IMPROPRIUS INTEGRÁLOK, vázlatos feladatmegoldások.

I. Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat : (1- 6, 10. feladatok: az impr. int.hatóságot a megf. Határértékek létezése biztosítja.)

1. $$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+x-2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_2^t \left(\frac{\frac{1}{3}}{x-1}-\frac{\frac{1}{3}}{x+2}\right)dx = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{3}\cdot\left(\ln\frac{|t-1|}{|t+2|}-\ln|1|+\ln 4\right) = \frac{1}{3}\cdot\ln 4\ ;$$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx =$ ☺ A nevezőt gyöktényezőkre bontjuk: $x^4+1=(x^2-i)\cdot(x^2+i)=(x-\sqrt{i})\,(x+\sqrt{i})\,(x-\sqrt{-i})\,(x+\sqrt{-i}) =$

$$= (x-\sqrt{i})\,(x-\sqrt{-i})\,(x+\sqrt{i})\,(x+\sqrt{-i}) = \left(x^2-x\cdot(\sqrt{i}+\sqrt{-i})+\sqrt{-i^2}\right)\cdot\left(x^2+x\cdot(\sqrt{i}+\sqrt{-i})+\sqrt{-i^2}\right) =$$

$$= (x^2-\sqrt{2}\,x+1)\cdot(x^2+\sqrt{2}\,x+1) \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2+1}{x^4+1} = \frac{A\,x+B}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}+\frac{C\,x+D}{x^2+\sqrt{2}\,x+1} =$$

$$= \frac{(A\,x+B)\cdot(x^2+\sqrt{2}\,x+1)\ +\ (C\,x+D)\cdot(x^2-\sqrt{2}\,x+1)}{(x^2-\sqrt{2}\,x+1)\cdot(x^2+\sqrt{2}\,x+1)} \quad\Rightarrow\quad A+C=0,\ \ B+D+A\sqrt{2}-C\sqrt{2}=1,\ \ A+C+B\sqrt{2}-D\sqrt{2}=0,$$

$$B+D=1 \qquad\Rightarrow\qquad A=-C,\quad B=D=\tfrac{1}{2},\quad (\,1+2\,A\sqrt{2}=1\ \Rightarrow\ A=0\,) \qquad \frac{x^2+1}{x^4+1} = \frac{\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}\,x+1} =$$

$$= \frac{1}{2\,x^2-2\sqrt{2}\,x+2}+\frac{1}{2\,x^2+2\sqrt{2}\,x+2} = \frac{1}{1\ +\ (\sqrt{2}\,x-1)^2}+\frac{1}{1\ +\ (\sqrt{2}\,x+1)^2} \qquad\Rightarrow\qquad ☺$$

$$☺ \qquad\Rightarrow\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = \int_{-\infty}^{0}\frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx + \int_{0}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0\frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx =$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\int_t^0\left(\frac{1}{1\ +\ (\sqrt{2}\,x-1)^2}+\frac{1}{1\ +\ (\sqrt{2}\,x+1)^2}\right)dx + \lim_{t\to+\infty}\int_0^t\left(\frac{1}{1\ +\ (\sqrt{2}\,x-1)^2}+\frac{1}{1\ +\ (\sqrt{2}\,x+1)^2}\right)dx =$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left[\frac{\text{arc tg}\,(\sqrt{2}\,x-1)}{\sqrt{2}}+\frac{\text{arc tg}\,(\sqrt{2}\,x+1)}{\sqrt{2}}\right]_{x=t}^{x=0} + \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{\text{arc tg}\,(\sqrt{2}\,x-1)}{\sqrt{2}}+\frac{\text{arc tg}\,(\sqrt{2}\,x+1)}{\sqrt{2}}\right]_{x=0}^{x=t} =$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left[\underbrace{\frac{\text{arc tg}\,(-1)}{\sqrt{2}}+\frac{\text{arc tg}\,(1)}{\sqrt{2}}}_{0}-\frac{\text{arc tg}\,(\sqrt{2}\,t-1)}{\sqrt{2}}-\frac{\text{arc tg}\,(\sqrt{2}\,t+1)}{\sqrt{2}}\right] + \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{\text{arc tg}\,(\sqrt{2}\,t-1)}{\sqrt{2}}+\frac{\text{arc tg}\,(\sqrt{2}\,t+1)}{\sqrt{2}}\underbrace{-\frac{\text{arc tg}\,(-1)}{\sqrt{2}}-\frac{\text{arc tg}\,(1)}{\sqrt{2}}}_{0}\right] =$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)-\left(-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\pi\ .$$

Megj.: Mivel az integrandus páros függvény, egyszerűbb lett volna ha a páros f függvényekre alkalmazható $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f = 2\cdot\int_0^{+\infty} f$ egyenlőséget felhasználva (feltéve, hogy a jobb oldali improprius integrál létezik) oldottuk volna meg a feladatot.

