Államvizsga kérdések a matematikus szakon, 2001.

12. tétel*: Halmazelmélet (Naiv és axiomatikus felépítés, számosságok, rendszámok, kofinalitás. Kiválasztási axióma és vele ekvivalens tételek.)

Matematikai logika (Elsőrendű nyelvek, teljességi és nemteljességi tételek, modellelmélet, rekurzióelmélet.)

A halmazelmélet axiómái

Ami a tételben említett naiv felépítést illeti, arról annyit tudok mondani, hogy az az, amikor nemcsak más halmazokból, hanem csirkékből is lehet halmazt csinálni, és olyan ügyetlenek vagyunk, hogy nem tudjuk elkerülni a Russel-paradoxont.

Ahogy tanultuk a halmazelméletet, az érvelés gyakran intuitív volt, azonban mindig világos volt, mik azok az axiomatikus alapok, amik feljogosítanak minket úgy cselekedni, amiképp cselekedtünk.

A *halmazelmélet nyelve* az elsőrendű logika szokásos jelkészletéből (változók, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, kvantorok, egyenlőség), plusz még a kétváltozós „$\in$", ejtsd: „eleme" relációjelből építkezik. ***Axiómái*** megfogalmazhatók ezen a nyelven, mi mindenesetre maradunk a többé-kevésbé köznyelvi szóhasználatnál. A halmazelméletnek több axiómarendszere létezik; nem tudjuk róluk, hogy konzisztensek-e e egyáltalán, mindenesetre ezen axiómarendszerek általában ekvikonzisztensek (egyik (in)konzisztenciájából következik a másik (in)konzisztenciája). A legelfogadottabb a **ZFC *axiómarendszer*** (**Z**ermelo-**F**raenkel-féle axiómák plusz kiválasztási axióma (Axiom of **C**hoice, AC)). Mi ezt ismertetjük, először csak a sima ZF-et. Tehát, a ZF-axiómák:

Meghatározottsági axióma. *Két halmaz pontosan akkor egyenlő, ha ugyanazok az elemeik.* Ez az axióma lerögzíti az egyenlőség helyét a halmazelméleten belül.

A további axiómák (az utolsó kivételével) halmazképző axiómák: adva néhány halmazt, egy újabbat gyártanak belőlük. A meghatározottsági axióma miatt az eredmény egyértelmű lesz, így a halmazképző axiómák tkp. műveleteket definiálnak a halmazokon.

Páraxióma. Ez az axióma a *párképzés* műveletét ($\{\cdot,\cdot\}$) értelmezi: *Tetszőleges X, Y halmazokhoz van egy olyan, $\{X, Y\}$-nal jelölt halmaz, hogy pontosan két eleme van: X és Y.* Az $\{X, X\}$ halmazt röviden $\{X\}$-nek írjuk.

Hatványhalmaz-axióma. Ez az axióma a *hatványhalmaz-képzés* műveletét ($\mathcal{P}$) értelmezi. Ehhez bevezetjük a részhalmaz fogalmát: Y pontosan akkor részhalmaza X-nek, jelölésben $Y \subseteq X$, ha $\forall z\,(z \in X \Rightarrow z \in Y)$. Az axióma: *Tetszőleges X halmazhoz van egy olyan, $\mathcal{P}(X)$-szel jelölt halmaz, aminek pontosan X részhalmazai az elemei.*

Únió axióma. A soktagú úniót ($\bigcup_{i\in I} X_i$) úgy képzeli el a halmazelmélet, hogy először összegyűjtjük az X_i-ket egy $\{X_i : i \in I\}$ halmazba, aztán erre az egyetlen halmazra alkalmazzuk az *únió-operátort* ($\bigcup$), ami legyártja az $\bigcup_{i\in I} X_i$ halmazt. Tehát: *Tetszőleges X halmazhoz van egy olyan, $\bigcup X$-szel jelölt halmaz, aminek pontosan akkor eleme egy halmaz, ha eleme X valamely elemének.*

Helyettesítési axiómaséma. A halmazelméletnek az a képzet adja erejét, hogy össze lehet gyűjteni egy halmazba az adott Φ tulajdonságú elemeket. Bár e képzetet finomítani kellett, mert az elébb kimondott megfogalmazása ellentmondásos, amint azt a $\Phi(x) \iff x \neq x$ választás mutatja (*Russel-paradoxon*). Úgy gondolták, az a baj, hogy az efféle formulával megnevezett összesség „túl nagy" ahhoz, hogy beleférjen egy halmazba – *valódi osztálynak* hívták az efféle nagyon nagy kollekciókat –, tehát eltűnik az ellentmondás, ha valahogy elérjük, hogy az eredmény csak halmaznyi lehessék. Ezért lekorlátozták $\Phi(x)$-et: megkövetelték, hogy $\Phi'(x) \wedge x \in Y$ alakú legyen, ahol Y (a „korlát") bármilyen halmaz lehet. Így jutottak a *részhalmaz-axiómához*, amit formalizálva igazából *axiómasémát* kapunk, azaz végtelen sok axiómát, paraméter segítségével egy darab jelsorozatba sűrítve. Ez a paraméter pedig a „tulajdonság". Mert mit értsünk ez alatt? Praktice egy elsőrendű formulát. De olyat nem mondhatunk elsőrendű nyelven, hogy „x egy elsőrendű formula"... Ezért úgy járunk el, hogy minden egyes elsőrendű formulához veszünk egy axiómát. Az már technikai dolog, hogy ez a részhalmaz-axiómaséma erősítésre szorult; így jutottak el a most bevezetendő sémához.

Legyen $\Phi(u, v, \vec{x})$ egy formula (az $\vec{x}$ néhány x_i változó együttesét rövidíti). Ebből először is megkonstruáljuk az $\vec{x}$-től függő, „$\vec{x}$ adott választása mellett Φ függvényszerű" formulát:

---

*Kidolgozó: Henk Csaba (`ekho@renyi.hu`, `www.renyi.hu/~ekho`)

$\forall u, v, v' ((\Phi(u, v, \vec{x}) \wedge \Phi(u, v', \vec{x})) \Rightarrow v = v')$. Akkor tehát az axiómaséma Φ-vel képzett példánya: *Ha $\vec{x}$ adott választása mellett Φ függvényszerű, akkor tetszőleges Y halmazhoz van egy olyan, $\{v : \exists u \in Y \ \Phi(u, v, \vec{x})\}$-vel jelölt halmaz, amely pont azt tudja, amit az iménti jelölés sugall.* Magyarán ha F egy formulával definiált operáció, akkor az adott Y halmaz elemeinek F-értékei halmazt alkotnak.

Ebből a $\{u : u \in Y \wedge \Psi(u)\}$ típusú halmazképzések – amiket az említett részhalmaz-séma propagál – úgy kapnak létjogosultságot, hogy $\Phi(u, v)$-nek $\Psi(u) \wedge u = v$-t választjuk. Speciel $\{u : u \in Y \wedge u \neq u\}$-ként kapunk egy halmazt, aminek nincs eleme: a $\varnothing$-val jelölt *üres halmazt.* (Némely tárgyalás külön üreshalmaz-axiómával hangsúlyozza, hogy van ilyen).

Ha kiindulunk az üres halmazból, és eddigi halmazképzéseink iterált alkalmazásával elkezdjük legenerálni a halmazokat, azt találjuk, hogy sose kapunk olyat, aminek végtelen sok eleme van. A halmazképződés folyamatát ezért a következő axiómával katalizáljuk:

A végtelen halmaz axiómája. Ez azt mondaná ki, hogy „van végtelen halmaz". Ehhez persze ki kell találni, hogy az elmélet keretein belül hogy fogjuk meg a végtelenséget. Egyik lehetséges út „a halmaznak van injekciója egy valódi részébe"–képzet formalizálása. Az általánosan bevett eljárás a következő: vegyünk egy olyan halmazképzési eljárást, amiről az eddigiekből tudjuk, hogy iterálva mindig új halmazokat ad, iteráljuk $\varnothing$-ból kiindulva, és jelentsük ki, hogy van halmaz, ami az összes így előálló halmazkát tartalmazza. Tradicionálisan a következő halmazképzési eljárás használatos: legyen X^+ (az X halmaz *rákövetkezője*) $X \cup \{X\}$ (vagy szigorúan eddigi jelöléseinkkel élve, $\bigcup\{X, \{X\}\}$). Ekkor tehát az axióma: *Van olyan halmaz, aminek eleme $\varnothing$, és ha eleme X, akkor eleme X^+ is.* Ez nem ad egyértelmű eredményt, de az eredmény egyértelműsíthető, ha hozzátesszük: „... és e halmazra teljesül, hogy része minden más, a fenti tulajdonsággal bíró halmaznak". Az így előálló halmazt ω-val jelöljük.

Ezek a legalapvetőbb axiómák. A következő axiómát néha el szokták hagyni (egyes vizsgálódásoknál direkt tagadják), nélküle is működik a halmazelmélet, szerepeltetése esztétikai és technikai okokból történik.

Regularitási axióma. Két halmazt *diszjunktnak* nevezünk, ha nincs közös elemük. a regularitási axióma azt mondja ki, hogy *minden nemüres halmaznak van tőle diszjunkt eleme.* Hogy mi ennek az axiómának az értelme és jelentősége, arra később majd visszatérünk.

Ezek voltak eddig a ZF axiómák. Most jöjjön a

Kiválasztási axióma. Ehhez először is pár fogalom: az x-ből és y-ból képzett rendezett pár, (x, y) az elképzelés szerint valami olyan objektum, ami egyértelműen meghatározza x és y mibenlétét, azaz, ha $x = x'$, $y = y'$, akkor $(x, y) = (x', y')$. Ezt a következőképp ültetjük át a gyakorlatba: legyen $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Egy *reláció* pedig nem más, mint rendezett párok valamely halmaza. Az adott R reláció *értelmezési tartománya*, $\mathsf{Dom}\, R = \{u : \exists v \ (u, v) \in R\}$ (bár ez nem helyettesítési axiómás halmazképzés, a többi axióma segítségével át lehet olyanná alakítani, így ez jogos definíció). Egy f reláció *függvény*, ha X-nek őt választva az „$(u, v) \in X$" formula függvényszerű, tehát ha minden u-hoz legfeljebb egy v van, hogy $(u, v) \in f$; ekkor azt az egyetlen v-t $f(u)$-val jelöljük. Most már jöhet a kiválasztási axióma, melynek elég *egyszerű formáját* adjuk meg: *tetszőleges R relációhoz van olyan $f \subseteq R$ függvény, hogy* $\mathsf{Dom}\, f = \mathsf{Dom}\, R$. Miért jó ez? Ha $u \in \mathsf{Dom}\, R$, tudjuk, hogy van olyan v, melyre $(u, v) \in R$, tehát vehetünk egy ilyen v_u-t; hasonlóképp egy másik $u' \in \mathsf{Dom}\, R$-hez egy $v_{u'}$-t. Az ember azt gondolná, hogy akkor szépen sorjában minden $x \in \mathsf{Dom}\, R$-hez *választunk* egy ilyen v_x-et, és így megkapjuk végül R-nek valamiféle globális egyértelműsítését. Ezt elég természetes konstrukciónak érezzük, de sajnos az eddigi axiómákból nem következik, hogy lehetséges volna efféle szimultán választás. Bár ez az axióma is valaminek a létezését garantálja, még sem nevezhető konstrukív, halmazképző axiómának abban az értelemben, ahogy a ZF axiómák azok: azok valamely konkrét logikai feltételnek eleget tevő elemek egy halmazba gyűjthetőségét garantálták, a „létezik" kitétel erre a gyűjtőhalmazra vonatkozott, míg a kiválasztási axióma csak valami ilyen-olyan, bizonyos tulajdonságokkal bíró, de közelebbről meg nem határozott identitású halmaz létét garantálja. A (korabeli) matematikustársadalom idegennek érezte ezt az axiómát a halmazelmélet ideájától, és nehezen barátkozott meg vele, de végül csak lenyelte, mert lépten-nyomon élt vele. Arra nézvést, hogy mikor nevezzünk egy egzisztenciális (valami létét állító) állítás bizonyítását konstuktívnak, jó kis formális kritérium, hogy ne használjon kiválasztási axiómát. Habár a kiválasztási axióma mára teljesen bevett és legitim részévé vált a matematikus fegyvertárának, még ma is él az emberben, hogy ha konstruktív bizonyítást talál egy egzisztenciális állításra, akkor az a bizonyos dolog, aminek létezését belátta, „erősebben létezik", „hihetőbb", nem „visszaélés a fogalmakkal", hogy van ilyen. (Van a konstruktivitásnak egy másik megközelítése is, mely a „van ilyen, mert ellentmosndásra jutnánk, ha nem lenne” típusú érveléseket tekinti nem-konstruktívnak.)

Vegyünk egy R relációt, értelmezési tartománya legyen I. Ekkor épp annyi információt hordoz, mint R, az az I-n értelmezett függvény, mely $i \in I$-hez az $A_i = \{x : (i, x) \in R\}$ halmazt rendeli. Az ilyen „halmazértékű függvényeket” intuitív szóhasználattal szokás halmazcsaládnak v. halmazrendszernek is hívni – persze a halmazelmélet függvényfogalma szerint minden függvény halmazértékű, de hétköznapi szemléletünk ezzel ellentétes, idegenkedik attól, hogy afféle elemi objektumokat, mint pl. a számok, halmaznak tekintsen.

Az olyan függvényeket, amikről a kiválasztási axióma beszél, halmazcsaládos jelöléssel tehát a $\mathsf{Dom}\, f = I,\ f(i) \in A_i$ típusúakat nevezzük az $\{A_i : i \in I\}$ függvénycsalád *kiválasztási függvényeinek*. Ezek halmazát $\prod_{i \in I} A_i$-vel jelöljük. *Legismertebb formájában* úgy hangzik a kiválasztási axióma, hogy $\prod_{i \in I} A_i \neq \varnothing$ (feltéve, semelyik A_i sem üres).

Megjegyezzük, hogy csak a végtelen kiválasztások kérdésesek: ha véges sok kivétellel A_i egyelemű, speciel ha I véges, akkor a kiválasztási függvény léte már a többi axiómából is következik. És igaz az, hogy a kivaálasztási axióma független ZF-től, azaz ZFC és ZF + „kiválasztási axióma tagadása” ekvikonzisztens.

Rendszámok és számosságok, a kiválasztási axióma, jólfundáltság.

Eddig, az axiómák felsorolása alatt, minden fogalmat, jelölést következetesen visszavezettünk az $\in$ szimbólumra. A továbbiakban szakítunk ezzel a gyakorlattal, és feltételezzük, hogy az olvasó tisztában van a matematika alapvető fogalmaival, jelöléseivel, ill. ezek halmazelméleti interpretációjával.

A halmazelmélet egyik motiváló felfedezése volt, hogy a végtelenek között is van nagyobb és kisebb. Ezt a viszonyt a következőképp interpretálja: az A halmaz ***kisebb-egyenlő számosságú*** B-nél (jelölés: $A \preccurlyeq B$), ha létezik $A \longrightarrow B$ injektív függvény; továbbá A ***ugyanakkora számosságú, mint*** B (jelölés: $A \approx B$), ha létezik bijekció A és B között. A szóhasználat kissé csalóka, mert e definíciók nem valamiféle számosság-hozzárendelésre utalnak vissza – ilyet kiválasztási axióma nélkül csinálni nem is lehet. Egy szempotból viszont helyes a sugallt intuíció:

Tétel (Schröder-Bernstein-Cantor). ZF-ből következik, hogy $A \approx B \iff A \preccurlyeq B \preccurlyeq A$. ■

Hangsúlyozzuk, hogy ez a tétel nem támaszkodik a kiválasztási axiómára. A kiválasztási axióma nélkül a szintén természetesnek tűnő *trichotómia* ($A \preccurlyeq B \vee B \preccurlyeq A \vee A \approx B$) sem garantált.

Mindazonáltal szeretnénk, ha lenne számosságoperáció, azaz ki tudnánk jelölni $\approx$ minden egyes ekvivalencia-osztályában ($\{X : X \approx A\}$ alakú osztályok, ahol A halmaz) egy elemet, amit aztán az azon osztály-beliek számosságának neveznénk. Ennek kiválasztás-szaga van, de hogy a kiválasztási axióma közvetlen alkalmazásával hajtsuk végre tervünket, arról szó sem lehet, egyfelől mert $\approx$ osztályai valódi osztályok és osztálynyi sok van belőlük (azaz minden A halmazhoz van olyan B halmaz, amely A egyetlen elemével sem egyenlő számosságú), másfelől meg mert egy ilyen operációtól elvárjuk, hogy formulával definiált legyen, azaz egy konkrét elsőrendű tulajdonság határozná meg az adott halmaz operáció által képét, tehát ne csak valami absztrakt létező legyen, amit valami axióma garantál.

