészértékű halmazfüggvény, melyekre $p(\emptyset) = b(\emptyset) = 0$. Tekintsük a (p, b) pár által meghatározott

$$\{p(X) \leq x(X) \leq b(X), X \subseteq S\} \tag{3.99}$$

egyenlőtlenség rendszert és ennek megoldáshalmazát jelölje $Q = Q(p, b)$. Azzal a jelölési megállapodással élünk, hogy $\max\{cx : x \in Q\} = \infty$, ha $\{cx : x \in Q\}$ nem korlátos felülről, illetve $\min\{cx : x \in Q\} = -\infty$, ha $\{cx : x \in Q\}$ nem korlátos alulról. Az olyan X halmazra, amelyre $b(X) = \infty$, a primál $x(X) \leq b(X)$ egyenlőtlenség semmitmondó, így az nem is szerepel. Ennek megfelelőn ilyen halmazhoz nem tartozik $y_1(X)$ duális változó, és analóg állítás vonatkozik p-re és y_2-re.

Tekintsük a

$$\max\{cx : x(X) \leq b(X) \text{ és } -x(X) \leq -p(X) \text{ minden } X \subseteq S\text{-re}\} \tag{3.100}$$

primál és a

$$\min\{\sum_X y_1(X)b(X) - \sum_X y_2(X)p(X) : y = (y_1, y_2) \geq 0, c = \sum_X y_1(X)\chi_X - \sum_X y_2(X)\chi_X\} \tag{3.101}$$

duál programot. A c vektornak egy (3.101)-ban megadott $y = (y_1, y_2)$ előállítására legyen $\mathcal{F}_1 := \{Z : y_1(Z) > 0\}$ és $\mathcal{F}_2 := \{Z : y_2(Z) > 0\}$. Az y-t **laminárisnak** hívjuk, ha $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ lamináris. Ha ráadásul mind $\mathcal{F}_1$, mind $\mathcal{F}_2$ halmazlánc továbbá az $\mathcal{F}_1$-beli és az $\mathcal{F}_2$-beli halmazok egymástól diszjunktak, úgy azt mondjuk, hogy az y a c **láncolt** előállítása. Figyeljük meg, hogy tetszőleges c vektor láncolt előállítása egyértelmű, amelyben az y_1-t és az y_2-t a c pozitív illetve negatív komponenseinek szinthalmazai segítségével könnyen megadhatjuk.

Azt mondjuk, hogy a (p, b) pár valamint az általa meghatározott (3.99) egyenlőtlenség rendszer **teljesen duálisan lamináris** (TDL), ha minden egész c primál célfüggvényre, amelyre $\{cx : x \in Q\}$ felülről korlátos, a duális programnak van lamináris optimuma. Figyeljük meg, hogy minden TDL rendszer TDI, hiszen egy lamináris halmazrendszer incidencia mátrixa teljesen unimoduláris.

Azt mondjuk, hogy a (p', b') pár **szűkebb**, mint (p, b), ha $p' \geq p$, $b' \leq b$ és $(p', b') \neq (p, b)$. Ekkor nyilván $Q(p', b') \subseteq Q(p, b)$.

TÉTEL 3.10.1 *Ha (p, b) TDL, $Q := Q(p, b)$ nem üres és nem létezik (p, b)-nél szűkebb (p', b') TDL pár, amelyre $Q = Q(p', b')$, akkor (p, b) paramoduláris.*

Biz. Miután (3.99) TDI, így Q egész poliéder és minden c egész vektorra $\{cx : x \in Q\}$ maximuma és minimuma is egész szám. Az alábbiakban egy $Z \subseteq S$ halmaz χ_Z karakterisztikus függvényére a $x\chi_Z$ skaláris szorzatot a szokásos módon $x(Z)$-vel jelöljük.

Állítás 3.10.1 *Nem létezik a (p, b) párnál szűkebb (p', b'), amelyre $Q(p', b') = Q(p, b)$.*

Biz. Belátjuk, hogy ilyen (p', b') pár lamináris, ami a feltevésnek ellentmond majd. Valamely c egész célfüggvényre legyen $y^* = (y_1^*, y_2^*)$ a (3.101) egy lamináris optimális megoldása, míg x^* egy primál optimum. Miután $y_1^*(Z)$ csak akkor lehet pozitív, ha a neki megfelelő primál egyenlőtlenséget x^* egyenlőséggel teljesíti, azaz $x^*(Z) = b(Z)$, így $Q(p', b') = Q(p, b)$ miatt $x^*(Z) \leq b'(Z) \leq b(Z) = x^*(Z)$, tehát $b'(Z) = b(Z)$ és analóg adódik, hogy $y_2^*(Z)$ esetén $p'(Z) = p(Z)$. Emiatt a lamináris y^* a (p', b')-re vonatkozó (3.101) duális programnak is optimális megoldása. •

Állítás 3.10.2 *Minden $Z \subseteq S$-re $\max\{x(Z) : x \in Q\} = b(Z)$ és $\min\{x(Z) : x \in Q\} = p(Z)$*

Biz. A definícióból adódik, hogy $Z \subseteq S$ esetén $\max\{x(Z) : x \in Q\} \leq b(Z)$ és $\min\{x(Z) : x \in Q\} \geq p(Z)$. Ha indirekt mondjuk $\max\{x(Z) : x \in Q\} < b(Z)$ állna, akkor az optimalitási feltételek miatt $y_1(Z)$ semmilyen duális optimumban nem lehet pozitív, így a $b(Z)$ értéket $\max\{x(Z) : x \in Q\}$-re csökkentve a keletkező egész b'-re $Q(p, b') = Q(p, b)$ és (p, b') is TDL, ellentétben a 3.10.1 állítással. •

Állítás 3.10.3 *Egy $Z \subseteq S$ halmaz minden $\{Z_i\}$ partíciójára*

$$\textstyle\sum_i b(Z_i) \geq b(Z) \text{ és } \sum_i p(Z_i) \leq p(Z). \tag{3.102}$$

Továbbá $Y \subseteq X \subseteq S$ esetén

$$b(X) - p(Y) \geq b(X - Y) \text{ és } p(X) - b(Y) \geq p(X - Y). \tag{3.103}$$

Biz. $\sum_i b(Z_i) < b(Z)$ esetén bármely $x \in Q$-ra $x(Z) = \sum_i x(Z_i) \leq \sum b_i(Z_i) < b(Z)$, ellentétben a 3.10.2 állítással. Analóg kapjuk a $\sum_i p(Z_i) \leq p(Z)$ egyenlőtlenséget. A második részhez ha indirekt például $b(X) - p(Y) < b(X - Y)$ állna, akkor minden $x \in Q$-ra $x(X - Y) = x(X) - x(Y) \leq b(X) - p(Y) < b(X - Y)$, azaz $\max\{x(X - Y) : x \in Q\} < b(X - Y)$ volna, ismét ellentmondásban az 3.10.2 állítással.

Állítás 3.10.4 *Az* (3.101) *duális programnak van láncolt optimális egészértékű megoldása.*

Biz. Legyen $y = (y_1, y_2)$ olyan optimális egészértékű lamináris duális megoldás, amelyre a $\sum_X (y_1(X) + y_2(X))|X|$ első kísérő összeg a lehető legkisebb és ezen belül a $\sum_X (y_1(X) + y_2(X))|X|^2$ második kísérő összeg a lehető legnagyobb.

Erre $y_1(X) > 0$ és $y_2(Y) > 0$ esetén $X \cap Y = \emptyset$, mert ha mondjuk $Y \subseteq X$ volna, akkor $y_1(X)$ és $y_2(Y)$ értékét eggyel csökkentve és $X \neq Y$ esetén $y_1(X - Y)$ értékét eggyel növelve a keletkező y' lamináris megoldása lesz a duálisnak, amely $b(X) - p(Y) \geq b(X - Y)$ miatt szintén optimális, ugyanakkor y' első kísérő összege kisebb, mint az y-é.

Most belátjuk, hogy $\mathcal{F}_1 := \{Z : y_1(Z) > 0\}$ láncot alkot. Ha indirekt nem ez a helyzet, akkor legyen X és Y két maximális tag, melyek tehát diszjunktak. Az $y_1(X)$ és $y_1(Y)$ értékeket eggyel csökkentve, míg az $y_1(X \cup Y)$-t eggyel növelve a keletkező y' a duális program egy másik egészértékű lamináris megoldása, amely (3.102) miatt szintén optimális. Ugyanakkor y' első kísérő összege ugyanannyi, mint az y-é, de a második kísérő összege nagyobb, mint y-é, ellentmondásban y választásával. •

Állítás 3.10.5 *b teljesen szubmoduláris, p teljesen szupermoduláris.*

Biz. Szimmetria miatt csak b szupermodularitását igazoljuk. Legyen $b(X) < \infty, b(Y) < \infty$. Ha $X \cap Y = \emptyset$, akkor (3.102) miatt $b(X) + b(Y) \geq b(X \cup Y) = b(X \cup Y) + b(X \cap Y)$. Feltehető tehát fel, hogy $X \cap Y \neq \emptyset$. Ekkor $c := \chi_X + \chi_Y$-re és $x \in Q$-ra $cx = x(X) + x(Y) \leq b(X) + b(Y) < \infty$, azaz cx felülről korlátos Q-n.

Tekintsük az 3.10.4 állítás által biztosított $y = (y_1, y_2)$ optimális láncolt duális megoldást. Mivel minden vektor láncolt előállítása egyértelmű, kapjuk, hogy $y_1(X \cap Y) = 1, y_1(X \cup Y) = 1$ és minden más y-érték 0. Ebből $b(X) + b(Y) = \max\{x(X) : x \in Q\} + \max\{x(Y) : x \in Q\} \geq \max\{x(X) + x(Y) : x \in Q\} = \max\{cx : x \in Q\} = \sum_X y_1(X)b(X) - \sum_X y_2(X)p(X) = y_1(X \cap Y)b(X \cap Y) + y_1(X \cup Y)b(X \cup Y) = b(X \cap Y) + b(X \cup Y)$. •

Állítás 3.10.6 *(p, b)-re teljesül a kereszt-egyenlőtlenség.*

Biz. Legyen $X, Y \subseteq S$. (3.103) miatt a kereszt-egyenlőtlenség fennáll, ha $X \subseteq Y$ vagy $Y \subseteq X$, így feltehetjük, hogy $X - Y \neq \emptyset$ és $Y - X \neq \emptyset$. Legyen $c := \chi_X - \chi_Y$. Ennek egyértelmű láncolt előállításában $y_1(X - Y) = 1, y_2(Y - X) = 1$ és minden más y-érték 0. Ebből $b(X) - p(Y) = \max\{x(X) : x \in Q\} - \min\{x(Y) : x \in Q\} \geq \max\{x(X) - x(Y) : x \in Q\} = \max\{cx : x \in Q\} = \sum_X y_1(X)b(X) - \sum_X y_2(X)p(X) = y_1(X - Y)b(X - Y) - y_2(Y - X)b(Y - X) = b(X - Y) - p(Y - X)$. • •

A tételből adódik:

Következmény 3.10.2 *Ha a (p_1, b_1) pár TDL és $Q = Q(p_1, b_1)$ nem üres, akkor az* (3.99) *rendszer TDI és Q egész g-polimatroid.*

TÉTEL 3.10.3 *Jórészt* (speciális esetben: metszőn) *paramoduláris (p, b) pár TDL, és így $Q(p, b)$ g-polimatroid.*

Biz. Adott egész c vektorra azt kell kimutatnunk, hogy a (3.101) duális programnak létezik lamináris $y = (y_1, y_2)$ optimális megoldása. Ezt elég csak olyan esetre megmutatni, amikor létezik egészértékű y optimum, mert ha valamely c-re az optimális (racionális) y nem egész, akkor az y komponenseinek N legnagyobb közös osztójára Ny optimális megoldás a $c' = Nc$ vektorra nézve, és egy erre vonatkozó optimális lamináris megoldás N-ed része megoldás c-re nézve.

Az S összes részhalmazát rendezzük úgy sorba, hogy egymás után kiválasztunk egy legszűkebb még nem választott részhalmazt. Ekkor ha $X \subset Y$, úgy X megelőzi Y-t. Tekintsük a (3.101) programnak egy olyan $y = (y_1, y_2)$ egész optimális megoldását, amelyban y_1 a (fenti sorrendre nézve) lexikografikusan maximális és ezen belül y_2 lexikografikusan maximális. Legyen $\mathcal{F}_1 := \{Z : y_1(Z) > 0\}$ és $\mathcal{F}_2 := \{Z : y_2(Z) > 0\}$.

Állítás 3.10.7 *Minden $Z \in \mathcal{F}_1$ halmaz b-re nézve alulról lényeges. Minden $Z \in \mathcal{F}_2$ halmaz p-re nézve felülről lényeges.*

Biz. Szimmetria miatt csak az első állítást igazoljuk. Ha a Z valamely $\{Z_i\}$ partíciójára $\sum_i b(Z_i) \leq b(Z)$ volna, akkor az $y_1(Z)$ értéket eggyel csökkentve az $y_1(Z_i)$ értékek mindegyikét eggyel növelve a keletkező $y' = (y'_1, y_2)$ is optimális megoldása (3.101)-nek, de y'_1 lexikografikusan nagyobb, mint y_1. •

Állítás 3.10.8 *$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ lamináris.*

Biz. Tegyük fel, hogy X és Y két átmetsző tagja $\mathcal{F}_1$-nek. A 3.10.7 állítás folytán ezekre fennáll a szubmodularitási egyenlőtlenség. Az $y_1(X)$ és az $y_1(Y)$ értékét eggyel csökkentve, míg az $y_1(X \cap Y)$ és az $y_1(X \cup Y)$ értékét eggyel növelve a keletkező $y' = (y'_1, y_2)$ is optimális megoldása (3.101)-nek, de y'_1 lexikografikusan nagyobb, mint y_1. Tehát $\mathcal{F}_1$-nek nincs két átmetsző tagja, és analóg látszik, hogy $\mathcal{F}_2$-nek sincs.

Tegyük most fel, hogy létezik $X \in \mathcal{F}_1$ és $Y \in \mathcal{F}_2$ két átmetsző halmaz. A 3.10.7 állítás miatt ezekre fennáll a kereszt-egyenlőtlenség. Az $y_1(X)$ és az $y_2(Y)$ értékét eggyel csökkentve, míg az $y_1(X - Y)$ és az $y_2(Y - X)$ értékét eggyel növelve a keletkező $y' = (y'_1, y'_2)$ is optimális megoldása (3.101)-nek, de y'_1 lexikografikusan nagyobb, mint y_1. • •

Speciális esetként kapjuk a következőt.

TÉTEL 3.10.4 *Ha p ferdén szupermoduláris* (speciálisan, ha p pozitívan keresztező és szimetrikus)*, akkor $C(p)$ kontra-polimatroid és $B'(p)$ bázis-poliéder.* •

3.10.1 Szupermoduláris színezés

Legyen h pozitívan metsző szupermoduláris függvény, k pozitív egész, melyekre $h(X) \leq \min\{k, |X|\}$, továbbá $h(v) = 1$ minden $v \in V$-re. Jelölje $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_l\}$ azon tartalmazásra nézve minimális X halmazok rendszerét, melyekre $h(X) = k$. A szupermodularitás miatt $\mathcal{T}$ részpartíció. Legyen $p(X) = 1$, ha $X \in \mathcal{T}$, $p(\emptyset) = 0$, egyébként $p(X) = -\infty$. Legyen továbbá $b(X) := |X| - h(X) + 1$. Nyilván az egyelemű $X = \{v\}$ halmazra $b(X) = 1$.

Állítás 3.10.9 *A (p, b) pár jórészt paramoduláris.*

Biz. p nyilván metszőn szupermoduláris.

Tegyük fel, hogy a nemüres X halmaz alulról nem b-szeparálható. Ekkor $h(X) > 0$, mert $h(X) = 0$ esetén $b(X) = |X| + 1 = \sum_{v \in X} b(v) + 1$ volna, azaz X b-szeparálható lenne. Következik, hogy b jórészt szubmoduláris.

A kereszt-egyenlőtlenséghez elegendő azt belátni, hogy X semmilyen $T \in \mathcal{T}$ halmazzal nem lehet átmetsző. Tegyük fel indirekt, hogy X és T átmetsző. Ekkor $h(X) + h(T) \leq h(X \cap T) + h(X \cup T)$ valamint $h(X \cap T) < k = h(T)$ miatt $h(X) < h(X \cap T)$, és ezért $b(X) = |X| - h(X) + 1 > |X \cap T| + |X - T| - h(X \cap T) + 1 = b(X \cap T) + |X - T| = b(X \cap T) + \sum_{v \in X - T} b(v)$, vagyis X b-szeparálható volna. •

Az 3.10.3 tétel szerint a fenti (p, b) pár által definiált $Q(h) = Q(p, b)$ poliéder egész g-polimatoid. Mivel $p(v) = b(v)$ minden $v \in S$-re, így $Q(h)$ egész pontjai $0 - 1$ vektorok, amiből rögtön adódik az alábbi.

