$\mathcal{A}$-utak pontkapacitásos pakolása

Pap Gyula

MTA-ELTE Egerváry Jenő Kutatócsoport
`www.cs.elte.hu/egres`

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Budapest

Magyar Operációkutatási Konferencia, Balatonőszöd, 2007. június 7.

$\mathcal{A}$-utak

- Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf.

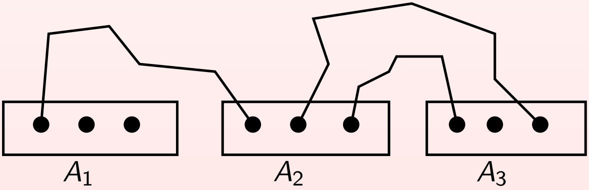
$\mathcal{A}$-utak

- Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf.
- Legyen $\mathcal{A} = \{A_1, \cdots, A_k\}$ diszjunkt ponthalmazok egy rendszere, melyeket terminális halmazoknak nevezünk.

$\mathcal{A}$-utak

- Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf.
- Legyen $\mathcal{A} = \{A_1, \cdots, A_k\}$ diszjunkt ponthalmazok egy rendszere, melyeket terminális halmazoknak nevezünk.
- Legyen $A := \bigcup \mathcal{A}$, a terminális pontok halmaza.

A gráf egy útját $\mathcal{A}$-útnak nevezzük, ha végpontjai két különböző terminális halmazban találhatók.



$\mathcal{A}$-utak pontdiszjunkt pakolása

Feladat:

- keressünk maximális számú teljesen pontdiszjunkt $\mathcal{A}$-utat
- jelölés: $\nu(G, \mathcal{A})$

Speciális esetek:

- pontdiszjunkt s–t utak
- maximális párosítás

$\mathcal{A}$-utak pontdiszjunkt pakolása

Jelentősebb eredmények:

- Gallai, 1961, pontdiszjunkt $\mathcal{A}$-utak az $\mathcal{A} = \{\{a\} : a \in A\}$ esetben min-max formula
- Lovász, Cserkaszkij, 1976, min-max formula éldiszjunkt A-utakra az Euler-feltétel teljesülése esetén
- Mader, 1978, éldiszjunkt A-utak, min-max formula
- Mader, 1979, pontdiszjunkt A-utak, min-max formula
- Sebő, Szegő, 2004, struktúratétel
- polinomiális algoritmusok: Lovász (1980) + Schrijver (200?), illetve Chudnovsky, Cunningham, Geelen (2005), és P (2005)

$\mathcal{A}$-utak pontdiszjunkt pakolása

Mader Tétele, 1979

$$\nu(G,\mathcal{A}) = \min |X_0| + \sum_{K \in comp(G - X_0 - \cup E[X_i])} \left\lfloor \frac{1}{2} |K \cap \ \cup X_i| \right\rfloor$$

ahol a minimumban $X_0, X_1, \cdots, X_k$ a V egy részpartíciója, és $A_i \subseteq X_0 \cup X_i$ minden i-re.

$\mathcal{A}$-utak él-/pont-kapacitásos pakolása

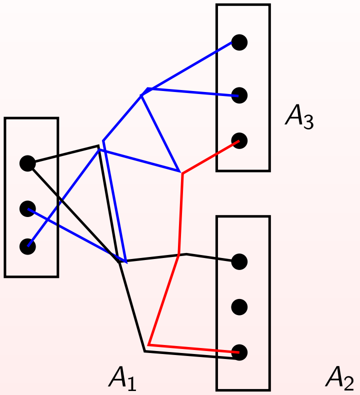
Adott egy $b \in \mathbb{N}^V$ (vagy $\mathbb{N}^E$) kapacitás-vektor.
Az $\mathcal{A}$-utak b-pakolása a következő egészértékű programozási feladat, melynek optimumát $\nu_b(G, \mathcal{A})$-val jelöljük:

$$\max x \cdot \mathbf{1}$$

$$x : \mathcal{A}\text{-utak} \to \mathbb{N}$$

$$\sum_{v \in P} x(P) \leq 1 \qquad \text{minden } v \in V \text{ (vagy } E\text{)}$$

Rajz csúnya pakolásról



Mader Tétele pontkapacitásokra

$$\nu(G,\mathcal{A}) = \min b(X_0) + \sum_{K \in comp'(G-X_0-\cup E[X_i])} \left\lfloor \frac{1}{2} b(K \cap \ \cup X_i) \right\rfloor$$

ahol a minimumban $X_0, X_1, \cdots, X_k$ a V egy részpartíciója, és $A_i \subseteq X_0 \cup X_i$ minden i-re.

Speciális esetek:

- maximális folyam
- maximális b-párosítás

Megoldás:

Megoldás:

- visszavezethető diszjunkt utak pakolására egy "felfújt" gráfban
- min-max formula

Megoldás:

- visszavezethető diszjunkt utak pakolására egy "felfújt" gráfban
- min-max formula
- egy algoritmus, melynek futásideje polinomiális $b(V)$-ben

Megoldás:

- visszavezethető diszjunkt utak pakolására egy "felfújt" gráfban
- min-max formula
- egy algoritmus, melynek futásideje polinomiális $b(V)$-ben
- van-e polinomiális algoritmus? ($\log b(V) - ben$)

Megoldás:

- visszavezethető diszjunkt utak pakolására egy "felfújt" gráfban
- min-max formula
- egy algoritmus, melynek futásideje polinomiális $b(V)$-ben
- van-e polinomiális algoritmus? ($\log b(V) - ben$)
- az éldiszjunkt esetben van (Keijsper, Pendavingh, Stougie, 2006)

Megoldás:

- visszavezethető diszjunkt utak pakolására egy "felfújt" gráfban
- min-max formula
- egy algoritmus, melynek futásideje polinomiális $b(V)$-ben
- van-e polinomiális algoritmus? ($\log b(V) - ben$)
- az éldiszjunkt esetben van (Keijsper, Pendavingh, Stougie, 2006)
- és a pontdiszjunkt esetben?