E helyütt idézzünk el kissé a misztikus „osztály”, „operáció” fogalmakon! Korábbi intuitív közlésünk szerint egy osztály „valamiféle Φ tulajdonságot kielégítő elemek gyűjteménye”, $\{u : \Phi(u, \vec{A})\}$ alakú entitás (ahol $\vec{A} = (A_1, \dots A_n)$ néhány adott halmaz), ami valódi, ha nincs olyan halmaz, aminek pont ezen elemek volnának elemei. Ebből a szövegből a „gyűjtemény” arra szolgál, hogy ne tétessék különbség az ekvivalens megfogalmazások között (pl. az $x \neq x$ tulajdonságot kielégítő dolgok gyűjteménye ugyanaz, mint az $x \in x \wedge x \notin x$ tulajdonságot kielégítőké – ti. $\varnothing$), a „tulajdonság” pedig, mint a korábbiakból sejthető, nem más, mint egy valamely $\Phi(u, \vec{x})$ elsőrendű formulából oly módon kapott dolog, hogy az x_i változók helyébe A_i halmazokat teszünk (paraméteres elsőrendű formula). (így minden halmaz osztály is egyben: A az „$x \in A$”-t kielégítő halmazok kolekciója.)

Tehát az, hogy „*konkrét* (paraméterek nélkül definiált) osztály”, „paraméterek nélküli tulajdonság”, és „egy változójától függő elsőrendű formula”, lényegében ugyanaz, ilyetén a konkrét osztályok mibenléte jól meghatározott, egy konkrét osztály egyszerűen néhány szintaktikai objektum, néhány jelsorozat ekvivalenciaosztálya (ettől még megtartjuk az intuitív, őket valamiféle összességként kezelő szóhasználatot).

Hasonlóképp tekinthetjük az $x_1, \dots, x_n$ változótól függő paraméteres elsőrendű formulákat (pontosabban ekvivalencia-osztályaikat) n változós osztály-relációknak. így pl. $\in$, $\approx$ (pontosabban szólva

„$x \in Y$”, „$X \approx Y$”) kétváltozós osztály-relációk. A halmazelmélet belső fogalmai ezekre is átvihetők, hasonlóképp ahhoz, mint ahogy a függvényszerűségnél tettük (csak ott kijelölt paraméterváltozókat meghagytuk tisztán szintaktikai objektumoknak, nem helyettesítettünk be halmazokat). Tehát pl. egy f reláció függvény, ha teljesül rá, hogy $(u, v), (u, v') \in f \Rightarrow v = v'$, ennek mintájára egy $\Phi(u, v)$ osztály-reláció osztály-függvény, ha *(az éppen használt) axiómarendszernek következménye*, hogy $\Phi(u, v) \wedge \Phi(u, v') \Rightarrow v = v'$. Hasonlóképp értelmezhető az a kijelentés is, hogy $\approx$ (osztálynyi) ekvivalencia-reláció, és anélkül, hogy mint fent, külön definiálnánk, értelmes olyat mondani, hogy „$\approx$ ekvivalencia-osztályai”.

Az eddig intuitív *operáció* szót ezentúl az „osztály-függvény” szinonímájaként fogjuk használni.

Amikor pl. számosságoperációt akarunk definiálni, akkor vele szemben támasztott igényünk az, hogy legyen a minden halmazok osztályán értelmezett, konkrét operáció.

Mivel a konkrét operációk jól meghatározott, a halmazelmélet világán kívül eső körből kerülnek ki, láthatjuk, annak nincs teteje, hogy kiválasztás eredményeképp kapnánk meg valamiféle mindenhol értelmezett konkrét operációt. Arról beszélni viszont van értelme, hogy a kiválasztási axióma tesz egy $\Phi(u, v)$ formulát mindenhol értelmezett operációvá, tehát hogy ZF-ből még nem következik Φ mindenhol értelmezett operáció volta, ZFC-ből már igen.

Ebben az értelemben fogjuk felhasználni a kiválasztási axiómát a számosságoperáció definiálásához, amint azt az alábbiakban vázoljuk.

Emlékeztetünk rá, hogy (az egyenlőséget kizáró megfogalmazás szerint) egy $< \subseteq A \times A$ reláció *rendezés* A*-n*, ha irreflexív, tranzitív, és trichotóm (most ezalatt azt értve, hogy $\forall a, b \in A$ $(a < b \vee b < a \vee a = b)$) (és részbenrendezés, ha csak irreflexív, tranzitív). Értelemszerűen használhatjuk a $\leqslant$ jelet. Egy rendezett halmaz egy $(A, <)$ pár, ahol $<$ A-nak rendezése. Ezek izomorfiája is értelemszerűen értendő.

Egy R reláció ***jólfundált***, ha tetszőleges $X \neq \varnothing$ halmaznak van R-minimális eleme (olyan $x \in X$, hogy semely $y \in X$-re sem $(y, x) \in R$)(persze elég csak az $X \subseteq A$ halmazokat nézni, valamely oly A-ra, hogy $R \subseteq A \times A$). Egy $R \subseteq A \times A$ reláció ***jólrendezés A-n***, ha rendezés A-n és jólfundált.

Egy A halmaz ***tranzitív***, ha zárt az $\in$ relációra, azaz ha $x \in y \in A \Rightarrow x \in A$. Egy halmaz ***rendszám*** (angolul: „ordinal number”), ha tranzitív, és az $\in$ reláció megszorítva rá (tehát az $\{(x, y) : x, y \in A,\ x \in y\}$ reláció) jólrendezi A-t. Ez valahogy azt jelenti, hogy természetes módon, a maga halmaz-struktúrájából fakadóan van rajta jólrendezés. Hogy a rendszámok jól megfogják a jólrendezés fogalmát, ezt a következő tétel mutatja:

Tétel. Minden jólrendezett halmaz pontosan egy rendszámmal izomorf (azt az $\in$-rendezéssel tekintve). ∎

— Ezt a jól meghatározott rendszámot hívjuk az adott jólrendezés ***típusának***.

A rendszámok valódi osztályt alkotnak (Rsz). Rsz tranzitív osztály (azaz rendszámnak minden eleme rendszám), és $\in$ osztály-jólrendezése Rsz-nek (azaz $\in$ rendezi a rendszámokat, és rendszámok tetszőleges nemüres halmazának van $\in$-minimális eleme; ekkor persze rendszámok minden nemüres osztályának is, mert egy ilyen osztályt megszorítva egy elemére annak az elemnek nemüres részhalmazát kapjuk, hacsak nem maga az az elem a minimális). Tehát rendszámok viszonylatában $\in$ és $\subset$ egyenértékűek; erre a relációra általában sima $<$-bel („kisebb”) utalunk; és minden rendszám egyenlő a nála kisebb rendszámok halmazával.

A fentiekből az is következik, hogy nincs legnagyobb rendszám; így minden $\alpha \in$ Rsz-hez van legkisebb nála nagyobb rendszám, α ún. *rákövetkezője*. Ezt teljesen explicite is megmondhatjuk micsoda: α^+ $(\alpha \cup \{\alpha\})$. Továbbá rendszámok tetszőleges halmazának úniója is rendszám.

A rendszámok adják a természetes számok halmazelméleti interpretációját: legyen $0 = \varnothing$, és $n + 1 = n^+$. Ezek halmaza (pontosabban a legkisebb ezeket tartalmazó halmaz) a már említett ω.

Egy rendszám háromféle lehet:

- lehet ő a nulla;
- lehet egy másik egy másik rendszám rákövetkezője, ekkor ő ún. ***rákövetkező rendszám***;
- a fenti kettő egyike se, az ilyeneket ***limesz rendszámnak*** titluláljuk.

A nem-rákövetkező rendszámok (azaz 0 és a limeszrendszámok) sajátossága (a rákövetkezőkkel szemben), hogy ők előállnak a náluk kisebb rendszámok úniójaként. Tehát mondhatjuk, hogy Rsz a legszűkebb osztály, mely tartalmazza 0-t, és zárt a rákövetkezésre meg az (akárhány tagú) únióra.

$A \approx B$-t egyszerűen „A ekvivalens B"-nek mondjuk. Ha minden halmazzal lenne ekvivalens rendszám, definiálhatnánk úgy a számosságoperációt, hogy egy A halmaz számossága legyen a legkisebb vele ekvivalens rendszám. Mindenesetre ez a számosság-hozzárendelés működik Rsz-en. Ennek értékei a számosságok. Tehát egy ***rendszám számosság*** („cardinal number"), ***ha egyik nála kisebb rendszámba sem injektálható be***. így a természetes számok (véges rendszámok) számosságok; az összes többi számosság limeszrendszám. Végül is kiderül, hogy a kiválasztási axióma életet lehel ebbe a számosság-koncepcióba:

Jólrendezési tétel. ZFC-ben igaz, hogy minden halmaz ekvivalens egy rendszámmal.

(Ez az állítás igazából ekvivalens a kiválasztási axiómával; további ekvivalens formákat ld. alább.)
Ha feltesszük a kiválasztási axiómát, A számosságára az $|A|$ jelölést használjuk. Persze ha κ számosság, akkor $|\kappa| = \kappa$.

Lemma (Hartogs). ZF-ben igaz, hogy minden halmazhoz van olyan rendszám, ami nem injektálható bele. ∎

így nincs legnagyobb számosság, s a számosságok valódi osztályt alkotnak. S transzfinit rekurzióval (ld. alább!) találhatunk (osztály-)izomorfizmust Rsz és a *végtelen* számosságok osztálya között. Láthatjuk, hogy csak egy ilyen van; ezt $\aleph$-fel jelöljük (azaz $\aleph_\alpha$ az „α-adik számosság"). $\aleph_0 = \omega$. A legfeljebb ilyen számosságú halmazokat nevezük ***megszámlálhatónak***.
Ennek megfelelően szokás a rendszámokkal kapcsolatos fogalmakat átvinni számosságokra: pl. $\aleph_\alpha$ ***rákövetkező***, ill. ***limesz számosság*** aszerint, hogy α rákövetkező avagy limesz rendszám.

Most a kiválasztási axióma, ill. a jólfundáltság és a regularitási axióma rövid diszkussziója következik.

Tétel. ZF-ből következik a következő állítások ekvivalenciája:

- Kiválasztási axióma.
- (**Jólrendezési tétel**) Minden halmaz jólrendezhető (azaz van rajta olyan reláció, ami jólrendezése neki).
- (**Trichotómia**) Bármely két A, B halmazra $A \preccurlyeq B$, $B \preccurlyeq A$, $A \approx B$ valamelyike teljesül.
- (**Zorn-lemma**) Ha egy részbenrendezett halmaz minden rendezett részének van felső korlátja (olyan elem, aki nagyobb-egyenlő e rész minden eleménél), akkor van a részbenrendezésnek maximális eleme (tehát akinél senki sem nagyobb).
- (**Kuratowski-lemma**) Tetszőleges részbenrendezett halmaz rendezett részhalmazai között van maximális.
- (**Teichmüller-Tukey-lemma**) Legyen T egy A halmaz véges részhalmazainak valamely halmaza. A egy részhalmazát nevezzük T-jó halmaznak, ha minden véges része benne van T-ben. Ekkor minden T-jó halmaz maximális T-jó halmazzá bővíthető.
- („Minden gráfnak van kromatikus száma") Minden gráfhoz található olyan κ számosság, hogy a gráf κ darab színnel pontszínezhető.

∎

Ha R egy reláció, $\Gamma_R(x)$-szel jelöljük x *szomszédságát*, $\{y : (y,x) \in R\}$-et. $(x,y) \in R$-re használhatjuk az $x\ R\ y$ jelölést is.

Tétel. Legyen $R \subseteq A \times A$ egy reláció. ZFC-ben igaz, hogy a következőek ekvivalensek:

i) R jólfundált;

ii) nem létezik A-beli elemeknek $a_1\ R\ a_2\ R\ \ldots\ R\ a_n\ R\ \ldots$ sorozata (e sorozatban az a_i-k nem feltétlenül különbözőek!);

iii) A-ban lehet R-re nézve *indukciót* csinálni, azaz ha $X \subseteq A$-ra teljesül, hogy
$\forall a \in A\ (\Gamma_R(a) \subseteq X \Rightarrow a \in X)$, akkor $X = A$;

iv) A-ban lehet R-re nézve *rekurziót* csinálni, azaz ha G (a „rekurzív szabály") függvényeken értelmezett operáció, akkor pontosan egy olyan A-n értelmezett f függvény van, mely eleget tesz e rekurzív szabálynak, tehát melyre teljesül, hogy minden $a \in A$ esetén $f(a) = G\left(f\restriction_{\Gamma_R(a)}\right)$.

v) A R-re nézve *hierarchiába szervezhető*, azaz, ha a $\kappa = |A|$-nál kisebb-egyenlő rendszámokhoz rekurzíve definiáljuk a köv. halmazokat: $V_0^R = \varnothing$, $V_{\alpha^+}^R = \{a \in A : \Gamma_R(a) \subseteq V_\alpha^R\}$, és ha α limeszrendszám, $V_\alpha^R = \bigcup_{\beta<\alpha} V^R(\beta)$, akkor azt találjuk, hogy $V_\kappa^R = A$. (Ekkor a legkisebb α-t, melyre $a \in V_\alpha^R$, *a* R *szerinti magasságának* hívjuk.)

■

Ha A osztály, s R olyan osztály-reláció, hogy minden $a \in A$-ra $\Gamma_R(a) \cap A$ halmaz, akkor a fenti tétel alkalmasan módosítva érvényes marad: *iii*)-ben X ne halmaz legyen, hanem osztály, *iv*)-ben f is operáció (amelyről tudható, hogy csak G paramétereit használja), illetve *v*)-ben a V_α^R-k rekurzív definiálása menjen végig az összes rendszámon; erről a konstrukcióról – ellenben a halmaznyi sok lépésig tartó rekurziókkal – első pillantásra nem világos, hogy legitim. De mégis az, mert $\in$-ről tudjuk, hogy tetszőleges X halmaz esetén $\Gamma_\in(X)$ halmaz (éppenséggel maga X), Rsz-ről tudjuk, hogy jólfundált osztály, így a tétel osztályos verzióját mindenekelőtt Rsz-re, $\in$-re alkalmazva megkapjuk, hogy Rsz-en lehet indukciót, rekurziót csinálni (ezt hívjuk transzfinit, „a végeseken túlmenő" indukciónak/rekurziónak). Ezt külön tételben is kiemeljük; még kiválasztási axióma sem kell, mint ahogy általában az Rsz-en belül játszódó dolgokhoz nem kell: e körben működik a „minden halmazból a legkisebb elemet vesszük"-fajta kiválasztás-definíció.

A transzfinit indukció és rekurzió tétele. ZF-ben igaz, hogy a rendszámok osztályán lehet indukciót és rekurziót csinálni. ■

De mi a helyzet $\in$-nel, ha minden halmazok osztályán nézzük? Jólfundált-e? Azt várjuk, hogy igen, mert intuíciónkkal ellentétesnek érezzük a *ii*)-ben mondott-fajta sorozatok létét. Mindazonáltal ez nem lesz „csak úgy, magától" igaz: a ***regularitási axióma épp azt mondja ki, hogy*** $\in$ ***jólfundált osztály-reláció***, ugyanis $x \in A \wedge x \cap A = \varnothing$ épp azt jelenti, hogy x $\in$-minimális A-ban (szokták ezért a regularitási axiómát *fundáltsági axiómának* is hívni). Tehát ha a regularitási axiómát feltesszük, akkor a halmazok $\in$ szerint hierarchiába szervezhetők. Ezt hívjuk *kumulatív hierachiának*; $V_\alpha^\in$-t (ami halmaz!) simán V_α-val jelöljük. Persze $V_{\alpha^+} = \mathcal{P}(V_\alpha)$. Az $\in$ szerinti magasságot röviden ***rangnak*** mondjuk.

Rendszámaritmetika, kofinalitás, számosságaritmetika.

A továbbiakban feltesszük a kiválasztási axiómát; biztos akad majd néhány állítás (pl. a csak rendszámokról szólóak), amik enélkül is igazak maradnak, de nem fogunk törődni a szőrszálhasogató szortírozgatással.

Most rátérünk a *rendszámok, rendtípusok aritmetikájára*, ami a szokásos, természetes számokon űzött aritmetika „transzfinit" kiterjesztése.