Következmény 3.10.5 *A $Q(h)$ g-polimatroid egész pontjai pontosan azon $C \subseteq S$ részhalmazok incidencia vektorai, melyekre* (i) *C metsz minden olyan Y halmazt, amelyre $h(Y) = k$, és* (ii)

$$|X - C| \leq h(X) - 1 \text{ minden olyan } X \subseteq S \text{ halmazra, amelyet metsz } C. \tag{3.104}$$

Az S halmaz elemeinek egy k-színezését nevezzük **egyenletes**nek, ha minden színosztály mérete $\lfloor |S|/k \rfloor$ vagy $\lceil |S|/k \rceil$.

Gyakorlat 3.29 *Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{S}' := \{S_1, \dots, S_k\}$ az S-nek olyan k-színezése, amelyben $\lfloor |S|/k \rfloor \leq |S_1| \leq \lceil |S|/k \rceil$, továbbá $\{S_2, \dots, S_k\}$ az $S - S_1$-nek egyenletes $(k-1)$-színezése, akkor $\mathcal{S}$ az S-nek egyenletes k-színezése.*

TÉTEL 3.10.6 (Schrijver) *Legyen k pozitív egész, p_1 és p_2 pedig két pozitívan metsző szupermoduláris függvény, melyekre $p(X) \leq \min\{k, |X|\}$ minden $X \subseteq S$-re, ahol*

$$p(X) := \max\{p_1(X), p_2(X)\}.$$

Ekkor az S alaphalmaz elemei megszínezhetők k színnel úgy, hogy minden $X \subseteq S$ halmaz legalább $p(X)$ különböző színt tartalmaz. Ráadásul a színezés választható egyenletesnek abban az értelemben, hogy minden színosztály mérete $\lfloor |S|/k \rfloor$ vagy $\lceil |S|/k \rceil$.

Biz. k szerinti indukció. $k = 1$-re a tétel semmitmondó, így feltesszük, hogy $k \geq 2$. Azt mutatjuk ki, hogy létezik egy olyan $S_1 \subset S$ részhalmaz, amely egyrészt (i) metsz minden olyan X halmazt, amelyre $p(X) = k$, másrészt (ii) minden $X \subseteq S$-re $|X - S_1| \geq p(X) - 1$, továbbá $\lfloor |S|/k \rfloor \leq |S_1| \leq \lceil |S|/k \rceil$. Ekkor ugyanis az $S' := S - S_1$ alaphalmazon értelmezett $p'_i(Z) := \max\{p_i(Z \cup X) : X \subseteq S_1\}$ $(i = 1, 2)$ függvény pozitívan metsző szupermoduláris, amelyre (i) miatt $p'_i(Z) \leq k - 1$, míg (ii) miatt $p'_i(Z) \leq |Z|$ minden $Z \subseteq S'$-re, és így indukció alapján S'-nek létezik olyan $\{S_2, \dots, S_k\}$ egyenletes $(k-1)$-színezése úgy, hogy minden X halmaz legalább $\max\{p'_1(X), p'_2(X)\}$ színt tartalmaz. De ekkor az $\{S_1, \dots, S_k\}$ színezés teljesíti a tétel kívánságait.

Jelölje Q_i a 3.10.5 következményben szereplő $Q(p_i)$ g-polimatroidnak $(i = 1, 2)$ és a $K(\alpha, \beta)$ sávnak a metszetét, ahol $\alpha = \lfloor |S|/k \rfloor$, $\beta = \lceil |S|/k \rceil$. Ekkor Q_i is egész g-polimatroid. Jelölje $m : S \to \mathbf{R}$ azt a vektort, amelynek minden komponense $|S|/k$. Állítjuk, hogy $m \in Q_i$. Valóban, egyrészt nyilván $m \in K(\alpha, \beta)$. Másrészt $|X| \leq k$ esetén $p_i(X) \leq |X|$ miatt $m(X) = |X|/k \leq 1 \leq |X| - p_i(X) + 1$, míg $k \leq |X|$ esetén $p_i(X) \leq |k|$ miatt $p_i(X) \leq k = (k-1)k/k + 1 \leq (k-1)|X|/k + 1 = |X| - |X|/k + 1$, azaz $m(X) = |X|/k \leq |X| - p_i(X) + 1$. Végül $p_i(Z) = k$ esetén $|Z| \geq p_i(Z) = k$, és így $m(Z) = |Z|/k \geq 1$. Ezek szerint $m \in Q_1 \cap Q_2$.

Miután két egész g-polimatroid metszete egész poliéder, így $Q_1 \cap Q_2$-nek létezik egész eleme, és ez a 3.10.5 következmény folytán egy olyan $S_1 \subseteq S$ halmaz incidencia vektora, amely teljesíti az (i) és (ii) tulajdonságokat. •

gpolim 2012. december 9.

4. Fejezet

SZUB- ÉS SZUPERMODULÁRIS FÜGGVÉNYEK DIGRÁFOKON

Két meglehetősen általános modellt mutatunk be, amelyekben szub- és szupermoduláris függvények és irányított gráfok szerepelnek.

4.1 SZUBMODULÁRIS ÁRAMOK

Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, $f : A \to \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$, $g : A \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ két egészértékű korlátozó függvény, melyekre $f \leq g$. Ezen kívül $b : 2^V \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ egészértékű keresztező szubmoduláris halmazfüggvény, amelyre $b(\emptyset) = b(V) = 0$. Egy $x : A \to \mathbf{R}$ vektort **szubmoduláris áram**nak nevezünk, ha

$$\lambda_x(Z) := \varrho_x(Z) - \delta_x(Z) \leq b(Z) \tag{4.1}$$

minden $Z \subseteq V$-re, amely **megengedett**, ha

$$f \leq x \leq g. \tag{4.2}$$

A megengedett szubmoduláris áramok halmazát **szubmoduláris áram poliéder**nek hívjuk. Azt mondjuk, hogy a szubmoduláris áramot (vagy a poliédert) a b függvény **határolja**.
Amennyiben b azonosan 0, visszajutunk a megengedett áram fogalmához. Néha kényelmesebb olyan b halmazfüggvénnyel dolgozni, amely csak egy $\mathcal{F}$ keresztező halmazrendszeren van értelmezve, ott viszont véges értékű. Ilyenkor (4.1))-t csupán az $\mathcal{F}$ tagjaira követeljük meg. Könnyen ellenőrizhető, hogy a kétféle definíció ekvivalens egymással. Emiatt néha a b függvényt csak egy keresztező halmazrendszeren adjuk meg.

Gyakorlat 4.1 *Nemnegatív x-re ϱ_x és δ_x szubmoduláris, i_x pedig szupermoduláris.* •

Állítás 4.1.1 *Minden x-re λ_x moduláris.*

Biz. Tetszőleges $Z \subseteq V$ halmazra $\sum_{v \in Z} \lambda_x(v) = \sum_{v \in Z} \varrho_x(v) - \sum_{v \in Z} \delta_x(v) = [\varrho_x(Z) + i_x(Z)] - [\delta_x(Z) + i_x(Z)] = \varrho_x(Z) - \delta_x(Z) = \lambda_x(Z)$. •

Megjegyzendő, hogy ha Q_D-vel jelöljük a D $(0, \pm 1)$-es pont-él incidencia-mátrixát és λ_x-t egy V-n értelmezett függvénynek tekintjük, akkor $\lambda_x = Q_D x$.

A 3.9 részben beláttuk, hogy $B(b)$ bázis-poliédert alkot, így a 4.1.1 állítás alapján az $x : A \to \mathbf{R}$ vektor pontosan akkor szubmoduláris áram, ha a $\lambda_x : V \to \mathbf{R}$ vektor a $B(b)$ 0-bázis-poliéderben van. Egy bázis-poliédert más alakban is meg lehetett adni, például egy p keresztező szupermoduláris függvény segítségével $B'(p)$ alakban, vagyis ilyenkor $\varrho_x(Z) - \delta_x(Z) \geq p(Z)$ minden $Z \subseteq V$-re$\}$ rendszer egy megoldása is szubmoduláris áram. Ennek alapján éppoly joggal beszélhetnénk szupermoduláris áramokról, megmaradunk azonban a szubmoduláris áram kifejezés használata mellett, mert ez a szakirodalomban már meghonosodott.

Ráadásul, azt is láttuk, hogy jórészt paramoduláris (p, b) párra is $Q(p, b)$ g-polimatroid, így ennek a $\{z : z(V) = 0\}$ hipersíkkal való metszete is 0-bázis-poliéder. Miután λ_x-re automatikusan $\lambda_x(V) = 0$, ezért az $\{x \in \mathbf{R}^A : \lambda_x \in Q(p, b)\}$ halmaz is szubmoduláris áram poliéder, vagy kiírva: $p(Z) \leq \varrho_x(Z) - \delta_x(Z) \leq b(Z)$ minden $Z \subseteq V$-re$\}$. Ennek alapján a leghelyesebb volna paramoduláris áram poliéderről beszélni, amelyet akár szubmoduláris, akár szupermoduláris függvénnyel is lehet definiálni.

4.1.1 Teljesen duális egészértékűség

TÉTEL 4.1.1 (Edmonds és Giles) *A* $\{(4.1),\ (4.2)\}$ *rendszer teljesen duálisan egészértékű.*

Biz. Jelölje Q azt a mátrixot, amelynek oszlopai a gráf éleinek felelnek meg, sorai pedig azon $Z \subseteq V$ nemüres részhalmazoknak, melyekre $b(Z)$ véges. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy f, g, b mindegyike véges értékű. A bizonyítás analóg az általános esetben is azzal a megjegyzéssel, hogy csak olyan primál egyenlőtlenség szerepel (és tartozik hozzá duális változó) amelynek jobboldala véges.

A primál lineáris program:

$$\max\{cx : Qx \leq b, x \leq g, -x \leq -f\}. \tag{4.3}$$

A duális program:

$$\min\{\sum_Z y(Z)b(Z) + \sum_{e\in A} y_g(e)g(e) - \sum_{e\in A} y_f(e)f(e) : \tag{4.4}$$

$(y, y_f, y_g) \geq 0$ és minden e élre

$$\beta_y(e) + y_g(e) - y_f(e) = c(e)\}, \tag{4.5}$$

ahol

$$\beta_y(e) := \sum[y(Z) : Z\text{-be belép } e] - \sum[y(Z) : Z\text{-ből kilép } e] \geq 0. \tag{4.6}$$

Megjegyzendő, hogy adott y egyértelműen meghatározza az optimális y_g és y_f változókat, éspedig $y_f(e) := \max\{0, \beta_y(e)\},\ y_g(e) := \max\{0, -\beta_y(e)\}$.

Legyen y_0 egy optimális duális megoldás. feltehetjük, hogy bázis-megoldás, így racionális. Ameddig csak létezik két egymást nem tartalmazó A, B halmaz, melyeken y_0 pozitív, és amelyeken b szubmoduláris, módosítsuk y_0-t a következőképpen. Az $\alpha := \min\{y_0(A), y_0(B)\}$ értékkel csökkentsük $y_0(A)$-t és $y_0(B)$-t és egyúttal növeljük α-val a metszet és az unió duál változóját. Könnyű ellenőrizni, hogy ismét duális megoldást kapunk, amely a szubmodularitás miatt szintén optimális. Állítjuk továbbá, hogy ilyen kikeresztezési lépésből csak véges sok lehet. Ez következik az alábbi lemmából.

Lemma 4.1.1 *Legyen* $r_1, \ldots, r_n$ *nemnegatív racionális számoknak egy sorozata. Ameddig csak lehet, válasszunk ki négy különböző tagot úgy, hogy a két középső pozitív. Csökkentsük a két középsőt a kisebbikük* α *értékével és növeljük a két kiválasztott szélsőt* α*-val. Ekkor az eljárás véges sok lépés után véget ér.*

Biz. Feltehető, hogy a sorozat egész számokból áll. Mivel az első tag sosem csökken és a teljes összeg konstans, véges sok lépés után az első tag rögzül. Töröljük el az első tagot és indukcióval a lemma következik. •

A b függvény keresztező szubmodularitása miatt feltehetjük tehát, hogy azon halmazok $\mathcal{F}$ rendszere, melyeken az y_0 értéke pozitív, keresztezés-mentes. A 1.3.6 tétel nyomán a Q-nak az $\mathcal{F}$ tagjaihoz tartozó részmátrixa teljesen unimoduláris, így a 1.4.3 lemmából a tétel következik. • •

A tétel bizonyításából kiadódott az alábbi hasznos tulajdonság.

Következmény 4.1.2 *A* $\{(4.1),\ (4.2)\}$ *rendszer által leírt primál lineáris probléma duálisának létezik olyan* y *egészértékű optimuma, amelyben ha két egymást nem tartalmazó* X *és* Y *halmazra* $y(X) > 0$ *és* $y(Y) > 0$*, úgy* X*-re és* Y*-ra nem teljesül a szubmodularitási egyenlőtlenség.*

4.1.2 Egy alkalmazás: irányított vágások lefogása

TÉTEL 4.1.3 (C. Lucchesi és D. Younger) *Irányított gráfban az irányított vágásokat lefogó élek minimális száma egyenlő a diszjunkt irányított vágások maximális számával.*

Biz. Definiáljuk a p halmazfüggvényt 1-nek V minden olyan X nemüres, valódi részhalmazán, amelyből nem lép ki él. Ekkor egy keresztező halmaz-rendszeren keresztező szupermoduláris függvényt kapunk. A 4.1.1 tétellel ekvivalens szupermoduláris alakot a $c \equiv 1$ célfüggvényre alkalmazva a tétel közvetlenül adódik. •

TÉTEL 4.1.4 *Tegyük fel, hogy a minimális irányított vágásnak* k *éle van. Ekkor az élidegen* k*-elemű irányított vágások maximális száma egyenlő a* k*-elemű irányított vágásokat lefogó élek minimális számával.*

Biz. Definiáljuk a p halmazfüggvényt 1-nek V minden olyan X nemüres, valódi részhalmazán, amelyből nem lép ki él és a befoka k. Könnyen látszik, hogy egy keresztező halmaz-rendszeren keresztező szupermoduláris függvényt kapunk. A 4.1.1 tétellel ekvivalens szupermoduláris alakot a $c \equiv 1$ célfüggvényre alkalmazva a tétel közvetlenül adódik. •

Feladat 4.2 *Igazoljuk, hogy egy irányított síkgráfban az élidegen minimális elemszámú irányított körök maximális száma egyenlő a minimális köröket lefogó élek minimális számával.*

Feladat 4.3 *Igazoljuk, hogy egy* $G = (A, B; E)$ *páros gráfban az élidegen vágások maximális száma egyenlő az élidegen irányított vágások maximális számával abban a digráfban, amelyet* G*-ből nyerünk annak éleit mind* B *felé irányítva.*

4.1.3 Megengedettség

Vizsgáljuk most meg, hogy mi a szubmoduláris áram poliéder nemürességének a feltétele. Az áramok megengedettségére vonatkozó Hoffman tétel mintájára levezetjük a szubmoduláris áramokra vonatkozó analóg jellemzést.

TÉTEL 4.1.5 *Adottak $f \leq g$ korlátok az éleken, továbbá b teljesen szubmoduláris függvény. Akkor és csak akkor létezik megengedett szubmoduláris áram, ha*

$$\varrho_f(Z) - \delta_g(Z) \leq b(Z) \text{ minden } Z \subseteq V\text{-re.} \tag{4.7}$$

Ha f, g, b mindegyike egészértékű, akkor (4.7) fennállás esetén létezik egészértékű megengedett szubmoduláris áram.

Biz. Tegyük fel, hogy z megengedett szubmoduláris áram. Ekkor $\varrho_f(Z) - \delta_g(Z) \leq \varrho_z(Z) - \delta_z(Z) = \varrho_z(Z) - \delta_z(Z) \leq b(Z)$, vagyis a feltétel szükséges.

Az elegendőség igazolásához szükségünk van az alábbi lemmára.

Lemma 4.1.2 *Legyen $X \subseteq V$-re*

$$p(X) := \varrho_f(X) - \delta_g(X). \tag{4.8}$$

Ekkor $p(U) + p(Z) \leq p(U \cap Z) + p(U \cup Z)$ minden $U, Z \subseteq V$ részhalmazra, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $f(e) = g(e)$ minden olyan e élre, amelynek egyik vége $U - Z$-ban van, a másik pedig $Z - U$-ban.

