IMPROPRIUS INTEGRÁLOK.

I. Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat :

1. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+x-2}\,dx$; **2.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$; **3.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}\,dx$; **4.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\cdot e^{-x}\,dx \quad (n\in \mathbf{N}_0)$;

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-a\,x}\cos bx\,dx \quad (a\in\mathbf{R}^+,\ b\in\mathbf{R})$; **6.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh^{n+1} x}\,dx \quad (n\in\mathbf{N}_0)$;

7. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\circ\sin$; **8.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\circ\cos$; **9.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\cdot\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$; **10.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$.

II. Igaz-e, hogy az f függvény improprius értelemben integrálható, ha :

11. $f(x):=\dfrac{x^2}{x^4-x^2+1}$, $D(f)=\mathbf{R}$; **12.** $f(x):=\dfrac{1}{\ln x}$, $D(f)=(0,1)$;

13. $f(x):=\dfrac{\cos x}{x}$, $D(f)=[\dfrac{\pi}{2},+\infty)$; **14.** $f(x):=\dfrac{\sin^2 x}{x}$, $D(f)=\mathbf{R}^+$;

15. $f(x):=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$, $D(f)=\mathbf{R}^+$; **16.** $f(x):=\dfrac{\ln x}{1-x^2}$, $D(f)=(0,1)$;

17. $f(x):=\dfrac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}$, $D(f)=(0,\dfrac{\pi}{2})$; **18.** $f(x):=x^2\cdot\cos(e^x)$, $D(f)=[0,+\infty)$?

III. Igaz-e, hogy az $f:(0,1]\to\mathbf{R}^+$ függvény improprius értelemben integrálható, ha :

19. f differenciálható, $\exists \lim\limits_0 f=+\infty$ és $\exists \lim\limits_0 \left(\dfrac{1}{f}\right)' \in \mathbf{R}^+$?

IMPROPRIUS INTEGRÁL (vázlatos emlékeztető) :

Legyen $I\subset\mathbf{R}$ nem-elfajuló intervallum, $\alpha:=\inf I$, $\beta:=\sup I$ az intervallum végpontjai, $f:I\to\mathbf{R}$.

Definíció : Azt mondjuk, hogy f **lokálisan Riemann-integrálható** az I intervallumon, ha I-nek minden korlátos és zárt részintervallumán Riemann-integrálható, (vagyis $\forall\, a,b\in I \ \ \exists \int_a^b f$, ill. másként $f\in R([a,b])$). **Jelölés :** $f\in R^{loc}(I)$.

Definíció : Ha f lokálisan Riemann-integrálható az I intervallumon, ($f\in R^{loc}(I)$), akkor f **integrálfüggvényei** az I-n értelmezett $F(x):=\int_u^x f(t)\,dt+c$ alakú függvények, ahol $u\in I$ és $c\in\mathbf{R}$. **Jelölés :** $F\in\int f$.

Definíció : Ha f lokálisan Riemann-integrálható az I intervallumon , és integrálfüggvényeinek az I végpontjaiban léteznek és végesek a határértékei, akkor azt mondjuk, hogy f **improprius értelemben integrálható** az I intervallumon. (*Röviden* : improprius integrálható).

(**Megj.:** Mivel az integrálfüggvények egymástól csak konstansban térnek el, így a véges határértékeik is konstansban térnek el egymástól, elegendő tehát egyetlen integrálfüggvény véges határértékeinek létezését megkövetelni.)

Definíció : Ha f improprius integrálható az I intervallumon., akkor **improprius integrálja :** $\displaystyle\int_I f:=\int_\alpha^\beta f:=\lim_\beta F-\lim_\alpha F \quad (F\in\int f)$.

(vagyis $\boxed{\displaystyle\int_\alpha^\beta f=\lim_{x\to\beta}\int_u^x f(t)\,dt-\lim_{x\to\alpha}\int_u^x f(t)\,dt} \ \Rightarrow\ \displaystyle\int_\alpha^\beta f=\lim_{x\to\alpha}\int_x^u f(t)\,dt+\lim_{x\to\beta}\int_u^x f(t)\,dt$, ahol $u\in I$.)

Cauchy-kritérium (szükséges és elégséges feltétel) : Az I-n lokálisan integrálható f függvény pontosan akkor improprius integrálható I-n, ha $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta_1,\delta_2>0$, hogy $\forall\, u,v\in(\alpha,\alpha+\delta_1)$ $\left|\int_u^v f\right|<\varepsilon$ és $\forall\, u,v\in(\beta-\delta_2,\beta)$ $\left|\int_u^v f\right|<\varepsilon$. (**Biz.:** véges fv.hat.ért.Cauchy-f.)

Majoráns kritérium (elégséges feltétel) : Az I-n lokálisan integrálható f függvény improprius integrálható I-n, ha $\exists\,\delta_1,\delta_2>0$, $\exists\, g_1$ $(\alpha,\alpha+\delta_1)$-en és $\exists\, g_2$ $(\beta-\delta_2,\beta)$-n improprius integrálható függvények, melyekre $\forall x\in(\alpha,\alpha+\delta_1)$ $|f(x)|\le g_1(x)$ és $\forall x\in(\beta-\delta_2,\beta)$ $|f(x)|\le g_2(x)$. (**Biz.:** a $\left|\int_u^v f\right|\le\left|\int_u^v |f|\right|\le\left|\int_u^v g\right|$ egyenlőtlenség, és a Cauchy-krit. szüks. és elégs. felt. felhasználásával. ☻)