Ha α, β rendszámok, akkor *diszjunkt úniójuk* formálisan $(\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$; ezt úgy rendezzük, hogy „egymás mögé rakjuk α-t és β-t", azaz ha $\gamma \in \alpha$, $\delta \in \beta$, akkor $(\gamma, 0) < (\delta, 1)$, a 0-s, ill. 1-es végűek között pedig α, ill. β rendezése érvényesül. Ez a rendezés is jólrendezés, ***α és β összege***, $\alpha+\beta$ pedig ezen jólrendezés típusa. Ez a fajta összegzés asszociatív, de nem kommutatív ($1 + \omega = \omega$, de $\omega+1 = \omega^+$). „Nagyobbak összege nagyobb": a rendszámösszegzés monoton, sőt, második változójában szigorúan monoton.

$\alpha \times \beta$-t meg úgy fogjuk fel, hogy α-nak β darab példányát egymásra rakjuk, mintha egy β magas parkolóházat építenénk, ahol minden szint úgy néz ki, mint α; ezt hívjuk *antilexikografikus rendezésnek*; pontosabban: ha $x = (\gamma, \delta)$, $x' = (\gamma', \delta') \in \alpha \times \beta$, akkor, amennyiben valamelyikük, mondjuk x', „magasabban van" – azaz $\delta < \delta'$ –, akkor legyen $x < x'$; amennyiben meg azonos magasságban vannak – azaz $\delta = \delta'$ –, akkor legyen az „jobbrább lévő" a nagyobbik, tehát ha $\gamma < \gamma'$, akkor $x < x'$. Ez a rendezés is jólrendezés. α és β szorzata, $\alpha\beta$, legyen ennek a típusa. A rendszámszorzás szintén asszociatív, de nem kommutatív ($2\omega = \omega < \omega+\omega = \omega 2$); és ez is monoton, sőt, második változójában szigorúan monoton.

Az összeg és a szorzat között a jobboldali disztributivitás nem teljesül: $(1+1)\omega = \omega < \omega + \omega = 1\omega + 1\omega$. A baloldali viszont igen, azaz $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Jelöje ${}^{[\beta]_\omega}\alpha$ azon $\beta \longrightarrow \alpha$ függvények halmazát, melyek véges sok hely kivételével mindenütt 0-t vesznek fel. Két ilyen függvényt úgy hasonlítunk össze, hogy az a nagyobb, aki nagyobb a legutolsó olyan koordinátában, ahol a két függvény eltér (ez is antilexikografikus rendezés, csak sok koordinátával). Ez jólrendezés lesz, α^β-t ennek a típusaként definiáljuk. Erre igaz: $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta\alpha^\gamma$, ill. $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$.

Ezek a konstrukciók, amikkel előállítottuk az összeg/szorzat/hatvány-nak megfelelő rendezéseket, nemcsak jólrendezésekkel, hanem akámilyen rendezéssel működnek. Ha lenne valamilyen reprezentánsunk minden rendezés-izomorfiaosztályhoz, ami révén definiálhatnánk azt, hogy „rendezések típusa", akkor nemcsak rendszám-, hanem *rendtípusaritmetikáról* is beszélhetnénk. Ilyet pedig csinálhatunk, ha nem is túl esztétikus módon: egy adott $(A,<)$ ***rendezés típusa*** legyen az $|A|$-n felvehető összes $(A,<)$-bel izomorf rendezés halmaza.

A rendszámaritmetika egy másik irányú általánosítása az, hogy megengedünk soktagú összegeket / sokténvezős szorzatokat: Ha γ rendszám, és az α_i-k is rendszámok, akkor legyen $\sum_{i<\gamma}\alpha_i$ az α_i-k γ szerinti egymás után rakásának típusa (ugyanígy rendtípusokra). Így pl. $\alpha\beta = \sum_{i<\beta}\alpha$. Hasonlóan képezhetünk sokténvező szorzatokat. Az asszociativtás, ill. a balodali disztributivitás – értelemszerűen megfogalmazva – ekkor is érvényben marad.

A következő fogalom, amivel megismerkedünk, a *kofinalitás*. Ha $(A,<)$ rendezett halmaz, és $X \subseteq A$, akkor azt mondjuk, hogy X *kofinális* $(A,<)$*-ben*, ha tetszőleges $a \in A$-hoz van olyan $x \in X$, hogy $a \leqslant x$. „Tetszőleges rendezésben kofinális egy elég hosszú sorozat", azaz

Hausdorff-tétel. Minden $(A,<)$ rendezett halmaznak van olyan X kofinális részhalmaza, hogy X az öröklött rendezéssel jólrendezett halmazzá válik (s ennek típusa persze $\leqslant |A|$). ■

$(A,<)$ ***kofinalitása*** *a legkisebb α rendszám, melyre teljesül, hogy $(A,<)$-nak van α típusú kofinális része.* (Mivel „minden rendszám rendezett halmaz", értelmesnek tekintjük a „rendszám kofinalitása" kifejezést.) Jelölés: $\mathrm{cf}(A,<)$, $\mathrm{cf}\,\alpha$.

A rendszámok eddig ismert felosztása megfogalmazható a kofinalitás segítségével is: ha $\alpha \in \mathsf{Rsz}$, $\alpha = 0 \iff \mathrm{cf}\,\alpha = 0$, α rákövetkező $\iff \mathrm{cf}\,\alpha = 1$, α limesz $\iff \mathrm{cf}\,\alpha \geqslant \omega$.

Azonban a kofinalitás módot ad a limeszrendszámok további felosztására: egy limeszrendszám ***reguláris***, *ha kofinalitása* a lehető legnagyobb, azaz *önmaga*, *egyébként* meg ***szinguláris***.

Tétel. Tetszőleges rendezett halmaz kofinalitása számosság. ■

Következmény. Minden reguláris rendszám számosság, tetszőleges rendezett halmaz kofinalitása reguláris. ■

Tétel. Minden rákövetkező ($\aleph_{\alpha+1}$ alakú) számosság reguláris. ■

Persze $\aleph_0$ is reguláris. Viszont ha csak úgy, hasraütésszerűen mondunk egy limesszámosságot, az tipikusan szinguláris lesz (pl. $\mathrm{cf}\,\aleph_\omega = \omega = \aleph_0$). Jó kérdés, hogy van-e reguláris limeszszámosság (az ilyet hívják *elérhetetlen számosságnak*)? Erre nem adható egyértelmű válasz: ha ZFC konzisztens, akkor ZFC + „nincs elérhetetlen számosság" is.

Az elérhetetlen számosságoknak van egy érdekes tulajdonságuk: fixpontjait adják az $\aleph$-operációnak: ha κ erősen elérhetetlen, akkor $\aleph_\kappa = \kappa$.

A tisztesség kedvéért a kofinalitással kapcsolatban megmlítünk még egy kevéssé meglepő tényt:

Állítás. Ha $(A,<)$ rendezett halmaz, B A-nak kofinális része, akkor $\mathrm{cf}(A,<) = \mathrm{cf}(B,<)$. ■

A halmazelméleti rész utolsó témája a *számosságaritmetika*. Ez is kiterjesztése a hagyományos aritmetikának, ezúttal a számosságok körére. Az ötlet a következő: megnézzük, milyen halmazkonstrukciók azok, melyek a véges halmazok méretét a szokásos aritmetikai műveletek szerint befolyásolják, majd a végetelen számosságokon annak megfelelően definiáljuk az aritmetikai műveleteket, ahogy a végtelen halmazok méretét befolyásolják ezek a halmazkonstrukciók. A véges-végtelen átmenet működik a tagok/tényezők számának tekintetében is: az indexek mindenféle kényszerrendezése nélkül értelmezhetőek a végtelen tagszámú összegek, végtelen sok tényezős szorzatok. Mondhatni, ezek a műveletek „nagyon kommutatívak". Innen is látni, hogy ez gyökeresen eltér a rendszámaritmetikától. Ennek ellenére a számosságműveleteket is a hagyományos aritmetikai szimbólumokkal jelöljük. Így azt a konvenciót követjük, hogy α, β, ... tipikusan rendszámokra utalnak és a rájuk alkalmazott műveletek rendszámműveletek, míg κ, λ, ... (és persze $\aleph_\alpha$, $\aleph_\beta$, ...) tipikusan számosságokra utalnak és a rájuk alkalmazott műveletek számosságműveletek; ha mégsem így volna, jelezzük. Na, térjünk a tárgyra végre!

Ha κ_i ($i \in I$) számosságok valamilyen rendszere, e rendszer *diszjunt úniója* az $\dot{\bigcup}_{i\in I}\kappa_i = \{(\alpha, i) : i \in I,\ \alpha \in \kappa_i\}$ halmaz; s mint már említettük, e rendszer *direkt szorzata*, $\prod_{i\in I} \kappa_i$ azon I-n értelmezett f függvények halmaza, melyek teljesítik, hogy $f(i) \in \kappa_i$.

S akkor legyen a κ_i*-k* ***összege*** $\sum_{i\in I} \kappa_i = \left|\dot{\bigcup}_{i\in I}\kappa_i\right|$, míg a κ_i*-k* ***szorzata*** $\left|\prod_{i\in I} \kappa_i\right|$; eléggé el nem ítélhető módon ezt is $\prod_{i\in I} \kappa_i$-vel jelöljük.

Ha A, B halmazok, ${}^BA$ jelöli az A-ról B-be képző függvények halmazát. Ha κ, λ számosságok, legyen $\kappa^\lambda = \left|{}^\lambda\kappa\right|$.

Persze ezeket a műveleteket akármilyen megfelelő számosságú reprezentánssal definiálhattuk volna: pl. $|A|^{|B|} = \left|{}^BA\right|$, stb. Esetleg még érdemes megjegyezni, hogy $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

A számosságműveletek kielégítik a hagyományos aritmetika azonosságait:

Kommutativitás: ha π permutációja I-nek, $\sum_{i\in I} \kappa_i = \sum_{i\in I} \kappa_{\pi(i)}$, s ugyanígy a szorzatra is. Asszociativitás: legyenek $i \in I$-re a J_i-k (index)halmazok, és adott $i \in I$-re, $j \in J_i$-re legyen egy κ_{ij} számosságunk; ekkor $\sum_i \sum_j \kappa_{ij} = \sum_{ij} \kappa_{ij}$, ugyanígy a szorzatra is. Disztributivitás: ha van κ_{ij}-nk, mint előbb, akkor, élve a $\vec{j} = (\dots, j_i, \dots)$ rövidítéssel,

$$\prod_i \sum_j \kappa_{ij} = \sum_{\vec{j}\in\prod_i J_i} \prod_i \kappa_{ij_i}.$$

Továbbá a hatványozásazonosságok is teljesülnek.

Van viszont egy pont, ahol lényegesen másképp viselkedik a számosságaritmetika, mint a rendes: bár monotonak a műveletek, messze nem szigorúan monotonak, sőt,

A számosságaritmetika alaptétele. „Végtelenben a számosságaritmetika trivializálódik”, azaz ha κ, λ végtelen számosságok, $\kappa\lambda = \kappa + \lambda = \max(\kappa, \lambda)$. ∎

Annál nehezebben megfogható a hatványfüggvény viselkedése.

Először is, újabb inkonzisztens konvenció: *számosság rákövetkezője* alatt (κ^+) a legkisebb nála nagyobb számosságot értjük (tehát $\aleph_\alpha^+ = \aleph_{\alpha^+}$); az alábbiakban ω-t számosságként kezeljük. Nos, régi kérdése a halmazelméletnek, hogy az $\aleph$-sorozatba hogyan rakható be 2^ω, az ún. *kontinuum-számosság*, a valósok számossága: igaz-e a ***kontinuum-hipotézis***, mely szerint $2^\omega = \omega^+$?

Végül azt találták, hogy nemcsak a kontinuum-hipotézis, de még az ***általánosított kontinuum-hipotézis*** ($\forall\kappa\ 2^\kappa = \kappa^+$) is *független* ZFC-*től*.

További kérdés, hogy akkor a $2^\omega = \aleph_?$ kérdésre mik a szóbajöhető válaszok, s melyeket zárja ki ZFC. Az derült ki, hogy 2^ω *bármilyen számosság lehet, ami nem* ω *kofinalitású.*

Búcsúzásképp a halmazok világától közlünk pár tételt számosságaritmetika és kofinalitás kapcsolatáról.

A továbbiakban κ, λ, indexelt verziók... végtelen számosságokra utalnak, ha másképp nem mondjuk.

Tétel. $\mathrm{cf}\,\kappa$ a legkisebb olyan α rendszám, melyhez találhatni $(\kappa_\beta)_{\beta<\alpha}$, $\kappa_\beta < \kappa$ tulajdonságú sorozatot, hogy $\sum_{\beta<\kappa} \kappa_\beta = \kappa$. ∎

Tétel. Ha κ limesz, akkor van olyan *szigorúan növő* $(\kappa_\beta)_{\beta<\mathrm{cf}\,\kappa}$ sorozat, hogy $\sum_{\beta<\mathrm{cf}\,\kappa} \kappa_\beta = \kappa$. ∎

Az alábbi tétel megmutatja, hogyan kell elég kemény feltételeket szabni ahhoz, „szigorúan nagyobb” jellegű számosságaritmetikai eredményt kapjunk:

König-egyenlőtlenség. Ha vesszünk $\kappa_i < \lambda_i$ (akár véges) számosságokat, akkor $\sum_i \kappa_i < \prod_i \lambda_i$. ∎

Pl. ha minden $\kappa_i = 1$, minden $\lambda_i = 2$, és κ darab van belőlük, a jólismert $\kappa < 2^\kappa$-hoz jutunk. A König-egyenlőtlenség azért ennél erősebb további egyenlőtlenségek kikényszerítésére is használható:

Következmény. $\kappa < \kappa^{\mathrm{cf}\,\kappa}$, $\kappa < \mathrm{cf}\,2^\kappa$. ∎

— Az utóbbi egyenlőtlenségből adódik a fentebb említett éles korlátozás a kontinuum mivoltát illetőleg.

Elsőrendű logika: koncepció és fogalmak

Maradjunk annyiban, hogy a logika tárgya a nyelvek kifejezőképességének vizsgálata: a logista kívülállóként, mint egy film nézője, figyel egy kommunikációs szituációt, tehát azt, hogy egy adott nyelv szabta keretek közt kijelentéseket képzünk *valamiről*; majd rendezőként – de kívülállóságát végig megtartva – beleavatkozik a szituációba, tipikusan valahogy módosít a „valamin", és figyeli, hogy a nyelv mennyire reagál érzékenyen a változásra.

Ez a valami világimitáció: egy univerzumból áll, „ahol történnek az események", és az univerzumot különféle módon strukturáló entitásokból, melyek adekvátak a nyelvhez annyiban, hogy az valamiképp képes megnevezni őket, beszélni róluk.

Tehát a logikához kell: ***nyelv*** és ***struktúra***, ill. a kettőt összekapcsoló ***jelentés***, ami a nyelv objektumaihoz (*szintaktikai* objektumok) a „világ" létezőit (*szemantikai* objektumok) társítja. Ennek alapján minden egyes világban kijelöljük a nyelv objektumai, „kijelentései" közül az ott ***érvényeseket***. Az adott világban érvényes kijelentések képzik ama világ *elméletét*. Az elmélet mibenléte az az objektív információ, ami alapján le tudjuk mérni a nyelv kifejezőerejét, figyelvén, milyen messze van a világ $\mapsto$ elmélet hozzárendelés az injektivitástól, különböző világok mekkora kupacai azok, melyek között a nyelv nem képes különbséget tenni.

Ha tartjuk magunkat ehhez a paradigmához, az tűnik ki, hogy a logika *elemzi* a matematikát (a matematika igazságfogalmát, és a matematikai gondolkodást valamilyen szinten, bár biztonságosabb azt mondani, hogy a matematika „játékszabályait"), és nem megalapozza azt. Ez a megállapítás feljogosít minket arra, hogy a logika művelése során felhasználhassunk akármilyen matematikai konstrukciót.

Az alábbiakban egy konkrét logikai rendszer példáján: az ***elsőrendű logika***, avagy *predikátumkalkulus* példáján mutatjuk be, hogy is néz ki ez a koncept. Bizonyos okokból – melyek részletezése sem e szövegnek, sem az egyetemi kurzusnak nem célja, de azért valamennyire fény derül rájuk – ez a nyelv a legadekvátabb a mondott-fajta matematika-vizsgáló vizsgálatokhoz, ezért lett e rendszer a bevezető logikai kurzusok fő témája (no meg mert mindentől függetlenül is jópofa matematikai problémák forrása).