Biz. A lemma következik az alábbi azonosságból:

$$p(U) + p(Z) = p(U \cap Z) + p(U \cup Z) + \sum [f(e) - g(e) : e \text{ az } U - Z \text{ és a } Z - U \text{ között vezet}]. \tag{4.9}$$

Ez pedig azért igaz, mert minden élnek a két oldalhoz könnyen ellenőrizhetően ugyanaz a hozzájárulása. •

Ha egy e élen nincs alsó korlát (azaz $f(e) = -\infty$), úgy $f(e)$-t kellően kicsiny, de véges értékre változtatva a (4.7) feltétel fennmarad. Így minden e élre feltehető, hogy $f(e) > -\infty$ és analóg módon $g(e) < \infty$.

Egy e **élt pontos**nak hívunk, ha $f(e) = g(e)$. Egy $Z \subseteq V$ **részhalmaz pontos**, ha $p(Z) = b(Z)$. Tegyük fel indirekt, hogy a tétel nem igaz és legyen D olyan ellenpélda, amelyben a pontos élek és a pontos halmazok együttes száma maximális.

1. eset Minden él pontos. Legyen $x :\equiv f$. Most $\varrho_x(Z) - \delta_x(Z) = \varrho_f(Z) - \delta_f(Z) = \varrho_f(Z) - \delta_g(Z) \leq b(Z)$, vagyis x megengedett szubmoduláris áram, ellentmondás.

2. eset $f(e_0) < g(e_0)$ valamely e_0 élre. Állítjuk, hogy van olyan U pontos halmaz, amelybe e_0 belép. Ha nem volna, akkor $f(e_0)$-t növelhetjük (4.7) megsértése nélkül egészen addig, amíg vagy egy új pontos halmaz keletkezik (amelybe e_0 belép) vagy e_0 válik pontossá. A módosított alsó korlát f'-ra nézve a pontos élek és halmazok együttes száma nagyobb, mint f-re nézve, így ez már nem ellenpélda, azaz létezik x szubmoduláris áram, amelyre $f' \leq x \leq g$. Ekkor x megengedett f és g-re nézve is, ellentmondás.

Hasonlóan belátható, hogy létezik olyan Z pontos halmaz, amelyből e_0 kilép. Most $b(U) + b(Z) = p(U) + p(Z) \leq p(U \cap Z) + p(U \cup Z) \leq b(U \cap Z) + b(U \cup Z) \leq b(U) + b(Z)$. Ezért mindenhol egyenlőség áll, speciálisan $p(U) + p(Z) = p(U \cap Z) + p(U \cup B)$. De ez ellentmond a lemmának, mivel $f(e_0) < g(e_0)$. Ezen ellentmondás mutatja, hogy nem létezhet ellenpélda, ami a (4.7) feltétel elegendőségét igazolja. • •

TÉTEL 4.1.6 *Adottak $f \leq g$ korlátok az éleken, továbbá b metsző szubmoduláris függvény. Akkor és csak akkor létezik megengedett szubmoduláris áram, ha minden $Z \subseteq V$-re és Z minden $\{V_1, \ldots, V_t\}$ partíciójára*

$$\varrho_f(Z) - \delta_g(Z) \leq \textstyle\sum_i b(V_i). \tag{4.10}$$

Ha f, g, b mindegyike egészértékű és létezik megengedett áram, úgy létezik egészértékű is.

Biz. A b metsző szubmoduláris függvény $b^\vee$ reszeltje teljesen szubmoduláris és $b^\vee$-re a (4.7) feltétel éppen a (4.10) feltétellel ekvivalens. •

TÉTEL 4.1.7 *Adottak $f \leq g$ korlátok a $D = (V, A)$ digráf élein, továbbá b keresztező szubmoduláris halmazfüggvény, amelyre $b(V) = 0$. Akkor és csak akkor létezik megengedett szubmoduláris áram, ha minden $Z \subseteq V$ részhalmazra és Z-nek minden $\mathcal{F}$ fa-kompozíciójára*

$$\varrho_f(Z) - \delta_g(Z) \leq \sum [b(X) : X \in \mathcal{F}]. \tag{4.11}$$

Ha f, g, b mindegyike egészértékű és létezik megengedett áram, úgy létezik egészértékű is.

Biz. Legyen x szubmoduláris áram. Ha létezik x szubmoduláris áram, akkor $B(b)$ nem üres, hiszen a $(\lambda_x(v) : v \in V)$ benne van. Ekkor a $b^\downarrow$ teljes reszelt létezik és $B(b) = B(b^\downarrow)$. Emiatt $\lambda_x(Z) \leq b^\downarrow(Z)$ és így $\varrho_f(Z) - \delta_g(Z) \leq \varrho_x(Z) - \delta_x(Z) = \lambda_x(Z) \leq b^\downarrow(Z)$, amiből a (4.11) feltétel szükségessége.

Az elegendőséghez először is figyeljük meg, hogy a (4.11) feltétel $Z = V$-re éppen a Fujishige tétel feltételét jelenti, és emiatt $B(b)$ bázis-poliéder nem üres. Ekkor a $b^\downarrow$ teljes reszelt létezik és $B(b) = B(b^\downarrow)$. A teljes reszeltre megállapított fa-kompozíciós előállítás miatt a $b^\downarrow$-re vonatkozó (4.7) feltétel ekvivalens (4.11)-vel. •

A 4.1.5 megengedettségi tételből könnyen levezethető a szeparációs tétel.

Alternatív bizonyítás a szeparációs tételre

Biz. Az elegendőséghez legyen S' és S'' az S-nek két diszjunkt példánya. Legyen $V := S' \cup S''$, $A := \{s's'' : s \in S\}$ és $D = (V, A)$. Legyen $-f := g := \infty$ és $X \subseteq S$ esetén legyen $b(X'') := b^*(X)$ és $b(X') := -p^*(X)$. Nyilván b szubmoduláris. Alkalmazzuk a 4.1.5 tételt erre a szubmoduláris áram problémára. Állítjuk, hogy (4.7) fennáll. Ez automatikusan teljesül, amikor $\varrho_f(Z) - \delta_g(Z) = -\infty$, így feltehetjük, hogy $Z = X' \cup X''$ valamely ($X \subseteq S$) halmazra. Ekkor $\varrho_f(Z) - \delta_g(Z) = 0$, és akkor (4.7) tényleg következik a $p^* \leq b^*$ feltevésből. A 4.1.5 tétel szerint létezik x szubmoduláris áram, amely rádásul egészértékű, ha p^* és b^* azok. Most az $m(s) := x(s's'')$ ($s \in S$) választással megkapjuk a keresett elválasztó moduláris függvényt. •

4.1.4 G-polimatroidok metszete

TÉTEL 4.1.8 *Legyen (p_1, b_1) és (p_2, b_2) két metsző paramoduláris pár. A $Q_1 = Q(p_1, b_1)$ és $Q_2 = Q(p_2, b_2)$ g-polimatroidok metszete szubmoduláris áram poliéder. Továbbá, a $\{p_1(Z) \leq x(Z) \leq b_1(Z), p_2(Z) \leq x(Z) \leq b_2(Z)$: minden $Z \subseteq S$-re$\}$ rendszer TDI.*

Biz. Legyen S' az S'' az S alaphalmazt két példánya, és legyen $V := S' \cup S''$. Minden $s \in S$ pontra vezessünk egy élt az s'-ből s''-be és legyen $D = (V, A)$ az így kapott digráf. Legyen $f \equiv -\infty$ és $g \equiv \infty$. Definiáljuk a b halmazfüggvényt a következőképpen. $X \subseteq S$ esetén legyen $b(X'') := b_2(X), b(V - X'') := -p_1(X), b(X') := -p_2(X), b(V - X') := b_1(X)$. Könnyen látszik, hogy b keresztező szubmoduláris, és az által definiált $Q(f, g; b)$ szubmoduláris áram poliéder, a D élhalmaz és az S alaphalmaz azonosítása után, megegyezik $Q_1 \cap Q_2$-vel. Hasonlóképp a szubmoduláris áram poliédert leíró $\{\varrho_x(X) - \delta_x(X) \leq b(X) : X \subseteq S\}$ rendszer egyenlőtlenségei megfeleltethetők a $\{p_1(Z) \leq x(Z) \leq b_1(Z), p_2(Z) \leq x(Z) \leq b_2(Z)$: minden $Z \subseteq S$-re$\}$ rendszer egyenlőtlenségeinek. •

TÉTEL 4.1.9 *Legyen b teljesen szubmoduláris függvény, amelyre $b(V) = 0$. Ekkor $Q = Q(f, g; b) \subseteq \mathbf{R}^A$ szubmoduláris áram poliéder előáll, mint két $2|A|$ dimenziós bázis poliéder metszetének a vetülete.*

Biz. A digráf minden $e = uv$ élére helyezzünk el két új pontot: az e_v fej- és az e_u tőpontot, és legyen S az új pontok halmaza. Minden $Z \subseteq$ halmazra legyen $F(Z) := \{e_v : e = uv \in A$, és $v \in Z$ vagy $u \in Z\}$. Legyen $\mathcal{F} := \{F(Z) : Z \subseteq V\}$. Az $\mathcal{F}$ tagjain definiáljuk a b^* függvényt a következő képpen: $b^*(F(Z)) = b(Z)$. Ekkor b^* teljesen szubmoduláris. Legyen B_1 a $B(b^*)$ bázis poliéder, míg B_2 az a bázis poliéder, amelynek egy z vektor pontosan akkor eleme, ha minden eredeti $e = uv$ élre $z(e_u) + z(e_v) = 0$.

A Q egy x eleméhez definiáljuk a $z : S \to \mathbf{R}$ vektort a következőképpen. Minden e élre legyen $z(e_v) := x(e), z(e_u) := -x(e)$. Ekkor nyilván $z \in B_2$ és $z(F(Z)) = \varrho_x(Z) - \delta_x(Z)$ miatt $z \in B_1$ is fennáll. Megfordítva, egy $z \in B_1 \cap B_2$ vektorhoz definiáljuk az $x \in A \to \mathbf{R}$ vektort a következőképp. minden uv élre legyen $x(e) := z(e_v)$. Könnyen ellenőrizhető, hogy $x \in Q$. Vagyis ha a fejpontok halmazát azonosítjuk az élek halmazával, akkor a Q poliéder előáll, mint a $B_1 \cap B_2$ vetülete. •

4.2 FEDÉSEK DIGRÁFFAL

Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf. Az $X_K, X_B)$ halmazokból álló párt **párhalmaz**nak nevezzük, ha $X_B \subseteq X_K \subseteq V$. A párhalmaz **triviális**, ha $X_B = \emptyset$ vagy $X_K = V$. Jelölje $\mathcal{P}_2$ a párhalmazok halmazát. X_K a párhalmaz **külső** tagja, míg X_B a **belső**. A párhalmazokon értelmezzük a $\cap$ és $\cup$ műveleteket a természetes módon: $X, Y \in \mathcal{P}_2$-re legyen $X \cap Y := (X_K \cap Y_K, X_B \cap Y_B)$, $X \cup Y := (X_K \cup Y_K, X_B \cup Y_B)$. Azt mondjuk, hogy X **része** Y-nak, jelölésben $X \subseteq Y$, ha $X_K \subseteq Y_K, X_B \subseteq Y_B$. Ha $X \subseteq Y$ vagy $Y \subseteq X$, akkor X és Y **összehasonlítható**. Két párhalmaz **metsző**, ha nem összehasonlíthatóak és $X_B \cap Y_B \neq \emptyset$. Két párhalmaz **keresztező**, ha metszők és külső tagjaik egyesítése nem V. Párhalmazok egy rendszere **lamináris**, ha nincs közöttük két metsző. A párhalmazok egy $\mathcal{F}$ részhalmazáról azt mondjuk, hogy **metsző** (**keresztező**), ha $\mathcal{F}$ bármely két metsző (keresztező) tagjával együtt azok metszete és uniója is $\mathcal{F}$-ben van.

Egy $p : \mathcal{P}_2 \to \mathbf{Z}_+$ függvényről azt mondjuk, hogy **pozitívan metsző szupermoduláris**, ha metsző $X, Y \in \mathcal{P}_2$ és $p(X) > 0, p(Y) > 0$ esetén $p(X) + p(Y) \leq p(X \cap Y) + p(X \cup Y)$. Amikor p csak olyan párhalmazokon pozitív, amelyeken $X_K = X_B$, akkor visszajutunk a halmazokon értelmezett metsző szupermoduláris (egyváltozós) halmazfüggvények fogalmához. Analóg módon definiáljuk a pozitívan keresztező szupermoduláris függvényeket. Egy (nem feltétlenül nemnegatív) keresztező szupermoduláris függvényt a negatív helyein nullára módosítva pozitívan keresztező szupermoduláris függvényt kapunk, és valamennyi ismert alkalmazás ilyen alakban előálló függvényre vonatkozik. Ugyanakkor kimutatható, hogy nem minden pozitívan keresztező szupermoduláris függvény áll elő ilyen alakban, és gyakran kényelmesebb is az általánosabb fogalommal dolgozni.

Azt mondjuk, hogy egy él **belép** az (X_K, X_B) párhalmazba (más szóval **fedi** vagy **lefog**ja azt), ha mindkét tagjába belép. Adott $x : A \to \mathbf{R}_+$ nemnegatív vektorra $\varrho_x(X_K, X_B)$ jelöli az (X_K, X_B)-be lépő éleken az x-értékek összegét. Könnyű igazolni, hogy ϱ_x teljesen szubmoduláris $\mathcal{P}_2$-n. Egy $p : \mathcal{P}_2 \to \mathbf{R}$ függvény esetén azt mondjuk, hogy x **fedi** p-t, ha $\varrho_x(X) \geq p(X)$ minden $X \in \mathcal{P}_2$-re fennáll.

TÉTEL 4.2.1 *A $D = (V, A)$ digráfra legyen adott $g : A \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ egészértékű kapacitás függvény. Legyen p pozitívan metsző szupermoduláris függvény $\mathcal{P}_2$-n, amelyre $\varrho_g(X_K, X_B) \geq p(X_K, X_B)$ fennáll $\mathcal{P}_2$ minden tagjára. Ekkor a*

$$\{0 \leq x \leq g, \varrho_x(X_K, X_B) \geq p(X_K, X_B),\ \textit{ha}\ (X_K, X_B) \in \mathcal{P}_2\} \tag{4.12}$$

egyenlőtlenség-rendszer teljesen duálisan egészértékű.

Biz. Legyen $c : A \to \mathbf{Z}$ egészértékű, amelyre a primál optimum létezik (ami most azzal ekvivalens, hogy $c(e) < 0$ esetén $g(e)$ véges). Jelölje Q azt a $0-1$ mátrixot, amelyben a sorok $\mathcal{P}_2$ tagjainak felelnek meg, míg az oszlopok a D éleinek. Az X párhalmaznak és az e élnek megfelelő mátrix-elem pontosan akkor 1, ha e lefogja X-t. Az alábbiakban azt a $|\mathcal{P}_2|$ dimenziós vektort is röviden p-vel jelöljük, amelynek $p(X)$ komponense a $\mathcal{P}_2$-beli X tagnak felel meg.

Ekkor a primál probléma $\min\{cx : 0 \leq x \leq g, Qx \geq p\}$, míg a duális:

$$\max\{yp - zg : yQ - z \leq c, y \geq 0, z \geq 0\}, \tag{4.13}$$

ahol az $x(e) \leq g(e)$ egyenlőtlenségnek ($g(e)$ véges) megfelelő duális változót $z(e)$ jelöli.

Adott y egyértelműen meghatározza a z optimális választását: $z(e) = (yq_e - c(e))^+$, ahol q_e a Q e-nek megfelelő oszlopa. Így beszélhetünk arról, hogy egy y a (4.13) optimális megoldása.

Azt kell igazolnunk, hogy (4.13) optimuma egész vektoron is felvétetik. Legyen y_0 egy optimális (racionális) megoldás. Ameddig csak létezik két metsző párhalmaz $X = (X_K, X_B)$ és $Y = (Y_K, Y_B)$, melyek y_0-értéke pozitív, módosítsuk y_0 a következőképpen. Az $\alpha := \min\{y_0(X), y_0(Y)\}$ értékkel csökkentsük $y_0(X)$-t és $y_0(Y)$-t és egyúttal növeljük α-val mind $X \cap Y$, mind $X \cup Y$ y_0-értékét. Könnyű ellenőrizni, hogy (a ϱ függvény $\mathcal{P}_2$-n vett szubmodularitása miatt) ismét duális megoldást kapunk, amely a p metsző szupermodularitása miatt optimális. A duális optimum ezen megváltoztatását nevezzük egy kikeresztezési lépésnek.