Megoldás:

- visszavezethető diszjunkt utak pakolására egy "felfújt" gráfban
- min-max formula
- egy algoritmus, melynek futásideje polinomiális $b(V)$-ben
- van-e polinomiális algoritmus? ($\log b(V) - ben$)
- az éldiszjunkt esetben van (Keijsper, Pendavingh, Stougie, 2006)
- és a pontdiszjunkt esetben?
- maximális tört-pakolás megoldható ellipszoid módszerrel

Megoldás:

- visszavezethető diszjunkt utak pakolására egy "felfújt" gráfban
- min-max formula
- egy algoritmus, melynek futásideje polinomiális $b(V)$-ben
- van-e polinomiális algoritmus? ($\log b(V) - ben$)
- az éldiszjunkt esetben van (Keijsper, Pendavingh, Stougie, 2006)
- és a pontdiszjunkt esetben?
- maximális tört-pakolás megoldható ellipszoid módszerrel
- és hogyan csinálunk egy maximális tört-pakolásból egy maximális egész-pakolást?

Maximális egész folyam Gerards ötlete segítségével

- adott $G = (V, E)$, $s, t \in V$, $b \in \mathbb{N}^E$

Maximális egész folyam Gerards ötlete segítségével

- adott $G = (V, E)$, $s, t \in V$, $b \in \mathbb{N}^E$
- valahonnan kerítünk egy maximális (tört) $x \in \mathbb{R}_+^E$ folyamot (például ellipszoiddal)

Maximális egész folyam Gerards ötlete segítségével

- adott $G = (V, E)$, $s, t \in V$, $b \in \mathbb{N}^E$
- valahonnan kerítünk egy maximális (tört) $x \in \mathbb{R}_+^E$ folyamot (például ellipszoiddal)
- legyen $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_m$ egy út-folyam felbontás

Maximális egész folyam Gerards ötlete segítségével

- adott $G = (V, E)$, $s, t \in V$, $b \in \mathbb{N}^E$
- valahonnan kerítünk egy maximális (tört) $x \in \mathbb{R}_+^E$ folyamot (például ellipszoiddal)
- legyen $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_m$ egy út-folyam felbontás
- legyen $y := \lfloor x_1 \rfloor + \lfloor x_2 \rfloor + \cdots + \lfloor x_m \rfloor$

- adott $G = (V, E)$, $s, t \in V$, $b \in \mathbb{N}^E$
- valahonnan kerítünk egy maximális (tört) $x \in \mathbb{R}_+^E$ folyamot (például ellipszoiddal)
- legyen $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_m$ egy út-folyam felbontás
- legyen $y := \lfloor x_1 \rfloor + \lfloor x_2 \rfloor + \cdots + \lfloor x_m \rfloor$
- ekkor y egy közel-maximális egész folyam

Maximális egész folyam Gerards ötlete segítségével

- adott $G = (V, E)$, $s, t \in V$, $b \in \mathbb{N}^E$
- valahonnan kerítünk egy maximális (tört) $x \in \mathbb{R}_+^E$ folyamot (például ellipszoiddal)
- legyen $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_m$ egy út-folyam felbontás
- legyen $y := \lfloor x_1 \rfloor + \lfloor x_2 \rfloor + \cdots + \lfloor x_m \rfloor$
- ekkor y egy közel-maximális egész folyam
- már csak növelgetnünk kell y-t, egyesével

Maximális egész folyam Gerards ötlete segítségével

Állítás

Legyen x egy egész folyam G, b-ben. Ekkor ekvivalensek:

- Van x-nél nagyobb egész x' folyam.
- Van x-nél nagyobb egész x' folyam, melyre $x - \mathbf{1} \leq x' \leq x + \mathbf{1}$.

Maximális b-pakolás folyam Gerards ötlete segítségével

Állítás

Legyen $(x_{i,j})$ egy $\mathcal{A}$-út b-pakolás folyam-dekompozíciója. Ekkor ekvivalensek:

- Van $(x_{i,j})$-nél nagyobb $(x'_{i,j})$ b-pakolás.
- Van $(x_{i,j})$-nél nagyobb $(x'_{i,j})$ b-pakolás, melyre $x - N \leq x' \leq x + N$, ahol $N := 2|V|^4 + 2$.

Állítás

Legyen $(x_{i,j})$ egy $\mathcal{A}$-út b-pakolás folyam-dekompozíciója. Ekkor ekvivalensek:

- Van $(x_{i,j})$-nél nagyobb $(x'_{i,j})$ b-pakolás.
- Van $(x_{i,j})$-nél nagyobb $(x'_{i,j})$ b-pakolás, melyre $x - N \leq x' \leq x + N$, ahol $N := 2|V|^4 + 2$.

Tétel, P, 2006

Adott $G, \mathcal{A}, b$ esetén polinomiális időben megtalálunk $\mathcal{A}$-utaknak egy maximális b-pakolását.