Először tehát megadjuk nyelvét, az ***elsőrendű nyelvet***. Igazából nem is egy nyelvről van szó, hanem hasonló felépítésű nyelvek egy paraméter, az úntípus által összegyűjtött családjáról.

Hogy érzékeltessük, miről van szó, mutatunk egy köznyelvi példamondatot, amely mini-seregszemlét nyújt az elsőrendű nyelv sajátosságaiból, s mely felmutatja e nyelv kifejezőképeségének nem-matematikai határait is:

„*Némely nők jobbak más nőknél, némely nők anyjai jobbak más nők anyjainál.*"*

Milyen nyelvi eszközökkel él ez a mondat? Próbáljunk meg valami formális sémával megvilágítani szerkezetét! Mindenekelőtt beláthatjuk, hogy célszerű választás „tárgyalási univerzum" gyanánt a nők halmaza, azaz minden használt változó lehetséges értékeiként nők szolgálhatnak. Kijelentésünket boncolgatva felfedezhetünk olyan kisebb egységeket, amelyek még szintén predikatív jellegűek (valamikről állítanak valamit), de amit állítanak, az oly egyszerű, hogy tovább már nem bontható (*kijelentés-atom*): „x jobb y-nál". Észrevehetjük, hogy nemcsak egy akármilyen x-ről állíthatjuk ezt a kijelentés-atomot, de egy *valakinek a valamijeként* meghatározott x-ről ($x := x'$ *anyja*). Tehát a kijelentés-atom további (már nem predikatív részekre való) bontása: a kijelentés-atom úgy áll elő, hogy valamely viszonyulásba, *relációba* behelyettesítünk hozzárendelésekből, *függvényekből* összerakott kifejezéseket. Ezen kijelentés-atomokból már bevett logikai műveletekkel építhető fel a mondat egésze; esetünkben „és" ($\wedge$) és kvantorok használtatnak. Vagyis majdnem: itt láthatjuk, hogy mondatunk tartalmaz olyan mögöttes tartalmat is, ami a kvantorok megválasztását nem-egyértelművé teszi ($\exists\exists$ vagy $\forall\exists$). Tehát végül is az eredeti tartalmát talán leginkább közelítő formális verzió:

$$\forall x \exists y \text{ „}y \text{ jobb } x\text{-nél"} \wedge \forall x \exists y \text{ „}(y\ anyja) \text{ jobb } (x\ anyja)\text{-nál"}\,;$$

— noha elképzelhetők olyan formális eszközök is, amelyek érzékenyebbek a mögöttes tartalomra, ilyenek keresése azonban már inkább nyelvészeti-logikai és nem matematikai-logikai feladat.

Akkor most fogaljuk össze röviden, mik is pontosan az elsőrendű nyelvek elemei, s hogyan áll ezekből össze a nyelv.

Ami minden elsőrendű nyelvben közös: néhány alapjel, amit mindegyik, és mindegyik ugyanúgy használ.

---

* „Some girls are bigger than others, some girls' mothers are bigger than other girls' mothers" — The Smiths

Először is rögzítünk egy Var végtelen halmazt, ez lesz a ***változók*** halmaza. Aztán lesznek persze „delimiter" jelek, mint „(" és „ , ". És lesznek a ***konnektívák*** (kapcsolók, logikai műveletek, formula-műveletek): $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\exists$, $\forall$, $=$ (ez utóbbi három ebben a formában nem tekinthető konnektívának, hanem $x, y \in \mathrm{Var}$ esetén képezhetők belőlük a $\exists x$, $\forall x$ unáris, ill. az $x = y$ konstans konnektívák). Az első háromra *nulladrendű* v. *Boole-konnektívákként* utalunk, akárcsak a belőlük kifejezhető egyebekre ($\to$, $\leftrightarrow$,...), melyek definícióját ismertnek tekintjük.

A ***(hasonlósági) típus*** az a dolog, ami megadja az adott elsőrendű nyelv rá jellemző jeleit, a relációkat és függvényeket. Formálisan egy t típus egy $(t_{\mathrm{rel}}, t_{\mathrm{alg}})$ pár – t_{rel}: a típus *relációs része*, t_{alg}: a típus *algebrai része* –, ahol t_{rel} a pozitív, t_{alg} pedig a nemnegatív egészek halmazába képző függvény. Akiken t_{rel} értelmezve van, azokat hívjuk ***relációjeleknek***, akiken pedig t_{alg}, azokat ***függvényjeleknek*** (azt, hogy mondjuk f a típus függvényjele, lazán jelölhetjük úgy, hogy $f \in t$). Egy adott R relációjel, ill. f függvényjel estén a $t_{\mathrm{rel}}(R)$, ill. $t_{\mathrm{alg}}(f)$ érték adja meg az ő *aritását (változószámát)* (a „rel", „alg" indexeket általában mellőzzük).

Eszerint lehet olyan is, hogy 0-változós függvényjel. Ennek kapcsán nézzük meg, mit is csinál egy $U \neq \varnothing$ halmazon egy 0-változós művelet. Ugye egy n-változós művelet egy $U^n \longrightarrow U$ leképezés; akkor egy 0-változós művelet egy $\{\varnothing\} = U^0 \longrightarrow U$ leképezés – ez nem csinál mást, mint kijelöli U egy elemét (ti. az egyszem $\varnothing$ értékét). Ezért a 0-változós függvényjeleket *kijelölt elemeknek* v. *konstansoknak* is szokás hívni (pontosabban a „kijelölt elem" képzetét ily módon pásszították be a „művelet" sémába).

Mindenesetre most már akár minden tartalmi megfontolás nélkül definiálhatjuk a *t típusú elsőrendű nyelvnek* először a ***kifejezéseit*** ($x \in \mathrm{Var}$ kifejezés; ha $f \in t$, $t(f) = n$, k_i-k kifejezések, akkor $f(k_1, \dots, k_n)$ is, s csak az kifejezés, amit ily módon...), majd ***formuláit*** (ha a k_i-k kifejezések, $R \in t$, $t(R) = n$, akkor $k_1 = k_2$, $R(k_1, \dots, k_n)$ formulák (az ún. *atomi-* v. *prímformulák*); s ha φ, ψ formula, akkor $\varphi \wedge \psi, \dots, \forall x \varphi$ is azok, s csak az ilyenek...). (A kifejezéseket szokás latinosan *terminusnak* is mondani, vagy ronda anglicizmussal *termnek*.)

Egy rakás szintaktikai játék van, amit kifejezésekkel és formulákkal űzhetünk. Felrajzolhatjuk pl. egy formula részformula-fáját, és megállapíthatjuk, hogy ez egyértelmű (egyértelmű olvashatósági lemma), ennek alapján beláthatjuk a formulaindukció -és rekurzió jogos voltát, definiálhatjuk egy formula *szabad változóit* (azok, akiknek van kvantor által nem kötött előfordulásuk), formula *zártságát* (nincs szabad változója), ill. lezártját (elérakunk annyi univerzális kvantort, amennyitől zárttá válik). Szóval csupa olyan dolog, ami kb. annyira matematika, mint adott sorozatokhoz kiszámolni azt a küszöbindexet, amin túl már legalább $\frac{1}{10000}$ pontossággal közelítik határértéküket... Azokat a konvenciókat, amelyek segítségével rövidítjük, egyszerűsítjük formuláink leírását, meg sem említjük (bár használni használjuk), talán csak azt, hogy „$\varphi(x_1, \dots, x_n)$" azt jelenti, hogy $x_1, \dots, x_n$ szabadak φ-ben (de más is lehet még szabad).

Inkább térjünk rá, hogy adhatunk jelentést formuláinknak. Ehhez először definiáljuk a ***t típusú elsőrendű struktúra*** fogalmát. Egy ilyen nem más, mint egy $\mathfrak{A} = (A, I)$ pár, ahol A nemüres halmaz (a struktúra *univerzuma* v. *alaphalmaza*), I pedig az ún. *interpretáció*, ami olyanokat csinál a reláció-, ill. függvényjelekből, amiknek lenniük kell: $R \in t$-hez hozzárendel egy $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^{t(R)}$ relációt, s $f \in t$-hez egy $f^{\mathfrak{A}} : A^{t(f)} \longrightarrow A$ műveletet. (Konvenció: struktúrára és alaphalmazára ugyanazzal a betűvel utalunk, csak előbbi esetben gót, utóbbi esetben latin betűt használunk; de pl. $a \in A$ mellett $a \in \mathfrak{A}$ is használatos.)

Ezek után miknek nem rögzíti egy struktúra a jelentését? Hát a változóknak! A változóknak egy jelentés-rögzítését, azaz egy $\mathrm{Var} \longrightarrow A$ függvényt $\mathfrak{A}$ feletti ***értékelésnek*** nevezünk. Egy ilyen, kézenfekvő rekurzió révén, a kifejezéseknek is ad értéket (szintén A valamely elemét), és ebből *igazságérték* származtatódik a fomulákra (a k kifejezés $e : \mathrm{Var} \longrightarrow A$ melletti értékét, ill. a „***φ formula érvényes (igaz) $\mathfrak{A}$-ban***" relációt hagyományosan $k[e]$-vel, ill. $\mathfrak{A} \models \varphi[e]$-vel jelöljük). Azért $\varphi[e]$ definícióját kissé részletezzük, csak előtte egy definíció: ha e függvény, $e(x{:}a)$ alatt azt a függvényt értjük, amelyik x-en kívül mindenhol azt csinálja, amit e, x-ben pedig a-t vesz fel. Nos hát:

- $\mathfrak{A} \models k_1 = k_2[e] \iff k_1[e] = k_2[e]$, ill. $\mathfrak{A} \models R(k_1, \dots, k_n)[e] \iff (k_1[e], \dots, k_n[e]) \in R^{\mathfrak{A}}$;
- $\mathfrak{A} \models \varphi \wedge \psi[e] \iff A \models \varphi[e]$ és $A \models \psi[e]$;
- $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[e] \iff A \not\models \varphi[e]$;
- $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi[e] \iff$ létezik olyan $a \in A$, hogy $\mathfrak{A} \models \varphi[e(x{:}a)]$;
- $\mathfrak{A} \models \varphi \vee \psi[e] \iff A \models \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)[e]$, $\mathfrak{A} \models \forall x\, \varphi[e] \iff \mathfrak{A} \models \neg\exists x\, \neg\varphi[e]$.

— a lényeg, hogy a konnektívák köznyelvi jelentését rekurzióval rálócsöljük a formulákra.

A φ ***formula érvényes az*** $\mathfrak{A}$ ***struktúrában***, más megfogalmazásban $\mathfrak{A}$ modellje φ-nek (jelölés: $\mathfrak{A} \models \varphi$), ha tetszőleges értékelés mellett érvényes. Apró észrevétel: egy formula pontosan akkor érvényes $\mathfrak{A}$-ban, ha lezártja; tehát nem csak pongyola konvenció, hogy a kvantorok elhagyásával is leírhatjuk pl. az asszociatív szabályt (vigyázat! hasonló állítás nem vonatkozik az *értékelés melletti érvényességre*!). Az $\mathfrak{A}$-ban érvényes formulák halmaza $\mathfrak{A}$ ***elmélete***.

Az érvényesség fogalmát kiterjesztjük formulahalmazokra is: ha Γ formulahalmaz, akkor $\mathfrak{A} \models \Gamma$, ha minden $\varphi \in \Gamma$-ra fennáll $\mathfrak{A} \models \varphi$.

A φ ***formula érvényes*** (jelölés: $\models \varphi$), ha tetszőleges struktúrában érvényes. A φ, ψ formulák ***ekvivalensek***, ha $\varphi \models \psi$ és $\psi \models \varphi$, ami ugyanaz, mint $\models \varphi \leftrightarrow \psi$, hiszen

Dedukciólemma. Ha Γ formulahalmaz, φ, ψ zárt formulák, akkor $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi \iff \Gamma \models \varphi \to \psi$. ∎

A ***szemantikai következményfogalom*** a következő: a φ formula következik a Γ formulahalmazból ($\Gamma \models \varphi$), ha $\mathfrak{A} \models \Gamma$-ból esetén $\mathfrak{A} \models \varphi$ is fennáll; más szóval, ha Γ modelljeiben igaz φ. Kézenfekvő módon definiáljuk $\Gamma \models \Theta$-t, ahol Θ is formulahalmaz.

Miféle normálalakra lehetne hozni egy formulát? Azaz: adott φ-hez kéne találni olyan vele ekvivalens φ'-t, ami valamilyen meglehetősen behatárolt szintaktikai feltételnek tesz eleget.

A *kvantormentes* formula az olyan, mint amilyennek a titulusa mondja, s más szóval *nyílt* formulának is nevezik az ilyet. Egy formula *prenex*, ha $Q_1x_1 \dots Q_nx_n\varphi$ alakú, ahol $Q_i \in \{\exists, \forall\}$, φ pedig nyílt. Házi szóhasználat: nevezzük ezt a φ-t prenex formulánk *nyílt részének*. Könnyen látható, hogy *minden formula ekvivalens egy prenex formulával.* Egy nyílt formula *konjunktív normálforma* (CNF), ha $\bigwedge_i \bigvee_j \varepsilon_{ij}\alpha_{ij}$ alakú, ahol ε_{ij} vagy a $\neg$ jel, vagy semmi, és α_{ij} atomi formula; s *diszjunktív normálforma* (DNF), ha $\bigvee_i \bigwedge_j \varepsilon_{ij}\alpha_{ij}$ alakú. Azt se nehéz látni, hogy minden nyílt formula ekvivalens mind egy alkalmas CNF-fel, mind egy alkalmas DNF-fel. így hát a következő normálformák adódnak:

Állítás. Minden formula ekvivalens egy prenex formulával, melynek nyílt része CNF, ill. egy olyannal, melynek nyílt része DNF. ∎

Most az alapfogalmakkal megismerkedvén, példákat kéne mondani; de ezek a foglamak elég természetesek ahhoz, a hétköznapi életben elég gyakran előjönnek ahhoz, hogy ettől megkíméljük magunkat. Illetve egy, a későbbiekben használt példát megemlítünk.

A természetes számok struktúrájáról van szó. A típus algebrai lesz (nincsenek relációjelek), méghozzá a 0 és 1 konstansokból és a $+$, $\cdot$ binér (kétváltozós) függvényjelekből fog állni. A struktúra alaphalmazát a nemegatív egészek képzik, és 0, 1, $+$, $\cdot$ a megszokott módon vannak interpretálva. E struktúrát $\mathfrak{N}$-nel jelöljük.

A dolog ott kezd érdekessé válni, ha axiomatizálni akarjuk e struktúrát, azaz olyan benne érvényes formulahalmazt keresünk, amiből következik $\mathfrak{N}$ elmélete. Persze maga $\mathfrak{N}$ elmélete ilyen, de „valami kézzelfgohatóbbat", „konkrétabbat" szeretnénk. Gödel nemteljességi tétele (ld. később) szerint ilyen nincs, azonban ismeretes egy formulahalmaz – a ***Peano axiómáké***, „PA" –, amiből az alapvető aritmetikai és számelméleti összefüggések következnek.

Most ezt adjuk meg, nem a hagyományos puritán formájában, hanem megjegyezhetőre finomítva.

Először is PA kimondja a *kommutatív egységelemes félgyűrű axiómákat*, azaz $+$, $\cdot$ kommutatív, asszociatív, neutrális elemes (0, ill. 1 neutrális elemmel), fennáll a disztributivitás, és $+$-nál lehet egyszerűsíteni ($x + y = x + y' \to y = y'$). Van továbbá egy „0-karakterisztikájúság"-szerű axióma: $x + 1 \neq 0$. Végül van az *indukciós axiómaséma*: minden egyes $\varphi(x)$ formulához felvesszük PA-ba a

$$[\varphi(0) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \to \varphi(x+1))] \to \forall x \varphi(x)$$

axiómát.

Azt a sejtést, hogy PA ereje végtelen voltában rejlik, cáfolja a következő véges axiómarendszer, a ***Robinson-aritmetika***, mely következménye PA-nak, s mely – mint azt látni fogjuk – a hangsúlyozott szempontok tekintetében lesz olyan erős, mint PA.

A Robinson-aritmetikát úgy kapjuk meg, hogy PA-ból elhagyjuk az indukciós sémát, és egyetlen szem axiómával pótoljuk, mely azt mondja ki, hogy minden nem-nulla elem rákövetkezője valakinek, azaz $x \neq 0 \to \exists y\, (x = y + 1)$.*

*Pontosabban azt szokták Robinson aritmetikának hívni, amit az eredeti, puritán Peanóból kapunk ezzel az axiómacserével; ebből pl. nem következik $+$ kommutatív volta. A mi szempontunból mindegy, melyiket használjuk.