A $(\mathcal{P}_2, \subseteq)$ részbenrendezett halmaz elemeinek tekintsünk egy olyan sorrendjét, amelyet úgy kapunk, hogy egymás után választunk a még nem választott elemek közük egy minimálisat. Ekkor tetszőleges $X, Y \in \mathcal{P}$ esetén $X \cap Y$ megelőzi X-t és Y-t, míg $X \cup Y$ követi őket. Ebből és az 4.1.1 lemmából következik, hogy a fenti kikeresztezési lépésből csak véges sok lehet.

Feltehetjük tehát, hogy azon párhalmaz $\mathcal{P}'$ rendszere, melyeken az y_0 értéke pozitív, lamináris. Legyen $\mathcal{H} := \{X_B : (X_K, X_B) \in \mathcal{P}'\}$. (Itt az X_B halmazokat multiplicitással vesszük, tehát $|\mathcal{H}| = |\mathcal{P}'|$). Ekkor $\mathcal{H}$ lamináris halmazrendszer, amely az ismert módon egy F fenyővel és egy $\varphi : V \to V(F)$ leképezéssel reprezentálható. Könnyen ellenőrizhető, hogy H minden e élére a $\mathcal{H}$ azon tagjainak megfelelő fenyőbeli élek, melyekbe az e belép, az F egy irányított részútját alkotják. Ebből adódik, hogy a Q mátrix azon Q' részmátrixa, melynek sorai a $\mathcal{P}'$ elemeinek felelnek meg, hálózati mátrixot alkotnak, ami teljesen unimoduláris, így a 1.4.3 lemmából a tétel következik. •

Adott $T \subseteq V$ esetén akkor mondjuk, hogy egy p halmazfüggvény pozítívan T-metsző szupermoduláris, ha $X \cap Y \cap T \neq \emptyset$ és $p(X) > 0, p(Y) > 0$ esetén fennáll a szupermodularitási egyenlőtlenség.

Következmény 4.2.2 *Legyen $D = (V, A)$ digráfban legyen $g : A \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ egészértékű kapacitás függvény, továbbá $T \subset V$ a csúcsok egy olyan részhalmaza, amely tartalmazza az összes él fejét. Legyen p_1 egy pozítívan T-metsző szupermoduláris halmaz-függvény, amelyre $\varrho_g(X) \geq p_1(X)$. Ekkor a*

$$\{0 \leq x \leq g, \varrho_x(X) \geq p_1(X) \text{ minden } X \subseteq V - \text{ re } \} \tag{4.14}$$

egyenlőtlenség-rendszer teljesen duálisan egészértékű.

Biz. Minden $X \subseteq V$ halmazra legyen $p(X, X \cap T) := p_1(X)$, míg $\mathcal{P}_2$ egyéb tagjainak p-értéke legyen 0. Mivel p_1 T-metsző szupermoduláris halmazfüggvény, így p metsző szupermoduláris $\mathcal{P}_2$-n. Miután minden él feje T-ben van, így $\varrho_x(X) = \varrho(X, X \cap T)$, így az eredmény a 4.2.1 tételből adódik. •

4.2.1 Gyökeres összefüggőség

Legyen $D = (V, A)$ digráf, amelyben s kijelölt gyökérpont.

TÉTEL 4.2.3 *Ha D gyökeresen k-élösszefüggő, úgy D gyökeresen k-élösszefüggő részdigráfjainak poliédere $\{x : \varrho_x(Z) \geq k$ minden $\emptyset \subset Z \subseteq V - s$ halmazra és $0 \leq x(e) \leq 1$ minden e élre$\}$. A leírásban szereplő rendszer TDI.*

Biz. Legyen $p(X, X) := k$, ha $\emptyset \subset X \subseteq V - s$ és $p(X, X) := 0$ különben. Alkalmazzuk a 4.2.1 tételt. •

Az analóg gyökeres pontösszefüggőségi tételhez szükségünk van az alábbira.

Lemma 4.2.1 *Egy $H = (V, F)$ digráf akkor és csak akkor gyökeresen k-pontösszefüggő, ha $\varrho_F(X_K, X_B) \geq k - |X_K - X_B|$ minden $\emptyset \subset X_B \subseteq X_K \subseteq V - s$ halmazpárra.*

Biz. Legyen H gyökeresen k-pontösszefüggő és legyen $\emptyset \subset X_B \subseteq X_K \subseteq V - s$. Ekkor s-ből egy $t \in X_B$ pontba vezet k belsőleg pontidegen út. Ezek közül legfeljebb $|X_K - X_B|$ használ pontot $X_K - X_B$-ből, így a maradék $k - |X_K - X_B|$ út mindegyike használ egy (X_K, X_B)-t lefogó élt, vagyis a $\varrho_F(X_K, X_B) \geq k - |X_K - X_B|$ feltétel szükséges.

A megfordításhoz tegyük fel, hogy valamely t pontra s-ből t-be maximum $k' < k$ belsőleg pontidegen út vezet. Jelölje az s-ből t-be vezető párhuzamos élek számát α. A Menger tétel szerint ez az α élt valamint egy alkalmas $k' - \alpha$ elemű $Y \subseteq V - \{s, t\}$ ponthalmazt eltörölve a keletkező H' digráfban már nincs út s-ből t-be. Jelölje X_B azon pontok halmazát, amelyekből t elérhető H'-ben irányított úton. Legyen $X_K := X_B \cup Y$. Könnyen látható, hogy $\varrho_F(X_K, X_B) = \alpha < k - (k' - \alpha) = k - |X_K - X_B|$, ellentmondásban a feltevéssel. •

TÉTEL 4.2.4 *Legyen $D = (V, A)$ s-ből gyökeresen k-pontösszefüggő. Ekkor D gyökeresen k-pontösszefüggő részdigráfjainak poliédere*

$$Q := \{x : \varrho_x(X_K, X_B) \geq k - |X_K - X_B| \text{ ha } \emptyset \subset X_B \subseteq X_K \subseteq V - s, \text{ és } 0 \leq x(e) \leq 1 \text{ ha } e \in A\}. \tag{4.15}$$

A leírásban szereplő rendszer TDI.

Biz. Legyen $p(X_K, X_B) = (k - |X_K - X_B|)^+$, ha $\emptyset \subset X_B \subseteq X_K \subseteq V - s$ és 0 különben. Könnyen látható, hogy p pozitívan metsző szupermoduláris $\mathcal{P}_2$-n. Így a 4.2.1 tétel szerint a leíró rendszer TDI. Emiatt Q egész poliéder. A 4.2.1 lemma szerint Q egész pontjai éppen D-nek a k-szor gyökeresen pontösszefüggő részgráfjainak felelnek meg. •

A fenti tételek segítségével választ kaphatunk a gyökeres pont- vagy élösszegüggőség növelésének problémájára. Tegyük fel, hogy adott egy kiindulási $H = (V, F)$ digráf egy kijelölt gyökérponttal. Ezt kell megnövelnünk egy megadott $D = (V, A)$ digráf éleinek segítségével úgy , hogy a megnövelt digráf gyökeresen k-élösszefüggő (k-pontösszefüggő) legyen és a felhasznált D-beli élek összköltsége minimális legyen. A megoldáshoz a $H + D = (V, F + A)$ digráfban keresünk minimális költségű gyökeres k-élösszefüggő (k-pontösszefüggő) digráfot, ahol minden H-beli él költsége nulla. Az előbbi tételek felhasználásával (és a dualitás tétellel) könnyen felírható egy min-max formula az optimális növelés költségére. Ezt abban a speciális esetben, amikor az összefüggőséget csak eggyel kell növelnünk alább meg is tesszük.

4.2.2 Speciális esetek: $0 - 1$-értékű p

A 4.2.1 tétel és a dualitás tétel segítségével tetszőleges c célfüggvényre felírhatunk egy min-max tételt a cx minimumára, ahol x egész és kielégíti (4.12)-t. Külön érdekessége miatt ezt csak egy speciális esetben tesszük meg. Egészértékű $c : E \to \mathbf{Z}_+$ függvényre $\mathcal{P}_2$-beli (nem feltétlenül különböző) párhalmazok egy rendszerét c-függetlennek nevezzük, ha minden e él legfeljebb $c(e)$ darabot fog le közülük.

TÉTEL 4.2.5 *Legyen $D = (V, A)$ digráf és $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}_2$ párhalmazoknak egy olyan metsző rendszere, melynek mindegyik tagját A lefogja. Legyen $c : A \to \mathbf{Z}_+$ egy költségfüggvény. Ekkor az $\mathcal{F}$-t lefogó élek minimális költsége a c-független $\mathcal{F}$-beli párhalmazok maximális számával egyenlő.* •

Az itt szereplő alkalmazások egy kivétellel mind halmazrendszerekre vonatkoznak, csak az utolsóban szerepelnek párhalmazok.

Minimális költségű utak

Legyen s és t a $H = (V, A)$ digráf két kijelölt pontja, és álljon $\mathcal{F}$ az összes $t\bar{s}$-halmazból. Figyeljük, meg, hogy egy tartalmazásra minimális élhalmaz, amely lefogja $\mathcal{F}$-t éppen egy s-ből t-be vezető út. Így az 4.2.5 tétel most azt adja, hogy:

Következmény 4.2.6 *Nemnegatív egészértékű értékű c súlyfüggvény esetén az s-ből t-be vezető utak súlyának minimuma egyenlő a c-független $t\bar{s}$-halmazok maximális számával, ahol a c-független halmazok választhatók egy halmazláncnak.* •

Gyakorlat 4.4 *Mutassuk meg, hogy a 4.2.6 következmény ekvivalens azzal a jól ismert alakkal, miszerint az s-ből t-be vezető utak súlyának minimuma egyenlő a $\pi(t) - \pi(s)$ érték maximumával, ahol a maximum a megengedett, egészértékű π potenciálokon megy, vagyis az olyan $\pi : V \to \mathbf{Z}$ függvényeken, melyekre $\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv)$ minden uv élre fennáll.* (Megjegyzendő, hogy ez az alak általánosabban, konzervatív súlyfüggvényre is érvényes).

Minimális költségű fenyők

Legyen s a $D = (V, A)$ digráfnak egy kijelölt gyöképontja és tegyük fel, hogy s-ből D-nek minden más pontja elérhető, azaz létezik s gyökerű feszítő fenyő. Álljon most $\mathcal{F}$ a $V - s$ összes nemüres részhalmazából. Könnyen látszik, hogy egy $\mathcal{F}$-t lefogó minimális élhalmaz éppen egy feszítő s-fenyő. Így az 4.2.5 tétel most azt adja, hogy:

TÉTEL 4.2.7 (D.R. Fulkerson) *Nemnegatív, egészértékű c súlyfüggvény esetén a minimális súlyú s gyökerű feszítő fenyő súlya egyenlő a c-független s-t nem tartalmazó halmazok maximális számával. Az optimális c-független halmaz-rendszer választható laminárisnak.*

Gyökeres élösszefüggőség növelése eggyel

Tegyük fel, hogy egy $H = (V, F)$ digráfban valamely $k \geq 0$ egészre az s pontból gyökeresen k-élösszefüggő, azaz $\varrho_H(X) \geq k$ minden $\emptyset \neq X \subseteq V - s$ halmazra. Jelölje $\mathcal{F}$ azon $\emptyset \subset X \subseteq V - s$ halmazok rendszerét, melyekre $\varrho_H(X) = k$. Legyen ezenkívül adott egy $D = (V, A)$ digráf, élein egy egészértékű c súlyfüggvénnyel. Tegyük fel, hogy $D + H$ s-ből gyökeresen $(k + 1)$-élösszefüggő. D-ből minimális össz-súlyú élt akarunk H-hoz adni úgy, hogy a megnövelt digráf gyökeresen $(k + 1)$-élösszefüggő legyen.

Következmény 4.2.8 *Legyen H gyökeresen k-élösszefüggő. Azon D-beli élek minimális össz-költsége, melyek H-hoz adása egy gyökeresen $(k+1)$-élösszefüggő digráfot eredményez egyenlő az $\mathcal{F}$-ből c-függetlenül kiválasztható halmazok maximális számával.*

Biz. Standard szubmodularitásból kapjuk, hogy $\mathcal{F}$ metsző halmazrendszer, így a 4.2.5 tétel alkalmazható. •

Vegyük észre, hogy $H = (V, \emptyset)$ és $k = 0$ esetén visszakapjuk Fulkerson tételét.

Gyökeres pontösszefüggőség növelése eggyel

Most megvizsgáljuk az előbbi alkalmazás pontidegen változatát. Legyen $H = (V, E)$ irányított gráf az s gyökérpontból k-pontösszefüggő, ami a 4.2.1 lemma alapján azzal ekvivalens, hogy $\varrho_H(X_K, X_B) + |X_K - X_B| \geq k$ fennáll minden olyan (X_K, X_B) párhalmazra melyre $\emptyset \subset X_B \subseteq X_K \subseteq V - s$.

Nevezzük pontosnak azon párhalmazokat, melyekre egyenlőség teljesül és jelölje $\mathcal{F}$ a pontos párok rendszerét. Szubmoduláris technikával látható, hogy $\mathcal{F}$ párhalmazoknak egy metsző rendszerét alkotja.

Legyen $D = (V, A)$ egy másik digráf, amelyre $D + H$ s-ből gyökeresen $(k + 1)$-pontösszefüggő. Pontos pároknak egy $\mathcal{I}$ rendszerét akkor nevezzük c-**független**nek, ha D-nek minden e éle $\mathcal{I}$-nek legfeljebb $c(e)$ tagját fogja le. D-ből minimális összköltségű élt akarunk H-hoz adni úgy, hogy a megnövelt H^+ digráfban gyökeresen $(k + 1)$-pontösszefüggő legyen.

Ennek felhasználásával a 4.2.5 tétel a következőt adja.

Következmény 4.2.9 *Tegyük fel, hogy a $H = (V, E)$ digráf s-ből gyökeresen k-pontösszefüggő, míg a $D = (V, A)$ digráf olyan, hogy $D + H$ s-ből gyökeresen $(k + 1)$-pontösszefüggő. Legyen $c : A \to \mathbf{Z}_+$ költségfüggvény. Ekkor azon D-beli élek minimális összköltsége, amelyeket H-hoz adva a keletkező digráf gyökeresen $(k + 1)$-pontösszefüggő egyenlő a c-független pontos párhalmazok maximális számával.* •

4.2.3 Metsző szupermoduláris függvények befok-korlátos fedései

Egy $D = (V, A)$ digráfban egy $X \subseteq V$ halmaz $B(X)$ bejárata a $B(X) := \{v \in X$: létezik olyan $uv \in A$ él, amelyre $u \in V - X\})$ halmaz volt. Valamely $g : V \to \mathbf{Z}_+$ függvényre legyen

$$\beta_g(X) := \sum [g(v) : v \in B(X)].$$

Lemma 4.2.2 *A β_g függvény szubmoduláris, azaz $\beta_g(X) + \beta_g(Y) \geq \beta_g(X \cap Y) + \beta_g(X \cup Y)$. Amennyiben egyenlőség áll, úgy $g(v) > 0$ és $v \in B(X) \cap B(Y)$ esetén $v \in B(X \cup Y)$.*

Biz. Ha $v \in B(X \cap Y)$ és $v \in B(X \cup Y)$, úgy $v \in B(X) \cap B(Y)$, így ilyenkor v hozzájárulása mindkét oldalhoz $2g(v)$. Ha $v \in B(X \cup Y)$, akkor $v \in B(X)$ vagy $v \in B(Y)$, és hasonlóképp, ha $v \in B(X \cap Y)$, akkor $v \in B(X)$ vagy $v \in B(Y)$. Emiatt ha v hozzájárulása a jobboldalhoz $g(v)$, úgy a baloldalhoz is legalább $g(v)$, amiből a szubmodularitás következik. Amennyiben $v \in B(X) \cap B(Y)$, de $v \notin B(X \cup Y)$, úgy v hozzájárulása a baloldalhoz $2g(v)$, míg a jobboldalhoz $g(v)$, így $g(v) > 0$ miatt nem állhat egyenlőség. •

TÉTEL 4.2.10 *Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, $g : V \to \mathbf{Z}_+$ felső korlát függvény a csúcshalmazon. Legyen p pozitívan metsző szupermoduláris függvény. Akkor és csak akkor létezik olyan egészértékű $x : A \to \mathbf{Z}_+$ függvény, amelyre $\varrho_x(Z) \geq p(Z)$ minden $Z \subseteq V$ részhalmazra és $\varrho_x(v) \leq g(v)$ minden $v \in V$ csúcsra, ha minden $X \subseteq V$ halmazra*

$$p(X) \leq \beta_g(X). \tag{4.16}$$

Biz. Szükségesség. Amennyiben létezik a kívánt x, úgy tetszőleges $Z \subseteq V$ halmazra $p(Z) \leq \varrho_x(Z) \leq \sum[\varrho_x(v) : v \in B(Z)] \leq \sum[g(v) : v \in B(Z)]$, azaz (4.16) fennáll.