Modellelmélet

Rögzítsünk egy t típust, ha mást nem mondunk, mindent ebben a típusban csinálunk.

Két struktúra ***izomorf***, ha van köztük a reláció-és függvényjeleket egymásba vivő bijekció; jelölés: „$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$”. Ez problémamentes fogalom, szemben a homomorfizmussal: hogy „egy leképezés tart egy relációt”, arra több lehetséges megfogalmazás is van, és mikor melyiket használjuk. Jelen szövegben egyiket se.

A ***részstruktúra*** ($\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$) megint csak világos fogalom: olyan részhalmaza (-ra való megszorítása) a befoglaló struktúrának, mely zárt a függvényekre. Két struktúra ***elemien ekvivalens*** ($\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$), ha ugyanaz az elméletük. $\mathfrak{A}$ ***elemi része*** $\mathfrak{B}$***-nek*** ($\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$), ha része, továbbá tetszőleges φ formula és $e : \mathrm{Var} \longrightarrow A$ esetén $\mathfrak{A} \models \varphi[e] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[e]$. S ***elemi beágyazás***: izomorfizmus egy elemi résszel.

Az elemi struktúra persze elemien ekvivalens részstruktúra, de fordítva ez nem áll: ha vesszük $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$-t mint rendezett halmazt, ennek elemien ekvivalens, sőt vele izomorf része $\{1, 2, \dots\}$, de nem elemi része, amint azt a $\forall y\, x \geqslant y$ formula és az $x \mapsto 1$ értékelés mutatja (konvenció: értékeléseket csak a releváns változókon adunk meg, de határozott névelőt használunk). Ellenben végtelen *halmaznak* (értsd: üres típusú struktúrának) minden végtelen részhalmaza elemi része; $\mathbb{Q}$-nak mint rendezett halmaznak minden végpont nélküli sűrű rendezést öröklő része elemi része; $\mathbb{R}$-nek, mint testnek a valós algebrai számok teste elemi része. Mindjárt rámutatunk arra, miért van így.

Érezhető, hogy az elemi részség a kvantorok viselkedésén múlik: ezek igazságértéke függ az egész struktúrától, az egyéb konnektívák hatását mindig meghatározza az a pár elem, akikre a vizsgált formula változóit értékeltük. Ez az intuíció a következő állításban nyeri el szabatos alakját:

Tarski-Vaught kritérium. Legyen $\mathfrak{A} \geqslant \mathfrak{B}$. $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ pontosan akkor teljesül, ha tetszőleges φ formula és $e : \mathrm{Var} \longrightarrow A$ esetén, ha $\mathfrak{B} \models \exists x \varphi[e]$, akkor van $a \in A$ is, hogy $\mathfrak{A} \models \varphi[e(x{:}a)]$. ∎

Az ***elmélet*** szót (ha pőrén áll, és nem „valakinek az elmélete” szövegkörnyezetben) a „formulahalmaz” szó szinonímájaként fogjuk használni. Egy Γ elmélet ***kvantoreliminálható***, ha tetszőleges φ formulához van olyan kvantormentes φ', hogy a szabad változóik ugyanazok, továbbá $\Gamma \models \varphi \leftrightarrow \varphi'$ („Γ szerint φ és φ' ekvivalens”).

Namármost tény, hogy a fent említett struktúrák – végtelen halmazok, $(\mathbb{Q}, \leqslant)$, valós test – elmélete kvantoreliminálható; továbbá kvantoreliminálhatóságukból könnyen belátható, hogy a mondott fajta részstruktúrák velük elemien ekvivalensek (ld. alább). Az meg már triviális, hogy a kvantoreliminálható (elméletű) struktúrák körében az elemien ekvivalens rész egyben elemi rész is: egyszerűen nincs, mi elrontsa a Tarski-Vaught kritériumot, mert „csak kvantormentes formulák vannak”.

Még egy fogalom, mielőtt továbbmennénk: ha egy elméletnek van modellje, akkor ***konzisztens***, különben ***inkonzisztens***. Az inkonzisztencia úgy is mondható, hogy az elméletből következik a „hamis állítás” (amit reprezentálhat pl. $x \neq x$), vagy akkor már, hogy tetszőleges állítás következik belőle.

Nos tehát, a kvantoreliminálható elméleteknél még egy kérdésre könnyű a válasz. Ez a kérdés a ***teljesség***. Egy elmélet teljes, ha minden zárt formula igazságát eldönti: tetszőleges ilyen φ-re $\Gamma \models \varphi$ vagy $\Gamma \models \neg\varphi$. Az inkonzisztens elméletek teljesek, de hogy érdekesebb példát mondjunk, a valamely struktúra elméleteként előálló elméletek is ilyenek, s hát a konzisztensek közül csak ezek, mert egy teljes elmélet egyezik tetszőleges modelljének elméeltével. Ilyetén a teljesség úgy is mondható, hogy az elmélet bármely két modellje elemien ekvivalens.

A kvantoreliminálható elméleteknél csak a nyílt formulák számítanak, a teljesség szempontjából definíció szerint csak a zártak számítanak, így hát egy kvantoreliminálható elmélet teljessége a nyíltzártaktól függ, azaz a változót nem tartalmazóaktól. Ha pl. nincs konstansjel a típusban, akkor csak az „igaz” és „hamis” tiszteletbeli formulák ilyenek, így az elmélet teljes.

Belátható, hogy az üres típusban a „létezik végtelen sok elem” formulahalmaz ($\exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j$ alakú formulák halmaza) kvantoreliminálható, ill. a rendezés típusban (egyetlen binér relációjel: $\leqslant$, semmi több) a végpontok nélküli sűrű rendezés elmélete kvantoreliminálható. A fentiek szerint akkor ezek teljesek.

És akkor ezzel sikerült axiomatizálni $(\mathbb{Q}, \leqslant)$-t, továbbá már azt is látjuk, hogy a végtelen halmazok végelen részei, ill. $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ végpontok nélküli sűrű részrendezései miért elemien ekvivalens részsrtuktúrák (s így elemi részek).

Ami a valós testet illeti, ott a *valósan zárt testek* elméletét kell nézni: egy test valósan zárt, ha az -1 nem négyzetösszeg, minden elem vagy maga, vagy az ellentettje négyzet, és a páratlan fokú polinomoknak van gyökük; azaz „a polinomok úgy viselkednek, mint $\mathbb{R}$ felett”. Ez az elmélet kvantoreliminálható, és bár vannak konstansok, így változónélküli formulák is, belátható erről is, hogy teljes. A továbbiak már mennek úgy, mint az előző példáknál.

A *típus mérete*, $|t|$, a reláció-és függvényjelek együttes száma. Hasonlóan értjük a relációs, ill. algebrai rész méretét. Ha adott egy $\mathfrak{A}$ struktúra, s $\varnothing \neq X \subseteq A$, az X által generált részstruktúra (legkisebb, őt tartalmazó részstruktúra) mérete felülről korlátozható $|X|\,|t_{\text{alg}}|\,\omega$-val, mert ha ω lépésen át bővítjük X-et a függvényértékekkel, végül megkapjuk a generátumot.

Ezt az egyszerű észrevételt mindjárt általánosabban alkalmazhatjuk, ha végrehajtjuk a struktúra elméletének egyfajta algebraizálását. Mit értsünk ezalatt? Vegyük pl. az egységelemes félcsoportok típusát (1 és $\cdot$ van benne), s tekintsünk egy csoportot, mint ilyen típusú struktúrát. Akkor ebben igaz lesz a $\exists y\; x \cdot y = 1$ formula. De ha egyszer minden adott x-hez van ilyen y, hát rendeljünk hozzájuk egyet-egyet! – azaz bővítsük a típust az unér i (mint inverz) fügvényjellel. Ekkor a fenti formula átírható $x \cdot i(y) = 1$ alakba, ilyetén kiküszöbölve belőle a kvantort.

Most ha ezt az eljárást nagyban űzzük, és egy adott struktúra minden $\exists x\varphi$ alakú formulájából csinálunk egy efféle függvényt (az ő ún. Skolem-függvényét), s ezekkel bővítjük a típust, akkor e bővített típusban a részstruktúrák elemi részek lesznek, mert a formulák Skolem-függvényes átírásával megint kikerülhető a Tarski-Vaught kritérium feltétele. Mivel a Skolem-függvények legfeljebb $|t|\,\omega$ darab új függvényjelet hoznak be, adódik a híres

Leszálló Löwenheim-Skolem-tétel. Adott $\varnothing \neq X \subseteq \mathfrak{A}$-hoz van $\mathfrak{A}$-nak X-et tartalmazó, legfeljebb $|X|\,|t|\,\omega$ méretű része. ∎

Ez azért megdöbbentő, mert eszerint a halmazelméletnek, a nagyobbnál nagyobb végtelenek elméletének (ha van egyáltalán) van megszámlálható modellje! Ez az ún. Skolem-paradoxon. A látszólagos ellentmondás feloldása az, hogy egy halmazelméleti modell a defíció alapján, saját belső struktúrájára támaszkodva értelmezi a méreteket, s nem tudunk semmit felhozni amellett, hogy emez értelmezésnek volna bármi köze a „való világ tényeihez" — az a trükk, hogy nem kell mást látni egy halmazelméleti modellben, mint egy böhöm irányított gráfot.

Felszálló Löwenheim-Skolem-tétel. Legyen κ végtelen számosság. Minden végtelen struktúra elemien beágyazható egy legalább κ méretű struktúrába. ∎

Együttesen a két Löwenheim-Skolem-tételből adódik, hogy

Következmény. Ha egy elméletnek van végtelen modellje, akkor $|t|\,\omega$-től kezdve felfele minden számosságra van akkora modellje. ∎

Tehát nem remélhetjük, hogy olyan konkrét és fontos végtelen struktúrákat, mint a természetes számok vagy a valós test, izomorfia erejéig lehetne axiomatizálni elsőrendű apparátussal. A Löwenheim-Skolem tételek volt az egyik első olyan jellegű eredmény, ami behatárolta az elsőrendű nyelv kifejezőerejét.

A Löwenheim-Skolem-tételek a teljesség problematikájához is kínálnak egy támadási felületet: ha κ egy számosság, akkor egy elmélet ***κ-kategorikus***, ha izomorfia erejéig egyetlen κ méretű modellje van. A Löwenheim-Skolem-tételekből egyenesen következik a

Łoś-Vaught próba. Ha valamely $\kappa \geqslant |t|\,\omega$-ra kategorikus egy elmélet, melynek nincs véges modellje, akkor ez az elmélet teljes. ∎

– hiszen úgy láthatjuk be egy ilyen elmélet két modelljének elemi ekvivalenciáját, hogy a Löwenheim-Skolem-tételekre hivatkoza veszünk az egyikkel, ill. a másikkal elemien ekvivalens κ méretű struktúrát, s azt találjuk, hogy ezek a kategoricitás miatt izomorfak. Sőt, ugyanilyen érvelés révén látható, hogy teljességhez az is elégséges, ha valamely $\kappa \geqslant |t|\,\omega$-ra az elmélet olyan méretű modelljei elemien ekvivalensek. A kategoricitással kapcsolatban érdemes felidézni a következő tételt:

Morley-tétel. Ha egy emélet kategorikus valamely nem-megszámlálható számosságra, akkor kategorikus az összes nem-megszámlálható számosságra. ∎

Most, hogya a kategoticitáson túltettük magunkat, felvázolunk egy utat a felszálló Löwenheim-Skolem-tétel belátásához is.

Vegyük észre, hogy már az is elég a felszálló tételhez, ha azt belátjuk, hogy egy végtelen struktúrát lehet akár „csak kicsit" elemien bővíteni, azaz hogy a struktúra *valódi részként* elemien beágyazható egy másik struktúrába, mert ekkor elég sokáig (transzfinit módon) iterálva az eljárást tetszőlegesen nagy elemi bővítéshez jutunk (ti. ha az egyes lépések elemi bővítések, akkor a végeredmény is elemi bővítése a kiinduló struktúrának).

Ha $\mathfrak{A}$ egy struktúra; feleltessünk meg minden egyes $a \in A$-nak egy új c_a konstansjelet, s legyen $t_A = t \cup \{c_a : a \in A\}$. Maga $\mathfrak{A}$ kézenfekvő módon értelmezhető t_A típusú struktúraként is, ha így tekintünk rá, $\mathfrak{A}^+$-szal jelöljük.

$\Delta^0_{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A}$ ***diagramja*** legyen az a t_A típusú elmélet, mely az $\mathfrak{A}^+$-ban igaz *változómentes* formulákból áll; magyarán ez az $\mathfrak{A}$ egyes elemei között tapasztalható viszonyok jegyzéke. Ebből az elméletből nyilvánvalóan rekonstruálható $\mathfrak{A}$, sőt, *ha* $\mathfrak{B}$ t_A *típusú struktúra, és* $\mathfrak{B} \models \Delta^0_{\mathfrak{A}}$, *akkor az* $a \mapsto c_a^{\mathfrak{B}}$ *hozzárendelés* $\mathfrak{A}^+ \hookrightarrow \mathfrak{B}$ *beágyazás.* A Löwenheim-Skolem tételekben viszont *elemi beágyazás* szerepel, ilyet kéne látnunk. Addig persze nem is várhatunk effélét, amíg csak a szigorúan csakis $\mathfrak{A}$ elemeiről szóló állításokat vesszük jegyzékbe.

Ezért a következőképp erősítjük a konstrukciót: $\Delta_{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A}$ ***teljes diagramja*** legyen az a t_A típusú elmélet, mely az $\mathfrak{A}^+$-ban igaz zárt formulákból áll; tehát ez lényegében $\mathfrak{A}^+$ elmélete. Ekkor már igaz lesz, hogy ***ha*** $\mathfrak{B}$ t_A ***típusú struktúra, és*** $\mathfrak{B} \models \Delta_{\mathfrak{A}}$***, akkor az*** $a \mapsto c_a^{\mathfrak{B}}$ ***hozzárendelés*** $\mathfrak{A}^+ \hookrightarrow \mathfrak{B}$ ***elemi beágyazás.***

Jó, de hogy találjunk a teljes diagramnak egy $\mathfrak{A}^+$-tól különböző modellt?

A Gödel nevéhez fűződő ún. kompaktsági tételt hívjuk segítségül, amely önmagában is érdekes állítás, s melyet számtalan módon be lehet látni (mi is meg fogunk említeni kettőt).

Kompaktsági tétel. Ha egy elmélet minden véges része konzisztens, akkor az az elmélet konzisztens.

■

Namármost, ha $\mathfrak{A}$ végtelen, akkor még egy, ∞-nel jelölt konstans felvétele után a $\Delta_{\mathfrak{A}} \cup \{\bigwedge_{i=1}^n \infty \neq c_{a_i} : a_1, \dots, a_n \in A\}$ elmélet véges részei konziszensek lesznek, hiszen ha a teljes diagramon túl egy $\bigwedge_{i=1}^n \infty \neq c_{a_i}$ alakú formulát is ki akarunk elégíteni, hát ki tudunk: $\mathfrak{A}^+$-ban ∞ gyanánt jelöljük ki A tetszőleges $a_1, \dots, a_n$-től különböző elemét. Így hát lesz egy modellje a fenti elméletnek, s ez akkor a mondottak szerint $\mathfrak{A}$-nak valódi elemi bővítése lesz.

Most megismerkedünk a modellelmélet talán legalapvetőbb eszközével, az ultraszorzattal; többek között a kompaktsági tétel is belátható ennek segítségével.

Ha I egy halmaz, egy $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ halmazrendszer ***szűrő*** I felett, ha benne van I, véges metszetre zárt és felszálló ($\mathcal{F} \ni X \subseteq Y \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$); ***ultraszűrő***, ha szűrő, és „a részhalmazok felét tartalmazza", azaz tetszőleges részhalmaz esetén a halmaz és komplementere közül pontosan egyik van benne. Hogy miért kerülnek szem elé „maguktól" ezek a fogalmak, s mi az algebrai jelentőségük, azt az olvasó a 15.: Hálóelmélet... tételnél, a disztributív hálókról és a Boole-algebrákról szóló fejezetekben találhatja meg. A $\mathcal{F}$-beli halmazokra használhatjuk az „$\mathcal{F}$-nagy" jelzőt, vagy ha világos, hogy melyik $\mathcal{F}$-ről van szó, hívhatjuk őket szimplán „nagy halmazoknak".