Elegendőség. Tekintsük a 4.2.1 tétel alábbi speciális esetét.

Lemma 4.2.3 *Legyen $D = (V, A)$ digráf, p pozitívan metsző szupermoduláris halmazfüggvény a V részhalmazain. Ekkor az $\{x \geq 0, \varrho_x(Z) \geq p(Z)$ minden $Z \subseteq V$-re$\}$ rendszer TDI. Továbbá, a duális lineáris program optimális duális megoldása választható olyannak, hogy a pozitív duális változójú halmazok lamináris családot alkotnak.*

Állítás 4.2.1 *Elég a tételt arra az esetre belátni, amikor $g(v) = p(v)$ minden $v \in V$-re.*

Biz. Ha egy pontra $\varrho(v) = 0$, akkor v nincs benne semelyik halmaz bejáratában, így ha $g(v)$ pozitív, akkor ezt nullára csökkentve (4.16) nem sérül meg, vagyis feltehetjük, hogy $\varrho(v) = 0$ esetén $g(v) = 0$. Ha $\varrho(v) > 0$, akkor a $\{v\}$ egyelemű halmaz bejárata maga v, így (4.16) miatt biztosan $p(v) \leq g(v)$. Ha itt $p(v) < g(v)$ szerepel, akkor a $p(v)$ értékét $g(v)$-re emelve, sem a pozitívan metsző szupermodularitást, sem (4.16)-t nem rontjuk el. •

Feltesszük tehát, hogy minden csúcsra $p(v) = g(v)$. Egy $\mathcal{F}$ lamináris halmazrendszert nevezzünk függetlennek, ha D semelyik éle sem lép be egynél több tagjába. Ilyenkor $\mathcal{F}$-beli halmazok bejáratai diszjunktak és ezért $g(V) \geq \sum[\beta_g(X) : X \in \mathcal{F}]$. A (4.16) feltétel szerint $\beta_g(X) \geq p(X)$, amiből $g(V) \geq \sum[p(X) : X \in \mathcal{F}]$ fennáll bármely független lamináris családra. Ugyanakkor az egyelemű halmazokból álló családra pedig, amely lamináris és független, egyenlőség áll, hiszen $g(v) = p(v)$ minden v csúcsra, azaz $g(V) = \sum[p(v) : v \in V]$. Kapjuk tehát, hogy $g(V) = \max\{\sum[p(X) : X \in \mathcal{F}] : \mathcal{F}$ független lamináris$\}$. A 4.2.3 tétel szerint viszont ez a maximum a $\min\{x(A) : x \geq 0, \varrho_x(Z) \geq p(Z)$ minden $Z \subseteq V$-re$\}$ értékével egyenlő. Az optimalizáló x-re $g(V) = \sum_{v \in V} p(v) = x(A) = \sum_{v \in V} \varrho_x(v) \geq \sum_{v \in V} p(v) = \sum_{v \in V} g(v)$, így $\varrho_x(v) = g(v)$ minden $v \in V$-re. •
•

Direkt bizonyítás

Direkt bizonyítás a 4.2.10 tételben a feltétel elegendőségére. Nevezzünk egy X halmazt pontosnak, ha (4.16)-t egyenlőséggel teljesíti, azaz $\beta_g(X) = p(X)$. Ha $g \equiv 0$, úgy (4.16) miatt $p \equiv 0$, és ezért $x \equiv 0$ jó lesz. Tegyük fel, hogy $g(v) > 0$ valamely v pontra. Legyen g' az a függvény, amely g-ből áll elő azáltal, hogy $g(v)$-t eggyel csökkentjük.

Amennyiben (4.16) g'-re nézve is fennáll, úgy indukcióval készen vagyunk. Ha viszont g'-re megsérül (4.16), úgy létezik egy olyan X (g-re és p-re nézve) pontos halmaz, amelyre $v \in B(X)$. Legyen X egy maximális ilyen pontos halmaz, és legyen $e = uv \in A$ egy X-be lépő él. Csökkentsük p értékét eggyel minden olyan halmazon, amelyen pozitív volt és amelybe e belépett. A keletkező p' függvényről látható, hogy szintén pozitívan metsző szupermoduláris.

Állítás 4.2.2 *p'-re és g'-re teljesül a (4.16) feltétel.*

Biz. Ha nem teljesülne, úgy létezne egy (g-re és p-re nézve) pontos Y halmaz, amelyre $v \in B(Y)$ és $u \in Y$. Most X és Y metsző pontos halmazok, így $\beta_g(X) + \beta_g(Y) = p(X) + p(Y) \leq p(X \cap Y) + p(X \cup Y) \leq \beta_g(X \cap Y) + \beta_g(X \cup Y)$. A 4.2.2 Lemma miatt végig egyenlőség áll és emiatt $v \in B(X \cup Y)$. Ez viszont ellentmond az X maximális választásának. •

Indukcióval létezik x', amely teljesíti a tétel kívánságait p'-re és g'-re nézve. Jelölje x azt a függvényt, amely x'-ből áll elő azáltal, hogy az e élen az értékét eggyel növeljük. Ekkor x teljesíti a tétel kívánságait p-re és g-re vonatkozólag. • •

Megjegyzés Mi történik, ha a 4.2.10 tételben a pontok befokai helyett a kifokokra írunk elő felső korlátot? Talán meglepő módon, így már NP-teljes problémákhoz jutunk. Legyen ugyanis egy $D = (V, A)$ digráfnak s adott pontja, és definiáljuk a p függvényt a következőképp: $p(X) = 1$, ha $\emptyset \subset X \subseteq V - s$ és $p(X) = 0$ különben. Legyen $g \equiv 1$. Ha most x olyan egész vektor, amelyre egyrészt minden v csúcsra $\delta_x(v) \leq 1$, másrészt minden $\emptyset \subset X \subseteq V - s$ halmazra $\varrho_x(Z) \geq 1$, akkor x egy olyan (V, F) digráf élhalmazának incidencia vektora, amelyben minden csúcs kifoka legfeljebb 1 és amely egy feszítő fenyő. Vagyis, F egy (s gyökerű) Hamilton út. Márpedig a Hamilton út létezése NP-teljes probléma.

4.2.4 Két alkalmazás

Fedés fenyőkkel

Edmonds fenyő tétele adott gyökerű fenyők pakolásáról szólt. Vizsgáljuk meg, mi a helyzet, ha fenyők pakolása helyett a fenyőkkel fedni szeretnénk az éleket. Egy $D = (V, E)$ digráf pontjainak bármely $X \subseteq V$ részhalmazához jelölje $B(X) := \{v \in X$: létezik olyan $uv \in A$ él, amelyre $u \in V - X\}$ az X halmaz **bejárat**át. Ez tehát azon X-beli pontokból áll, melyekbe vezet X-n kívülről él. A következő eredmény az Edmonds tétel egyfajta fedési ellenpárjának tekinthető.

TÉTEL 4.2.11 (K. Vidyasankar) *Legyen s a $D = (V, A)$ digráf egy kijelölt pontja, amibe nem lép be él. D éleit akkor és csak akkor lehet k darab s-gyökerű feszítő fenyővel lefedni, ha* (i) *minden $v \in V - s$ pontra $\varrho(v) \leq k$, és* (ii) *minden $X \subseteq V - s$ halmazra*

$$k - \varrho(X) \leq \sum [k - \varrho(v) : v \in B(X)], \tag{4.17}$$

ahol $B(X)$ az X bejáratát jelöli.

Biz. Figyeljük meg, hogy a $p(X) := (k - \varrho(X))^+$ $(\emptyset \subset X \subseteq V - s)$ függvény pozitívan metsző szupermoduláris. A $g(v) := p(v)$ $(v \in V - s)$ függvényre a (4.17) és (4.16) feltételek ekvivalensek. Így a 4.2.10 tétel szerint létezik egy $x : A \to \mathbf{Z}_+$ függvény, amelyre $\varrho_x(v) = g(v)$ (minden $v \in V - s$-re) és $\varrho_x(Z) \geq p(Z)$ (minden $Z \subseteq V - s$-re). Ha most a digráf minden e éléhez még $x(e)$ párhuzamos példányt beveszünk, akkor a keletkező D^+ digráfban minden $v \in V - s$ csúcs befoka pontosan k és minden $\emptyset \subset X \subseteq V - s$ halmaz befoka legalább k, így Edmonds tétele alapján D^+ felbomlik k élidegen feszítő fenyőre, így az ezeknek megfelelő fenyők D-ben fedik D élhalmazát. •

Irányított vágások lefogása

A Lucchesi-Younger tétel irányított vágások minimális lefogásával foglalkozott. Most olyan lefogás létezésére vagyunk kiváncsiak, melyben a pontok befokaira korlát adott. A következő tételben érdekes megfigyelni a formai analógiát Tutte 1-faktor tételével.

TÉTEL 4.2.12 *Egy irányított $D = (V, A)$ gráfban akkor és csak akkor létezik olyan fenyves, amelynek élei minden irányított vágást lefognak, ha bármely nemüres $X \subset V$ halmazt elhagyva legfeljebb $|X|$ darab olyan komponens keletkezik, amelybe nem megy be él.*

Biz. Szükségesség. Ha $F \subseteq A$ lefogja az irányított vágásokat, úgy F $D - X$ minden olyan komponenséből tartalmaz kilépő élt, amelybe nem lép be él. Miután F fenyves, következik, hogy legfeljebb $|X|$ ilyen komponens lehet $D - X$-ben.

Az elegendőséghez legyen $p(X) = 0$, ha X-ből lép ki él vagy $X = \emptyset$, és $p(X) := c(X)$ különben (ahol $c(X)$ a $D - X$ irányítatlan értelemben vett komponenseinek a száma). Ekkor p pozitívan metsző szupermoduláris. Legyen $g \equiv 1$. Amennyiben létezik egészértékű x, amelyre $\varrho_x(Z) \geq p(Z)$ minden $Z \subseteq V$-re és $\varrho_x(v) \leq 1$ minden v csúcsra, úgy ezen utóbbi feltétel miatt x $0-1$-értékű, és az $F =: \{e : x(e) = 1, e \in A\}$ halmaz minden irányított vágást lefog. Ekkor tehát $\varrho_F(v) \leq 1$ minden v csúcsra. Az is feltehető, hogy F fenyves, mert ha tartalmazna irányított kört, akkor annak bármely élét kihagyva, továbbra is az irányított vágások lefogását kapnánk.

Tegyük most fel, hogy nem létezik a szóbanforgó x. Ekkor a 4.2.10 tétel miatt létezik olyan Z halmaz, amelyre $p(Z) > g(B(Z)) = |B(Z)|$. Legyen $X = B(Z)$. Miután $p(Z) > 0$, Z-ből nem lép ki él. Ezért a $D - Z$

minden komponensei $D - X$-nek is komponense. Ezért $D - X$ azon komponenseinek a száma, melyekbe nem lép él, legalább $p(Z)$, ami nagyobb, mint $|X|$, ellentmondásban a tétel feltevésével. •

Feladat 4.5 *Adott $g : V \rightarrow \mathbf{Z}_+$ felső korláthoz egy $D = (V, A)$ digráfban akkor és csak akkor létezik az irányított vágásoknak olyan F lefogása, amelyre $\varrho_F(v) \leq g(v)$ minden $v \in V$ csúcsra, ha bármely nemüres $X \subset V$ halmazt elhagyva legfeljebb $g(X)$ darab olyan komponens keletkezik, amelybe nem megy be él.*

file: ugyok, 2012. december 9.

5. Fejezet

ALKALMAZÁSOK

5.1 ÁLTALÁNOS IRÁNYÍTÁSI PROBLÉMÁK

Korábban már láttuk, hogy metsző szupermoduláris igényfüggvény esetén mi a feltétele egy $G = (V, E)$ gráf h-t fedő irányításának. Most megnézzük mi mondható keresztező szupermoduláris igényfüggvényre.

Nash-Williams tétele azt mondta ki, hogy egy G irányítatlan gráfnak akkor és csak akkor van k-élösszefüggő irányítása, ha G $2k$-élösszefüggő. A tétel tisztán kombinatorikus, leemeléseket használó bizonyítása Lovásztól származik. Ebből nem következett az amúgy egyszerű Boesch-Tindell tétel, amely szerint egy vegyes gráfnak akkor és csak akkor van erősen összefüggő irányítása ha nem tartalmaz elvágó élt és irányított vágást. Ráadásul $k \geq 2$-re nyitva maradt a vegyes gráfok k-élösszefüggő irányíthatóságának kérdése, ahol mindenesetre a kézenfekvő vágás feltétel nem elegendő. Jól tudtuk kezelni viszont a k-élösszefüggő irányítás fokszám korlátos változatait, és kimutattuk, hogy itt érvényes a lánctulajdonság, míg vegyes gráfok erősen összefüggő irányításánál nem.

Az irányítási feladatot h metsző szupermoduláris igényfüggvény esetén két g-polimatroid metszeteként tudtuk megfogalmazni, ráadásul nemnegatív h-ra már egy is elég volt. Keresztező szupermoduláris igényfüggvényekre gyakran kényelmesebb szubmoduláris áramokkal modellezni a problémát. Ehhez a G egy tetszőleges referencia irányításából indulunk majd ki, és ebben kell alkalmasan kijelölni azon éleket, amelyek megfordításával h-t fedő irányítást kapunk.

Ha h-ról semmit nem kötünk ki, úgy a h-t fedő irányítás feladat NP-teljes problémákat is magában foglal. Nevezzünk egy h halmazfüggvényt **keresztező G-szupermodulárisnak**, ha $h(X)+h(Y) \leq h(X\cup Y)+h(X\cap Y) + d(X, Y)$ teljesül a V minden X, Y keresztező részhalmazára, ahol $d(X, Y)$ jelöli azon G-beli élek számát, melyek $X - Y$ és $Y - X$ között vezetnek. Ez a legáltalánosabb függvényosztály, amelynek fedését jellemzni fogjuk. Miután a jellemzés nem annyira egyszerű, nem haszontalan speciális eseteket is megfogalmazni, ahol az irányíthatóság feltételei barátságosabbak. Két ilyen speciális esettel kezdjük.

5.1.1 Szimmetrikus igények

Egy h halmazfüggvényt akkor nevezünk szimmetrikusnak, ha $h(X) = h(V - X)$ minden $X \subseteq V$-re.

Legyen h_1 és $h_2 \geq 0$ két keresztező G-szupermoduláris és szimmetrikus függvény és legyen h a maximumuk, azaz $h(X) := \max\{h_1(X), h_2(X)\}$. (A h_1 nemnegativitását nem tesszük fel, és alkalmazásokban ez hasznos lesz.)

TÉTEL 5.1.1 *A $G = (V, E)$ irányítatlan gráfnak akkor és csak akkor létezik h-t fedő irányítása, ha $d(X) \geq 2h(X)$ minden $X \subseteq V$ halmazra fennáll.*

Biz. A feltétel szükséges, hiszen egy h-t fedő irányításra $d(X) = \varrho(X)+\varrho(V-X) \geq h(X)+h(V-X) = 2h(X)$. A feltétel elegendőségéhez a fenti megfontolás alapján azt kell kimutatnunk, hogy létezik egy olyan m befok vektor, amelyre (3.86) fennáll. Másszóval azt kell kimutatnunk, hogy a $P := \{x \in \mathbf{R}^V : x \geq 0, x(V) = |E|, x(Z) \geq i(Z)$ és $x(Z) \geq h(Z) + i(Z)$ minden $Z \subseteq V$-re$\}$. Miután h nemnegatív, az $x(Z) \geq i(Z)$ egyenlőtlenség felesleges, vagyis $P = \{x \in \mathbf{R}^V : x \geq 0, x(V) = |E|, x(Z) \geq p_1(Z)$ és $x(Z) \geq p_2(Z)$ minden $Z \subseteq V$-re$\}$, ahol $j = 1, 2$-re $p_j(Z) := h_j(Z) + i(Z)$. Miután p_j keresztező szupermoduláris, így P két bázispoliéder metszete és emiatt egész poliéder.

Ráadásul az $x^*(v) := d(v)/2$ által definiált x vektor benne van P-ben, hiszen egyrészt $x^*(V) = \sum[x^*(v) : v \in V] = \sum[d(v)/2 : v \in V] = |E|$, másrészt $Z \subset V$-re $x^*(Z) = \sum[x^*(v) : v \in Z] = \sum[d(v)/2 : v \in Z] = d(Z)/2 + i(Z) \geq h(Z) + i(Z)$. Vagyis a P egész poliéder tényleg nem üres, így van egész eleme. •

Nash-Williams tétele a $h_1(X) = k$, ha $\emptyset \subset X \subset V$ és $h_2 \equiv 0$ választással rögvest adódik, de valójában az alábbi csinos élesítést is könnyen kapjuk.