Ha $\mathfrak{A}_i$ $(i \in I)$ elsőrendű struktúrák egy rendszere, akkor a direkt szorzat-halmazon természetes módon adódik egy $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i$-vel jelölt struktúra (az $\mathfrak{A}_i$ $(i \in I)$ rendszer ***direktszorzata***): egy relációjel interpretáltja akkor teljesüljön egy „vektorra", ha koordinátánként teljesül az egyes $\mathfrak{A}_i$ struktúrákban, s a függvények értékét is a koordinátánkénti értékekből képzett vektor adja meg. A szorzat elemeire $\vec{a}$ típusú jelöléssel fogunk utalni, s az i koordinátabeli értékét a_i-vel jelöljük.

Ha $\vec{a}, \vec{b} \in \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i$, akkor legyen $\left\{\vec{a} = \vec{b}\right\} = \{i \in I : a_i = b_i\}$. Most ha $\mathcal{F}$ szűrő I felett, akkor $\equiv_{\mathcal{F}}$ legyen $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i$ azon ekvivalenciája, mely szerint $\vec{a} \equiv_{\mathcal{F}} \vec{b} \iff \left\{\vec{a} = \vec{b}\right\} \in \mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ szűrő-volta miatt ez tényleg ekvivalencia lesz, mitöbb, le lehet vele faktorizálni a szorzatot:

Jelöljük $[\vec{a}]_{\mathcal{F}}$-fel $\vec{a}$ ezen ekvivalencia szerinti osztályát (az index elhagyható, ha ez nem okoz félreértést). Ha $R \in t$ esetén úgy akarjuk interpretálni R-t a $\prod_{i\in I} A_i/\mathcal{F}$ halmazon, hogy $([\vec{a}_1], \dots, [\vec{a}_n])$-re teljesülék R, ha nagy halmazon teljesül, azaz azon i-k halmaza, melyre $((a_1)_i, \dots, (a_n)_i) \in R^{\mathfrak{A}_i}$, $\mathcal{F}$-nagy halmaz; ill. ha $f \in t$-t úgy akarjuk interpretálni, hogy $f([\vec{a}_1], \dots, [\vec{a}_n]) = [f(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)]$, akkor megtehetjük, mert ezek a dolgok jóldefiniáltak lesznek.

Tehát az $\mathfrak{A}_i$ $(i \in I)$ rendszer $\mathcal{F}$ szerinti ***redukált szorzata***, $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{F}$ legyen a $\prod_{i\in I} A_i/\mathcal{F}$ *alaphalmazú struktúra az iménti interpretációval*; ha $\mathcal{F}$ történtesen ultraszűrő, akkor a szerinte vett redukált szorzatot ***ultraszorzatnak*** nevezzük. Ultraszűrőkre tipikusan $\mathcal{U}$-val utalunk.

Łoś lemma, az ultraszorzatok alaptétele. Az $\widetilde{\mathfrak{A}} = \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$ ultraszorzatban adott φ formula, $\vec{e} : \mathrm{Var} \longrightarrow \widetilde{A}$ értékelés mellett pontosan akkor teljesül $\widetilde{\mathfrak{A}} \models \varphi[\vec{e}]$, ha azon i-k halmaza, melyre $\mathfrak{A}_i \models \varphi[e_i]$, $\mathcal{U}$-nagy.

Speciálisan $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$-ben pontosan akkor érvényes egy formula, ha nagy indexhalmazon érvényes.

Speciálisan egy $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ ultrahatvány elemien ekvivalens $\mathfrak{A}$-val. ■

Nosza hát, akkor kezdődjék az ultraszűrő-vadászat!, mondhatjuk. Ultraszűrők előállítására a legegyszerűbb módszer a következő: veszünk egy $i \in I$-t, s ekkor $\mathcal{U}_i = \{X \subseteq I : i \in X\}$ ultraszűrő lesz. Ezzel azonban nem jutunk messzire: $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}_{i_0} \cong \mathfrak{A}_{i_0}$. Ezért az ilyen ultraszűrőket *triviálisnak* nevezzük. Egy ultraszűrő pontosan akkor triviális, ha tartalmaz véges halmazt. Tehát véges indexű ultraszorzatok nem adnak új dolgot.

Nem-triviális ultraszűrőt konstruktíve megadni viszont nem lehet. Hanem pl. a következő, Zorn-lemma alapú alapvető segédtétellel kereshetünk nem-trivi ultraszűrőket:

Egy halmazrendszer ***centrált***, ha a tagjaiból képzett véges metszetek nem üresek.

Lemma. Minden I feletti centrált halmazrendszer ultraszűrővé bővíthető. ■

(Így speciel minden $\mathcal{P}(I)$-től különböző szűrő is ultraszűrővé bővíthető.)

Ha I végtelen, az I feletti kovéges (véges komplementerű) halmazok rendszere centrált, így ultraszűrővé bővíthető, s ez nem-trivi ultraszűrő lesz, mert nem tartalmazhat egyszerre egy halmazt meg a komplementerét is.

Most ha egy Γ elmélet minden véges része konzisztens, azaz minden $\Theta \subseteq \Gamma$ végesnek vehetjük egy $\mathfrak{A}_\Theta$ modelljét, akkor a következő ultraszorzatos konstrukció vezet el a kompaktsági tételhez:
Az $I = \{\Theta \subseteq \Gamma : \Theta \text{ véges}\}$ halmaz feletti $\{\{\Theta \in I : \Theta \ni \varphi\} : \varphi \in \Gamma\}$ rendszer centrált lesz, így egy $\mathcal{U}$ ultraszűrővé bővíthető. Ekkor pedig $\prod_{\Theta\in I} \mathfrak{A}_\Theta/\mathcal{U} \models \Gamma$, tehát Γ is konzisztens.

Szokás mondani, hogy modellelméletben a tételek bizonyítása abból áll, hogy meg kell találni a jó ultraszűrőt.

Mellesleg az ultraszorzat segítségével közvetlenül, a kompaktsági tételt kiiktatva is csinálhatunk valódi elemi bővítést (ami ugye a felszálló Löwenheim-Skolemhez kellett): ha $\mathfrak{A}$ struktúra, $a \in A$, $\widetilde{a} \in \mathfrak{A}^I$ legyen a minden koordinátában a vektor. És történetesen ***az*** $a \mapsto [\widetilde{a}]_\mathcal{U}$ ***hozzárendelés elemien beágyazza*** $\mathfrak{A}$***-t az*** $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ ***ultrahatványba***. És ha $\mathfrak{A}$ végtelen, akkor véve A-n egy $\mathcal{U}$ nem-trivi ultraszűrőt, az efféle beágyazás $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{A}^A/\mathcal{U}$ viszonylatban valódi elemi bővítést ad, hiszen $[\mathsf{id}_A]$ különbözni fog az $[\widetilde{a}]$ elemektől (lévén hogy csak egyetlenegy közös koordinátája lesz velük).

Az axiomatizálhatóság is megfogható az ultraszorzaton keresztül:

Egy Γ elmélet modelljeinek osztályát $\mathsf{Mod}\,\Gamma$-val jelöljük. Továbbá az „elmélete" fogalmat kiterjesztjük struktúraosztályokra is: a K ***struktúraosztály elmélete*** legyen azon formulák halmaza, amelyek K minden elemében érvényesek; ezt $\mathsf{Th}\,K$-val fogjuk jelölni. Azt mondjuk, hogy ***a*** Γ ***formulahalmaz axiomatizálja a*** K ***struktúraosztályt***, ha $K = \mathsf{Mod}\,\Gamma$. K ***axiomatizálható***, ha alkalmas Γ-ra $K = \mathsf{Mod}\,\Gamma$; ez persze azzal ekvivalens, hogy $K = \mathsf{Mod}\,\mathsf{Th}\,K$. K ***végesen axiomatizálható***, ha alkalmas *véges* Γ-ra $K = \mathsf{Mod}\,\Gamma$; ez persze azzal ekvivalens, hogy alkalmas φ formulára $K = \mathsf{Mod}\,\varphi$, hiszen egy véges formulahalmaz elemeit össze lehet konjunktálni.

Tétel.

- Egy struktúraosztály pontosan akkor axiomatizálható, ha zárt az elemi ekvivalenciára és az ultraszorzatra (tehát ha valamik benne vannak, akkor a velük elemien ekvivalensek, ill. ultraszorzataik is benne vannak).
- Egy struktúraosztály pontosan akkor axiomatizálható végesen, ha mind ő, mind a (az adott típusú struktúrák osztályára vett) komplementere axiomatizálható.

■

A feltételek szükségessége az eddigiekből nyilvánvaló (pl. ha $K = \mathsf{Mod}\,\varphi$, akkor komplementere nem más, mint $\mathsf{Mod}(\neg\varphi)$). A másik irány a kompaktsági tételnél használthoz hasonló ultraszorzatos konstrukció segítségével látható be.

Ez a tétel valamiféle legitimációja az ultraszorzatnak: ebből látszik, hogy az ultraszorzat nem csak valami esetleges konstrukció ami véletlenül még az elsőrendű összefüggéseket is megőrzi, hanem szoros és lényegi kapcsolatban áll az elsőrendű logikával, s a révén elsőrendű logikai fogalmak teljesen szintaxis-mentes (azaz tisztán szemantikai) jellemzése adható. Erre látunk majd még példát, akár most rögtön:

Shelah tétele. Két struktúra pontosan akkor elemien ekvivalens, ha van izomorf ultrahaványuk.

■

Ebből adódik az axiomatizálhatóságnak egy már tényleg tisztán szemantikai jellemzése:

Következmény. Egy struktúraosztály pontosan akkor axiomatizálható, ha zárt az izomorfiára, az ultraszorzatra, és az „ultragyökre" (azaz ha egy struktúra valamely ultrahatványa az osztályban van, akkor maga a struktúra is benne van az osztályban). ■

A fenti axiomatizálhatósági tételből látható pl., hogy a gráfok típusában (itt gráfon egy darab szimmetrikus irreflexív binér relációval ellátott struktúrát értünk) a körök osztálya nem axiomatizálható, az erdők osztálya – amit könnyű axiomatizálni – nem axiomatizálható végesen; hasonlóképp, a jólrendezések osztálya nem axiomatizálható, míg a végtelen halmazok, torziómentes Abel-csoportok, (algebrailag) zárt testek osztályai, bár könnyű őket axiomatizálni, nem axiomatizálhatóak végesen. Stb.

Ha Θ formulahalmaz, azt mondjuk, hogy egy K struktúraosztály ***axiomatizálható*** Θ***-formulákkal***, ha van olyan $\Gamma \subseteq \Theta$, hogy Γ axiomatizálja K-t. Egy formula ***univerzális*** (***egzisztenciális***), ha úgy néz ki, hogy egy kvantormentes formula előtt néhány univerzális (egzisztenciális) kvantor áll.

Egy K struktúraosztály ***zárt a részstruktúra-képzésre***, ha $\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{A} \in K \Rightarrow \mathfrak{B} \in K$; ill. ***zárt a bővítésre***, ha $\mathfrak{B} \geqslant \mathfrak{A} \in K \Rightarrow \mathfrak{B} \in K$ (továbbá szokás mondani, hogy egy Γ elmélet ***megőrződik a részstruktúrákra*** (***bővítésekre***), ha $\mathsf{Mod}\,\Gamma$ zárt a részstruktúra-képzésre (bővítésre)).

Nyilvánvaló, hogy egy struktúraosztály pontosan akkor axiomatizálható kvantormentes formulákkal, ha univerzálisokkal. Nyilvánvaló továbbá, hogy ha egy struktúraoszály univerzálisan (mármint univerzális formulákkal) axiomatizálható, akkor zárt a részstruktúra-képzésre, ill. ha egzisztenciálisan axiomatizálható, akkor zárt a bővítésre. A következő tétel szerint – feltéve az axiomatizálhatóságot – ez elégséges is.

Tétel.

- Egy struktúraosztály pontosan akkor axiomatizálható univerzálisan, ha axiomatizálható és zárt a részstruktúra-képzésre.
- Egy struktúraosztály pontosan akkor axiomatizálható univerzálisan, ha axiomatizálható és zárt a bővítésre.

■

Az axiomatizálhatóságra adott tisztán szemantikus kritérium és az iménti tétel összevetéséből adódik, hogy

Következmény. Egy struktúraosztály pontosan akkor axiomatizálható univerzálisan, ha zárt izomorfizmusra, ultraszorzatra és részstruktúra-képzésre. ■

— Az ilyesfajta állításokat *megőrzési tételeknek* nevezik.

Egy erős legitimáció: az elsőrendű logika teljessége

Szeretjük a szemantikai következményfogalmat, mert megfelel intuíciónkak, nagyjából ilyen a hétköznapi életben használt következményfogalom is: a „Legyen ez-az, így-úgy, hogy... Ekkor bárhogy is mégamaz..., tejlesül az, hogy pontpontpont" típusú tételeket úgy szoktuk bizonyítani, hogy először is veszünk egy ezt-azt, ami kielégíti az „így-úgy, hogy..." premisszákat, még választunk tetszőlegesen egy mégamazt, ezután lépésről-lépésre lejátszva a cselekményt belátjuk, hogy ebben az imént felhúzott, premisszákhoz igazított színpadon csak úgy játszhatnak a színészek, hogy teljesüljön az, hogy pontpontpont.

Azonban merülhetnek fel problémák e fogalommal kapcsolatban. Kissé gyengülne meggyőző ereje, ha úgy járnánk vele, mint pl. a kontinuumhipotézis esetében, és találnánk φ-t, ψ-t, hogy „$\varphi \models \psi$" független volna a ZFC axiómáktól...

Ez az agyrém nem is annyira irreális szituáció: az ún. másodrendű logikában pl. – ami annyival több, hogy nemcsak elemekre, hanem relációkrá utlaó változókat is használhatunk, azaz mondhatunk „létezik olyan gráf, hogy..." típusú mondatokat is – konkrétan a külső halmazelmélet kontinuumhipotézise megfogalmazható egy φ formulával (tehát $\models \varphi$ épp akkor áll fenn, ha a kontinuumhipotézis).

Szerencsére az elsőrendű logika nem ilyen. Arra nézvést, hogy ezt belássuk, az ötlet az, hogy keressünk olyan következményfogalmat, ami a *finit* módszerek körén belül marad. A finitizmus lényege az, hogy papírral és ceruzával effektíve előállítható objektumokat használunk, amikkel nincs mese, hogy ott vannak, vagy sem, mert látjuk és kész. Pl. egy halmazokra utaló bizonyítás nem finit, mert mi az, hogy halmaz?... – attól még nem tudjuk, hogy leírjuk a papírra, hogy „legyen X egy halmaz".

Végül is a logika alapélménye nem az volt, amivel a logikai részt kezdtük, tehát hogy világutánzatokról szóló nyelvek kifejezőerejét vizsgálja – ez meglehetősen modern idea –, hanem az, hogy két ember vitatkozik, és nem bírnak dűlőre jutni, végül aztán az egyik kifakad, hogy „Jó, akkor vegyük át az érvelésed lépésről lépésre, bontsuk le olyan kicsi darabkák egymásutánjára, amikről már evidens, hogy helyesek-e vagy sem, és akkor majd meglátjuk, megáálja-e helyét vagy sem. Mert például annyi bizonyos, hogy...", és ezekután nekilátunk meghatározni azon érvelési szabályok körét, melyek érvényesége nem vitatott.

Ez a megközelítés tényleg biztonságos, így bakot nem lőhetünk, amit e módszerrel belátunk, az biztosan megállja a helyét, de felmerül vele kapcsolatban egy súlyos probléma: mi a garancia arra nézvést, hogy a nagy fáradozással egybegyűjtött és kanonizált szabályrendszer ***teljes***, azaz bármilyen helyes következtetés belepréselhető ebbe a keretbe, s egy szép napon nem jön-e egy okos ember, aki úgy érvel, hogy azt nem tudjuk követni szabályainkkal?

E probléma megoldódna, ha tudnánk valami szabatos definícióját adni annak, hogy „egy állítás igaz", s aztán belátnánk, hogy a szabályrendszerünk megszabta koreográfiával tetszőleges igaz állításhoz el tudunk tácolni. Itt ér össze a két szál: ha belátnánk, hogy a szemantikai módon meghatározott igazságfogalom (intuitív megfogalmazásban: „egy állítás igaz, ha minden lehetséges világban igaz") szerint pontosan akkor igaz egy állítás, ha szabályrendszerünk eszközeivel le tudjuk vezetni, akkor ez először is megmutatná, hogy a világok a nyelv által elérhető szempontokból abszolút módon, a meta- (külső-) szinttől függetlenül viselkednek (a levezetések finit volta miatt), másodszor is, ekkor már van egy elfogadható igazság-fogalmunk, amin mérni tudjuk szabályrendszerünk hatékonyságát, és pont azt látjuk, hogy valóban, minden igaz állítás a mi rendszerünkben is igazolható. Ezzel legitimáltunk igazság-fogalmunkat. Ez olyan, mint hogy két, az asztalon heverő kártyalap külön-külön nem tudja a maga hosszanti kiterjedését magassággá konvertálni, de egymásnak támasztva őket kiemelkednek az asztal síkjából.