Következmény 5.1.2 *Legyen G $(2k)$-élösszefüggő gráf és H a G-nek egy Euler-részráfja* (azaz H-ban minden pont foka páros). *Ekkor H-nak egy tetszőleges Euler-irányítását ki lehet terjeszteni a G-nek egy k-élösszefüggő irányításává.*

Biz. Tekintsük az irányítatlan élek $G' = (V, E')$ gráfját és definiáljuk h_1-t a következőképp. $h_1(Z) := k - d_H(Z)/2$. Legyen $h_2 \equiv 0$. A 5.1.1 tételt G'-re alkalmazva az eredmény közvetlenül adódik. •

Következmény 5.1.3 *Adott a $G = (V, E)$ k-élösszefüggő irányítatlan gráf éleinek egy E' részhalmaza. Akkor és csak akkor lehet E' elemeit úgy irányítani, hogy a keletkező vegyes gráf k-élösszefüggő legyen, ha $d_{E'}(X) \leq 2(d_E(X) - k)$ fennáll minden $X \subset V$ nemüres részhalmazra.*

Biz. Helyettesítsünk minden $E - E'$-beli élt két ellentétes irányú párhuzamos éllel és a keletkező vegyes gráfra alkalmazzuk az előző következményt. •

Valójában ebben a megközelítésben még több van.

TÉTEL 5.1.4 *Legyen a $G = (V, E)$ $2k$-élösszefüggő gráf éleinek $\{E_0, E_1, \dots, E_t\}$ egy olyan partíciója, amelyre a $G_0 = (V, E_0)$ Euler gráf, míg $j = 1, \dots, t$-re a $G_j = (V, E_j)$ részgráf $(2k_j)$-élösszefüggő. Ekkor G-nek létezik egy olyan k-élösszefüggő irányítása, amelyet $G_0 = (V, E_0)$-ra megszorítva Euler, míg $G_j = (V, E_j)$-re megszorítva k_j-élösszefüggő $(j = 1, \dots, t)$.*

Biz. A feltételek nyilván szükségesek. Az elegendőséghez definiáljuk $j = 1, 2, \dots, t$-re a p_j halmazfüggvényket a következőképp. Legyen $p_j(X) := i_{E_j}(X) + k_j$, ha $\emptyset \subset X \subset V$, továbbá $p_j(\emptyset) = 0$, $p_j(V) := |E_j|$. Ezek keresztező szupermoduláris függvények, így tekinthetjük az általuk definiált $B_j := \{m_j \in \mathbf{Z}^V : m_j(V) = p_j(V),\ m_j(X) \geq p_j(X)$ minden $X \subseteq V$-re$\}$ bázis-poliérek B^* összegét. Definiáljuk továbbá a p_0 halmazfüggvényt: $\emptyset \subset X \subset V$ esetén legyen $p(X) := k - d_{E_0}(X) + i_{E-E_0}(X)$ és $p(\emptyset) = 0$, $p(V) := |E - E_0|$. Legyen $B_0 := \{m \in \mathbf{Z}^V : m(V) = p(V),\ m(X) \geq p(X)$ minden $X \subseteq V$-re$\}$.

Állítjuk, hogy a B^* és a B bázis-poliéderek metszete nem üres. Legyen ugyanis $m(v) := d_{E-E_0}(v)/2$ és $m_j(v) := d_{E_j}(v)/2$. Ekkor persze $m(v) = \sum[m_j(v) : j = 1, \dots, t]$, $m(V) = |E - E_0|$ és $m_j(V) := |E_j|$. Továbbá minden $X \subset V$-re $m(X) = \sum[m(v) : v \in X] = \sum[d_{E-E_0}(v)/2 : v \in X] = d_{E-E_0}(X)/2 + i_{E-E_0}(X) = d_E(X)/2 - d_{E_0}(X)/2 + i_{E-E_0}(X) \geq k - d_{E_0}(X)/2 + i_{E-E_0}(X) = p(X)$, vagyis $m \in B$. Hasonlóképp, $m_j(X) = \sum[m_j(v) : v \in X] = \sum[d_{E_j}(v)/2 : v \in X] = d_{E_j}(X)/2 + i_{E_j}(X) = d_{E_j}(X)/2 + i_{E_j}(X) \geq k_j + i_{E_j}(X) = p_j(X)$, vagyis $m_j \in B_j$ és így $m \in B^*$.

Következik, hogy a $B \cap B^*$-nak létezik egy egész eleme is és ez felbomlik B_j-beli egész elemek összegére.

???

5.1.2 Nemnegatív igények

Fujishige tételének alkalmazásaként levezetünk egy irányítási tételt, amely Nash-Williams irányítási tételének egy más irányú általánosításának tekinthető (bár az 5.1.1 tételt csak nemnegatív p-re foglalja magában).

TÉTEL 5.1.5 *Tegyük fel, hogy h keresztező G-szupermoduláris és nemnegatív. G-nek akkor és csak akkor létezik h-t fedő irányítása, ha*

$$e_{\mathcal{P}} \geq \sum h(V_i), \tag{5.1}$$

és

$$e_{\mathcal{P}} \geq \sum h(V - V_i) \tag{5.2}$$

teljesül minden $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_t\}$ partícióra, ahol $e_{\mathcal{P}}$ jelöli a V_i részek között vezető élek számát.

Biz. Csak az elegendőséget bizonyítjuk, a szükségesség igazolása egyszerű gyakorlat.

Legyen $p(X) := h(X) + i_G(X)$. Miután $i_G(X) + i(Y) = i_G(X \cup Y) + i_G(X \cap Y) - d(X, Y)$ (ezt egyszerű ellenőrizni) és h keresztező G-szupermoduláris, p keresztező szupermoduláris. (5.1) alapján $\sum_i p(V_i) = \sum_i h(V_i) + |E| - e_{\mathcal{P}} \leq |E| = p(V)$. (5.2) alapján $\sum_i p(V - V_i) = \sum_i h(V - V_i) + (t-1)|E| - e_{\mathcal{P}} \leq (t-1)|E| = (t-1)p(V)$.

A 3.9.2 tételből kapjuk, hogy létezik egy $m : V \to \mathbf{Z}$ függvény, amelyre $m(V) = |E|$ és $m(X) \geq p(X)$ minden $X \subseteq V$-re. Mivel $h \geq 0$, így $m(X) \geq i_G(X)$ és ezért az 3.1.1 irányítási lemma alapján létezik olyan irányítás, amelyben minden v pont befoka $m(v)$. Állítjuk, hogy ez az irányítás kielégíti a tétel kívánságait. Valóban $\varrho(X) = \sum[\varrho(v) : v \in X] - i_G(X) = m(X) - i_G(X) \geq h(X)$. • •

Következmény 5.1.6 (A) *Amennyiben az* 5.1.5 *tételben szereplő h függvény monoton csökkenő, akkor már az* (5.1) *feltétel elegendő.*
(B) *Amennyiben az* 5.1.5 *tételben szereplő h függvény szimmetrikus, akkor az* (5.1) *feltételt elegendő csupán* $t = 2$*-re megkövetelni, ami tehát avval ekvivalens, hogy* $d_G(X) \geq 2h(X)$ *minden* $X \subset V$ *részhalmazra.*

Biz. Miután $V_{i+1} \subset V - V_i$ minden $i = 1, \ldots, t$-re (ahol $V_{t+1} := V_1$), a monotonitás miatt $h(V_{i+1}) \geq h(V - V_i)$, így $\sum_{i=1}^{t} h(V_i) = \sum_{i=1}^{t} h(V_{i+1}) \leq \sum_{i=1}^{t} h(V - V_i)$. Amiből következik, hogy (5.1) implikálja (5.2)-t.

A (B) részhez először figyeljük meg, hogy h szimmetriája miatt (5.1) és (5.2) ekvivalens. Tegyük most fel, hogy (5.1) teljesül minden kétrészes partícióra, és legyen $\mathcal{P} := \{V_1, V_2, \ldots, V_t\}$ egy $t \geq 3$ részes partíciója V-nek. A köztes élek $e_{\mathcal{P}}$ száma $\sum_i d(V_i)/2$, és így a $d(X) \geq 2h(X)$ feltételt kihasználva kapjuk, hogy $e_{\mathcal{P}} = \sum_i d(V_i)/2 \geq \sum_i h(V_i)$, azaz (5.1) valóban fennáll. •

Vegyük észre, hogy a $h(X) := k$ ($\emptyset \subset X \subset V$) függvény esetén a (B) részből visszakapjuk Nash-Williams irányítási tételét. Az (A) részből még általánosabb tételek nyerhetők. Adott $l \leq k$ nemnegatív egész számok esetén egy $D = (V, E)$ irányított gráfot akkor nevezünk (k, l)**-élösszefüggőnek**, ha D-nek létezik egy olyan s gyökérpontja, hogy s-ből minden más pontba vezet k élidegen út és minden pontból vezet s-be l élidegen út. (Azt mondjuk, hogy D az s-re nézve (k, l)-élösszefüggő.) Menger irányított gráfokra vonatkozó tételének élidegen változata alapján ez azzal ekvivalens, hogy minden s-t nem tartalmazó halmaz befoka legalább k és minden s-t tartalmazó halmaz befoka legalább l. Figyeljük meg, hogy $k = l$ esetén a (k, l)-élösszefüggőség ekvivalens a k-élösszefüggőséggel.

Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráfot akkor nevezünk (k, l)**-partíció-összefüggőnek**, ha V bármely t-részes partíciójára ($t \geq 2$) a köztes élek száma legalább $k(t - 1) + l$. Megjegyezzük, hogy matroidelméletben bizonyításra került W.T. Tutte tétele, amely szerint G-ben akkor és csak akkor van k élidegen feszítő fa, ha G $(k, 0)$-partíció-összefüggő.

Feladat 5.1 *$l \geq k$ esetén G akkor és csak akkor (k, l)-partíció-összefüggő, ha $(k + l)$-élösszefüggő.*

TÉTEL 5.1.7 *Tegyük fel, hogy $l \leq k$. Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráfnak akkor és csak akkor létezik (k, l)-élösszefüggő irányítása, ha G (k, l)-partíció-összefüggő.*

Biz. Legyen s a gráf tetszőleges csúcsa. Legyen $h(\emptyset) := h(V) := 0$, $h(X) := k$, ha $X \subseteq V - s$ és $h(X) := l$, ha $s \in X$. Alkalmazhatjuk a 5.1.6 következmény (A) részét. •

A bizonyításból kiadódott, hogy a h nemnegatív keresztező G-szupermoduláris függvényt fedő irányítások befok vektorai pontosan a $B'(p)$ bázis poliéder egész pontjai (ahol $p(X) = h(X)+i(X)$). A 3.4.10 következményben megfogalmazott lánctulajdonságból kapjuk:

Következmény 5.1.8 *Legyen f és g a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf ponthalmazán egy alsó és egy felső korlát függvény ($0 \leq f \leq g$). Legyen h nemnegatív keresztező G-szupermoduláris függvény. Amennyiben létezik h-t fedő olyan irányítás, amelyben $\varrho'(v) \geq f(v)$ minden v-csúcsra, és létezik h-t fedő olyan irányítás, amelyben $\varrho''(v) \leq g(v)$ minden v-csúcsra, úgy létezik olyan h-t fedő irányítás is, amelyre $f(v) \leq \varrho(v) \leq g(v)$ minden v-csúcsra.* •

Természetesen ez a következmény alkalmazható az alábbi speciális h függvények esetén.

TÉTEL 5.1.9 *Legyen $f : V \to \boldsymbol{Z}_+$. A $G = (V, E)$ gráfnak akkor és csak akkor létezik olyan k-élösszefüggő irányítása, amelyben minden v csúcs befoka legalább $f(v)$, ha V minden olyan $\mathcal{P} := \{U_0, U_1, \ldots, U_q\}$ partíciójára ($q \geq 0$), amelyben* (egyedül) *az U_0 rész lehet üres* (és lehet $q = 0$, amikoris U_0 az egész V)*, a köztes élek $e_{\mathcal{P}}$ számára és az U_0 által feszített élek $i(U_0)$ számára fennáll, hogy*

$$e_{\mathcal{P}} + i(U_0) \geq f(U_0) + kq, \tag{5.3}$$

ahol $f(X) := \sum[f(v) : v \in X]$.

Biz. Definiáljuk a h_f halmazfüggvényt a következőképpen. $h_f(\emptyset) := h_f(V) := 0$, $h_f(X) := k$, ha X nem egyelemű, és minden $v \in V$-re $h_f(\{v\}) := \max(k, f(v))$. Ez a függvény nyilván monoton csökkenő és keresztező G-szupermoduláris, így alkalmazhatjuk a 5.1.6 következményt. Az ebben előforduló $\{V_1, V_2, \ldots, V_t\}$ partícióban az indexek esetleges átpermutálása után feltehetjük, hogy az első p rész olyan, hogy a $h_f(V_i) = k$, míg a többi $t - p$ rész olyan, hogy $h_f(V_i) > k$. Ekkor persze ezen utóbbi részek mind egyeleműek, melyek halmazát jelöljük U_0-lal. Legyen továbbá $i = 1, \ldots, p$-re $U_i := V_i$. Könnyen látszik, hogy ilyen választás mellett (5.3) ekvivalens (5.1)-tal. •

TÉTEL 5.1.10 *Legyen $g : V \to \boldsymbol{Z}_+$ olyan, hogy $g(v) \leq d_G(v)$ minden v csúcsra. A $G = (V, E)$ gráfnak akkor és csak akkor létezik olyan k-élösszefüggő irányítása, amelyben minden v csúcs befoka legfeljebb $g(v)$, ha V minden olyan $\mathcal{P} := \{U_0, U_1, \ldots, U_q\}$ partíciójára ($q \geq 0$), amelyben egyedül az U_0 rész lehet üres* (és lehet $p = 0$, amikoris U_0 az egész V), *az $U_1, \ldots, U_q$ részek közötti élek $e'_{\mathcal{P}}$ számára az U_0 által feszített élek $i(U_0)$ számára fennáll, hogy*

$$g(U_0) \geq i(U_0) + kq - e'_{\mathcal{P}} \tag{5.4}$$

ahol $g(X) := \sum[g(v) : v \in X]$.

Biz. Egy irányítás pontosan akkor teljesíti a kívánalmakat, ha átfordítva olyan k-élösszefüggő irányítást kapunk, amelyben minden v pont be-foka legalább $f(v) := d_G(v) - g(v)$. Így alkalmazhatjuk a 5.1.9 tételt, csupán azt kell megfigyelnünk, hogy az (5.4) és (5.3) feltételek egymással ekvivalensek. •

A $k = 1$ esetben a feltételek egyszerűsödnek.

TÉTEL 5.1.11 *Legyen $f : V \to \boldsymbol{Z}_+$ mindenütt pozitív. A $G = (V, E)$ gráfnak akkor és csak akkor létezik olyan erősen összefüggő irányítása, amelyben minden v csúcs befoka legalább $f(v)$, ha G 2-élösszefüggő, és minden $Z \subseteq V$ nemüres halmazra a Z elhagyásával keletkező gráf komponenseinek $c(X)$ számára*

$$f(Z) + c(Z) \leq e(Z), \tag{5.5}$$

ahol $e(Z)$ jelöli azon élek számát, amelyeknek legalább egyik vége Z-ben van.

Biz. Alkalmazzuk $k = 1$-re az 5.1.9 tételt és figyeljük meg, hogy ilyenkor az (5.3) feltételt, amennyiben U_0 nem üres, elegendő csak olyan partíciókra nézni, amelyekben az U_i és U_j részek között egyáltalán nem vezet él ($1 \leq i < j \leq q$). Valóban, ha egy a (5.3) feltételt megsértő partícióban U_0 nem üres és U_i és U_j részek között vezet él, akkor e két részt az uniójukkal helyettesítve szintén sértő partíciót kapunk (itt használva ki, hogy $k = 1$). Mármost egy ilyen speciális partícióra az $U_0 = Z$ átjelölés mellett ekvivalens (5.5)-cel.

Az $U_0 = \emptyset$ esetre pedig az (5.3) feltétel azzal ekvivalens, hogy V minden $p \geq 2$ részes $\mathcal{F} := \{V_1, \ldots, V_q\}$ partíciójára (nek üres részekre), a kereszt élek száma legalább $2p$. Ez viszont amiatt teljesül, mert a feltevés szerint G 2-élösszefüggő, így $d(V_i) \geq 2$, vagyis $e_{\mathcal{F}} = \sum_{i=1}^{q} d(V_i)/2 \geq \sum_{i=1}^{q} \geq q$. •

5.1.3 Vegyes gráfok irányítása

A 5.1.5 tétel bizonyításában kihasználtuk, hogy h nemnegatív. Ez sajnálatos, mert egy $M = (V, A+E)$ vegyes gráfnak, amelyben A az irányított élek halmaza, E pedig az irányítatlanoké, (gyökeres) k-élöszefüggővé történő irányítása csak olyan h segítségével fogalmazható meg, amely ugyan keresztező G-szupermoduláris, de lehet negatív értéke is. Vegyes gráf irányításán azt értjük, hogy az irányítatlan éleket kell irányítanunk az irányított élek változatlanul hagyása mellett. Kérdés, hogy maguk a (nemnegatív h-ra vonatkozó irányítási) tételek érvényben maradnak-e. Kiderül, hogy a metsző G-szupermoduláris esetben igen: ilyenkor egy partíció típusú feltétel szükséges és elegendő lesz és ez specializálható a vegyes gráf gyökeres k-élösszefüggővé irányítására.

Amint a korábban már megismert egyszerű Boesch-Tindell tétel mutatta, egy vegyes gráf erősen összefüggővé irányításához a vágás feltétel elegendő, $k \geq 2$-re azonban a k-élösszefüggővé irányításhoz immár a partíciós vagy ko-partíciós jellegű szükséges feltételek sem bizonyulnak elegendőnek.

Ábra

A gráf ponthalmaza $\{1, 2, 3, 4\}$. Két irányítatlan él van: 12 és 34. Kilenc irányított él van: 14,14,41, 13,13,31, 23,23,32. Könnyen ellenőrizhető, hogy $k = 2$-re nincs k-élösszefüggő irányítás.

Másrészt mivel a kilenc élű irányított gráf erősen összefüggő, így azok a hiányos halmazok, amelyekbe egyetlen irányított él lép be. Összesen három ilyen van: $Z_1 = \{2\}, Z_2 = \{1, 2, 3\}, Z_3 = \{1, 4\}$. Ezen három halmaz közül bármely kettőhöz a két irányítatlan élnek van olyan irányítása, amely mindkét kijelölt halmazhoz tartalmaz belépő élt. Emiatt egy bizonyíték, amely azt mutatja, hogy 2-élösszefüggő irányítás nem létezik szükségképpen tartalmaznia kell mind a három Z_i halmazt. Ez a három halmaz azonban se partíciót, se kopartíciót nem alkot.

Ha tehát h keresztező G-szupermoduláris, akkor a fenti meggondolások alapján a h-t fedő irányítások befok vektorai éppen a $B'(h + i_G)$ és a $B'(i_G)$ bázis poliéderek metszetének egész pontjai. Nemnegatív h esetén $B'(h + i_G)$ benne van $B'(i_G)$-ben és ezért volt, hogy ilyenkor a h-t fedő irányítások befok vektorai egy bázis poliédert feszítenek, aminek például folyománya volt a linking tulajdonság. Általános keresztező G-szupermoduláris h-ra már két egymást nem tartalmazó bázis poliéder metszetéről van szó, amelyre a linking tulajdonság már nem feltétlenül érvényes, amint ezt a követk ező példa konkrétan is jelzi. **Nem érvényes** tehát a következő. *Ha egy vegyes gráfnak van olyan erősen összefüggő irányítása, amelyben minden v pont befoka legalább $f(v)$, és van olyan erősen összefüggő irányítása, amelyben minden v pont befoka legfeljebb $g(v)$, akkor létezik olyan erősen összefüggő irányítása is, amelyben minden pont befoka legalább $f(v)$ és legfeljebb $g(v)$.* Az állítást cáfoló vegyes gráf négy pontból áll, v_1v_4 és v_2v_3 irányítatlan élek, v_3 és v_4 között van két ellentétesen irányított párhuzamos él, és v_1 és v_2 között van két ellentétesen irányított párhuzamos él. Az f alsó korlát a négy ponton rendre $1,0,0,0$, míg a g felső korlát rendre $1,1,0,1$.

Elvileg közvetlenül is meg lehetne határozni két bázis poliéder metszete nemürességének feltételét, de kényelmesebb a nagyobb rugalmasságot nyújtó szubmoduláris áramok fogalmával dolgozni, ahhoz hasonlóan, ahogy ezt korábban már a szimmetrikus h függvény esetén tettük. A keresztező szubmoduláris függvénnyel határolt szubmoduláris áramok megengedettségére vonatkozó 4.1.7 tétel segítségével adjuk meg a választ arra irányítási kérdésre, amikor h keresztező G-szupermoduláris, de nem feltétlenül nemnegatív.

TÉTEL 5.1.12 *Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és h keresztező G-szupermoduláris függvény, amelyre $h(\emptyset) = h(V) = 0$. G-nek akkor és csak akkor létezik h-t fedő irányítása, ha $h(\mathcal{F}) \leq \sum_{j\in E} e_j(\mathcal{F})$ fennáll V minden Z részhalmazának minden $\mathcal{F}$ fa-kompozíciójára, ahol $e_j(\mathcal{F})$ annak a két számnak a maximumát jelzi, ahány $\mathcal{F}$-beli halmazba a j él egyik illetve másik irányításánál belép.*

Biz. Tekintsük a G gráfnak egy tetszőleges irányítását, amelyet $D = (V, A)$-val fogunk jelölni. Ez csak arra szolgál, hogy segítségével megadjuk a G keresett irányítását. A megadás úgy történik, hogy meghatározzuk a D bizonyos éleit, amelyek megfordításával a végső irányítást megkapjuk. A megfordítandó éleket egy $x : A \to \{0,1\}$ vektor írja le, ahol $x(a) = 1$ jelenti azt, hogy az a élt megfordítjuk. Ezen konvencióval élve egy $x : A \to \{0,1\}$ vektor pontosan abban az esetben határoz meg egy h-t fedő irányítást, ha $\varrho_A(Z) - \varrho_x(Z) + \delta_x(Z) \geq h(Z)$ minden $Z \subseteq V$ halmazra fennáll, ami azzal ekvivalens, hogy

$$\varrho_x(Z) - \delta_x(Z) \leq b(Z) := \varrho_A(Z) - h(Z). \tag{5.6}$$

Miután az így definiált b halmazfüggvény keresztező szubmoduláris, a $\{\varrho_x(Z) - \delta_x(Z) \leq b(Z), 0 \leq x \leq 1\}$ rendszer egy Q szubmoduláris áram poliédert határoz meg. Könnyen látszik, hogy az 4.1.7 tételben szereplő feltétel ekvivalens a tételbeli feltétellel. Így Q nemüres, de akkor létezik egész pontja is, ami viszont éppen a keresett irányítást adja meg. •

Ármost legyen $M = (V, A + E)$ vegyes gráf, G éleit akarjuk irányítani úgy, hogy a keletkező $(V, A + \vec{E})$ digráf k-élösszefüggő legyen. Definiáljuk a h függvényt az üres halmazon és V-n nullának, míg másutt $h(X) = k - \varrho_A(X)$. Ekkor h keresztező szupermoduláris, és az E-nek egy $\vec{E}$ irányítása pontosan akkor fedi h-t, ha $(V, A + \vec{A})$ k-élösszefüggő. Ezen h függvényre alkalmazva az 5.1.12 tétel első részét megkapjuk a vegyes gráf k-élösszefüggővé irányításának szükséges és elegendő feltételét.

A fenti példában a $Z = \{1,2\}$ halmaznak $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$ egy fa-kompozícióját alkotja, éspedig azt, amelyet a Z-nek az $\{\{1\},\{2\}\}$ partíciója, a $V - Z$-nek $\{\{3\},\{4\}\}$ partíciója, és a partíció tagjain értelmezett $f_1 = (3,2), f_2 = (4,1), f_3 = (3,1)$ irányított fa-élek definiálnak. Ekkor egyrészt $h(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{3}[k - \varrho_A(Z_i)] = \sum_{i=1}^{3}[2-1] = 3$ másrészt $\sum_{j\in E} e_j(\mathcal{F}) = 1 + 1 = 2$, vagyis az 5.1.12 tételbeli feltétel nem teljesül.

irany 2012. december 9.

5.2 AZ ÉLÖSSZEFÜGGŐSÉG NÖVELÉSE

Ebben a részben azt mutatjuk be, hogy a más előadásokban már tanulmányozott élösszefüggőség növelési problémák hátterében g-polimatroidok állnak.

5.2.1 Irányított növelés

Adott $D = (V, A)$ irányított gráfra nevezzünk egy $m_{ki} : V \to \mathbf{Z}$ vektort **növelési kifok-vektor**nak, ha létezik egy olyan $H = (V, F)$ digráf, amelyre $G + H = (V, A + F)$ k-élösszefüggő és $\delta_H(v) = m_{ki}(v)$ minden $v \in V$-re. A növelési befok-vektort analóg definiáljuk.

A Gráfelmélet előadásban megfigyeltük, hogy Mader irányított leemelési tétele ekvivalens a következővel.

TÉTEL 5.2.1 *Adott a $D = (V, A)$ digráf valamint az $m_{be} : V \to \mathbf{Z}_+$ és $m_{ki} : V \to \mathbf{Z}_+$ fokszám-előírások, melyekre $m_{be}(V) = m_{ki}(V)$. Akkor és csak akkor létezik olyan $H = (V, F)$ digráf, amelyre $\varrho_H(v) = m_{be}(v)$ és $\delta_H(v) = m_{ki}(v)$ teljesül minden $v \in V$ pontra és $D + H$ k-élösszefüggő, ha*

$$m_{be}(X) \geq k - \varrho_D(X) \text{ és } m_{ki}(X) \geq k - \delta_D(X) \text{ minden } \emptyset \neq X \subset V \text{ részhalmazra.} \tag{5.7}$$

Ennek felhasználásával bizonyítottuk a következő növelési tételt:

TÉTEL 5.2.2 *Egy D digráfot akkor és csak akkor lehet legfeljebb γ új él hozzáadásával k-élösszefüggővé tenni, ha a csúcshalmaz minden $\{X_1, \dots, X_t\}$ részpartíciójára $\sum_i [k - \delta_D(X_i)] \leq \gamma$ és $\sum_i [k - \varrho_D(X_i)] \leq \gamma$.*

A bizonyítás azon múlt, hogy meg tudtunk határozni egy kifok- és egy befok-vektort, melyekre $m_{be}(V) = m_{ki}(V) = \gamma$, és így lehetett a 5.2.1 tételt alkalmazni. A meghatározás érdekes jellegzetessége volt, hogy egyfajta értelemben mohón történt: egy „nagy" kiindulási m_{ki} (ill. m_{be}) vektor komponenseit egyenként csökkentettük csak arra ügyelve, hogy a (5.7) feltételek érvényben maradjanak. Ki fogjuk mutatni, hogy ennek hátterében az áll, hogy a növelési kifok (és befok) vektorok kontra-polimatroidot feszítenek. Ennek szép következménye lesz, hogy pontindukált költségek esetén a növelési problémának a költséges változata is megoldható.

Kényelmesebb a növelési probléma általánosabb, absztrakt alakjával dolgozni. Az alábbiakban szereplő p (nemnegatív) függvény végig egy pozitívan keresztező szupermoduláris halmafüggvényt jelent a V alaphalmazon, amelyre $p(V) = 0$. Jelölje $\hat{p}$ azt a függvényt, amelyre

$$\hat{p}(X) := p(V - X) \text{ minden } X \subseteq V\text{-re.} \tag{5.8}$$

Nyilván $\hat{p}$ is pozitívan keresztező szupermoduláris, amelyre $\hat{p}(\emptyset) = \hat{p}(V) = 0$. Adott $\gamma \geq 0$ egész számra definiáljuk a p^γ függvényt a következőképpen.

$$p^\gamma(V) := \gamma \text{ és } p^\gamma(X) := p(X), \text{ ha } X \subset V. \tag{5.9}$$

Nyilvánvaló a következő megfigyelés.

Állítás 5.2.1 *Ha minden $X, Y \subset V$ diszjunkt halmazra*

$$\gamma \geq \hat{p}(X) + \hat{p}(Y), \tag{5.10}$$

akkor p^γ pozitívan metsző szupermoduláris. •

A Kombopt struktúrák című előadásban igazoltuk a 5.2.1 tétel következő általánosítását.

TÉTEL 5.2.3 *Legyen $m_{ki} : V \to \mathbf{Z}_+$ és $m_{be} : V \to \mathbf{Z}_+$ a pontok ki- és befokaira vonatkozó előírás, melyekre $\gamma := m_{be}(V) = m_{ki}(V)$. Akkor és csak akkor létezik olyan $H = (V, F)$ irányított gráf, amely fedi p-t és amelyben*

$$\delta_H(v) = m_{ki}(v) \text{ és } \varrho_H(v) = m_{be}(v) \tag{5.11}$$

minden csúcsra fennáll, ha minden $X \subseteq V$-re

$$m_{ki}(X) \geq \hat{p}(X) \tag{5.12}$$

és

$$m_{be}(X) \geq p(X) \tag{5.13}$$

fennáll.

Az alábbiakban ezt a tételt bizonyítás nélkül fogjuk használni. Azt mondjuk, hogy egy m_{ki} vektor **p-t fedő kifok-vektor**, ha létezik p-t fedő H digráf, melyre $\delta_H(v) = m_{ki}(v)$ minden $v \in V$-re. Jellemezzük a p-t fedő kifok-vektorokat.

TÉTEL 5.2.4 *Adott $m_{ki} : V \to \mathbf{Z}_+$ vektor akkor és csak akkor p-t fedő kifok-vektor, ha*

$$m_{ki}(Z) \geq \hat{p}(Z) \text{ minden } Z \subset V\text{-re} \tag{5.14}$$

és

$$m_{ki}(V) \geq \max\{\textstyle\sum_i [p(X_i)] : \{X_i\} \text{ partíció}\}. \tag{5.15}$$

Biz. Legyen $H = (V, F)$ egy p-t fedő digráf, melynek kifok-vektora m_{ki}. $m_{ki}(Z) = \sum_{v \in Z} \delta_H(v) \geq \delta_H(Z) = \varrho_H(V - Z) \geq p(V - Z) = \hat{p}(Z)$ minden $Z \subseteq V$-re. Továbbá $m_{ki}(V) = |F| \geq \sum_i \varrho_H(V_i) \geq \sum_i p(V_i)$, tehát a feltételek szükségesek.

Az elegendőség igazolásához legyen $\gamma := m_{ki}(V)$. Ekkor teljesül (5.10), hiszen ha X, Y diszjunkt halmazok, akkor (5.14) nyomán $\gamma = m_{ki}(V) \geq m_{ki}(X) + m_{ki}(Y) \geq \hat{p}(X) + \hat{p}(Y)$. Így a (5.9) által definiált p^γ függvény pozitívan metsző szupermoduláris. A 3.5.3 tétel folytán a (5.15) feltételből következik, hogy a $B'(p^\gamma)$ bázis-poliéder nemüres, így tartalmaz egy m_{be} egész pontot, amelyre tehát $m_{be}(Z) \geq p(Z)$ minden $Z \subseteq V$-re és $m_{be}(V) = \gamma$. Alkalmazhatjuk a 5.2.3 tételt, amelynek alapján létezik a p-t fedő előírt kifok-vektorú digráf. •

Következmény 5.2.5 *Adott $m_{be} : V \to \mathbf{Z}_+$ vektor akkor és csak akkor p-t fedő befok-vektor, ha*

$$m_{be}(Z) \geq p(Z) \text{ minden } Z \subset V\text{-re} \tag{5.16}$$

és

$$m_{be}(V) \geq \max\{\textstyle\sum_i [\hat{p}(X_i)] : \{X_i\} \text{ partíció}\}. \tag{5.17}$$

Biz. Egy H digráf pontosan akkor fedi p-t, ha az éleinek megfordításával keletkező $\hat{H}$ digráf fedi $\hat{p}$-t. Emiatt a p-t fedő befok-vektorok és $\hat{p}$-t fedő kifok-vektorok ugyanazok. A (5.14) és a (5.15) feltételeket $\hat{p}$-re felírva éppen a (5.16) és (5.17) feltételeket kapjuk, így alkalmazhatjuk a 5.2.4 tételt p helyett $\hat{p}$-re. •

Adott $\gamma \geq 0$ egészre vizsgáljuk meg egy p-t fedő γ élű digráf létezésének feltételét.