Most hogy látjuk, mi végre teszünk is ilyet, megadjuk a levezetés és a szintaktikai következményfogalom, ill. -érvényesség formális definícióját.

Levezetési szabálynak hívunk valamely, formulák egy véges halmazából (a *premisszákból* és egy formulából (a *konklúzióból*) képzett rendezett párt; az ilyet tört alakban szoktunk leírni (pl. $\dfrac{\varphi,\ \varphi\to\psi}{\psi}$, ahol φ,ψ tetszőleges formulák — ezt jegyezzük meg, ez az ún. ***modus ponens***-séma, másnéven leválasztási szabály). Egy ***levezetési rendszer*** formulák és levezetési szabályok valamely halmaza (a levezetési rendszerben fellelhető formulákat a rendszer *axiómáinak* nevezzük). Ha a finitizmus szempontjait szem előtt tartjuk, ambicionáljuk, hogy effektíve eldönthető legyen egy formuláról, ill. egy szabályról, hogy benne van-e a rendszerben. Mivel úgyis csak néhány konkrét levezetési rendszert szoktak vizsgálni, nem érné meg formalizálni, hogy pontosan miféle, effektív eldönthetőséget garantáló alakú legyen egy levezetési rendszer*. A használt levezetési rendszerek általában úgy festenek, hogy az axiómák, szabályok valamely formula-sémáknak, szabály-sémának eleget tevő formulák összességeként adódnak (mint pl. a modus ponens-séma alakú szabályok), esetleg néhány plusz kitétellel, minthogy „ebben a formulában ne legyen amannak a változónak szabad előfordulása" — az ilyesfajta rendszerekről látható, hogy a hozzájuk tartozás eldönthető. A hozzátarozás eldönthetőségének kérdése különben nem érinti az alábbi eredményeket.

Egy Γ elméletből való, $\mathcal{S}$ levezetési rendszer szerinti ***levezetés*** v. ***bizonyítás*** formuláknak egy olyan $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ sorozata, hogy φ_i-re a következők valamelyike teljesül:

- $\varphi_i\in\Gamma\cup\mathcal{S}$;
- valamely $j_1,\dots j_k<i$-re $\dfrac{\varphi_{j_1},\dots,\varphi_{j_k}}{\varphi_i}$ szabálya $\mathcal{S}$-nek.

Egy φ formula ***levezethető*** Γ-ból $\mathcal{S}$ szerint ($\Gamma\vdash_{\mathcal{S}}\varphi$), ha van olyan Γ-ból való $\mathcal{S}$ szerinti levezetés, aminek ő az utolsó formulája (egy ilyen levezetés: φ egy *bizonyítása*).

Egy $\mathcal{S}$ levezetési rendszer ***helyes***, ha nem vezethetők le vele hamis implikációk, azaz ha tetszőleges Γ és φ esetén $\Gamma\vdash_{\mathcal{S}}\varphi\Rightarrow\Gamma\models\varphi$; ill. ***teljes***, ha minden igaz implikáció levezethető vele, azaz a $\Gamma\models\varphi\Rightarrow\Gamma\vdash_{\mathcal{S}}\varphi$ teljesül (ez most akkor egy más teljesség-fogalom, mint az elméletekre használt).

Most már kimondhatjuk:

Gödel teljességi tétele. Létezik helyes és teljes levezetési rendszer. ■

A használt levezetési rendszerek általában triviálisan helyesek. Annak bizonyításánál, hogy valamely $\mathcal{S}$ rendszer teljes, a lényegi mozzanat az, hogy belássuk: ha a Γ elmélet ellentmondásmentes (szintaktikailag konzisztens), azaz nem vezethető le belőle egy formula és a tagadása is, akkor van

*Ez persze csak addig igaz, amíg célunk néhány konkrét logikai rendszer – mint pl. az elsőrendű logika – vizsgálata; e kijelentés nem állná meg a helyét, ha a logikai rendszerek *általános elméletét* akarnánk kiépíteni, mert akkor ahhoz, hogy olyamiket bizonyíthassunk, hogy „egy tetszőleges szemantikához pontosan akkor van ilyen-olyan levezetési rendszer...", precízen tudnunk kell, mit értsünk „ilyen-olyan" alatt.

modellje. Erre az egyik lehetséges út a Henkin-féle: először egy szintaktikailag teljes, ellentmodásmentes Γ^*-gá bővítjük Γ-t (olyanná, hogy tetszőleges φ esetén $\Gamma^* \vdash_{\mathrm{S}} \varphi$, $\Gamma^* \vdash_{\mathrm{S}} \neg\varphi$ valamelyike teljesül) – ami konkrét, véges vagy akár rekurzióval adott t típus esetén mehet rekurzíve, absztrakt szinten meg Zorn-lemmával –, aztán Γ^* teljességét kihasználva szintaktikai objektumokból (kifejezések „$\Gamma^* \vdash_{\mathrm{S}} k = k'$"-re vett ekvivalenciaosztályai) összerakunk egy modellt. Ezzel egyben belátjuk a leszálló Löwenheim-Skolem tételnek azt a verzióját, hogy konzisztens elméletnek van $|t|\,\omega$-nál nem nagyobb modellje.

A teljességi tételből a kompaktsági tétel is egyszerűen kijön: ha egy Γ elmélet inkonzisztens, akkor levezethető belőle valamely formula és a negáltja is; persze az ezen levezetések során használt formulák halmaza is már inkonzisztens, és ez egy véges formulahalmaz. Tehát a teljességi tételnek és a levezetéseknek olyan esetben is van jelentősége, amikor nem beszélhetünk finitizmusról v. a levezetési rendszerben levés eldönthetőségről, pl. mert $|t| > \omega$.

„A teljesség kedvéért" mutatunk egy helyes és teljes levezetési rendszert (a példát Ruzsa Imre: *Logikai szintaxis és szemantika* c. könyvéből vettük). Adott φ formulára, x változóra és k kifejezésre legyen $\varphi[x:k]$ az a formula, amit φ-ből x k-ra cserélésével kapunk (tulajdonképp $[x:k]$ is tekinthető konnektívának).

- levezetési szabályai a modus ponens sémának eleget tevő szabályok;
- axiómái:
  - a $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ alakú formulák;
  - a $(\varphi \to (\psi \to \vartheta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \vartheta))$ alakú formulák;
  - a $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$ alakú formulák;
  - a $\forall x\, \varphi \to \varphi[x:k]$ alakú formulák;
  - a $\forall x\, (\varphi \to \psi) \to (\forall x\, \varphi \to \forall x\, \psi)$ alakú formulák;
  - az olyan $\varphi \to \forall x\varphi$ alakú formulák, ahol x nem szabad változója φ-nek;
  - az $x = x$ alakú formulák;
  - az $x = y \to (\varphi[z:x] \to \varphi[z:y])$ alakú formulák;
  - továbbá ha valamely formula az axiómák között van, akkor, ha eléje néhány univerzális kvantort írunk, az is legyen axióma.

A továbbiakban feltesszük hát, hogy van nekünk egy konkrét, helyes és teljes levezetési rendszerünk; a szerinte való levezethatőséget simán $\vdash$-val jelöljük.

Eldönthetőség, kiszámolhatóság és nem-teljesség

Most, hogy kézhez kapta, a formalista finitista boldogan szaladna világgá a helyes és teljes levezetési rendszerrel, hogy bizonyítsa vele az útjába akadó összes fennálló implikációt ($\Gamma \models \varphi$). De ugye ahhoz, hogy ezt megtehesse, Γ nem lehet akármi: mégha mondjuk végesnek lennie azért nem kell, mindenesetre bírnia kell valamiféle véges reprezentánssal, ami alapján eldöntheti egy formuláról, hogy benne van-e vagy sem. Azaz: kell lennie egy formulákon végrehajtható algoritmusnak, ami 1-et ad ki, ha az adott formula Γ-beli, s 0-t máskülönben (ekkor persze maga az algoritmus jó véges reprezentánsnak). (Mindehhez persze szükséges előfeltevés, hogy azt eldönthessük, valami formula-e vagy sem, ami akkor lehet nem-triviális, ha a típus végtelen).

Az ilyen Γ-kat ***axiómarendszernek*** fogjuk hívni.

Ez így nem egy precíz fogalom, mert nem definiáltuk formálisan az algoritmikusan kiszámíthatóság vagy az effektív eldönthetőség fogalmát. Most pótolni fogjuk ezt a hiányosságot. E fogalmak formalizálására több kísérlet is született, melyekről aztán kiderült, hogy ugyanazokat a függvényeket minősítik kiszámíthatónak, ugyanazokat a relációkat eldönthetőnek. Mi most, logikai alkalmazások végett egy logikához közeli formalizációt fogunk használni, a *rekurzív függvényekét.*

Egy n-változós rekurzív függvény $\omega^n \longrightarrow \omega$ függvény lesz; és a rájuk adandó definíciónak meg lesz az a jó tulajdonsága, hogy ha valamiről belátjuk, hogy e definíciónak eleget tesz, akkor könnyen felírhatunk egy formulát, ami $\mathfrak{N}$-ben épp ezt a függvényt definiálja (ezt értettük az alatt, hogy e fogalom a logikához közeli).

Azt, hogy valamely $A' \subseteq A$-ra $f : A' \longrightarrow B$ – azaz hogy f *parciális függvény* A-n –, úgy jelöljük, hogy $f : A \supseteq \longrightarrow B$. Ha f parciális függvény, akkor az $f(a)$ jelölésbe beleértjük azt is, hogy f

értelmezett a-n. Ha hansúlyozni akarjuk egy függvényről, hogy ő az egész A-n értelmezett, *teljes függvénynek* fogjuk titulálni. Ha $f : \omega^n \supseteq \longrightarrow \omega$, akkor legyen $\mu f : \omega^{n-1} \supseteq \longrightarrow \omega$ az a függvény, mely az $\{\vec{x} \in \omega^{n-1} : \exists u \in \omega\ f(\vec{x}, u) = 0\}$ halmazon értelmezett, és egy ilyen $\vec{x}$-re $\mu f(x)$ értéke a legkisebb u, mellyel $f(\vec{x}, u) = 0$ teljesül (ez az ún. ***μ-operáció***). $\chi_\geqslant$-vel jrlöljük a $\geqslant$ reláció karakterisztikus függvényét (tehát $\chi_\geqslant : \omega^2 \longrightarrow \{0,1\}$ és $\chi_\geqslant(a,b) = 1 \iff a \geqslant b$). $\pi_i^n : \omega^n \longrightarrow \omega$ fogja jelölni az n változós, i-edik változóra vett projekciót.

A ***parciális rekurzív függvények osztálya*** az $\omega^n \supseteq \longrightarrow \omega$ $(n \in \omega)$ függvények legszűkebb olyan osztálya, mely tartalmazza az összeadást, a szorzást, $\chi_\geqslant$-t, a projekciókat, továbbá zárt a függvények egymásba való helyettesítésére és a μ-operációra.

A ***rekurzív függvények osztálya*** az $\omega^n \longrightarrow \omega$ $(n \in \omega)$ függvények legszűkebb olyan osztálya, mely tartalmazza az összeadást, a szorzást, $\chi_\geqslant$-t, a projekciókat, továbbá zárt a függvények egymásba való helyettesítésére és a μ-operációra (úgy értve, hogy ha μ egy teljes függvényből parciálisat csiná, akkor az eredményt eldobjuk).

A teljes és parciális rekurzív függvények kapcsolatáról szól a következő

Állítás. Egy függvény pontosan akkor rekurzív, ha olyan parciális rekurzív függvény, ami teljes. ■

Nem tudjuk, pontosan mit jelent az, hogy „effektíve kiszámítható”, de a definíciók alapján annyi biztos, hogy a rekurzív függvények ilyenek. Ahhoz, hogy elfogadódjék a rekurzív függvény fogalma, mint az effektív kiszámíthatóság formalizáltja, egy rakat bevett konstrukciót kell rekurzív függvényekkel realizálni.

Egy *reláció* rekurzív, ha karakterisztikus függvénye rekurzív függvény (a rekurzív relációk köre lesz a „beletartozási probléma eldönthető” képzet formális megfelelője). Igaz az, hogy egy n-változós függvény pontosan akkor rekurzív, ha ő, mint $n{+}1$ változós reláció rekurzív, tehát ha valami alternatív módon a rekurzív relációk körét közvetlenül, a rekurzív függvényekre nem hivatkozva adnánk meg, akkor is tudhatnánk, mely függvényeket tartsunk rekurzívnak. Egy ilyen, méginkább logika-közeli megközelítést mutatunk most be.

A továbbiakban, ha mást nem mondunk, minden szintaktikai objektum az aritmetika nyelvéből $(0, 1, +, \cdot)$ vétetik. Elmondjuk, hogy az $\mathfrak{N}$ struktúrához hogyan viszonyulnak a rekurzív relációk. Először is, $\mathfrak{N}$-ben definiálható a $x \leqslant y$ reláció a $\exists z\ x + z = y$ formulával, így $\leqslant$ szabadon használható $\mathfrak{N}$ formuláiban. ha φ formula, k kifejezés, legyen $(\exists x \leqslant k)\,\varphi$ a $\exists x\,(x \leqslant k \wedge \varphi)$ formula, ill. $(\forall x \leqslant k)\,\varphi$ a $\forall x\,(x \leqslant k \rightarrow \varphi)$ formula (ezeket a formula-operációkat hívjuk *korlátos kvantoroknak*); továbbá az egyszerűség végett tetszőleges ω feletti relációra megengedjük a logikai konnektívák alkalmazását (speciálisan a korlátos kvantorét is), ami értelemszerűen értendő. Az alábbi definíciók azonosnak tekintik az $\mathfrak{N}$ felett ekvivalens formulákat.

Egy formula ***Σ_0-formula***, ha minden kvantora korlátos.

A Σ-formulákat a következőképp definiáljuk: a nyílt formulák Σ-formulák; továbbá Σ formulákból a $\wedge$, $\vee$, $\exists x$, $(\forall x \leqslant k)$ konnektívákkal képzett formulák is Σ-k; más nem. Egy ω feletti reláció ***Σ-reláció***, ha $\mathfrak{N}$-ben definiálható Σ formulával. (Hasonlóan Σ_0-ra.)

Tétel. Egy reláció pontosan akkor rekurzív, ha mind ő, mind a komplementere Σ. ■

Következmény. A rekurzív relációk zártak a Boole-konnektívákra és a korlátos kvantorokra, speciálisan a Σ_0 relációk rekurzívak. ■

(Persze igazából előbb látjuk be a következményt, később a tételt; illetve adott rekurzív függvényhez őt definiáló Σ-formulát felírni könnyű „józan paraszti ésszel”.)

Ezek után már ahhoz, hogy olyan klasszikus aritmetikai függvények, relációk rekurzivitását belássuk, mint a levágott kivonás (ha a kisebbítendő kisebb a kivonandónál, az eredmény 0), oszthatóság, gyök-egészrész, hányados-egészrész, osztási maradék, nem kell mást tenni, mint Σ_0 formulával definiálni őket.

Ez az apparátus már elég ahhoz, hogy definiáljunk egy rekurzív ***béta-függvényt***, azaz egy olyan $\beta_x(y)$ kétváltozós rekurzív függvényt, ami minden véges sorozat reprezentálására alkalmas a következő értelemben: ha $a_1, \ldots, a_n \in \omega$, akkor van $a \in \omega$, hogy $\beta_a(0) = n$, és $\beta_a(i) = a_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Ekkor a-ból rekonstruálható a kiinduló sororzat, mint $\beta_a(1), \ldots, \beta_a(\beta_a(0))$. Tehát

Tétel (Gödel). Létezik rekurzív béta-függvény. ■

Ezzel nagyon erős fegyver került a kezünkbe: az adott $\vec{a}$ véges sorozat ***Gödel-száma*** legyen a legkisebb, őt a fenti értelemben reprezentáló szám. A Gödel-szám-megfeleltetés injektív leképezése az ω

feletti véges sorozatoknak ω-ba, és az „x valakinek a Gödel-száma" reláció rekurzív, így a sorozatokon operáló konstrukciók lefordíthatók számokon operálókra. Tipikus példa erre a rekurzívan definiált függvények esete, amikor az adott helyen a függvényértéket a kisebb helyeken vett függvényértékek *sorozatának* segítségével számoljuk ki. Hogy e lefordítások „minden ésszerű esetben" rekurzívak lesznek, az leginkább a *konkatenáció* v. „egymás után írás" operációnak köszönhető: az $a_1, \dots, a_n$ és $b_1, \dots b_k$ sorozatok kontenáltja legyen $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k$; a Gödel-számokon ennek megfelelően definiált művelet rekurzív lesz.