Állítás 5.2.2 *Ha létezik p-t fedő γ élű $H = (V, F)$ digráf, akkor*

$$\gamma \geq \textstyle\sum_i p(V_i) \text{ és } \gamma \geq \sum_i \hat{p}(V_i) \text{ } V \text{ minden } \{V_1, \ldots, V_t\} \text{ partíciójára.} \tag{5.18}$$

Biz. $\gamma = |F| \geq \sum \varrho_i(V_i) \geq \sum_i p(V_i)$ és $\gamma = |F| \geq \sum \delta_i(V_i) \geq \sum_i \hat{p}(V_i)$. •

TÉTEL 5.2.6 *Legyen γ olyan egész, amelyre* (5.18) *fennáll. Ekkor p^γ pozitívan metsző szupermoduláris, a $B'(p^\gamma)$ bázis-poliéder nemüres és egész pontjai pontosan a p-t fedő γ élű digráfok befok-vektorai.*

Biz. Mivel $\gamma \geq \sum_i \hat{p}(V_i)$ fennáll minden $\{V_i\}$ partícióra, és így p nemnegativitása miatt minden részpartícióra is, ezért egy $\{X, Y\}$ részpartícióra $\gamma \geq \hat{p}(X) + \hat{p}(Y)$, és így a 5.2.1 állítás miatt p^γ pozitívan metsző szupermoduláris. A 3.5.3 tétel szerint $B'(p^\gamma)$ nemüres, hiszen a $\gamma \geq \sum_i p(V_i)$ feltétel miatt $p^\gamma(S) = \gamma \geq \sum_i p(V_i) = \sum_i p^\gamma(V_i)$ minden $\{V_i\}$ partícióra. A tétel utolsó részéhez alkalmazzuk a 5.2.5 következményt az olyan m_{be} vektorokra, melykre $m_{be}(V) = \gamma$. •

A tételből rögtön adódik:

Következmény 5.2.7 *A p függvény akkor és csak akkor fedhető le γ élű digráffal, ha* (5.18) *fennáll.*

Jelölje most γ a p-t fedő digráfok minimális élszámát. Ekkor az 5.2.6 tétel szerint p^γ pozitívan metsző szupermoduláris, és így $C(p^\gamma)$ kontra-polimatroidot alkot.

TÉTEL 5.2.8 *A p-t fedő befok-vektorok pontosan a $C(p^\gamma)$ kontra-polimatroid egész elemei.*

Biz. Legyen m_{be} egy p-t fedő $H = (V, F)$ digráf befok-vektora. Ekkor egyrészt $m_{be}(V) = |F| \geq \gamma$, másrészt $m_{be}(X) = \sum_{v \in X} \varrho_H(v) \geq \varrho_H(X) \geq p(X)$ minden $X \subseteq V$-re vagyis $m_{be} \in C(p)$. A fordított irány a 5.2.5 következményből adódik. •

Megjegyzés Miután p csak pozitívan keresztező, ezért $C(p^\gamma) = \{x : x(Z) \geq p^\gamma(Z), Z \subseteq S\}$ nem minden γ-ra kontra-polimatroid. Ha azonban $\gamma \geq \hat{p}(X) + \hat{p}(Y)$ minden diszjunkt X, Y-ra fennáll, akkor már p^γ pozitívan metsző szupermoduláris, így $C(p^\gamma)$ kontra-polimatroid. Ennek az egész pontjainak általában nem ismert a kombinatorikai jelentése. Ellenben ha $\gamma \geq \{\sum_i \hat{p}(X_i)$ az S minden $\{X_i\}$ partíciójára, akkor $C(p^\gamma)$ egész elemei pontosan a p-t fedő legalább γ élű digráfok befok-vektorai. Ha pedig γ a legkisebb olyan szám, amelyre van p-t fedő γ élű digráf, azaz γ a $\sum_i p(V_i)$ és $\sum_i \hat{p}(V_i)$ értékek minimuma, akkor $C(p^\gamma)$ egész pontjai éppen a p-t fedő digráfok befok-vektorai.

Tekinthetjük a növelési és általánosabban a p-fedési feladatnak a minimális költségű változatát, amikor adott két nemnegatív költségfüggvény a ponthalmazon, c_{ki} és c_{be}, és egy új uv él költségét a $c_{ki}(v) + c_{be}(u)$ összeggel definiáljuk. A cél minimális költségű élhalmaz hozzáadásával D-t k-élösszefüggővé tenni. (Amennyiben az éleken egy tetszőleges költség vektor van megadva, a növelési probléma NP-teljes). Ehhez csak az kell, hogy a $C(p)$ (és az analóg módon definiált $C(\hat{p})$ kontra-polimatroidnak egy-egy minimális költségű m_{be} ill. m_{ki} elemét megkeressük, melyekre $m_{ki}(V) = m_{be}(V)$, majd alkalmazzuk a 5.2.3 tételt. A keresés a mohó algoritmus kontra-polimatroidra vonatkozó változatával történhet, amikor a definiáló p függvény pozitívan metsző szupermoduláris.

5.2.2 Irányítatlan növelés

A fenti megfontolás átvihető az irányítatlan élösszefüggőség növelési problémára is, ráadásul a globális k-élösszefüggőség növelésénél általánosabb alakban. Minden $\{u, v\}$ pontpárra adott egy $r(u, v) \neq 1$ előírás, és úgy kell minimális számú élt a megadott $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráfhoz hozzáadni, hogy a megnövelt gráfban minden (u, v) pontpárra u és v között az élidegen utak maximális $\lambda(u, v)$ száma legalább $r(u, v)$ legyen. Vezessük be az $R(X) := \max\{r(u, v) : |\{u, v\} \cap X| = 1\}$ függvényt. R nyilván szimmetrikus és nem nehéz igazolni, hogy ferdén szupermoduláris. Azt mondjuk, hogy egy G^+ gráf fedi R-t, ha $d_{G^+} \geq R$.

Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételt, amelyet Mader eredetileg egy ezzel ekvivalens alakban fogalmazott meg pontpárok lokális élösszefüggőségét megőrző leemelésekre vonatkozóan.

TÉTEL 5.2.9 (Mader) *Adott $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és egy $m : V \to \mathbf{Z}$ egész vektor, amelyre $m(V)$ páros, és nincs G-nek olyan K komponense, amelyre $m(K) = 1$. Akkor és csak akkor létezik olyan $H = (V, F)$ gráf, amelyre $d_H(v) = m(v)$ minden $v \in V$-re és $G + H$ fedi R-t* (azaz $\lambda(u, v; G + H) \geq r(u, v)$ minden $\{u, v\}$ pontpárra)*, ha*

$$m(X) \geq R(X) - d_G(X) \text{ minden } X \subset V\text{-re.} \tag{5.19}$$

Egy ilyen m vektort nevezzünk a növelés **fokszám vektor**ának. Definiáljuk p-t függvényt a $p(X) := (R(X) - d_G(X))^+ \quad (X \subseteq V)$ képlettel. Ekkor $p(V) = 0$, p szimmetrikus és ferdén szupermoduláris. Adott $\gamma \geq 0$ egészre legyen

$$p^{2\gamma}(V) := 2\gamma \text{ és } p^{2\gamma}(X) := p(X), \text{ ha } X \subset V. \tag{5.20}$$

Ekkor $p^{2\gamma}$ szimmetrikus és ferdén szupermoduláris és így a 3.5.1 lemma szerint lényegében szupermoduláris. Emiatt $B'(p^{2\gamma})$ bázis poliéder, amelynek egész elemei a γ élű növelés fokszám vektorai. A 3.5.4 tétel szerint $B'(p)$ akkor és csak akkor nem üres, ha minden $\{X_1, \ldots, X_t\}$ részpartícióra $\sum_i p(X_i) \leq p(V)$. Ebből következik:

TÉTEL 5.2.10 *Adott $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráfhoz akkor és csak akkor létezik olyan γ élű $H = (V, F)$ gráf, amelyre $\lambda(u, v; G + H) \geq r(u, v)$ minden $\{u, v\}$ pontpárra, ha minden $\{X_1, \ldots, X_t\}$ részpartícióra $\sum_i [R(X_i) - d_G(X_i)] \leq 2\gamma$. Az ilyen γ élű H gráfok fokszám vektorai pontosan a $B'(p^{2\gamma})$ bázis-poliéder egész elemei.*

Következmény 5.2.11 *Adott $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráf és $g : V \to \mathbf{Z}_+$ felső korlát. Ha létezik olyan $H = (V, F)$ gráf, amelyre $d_H(v) \leq g(v)$ minden $v \in V$ csúcsra és*

$$\lambda(u, v; G + H) \geq r(u, v) \text{ minden } \{u, v\} \text{ pontpárra,} \tag{5.21}$$

és létezik legfeljebb γ élű (5.21)-t kielégítő gráf, akkor olyan gráf is létezik, amely egyszerre kielégíti a kívánalmakat.
•

Az irányított esethez hasonlóan, ennek alapján adott $c : V \to \mathbf{R}_+$ költségfüggvényre a mohó algoritmus segítségével meg tudunk határozni egy minimális költségű növelést, ahol egy új uv él költsége $c(u) + c(v)$. Kiindulunk abból az m vektorból, amelynek minden komponense az $r(u, v)$ igények értékének k maximuma, majd a $c(v)$ szerinti csökkenő sorrendben végighaladva a csúcsokon, egymás után próbáljuk csökkenteni az $m(v)$ pozitív komponenseit amennyivel csak lehet csupán arra ügyelve, a $C(p)$ kontrapolimatroidban maradjunk. Technikailag ez úgy történhet, hogy egy új pontból minden v pontba vezetünk $m(v)$ párhuzamos élt, majd ezek közül sorra kihagyunk néhányat csak arra vigyázva, hogy a meglévő gráf kielégítse az eredeti pontok lokális élösszefüggőségére vonatkozó előírásokat. Ezt addig csináljuk, amíg 2γ új élünk nem marad, majd alkalmazzuk Mader tételét.

novel 2012. december 9.

5.3 IRÁNYÍTOTT PONTÖSSZEFÜGGŐSÉG NÖVELÉS

Egy adott digráfot k-élösszefüggőre növelő digráfok befok-vektorairól beláttuk, hogy kontra-polimatoridot alkotnak. Megmutatjuk, hogy hasonló állítás érvényes a pontösszefüggőség esetén is. A Kombinatorikus Optimalizálási Struktúrák előadásból ismeretes, hogy az irányított gráfok pontösszefüggőségének optimális növelésére vonatkozó min-max tétel a következő általánosabb eredmény speciális eseteként adódik. A megfogalmazáshoz emlékeztetünk, hogy párhalmazok egy halmazát akkor neveztünk függetlennek, ha bármely két tagra vagy a belső halmazok diszjunktak vagy a külső halmazok uniója az alaphalmaz.

TÉTEL 5.3.1 *Legyen p pozitívan keresztező szupermoduláris párhalmaz függvény. A p-t fedő irányított éleik minimális száma egyenlő a független párhalmazok maximális p-összegével. Ekvivalens megfogalmazásban, p akkor és csak akkor fedhető γ éllel, ha párhalmazok bármely független részhalmazának p-összege legfeljebb γ.*

Ebből levezetjük, hogy egy adott vektor mikor egy p-t fedő digráf befok-vektora. A $Z \subseteq V$ halmazokra jelölje $p^*(Z)$ az olyan független párhalmazok maximális p-összegét, melyek belső halmazai mind Z-ben vannak.

TÉTEL 5.3.2 *Adott $m : V \to \mathbf{Z}_+$ vektorhoz akkor és csak akkor létezik p-t fedő m befok-vektorú digráf, ha*

$$m(Z) \geq p^*(Z) \text{ minden } Z \subseteq V\text{-re.} \tag{5.22}$$

Biz. Ha létezik a keresett digráf, akkor $p^*(Z)$ legfeljebb akkora, mint azon élek száma, melyek feje Z-ben van, vagyis, mint $m(Z)$, azaz (5.22) szükséges.

Az elegendőséghez tegyük fel, hogy (5.22) fennáll. Ezért az egyelemű $Z = \{v\}$ halmazokra $m(v) \geq p(Z, Z)$. Módosítsuk a p függvényt azáltal, hogy minden olyan $Z = \{v\}$ halmazra, melyre $m(v) > p(Z, Z)$ a $p(Z, Z)$ értéket $m(v)$-re emeljük. A keletkező p' párhalmaz függvény továbbra is pozitívan keresztező szupermoduláris. Amennyiben létezik p'-nek $\gamma := m(V)$ élű fedése, úgy szükségképpen minden v pont befoka pontosan $m(v)$ és készen vagyunk. Ha nem létezik γ élű fedés, akkor az 5.3.1 tételt p'-re alkalmazva azt kapjuk, hogy létezik független párhalmazok egy $\mathcal{F}$ rendszere, amelyre $p'(\mathcal{F}) := \sum[p'(X) : X \in \mathcal{P}] > \gamma = m(V)$.

Jelölje Y azon v elemek halmazát, melyekre $m(v) > p(\{v\}, \{v\})$ és a $(\{v\}, \{v\})$ párhalmaz $\mathcal{F}$-ben van. Jelölje $\mathcal{F}_1$ az ilyen alakú párhalmazok halmazát, míg $\mathcal{F}_2$ az $\mathcal{F}$ maradékát. Ekkor $m(V) < p'(\mathcal{F}) = p'(\mathcal{F}_1) + p'(\mathcal{F}_2) = m(Y) + p(\mathcal{F}_2)$.

Legyen $Z := V - Y$. Az $\mathcal{F}$ függetlensége miatt $\mathcal{F}_2$ semelyik tagjának belső halmaza sem tartalmazhat Y-beli elemet, azaz $\mathcal{F}_2$ tagjainak belső halmazai mind Z-ben vannak és így $p^*(Z) \geq p(\mathcal{F}_2)$. Ezekből $m(Z) = m(V) - m(Y) < p(\mathcal{F}_2) \leq p^*(Z)$, ellentmondásban az (5.22) feltétellel. •

TÉTEL 5.3.3 *A p^* halmazfüggvény teljesen szupermoduláris.*

Biz. Legyen $A, B \subseteq V$ és legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ olyan független párhalmaz rendszerek, melyekre $p^*(A) = p(\mathcal{A}) := \sum[p(X) : X \in \mathcal{A}]$ és $p^*(B) = p(\mathcal{B})$, továbbá az $\mathcal{A}$-ban lévő párhalmazok belső halmazai A-ban vannak, az $\mathcal{B}$-ben lévőké B-ben.

Alkalmazzuk a kikeresztezési eljárást az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ tagjaiból álló párhalmaz rendszerre és jelölje $\mathcal{P}$ a végül kapott keresztezés-mentes rendszert. Mivel $\mathcal{A}$ is és $\mathcal{B}$ is független, ezért semmilyen irányított él nem fedi az uniójuknak kettőnél több tagját. Érvényes továbbá, hogy a belső halmazok $(*)$ $(A - B) \cup (B - A)$ elemeit legfeljebb egyszer tartalmazzák, míg $(**)$ $A \cap B$ elemeit legfeljebb kétszer. A kikeresztezésnél ezek a tulajdonságok megőrződnek és így $\mathcal{P}$-ben nincs kettőnél hosszabb lánc. Jelölje $\mathcal{P}_1$ a $\mathcal{P}$ maximális tagjainak halmazát, míg $\mathcal{P}_2$ a maradékot (úgy értve, hogy ha egy párhalmaznak két példánya szerepel $\mathcal{P}$-ben, akkor az egyiket $\mathcal{P}_1$-be tesszük, a másikat $\mathcal{P}_2$-be). Ezek antiláncot alkotnak, amelyek a keresztezés-mentesség folytán függetlenek.

Legyen $X = (X_K, X_B)$ a $\mathcal{P}_2$ egy tagja. Állítjuk, hogy $X_B \subseteq A \cap B$. Valóban, $\mathcal{P}_2$ definíciója miatt létezik $\mathcal{P}_1$-nek egy olyan $Y = (Y_K, Y_B)$ tagja, amelyre $X \leq Y$, azaz $X_K \subseteq Y_K$ és $X_B \subseteq Y_B$. De ekkor $(**)$ miatt valóban $X_B \subseteq A \cap B$, azaz $\mathcal{P}_2$ minden tagjának a belső halmaza $A \cap B$-ben van, és így $p(\mathcal{P}_2) \geq p^*(A \cap B)$. A $(*)$ tulajdonság miatt $\mathcal{P}_1$ minden tagjának a belső halmaza $A \cup B$-ben van, és így $p(\mathcal{P}_1) \geq p^*(A \cup B)$. Ezekből $p^*(A) + p^*(B) = p(\mathcal{A}) + p(\mathcal{B}) \leq p(\mathcal{P}) = p(\mathcal{P}_1) + p(\mathcal{P}_2) \leq p^*(A \cap B) + p^*(A \cup B)$. •

Az 5.3.2 és 5.3.3 tételek összevetéséből kapjuk a következőt.

TÉTEL 5.3.4 *Legyen p pozitívan keresztező szupermoduláris párhalmaz függvény. Ekkor a p-t fedő digráfok befok-vektorai egy kontra-polimatroid, nevezetesen $C(p^*)$ egész pontjai.*

Tartalom