Az a jólismert rekurzióval való függvénydefiniálási metódus, amivel pl. a 2^n, $n!$ függvények definiálódnak, ***primitív rekurzió*** néven ismeretes, és a következőképp formalizálható: az adott $g_{\vec{y}}$ „kezdőfeltételből" és $h_{\vec{y}}(z,x)$ „rekurziós szabályból" primitív rekurzióval definiált függvény a következő feltételekkel megadott $f_{\vec{y}}(x)$ függvény: $f_{\vec{y}}(0) = g_{\vec{y}}$, $f_{\vec{y}}(x+1) = h_{\vec{y}}(f_{\vec{y}}(x), x)$. (Itt $\vec{y}$ csak a paraméter szerepét játssza, azért tettük le az indexbe.)

Tétel. Rekurzív kezdőfeltételből és rekurziós szabályból primitív rekurzióval definiált függvény rekurzív. ■

Sőt, ha (felhasználva a Gödel-számozást) olyan rekurziós definiálási eljárást formalizálunk, ahol a soron következő hely értéke az összes addigi függvényértéktől függ, az iménti tétel arra az esetre is érvényes lesz.

Namármost rendben, hogy a számokon értelmezett függvények és relációk körében leszögeztük, melyek az effektíve kiszámíhatóak, ill. eldönthető beletartozási problémájúak, de még mindig nem tudjuk, pontosan mit értsünk az alatt, hogy egy elmélet beletartozási problémája eldönthető. A szintaktikai objektumok és a számok világa közötti hídverés, az ún. aritmetizálás segít ezen. Hiszen a szintatikai objektumok nem mások, mint valamely jelkészletből képzett véges sorozatok — véges sorozatokat meg már tudunk számokba kódolni (hogy ezt kihasználhassuk, persze, a jeleket valahogy meg kell feleltetni a számoknak; hát megtesszük, ezt is Gödel-számnak hívjuk). Így hát már tudjuk, mikor nevezzük rekurzívnak karaktersorozatok valamely halmazát. Ezzel megtaláltuk a formulahalmazok körében a „beletartozás eldönthetősége" formális megfelelőjét (ez persze kódolás-független). Hogy meg legyünk elégedve e formalizációval, élénken használva a rekurziós procedúrákat és a konkatenációt, belátjuk, hogy a nekünk kedves szintaktikai objektumok osztályai rekurzívak lesznek: úgymint kifejezések, formulák, véges (vagy akár rekurzív) elméletből való levezetések, stb.

Ezzel formálisan korrektté tettük a fejezet elején definiált „axiómarendszer" fogalmat is: ***formulák egy halmaza axiómarendszer, ha rekurzív.*** Továbbá egy Γ elmélet ***eldönthető (következményű)***, ha a belőle levezethető formulák halmaza (Lev_Γ) rekurzív. (Eddig az „eldönteni" igét az „eldönthető *beletartozás*" kontextusában használtuk, ez ne okozzon zavart).

ω egy részhalmaza ***rekurzíve felsorolható*** (RE), ha egyváltozós rekurzív függvény értékkészlete (az egyváltozósság nem megkötés, csak azért írtuk oda, hogy „felsorolásíze" legyen a dolognak). A rekurzíve felsorolható halmazok épp a Σ_1-halmazok. Egy halmaz ***ko-(rekurzíve felsorolható)*** (coRE), ha RE halmaz komplementere. *Egy halmaz pontosan akkor rekurzív, ha RE és coRE*: könnyen végiggondolható, hogy rekurzív halmaz RE és coRE, a másik irány intuitív igazolása: úgy csinálunk eldöntési procedúrát egy RE és coRE halmazhoz, hogy párhuzamosan futtatjuk neki, ill. a komplementerének a felsorolását, és előbb-utóbb valamelyikben elő kell bukkannia a tesztelendő elemnek. A RE és coRE fogalmak a Gödel-számozás révén relációkra, ill. szintaktikai objektumokra is kiterjeszthetők. Egy adott axiómarendszerből levezethető formulákhoz felsorolást találni nem nehéz, így Lev_Γ midig RE.

Állítás. Teljes axiómarendszer eldönthető. ■

— hiszen ilyenkor Lev_Γ felsorolásában a formulákat megnegálva a komplementer felsorolását kapjuk, így Lev_Γ coRE.

$\mathfrak{N}$ képes megnevezni elemeit, az $(\dots(1+1)+\dots)+1$ kifejezések révén melyek közül az n tagút $\bar{n}$-nal jelöljük. Ezek N halmazát fogjuk tekinteni a számok szintaktikai reprezentánsának.

Mondjuk azt, hogy a *K struktúraosztályban a $\varphi(\vec{x},y)$ formula függvényszerű*, ha $K \models \forall\vec{x}\,\exists! y\,\varphi(\vec{x},y)$. A $\varphi(\vec{x},y)$ formula ***reprezentálja K-ban az $f(\vec{x}) : \omega^n \longrightarrow \omega$ függvényt***, ha függvényszerű, és tetszőleges K-beli struktúrában f-et (mármint az $f(\vec{x}) = y$ összefüggést) adja ki N elemei között. S a $\varphi(\vec{x})$ formula ***reprezentálja K-ban az $R(\vec{x}) \subseteq omega^n$ relációt***, ha tetszőleges K-beli struktúrában R-t adja ki N elemei között. Továbbá a Γ ***elmélet reprezentálja f-et, ill. R-t***, ha $\mathsf{Mod}\,\Gamma$ teszi ezt.

Tehát egyelőre annyit tudunk, hogy $\mathfrak{N}$-ben reprezentálhatók a rekurzív függvények és relációk. Ennél erősebb állítás axiomatizálható struktúraosztályokról (tehát elméletekről) állítani azt, hogy őbennük reprezentálhatók a rekurzív fügvények, relációk, főleg, ha a struktúraosztály „nagy" (az elmélet „kicsi"). A Robinson-aritmetikát Q-val jelöljük.

Tétel. Q-ban reprezentálhatók a rekurzív függvények és relációk, sőt, Q tetszőleges $\mathfrak{A}$ modelljében $N^{\mathfrak{A}}$ $\mathfrak{N}$-nel izomorf részstruktúra, és ha $x \in A \setminus N^{\mathfrak{A}}$, akkor tetszőleges n-re $\bar{n}^{\mathfrak{A}} < x$. ∎

— a reprezentációt persze itt is azok a formulák adják, melyektől józan paraszti ésszel elvárja az ember.

Ebből már egyszerűen kijön a nemteljességi v. limitációs tételkör egyik fontos tétele:

Church tétele. Ha egy konzisztens elméletből levezethető Q, akkor az az elmélet nem eldönthető. ∎

— a tétel bizonyítása klasszikus diagonális módszert használó bizonyítás. Innen már a „teljes axiómarendszer eldönthető" észrevétel révén egyszerűen következik „a" Gödel-tétel, amint azt Kalmár László észrevette:

Gödel I. nem-teljességi tétele. Ha egy konzisztens axiómarendszerből levezethető Q, akkor az az elmélet nem teljes. ∎

A két tétel együttes általános következménye:

Következmény. Ha egy típusban van két kétváltozós függvényjel és két konstans, akkor az érvényes formulák halmaza nem rekurzív, és van olyan konzisztens axiómarendszer, ami nem bővíthető konzisztens teljes axiómarendszerré. ∎

— ugyanis ha a az érvényességet el tudnánk dönteni, akkor a Robinson-aritmetika axiómáit egyetlen q formulába összefoglalva, a $q \to \varphi$ formula érvényességének eldöntésével $Q \vdash \varphi$-t is kitalálnánk. Sőt, a dolog tovább élezhető:

Tétel. Véges típusban az érvényesség eldönthetetlen. ∎

Gödel konstruktíve bizonyította tételét: mutatott egy olyan formulát, ami sem maga, sem a negáltja nem levezethető az adott axiómarendszerből; de eredménye gyengébb volt, ui. a konstrukció csak úgy működött, ha feltételeze az axiómarendszer *ω-konzisztenciáját*, azaz hogy modellje neki $\mathfrak{N}$. Így azt se látta be, hogy lenne axiómarendszer, ami nem bővíthető konzisztens teljes axiómarendszerré (az ω-kozisztencia bővítéseknél elromolhat, sőt, „könnyen elromlik": ha egy axiómarendszer nem teljes, tőle független, $\mathfrak{N}$-ben nem igaz formulával való bővítés elrontja).

Mindazonáltal tanulságos felidézni Gödel kostrukcióját, annál is inkább, mert, mint azt Rosser megmutatta, némi technikázással erősíthető úgy, hogy ne kelljen feltenni az ω-konzisztenciát. Jelöljük φ Gödel-számát $\ulcorner\varphi\urcorner$-vel. A dolog motorja a következő állítás:

Fixpont tétel. Ha $\Gamma \vdash Q$, akkor tetszőleges χ egyváltozós formulának van *fixpontja*, azaz olyan φ zárt formula, hogy $\Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \chi(\ulcorner\varphi\urcorner)$. ∎

Adott Γ axiómarendszer esetén legyen $\mathrm{Biz}_\Gamma(x,y) \subseteq \omega^2$ az a reláció, amelyik azt mondja, hogy „x egy Γ-ból való levezetés Gödel-száma, y egy formuláé, és x épp y-t igazolja". Ez a reláció rekuzív, így $\Gamma \vdash Q$ esetén egy alkalmas $B(x,y)$ formula reprezentálja. Most a $\nexists x\, B(x,y)$ formula olyasmit mond (azonosítva formulákat és Gödel-számaikat), hogy „y nem vezethető le Γ-ból"; pontosan ezt mondja pl. $\mathfrak{N}$ felett, de általában erősebbet; azaz tagadása, a $\exists x\, B(x,y)$ formula kevesebbet mond annál, hogy „y levezethető Γ-ból", mert egy akármilyen Γ-modellben hiába találunk x-et úgy, hogy $B(x,y)$ fennáll, ha az az x egy nem-sztenderd elem (nem valamelyik $\bar{n}$ kifejezés értéke), akkor ez nem jelent semmit.

Legyen akkor γ $\nexists x\, B(x,y)$-nak fixpontja, azaz $\Gamma \vdash \gamma \leftrightarrow \nexists x\, B(x,\ulcorner\gamma\urcorner)$. Ez a γ lesz hát a bizonyos, önmaga bizonyíthatatlanságát álító formula! — de megint hangsúlyozzuk, hogy γ-ba csak akkor láthatunk bele ilyen tartalmat, ha $\mathfrak{N}$ felett nézzük. Most ha feltesszük, hogy $\Gamma \vdash \gamma$, akkor van egy konkrét bizonyítása, s annak b Gödel-számával $B(b,\ulcorner\gamma\urcorner)$ Γ tetszőleges modelljében igaz lesz, azaz $\Gamma \vdash \exists x\, B(x,\ulcorner\gamma\urcorner)$, azaz $\Gamma \vdash \neg\gamma$, ami ellentmondás. Illetve Γ ***ω-konzisztenciája mellett*** ha feltesszük, hogy $\Gamma \vdash \neg\gamma$, akkor $\Gamma \vdash \exists x\, B(x,\ulcorner\gamma\urcorner)$, az ω-konzisztencia miatt akkor $\mathfrak{N} \models \exists x\, B(x,\ulcorner\gamma\urcorner)$, és akkor viszont tényleg van γ-nak egy bizonyítása, így mégiscsak $\Gamma \vdash \gamma$. Tehát ekkor sem γ, sem $\neg\gamma$ nem következménye Γ-nak: Γ nem teljes.

Tehát $\Gamma \nvdash \gamma$, azaz $\mathfrak{N} \models \nexists x\, B(x,\ulcorner\gamma\urcorner)$, így ($\omega$-konzisztencia!, és a fixpont-tulajdonság miatt) $\mathfrak{N} \models \gamma$. Tehát γ „igaz, de nem bizonyítható", amit kevésbé szenzációhajhász módon (s kissé precízebben) úgy mondhatunk, hogy igaz $\mathfrak{N}$-ben, de nem igaz általában a Γ-modellekben.

Gödel tétele tette a Hilbert indította formalista program nyakára a kést: Hilbert úgy gondolta, hogy egyszer s mindekorra rögzítjük a matematika teljes axiómarendszerét, ill. egy helyes és teljes finit bizonyításfogalmat, és bizonytalanságnak a továbbiakban helye nem lesz. Gödel tételével rámutatott arra, hogy ilyen axiómarendszert (ami pl. valami halmazelmélet-féleség lett volna, ami még erősebb axiómarendszer, mint a Peano) kár remélni. Mindig lesz olyan állítás, ami kibújik az axiomatikus módszer láncai alól, s van valami a matematikában, ami lényegesen nem formalizálható. Tovább mélyítette a válságot második nem-teljességi tétele, ami megmutatta, hogy egy Peano-féle erős axiómarendszer, ami elég erős ahhoz hogy megfogalmazza saját konzisztenciáját, belátni már nem képes azt. Tehát ha a formális módszereknél maradunk, azt sem remélhetjük, hogy valaha is megnyugodhatunk afelől, hogy amit csinálunk, nem ellentmondásos.

Kimondjuk a második nem-teljességi tételt is. A fenti B-vel legyen $\text{Bhó}_\Gamma(x)$ a $\exists y\, B(y,x)$, „x bizonyítható Γ-ban" formula; ill. legyen Con_Γ a $\neg\text{Bhó}_\Gamma(\ulcorner 0=1\urcorner)$, „$\Gamma$ nem ellentmondásos" formula.

Gödel II. nem-teljességi tétele. Ha $\Gamma \vdash Q$, továbbá ha φ zárt formula,

- $\Gamma \vdash \text{Bhó}_\Gamma(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \text{Bhó}_\Gamma(\ulcorner\text{Bhó}_\Gamma(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner)$
- $(\text{Bhó}_\Gamma(\ulcorner\varphi\urcorner) \land \text{Bhó}_\Gamma(\ulcorner\varphi\to\psi\urcorner)) \to \text{Bhó}_\Gamma(\ulcorner\psi\urcorner)$

— akkor $\Gamma \nvdash \text{Con}_\Gamma$. ■

Az arimetikai axiómarendszerek közül pl. a Peano kielégíti a tétel feltételeit.

Ami a nem-aritmetikai axiómarendszereket illeti, pl. ZF(C)-re is áll a tétel konklúziója; ezt belátni, vagy általában aritmetikai kontextusban kimondott eredményeket más típusú elméletekre átvinni az ún. *interpretáció* módszerével lehet: azaz annak megmutatásával, hogy valami formula-definiálta részhalmazon formulával definiált relációk, műveletek modelljei az interpretálandó elméletnek ($\mathsf{Th}\,\mathfrak{N}$, PA, Q...).

Az aritmetika halmazelméletbe interpretálása hosszadalmas, de kézenfekvő, hogyan történik. Ezzel szemben a $\mathbb{Z}$-be (mint gyűrűbe) való interpretáció szellemes és rövid: ott az aritmetika műveletei adottak, csak a nemnegatív számokat kéne valahogy kijelölni egy formulával. Ez pedig Lagrange azon tételere hivatkozva lehetséges, mely szerint minden nemnegatív szám előáll négy négyzetszám összegeként. Így tehát $\mathbb{Z}$ elmélete sem rekurzív.

Befejezésül közlünk még egy frappáns meglátást:

amikor olyan témakört látunk az államvizsga-tételben, hogy „Teljességi és nem-teljességi tételek", azt sugallja, hogy ezek a tételek valahogy ellentpontozzák egymást, bemérik az eslőrendű logika erejét, felső, ill. alsó becslést adnak rá. Aztán meg amikor szemügyrevesszük tételeink, akkor meginog ebben a hitünk, mert mintha elbeszélnének egymás mellett: az egyik teljes *levezetési rendszerekről*, a másik teljes *axiómarendszerekről* beszél, és nem látunk a két teljesség-fogalom között kapcsolatot. A következő minidrámának talán sikerül egymást ellenpontozó viszonyba helyezni a két tételt, témakört.

Narrátor:	Az elsőrendű szemantika következményfogalma...
Teljesség:	...RE!
Nem-teljesség:	...de nem rekurzív...
Együtt:	— így végül is RE $\setminus$ coRE.