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}\,dx =$ ☺ A nevezőt gyöktényezőkre bontjuk: $x^3+1=(x+1)\cdot(x^2-x+1)$, $\displaystyle\Rightarrow\ \frac{1}{1+x^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B\,x+C}{x^2-x+1} =$

$$= \frac{A\cdot(x^2-x+1)+(B\,x+C)\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)} \quad\Rightarrow\quad A+B=0,\ \ -A+B+C=0,\ \ A+C=1,\ \ \Rightarrow\ \ A=-B,\ \ C=-2B,\ \ -3B=1,$$

$$\Rightarrow\ A=\tfrac{1}{3},\ B=-\tfrac{1}{3},\ C=\tfrac{2}{3},\quad\Rightarrow\quad \frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2\,x-1}{x^2-x+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right);$$

$$☺\quad\Rightarrow\quad \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{1}{1+x^3}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2\,x-1}{x^2-x+1}+\frac{2}{(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1}\right)dx =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{6}\cdot\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{\text{arc tg}\,(\,2\,x/\sqrt{3}-1/\sqrt{3}\,)}{\sqrt{3}}\right]_{x=0}^{x=t} = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{6}\cdot\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\text{arc tg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arc tg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{2\,\pi}{3\sqrt{3}}\ .$$

4.
$$\int_0^{+\infty} x^n\cdot e^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \underbrace{x^n}_{u}\cdot\underbrace{e^{-x}}_{\substack{v'\\ v=-e^{-x}}}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\left[-x^n\cdot e^{-x}\right]_{x=0}^{x=t} + n\cdot\int_0^t \underbrace{x^{n-1}}_{u}\cdot\underbrace{e^{-x}}_{\substack{v'\\ v=-e^{-x}}}\,dx\right) = \underbrace{\lim_{t\to+\infty}\left(-t^n\cdot e^{-t}+0\right)}_{0} +$$
$(n\in\mathbf{N})$
$$+\ n\cdot\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \underbrace{x^{n-1}}_{u}\cdot\underbrace{e^{-x}}_{\substack{v'\\ v=-e^{-x}}}\,dx \quad\Rightarrow\quad \int_0^{+\infty} x^n\cdot e^{-x}\,dx = n\,(n-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1\cdot\lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-x}\,dx = n!\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(-e^{-t}+1\right) = n!$$

5.
$$F(t) := \int_0^t \underbrace{e^{-a\,x}}_{\substack{u'\\ u=-\frac{1}{a}e^{-a\,x}}}\cdot\underbrace{\cos b\,x}_{v}\,dx = \left[-\tfrac{1}{a}\,e^{-a\,x}\cdot\cos b\,x\right]_{x=0}^{x=t} - \frac{b}{a}\cdot\int_0^t \underbrace{e^{-a\,x}}_{\substack{u'\\ u=-\frac{1}{a}e^{-a\,x}}}\cdot\underbrace{\sin b\,x}_{v}\,dx = \left[-\tfrac{1}{a}\,e^{-a\,x}\cdot\cos b\,x\right]_{x=0}^{x=t} -$$
$(a\in\mathbf{R}^+,\ b\in\mathbf{R})$
$$-\ \frac{b}{a}\cdot\int_0^t \underbrace{e^{-a\,x}}_{\substack{u'\\ u=-\frac{1}{a}e^{-a\,x}}}\cdot\underbrace{\sin b\,x}_{v}\,dx = \left[-\tfrac{1}{a}\,e^{-a\,x}\cdot\cos b\,x\right]_{x=0}^{x=t} + \left[\frac{b}{a^2}\,e^{-a\,x}\cdot\sin b\,x\right]_{x=0}^{x=t} -$$
$$-\ \frac{b^2}{a^2}\cdot\int_0^t e^{-a\,x}\cdot\cos b\,x\,dx\ ; \quad\Rightarrow\quad \frac{a^2+b^2}{a^2}\cdot F(t) = -\frac{1}{a}\cdot\left[e^{-a\,x}\cdot\cos b\,x\right]_{x=0}^{x=t} + \frac{b}{a^2}\cdot\left[e^{-a\,x}\cdot\sin b\,x\right]_{x=0}^{x=t}\ ; \quad\Rightarrow$$
$$F(t) = \frac{1}{a^2+b^2}\cdot\left[-a\cdot e^{-a\,x}\cdot\cos b\,x + b\cdot e^{-a\,x}\cdot\sin b\,x\right]_{x=0}^{x=t} = \frac{1}{a^2+b^2}\cdot e^{-a\,x}\cdot\left(-a\cdot\cos b\,t + b\cdot\sin b\,t\right) + \frac{a}{a^2+b^2}\ ; \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \int_0^{+\infty} e^{-a\,x}\cos b\,x\,dx = \lim_{t\to+\infty} F(t) = \frac{a}{a^2+b^2}\ .$$

6.
$$F_{n+1}(t) := \int_0^t \frac{1}{\cosh^{n+1}x}\,dx = \int_0^t \underbrace{\frac{1}{\cosh^{n-1}x}}_{u}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cosh^2 x}}_{\substack{v'\\ v=\mathrm{th}\,x}}\,dx = \left[\frac{\tanh x}{\cosh^{n-1}x}\right]_{x=0}^{x=t} + (n-1)\cdot\int_0^t \frac{\sinh x}{\cosh^n x}\cdot\frac{\sinh x}{\cosh x}\,dx =$$
$(n\in\mathbf{N}_0)$
$$= \tanh t\cdot\frac{1}{\cosh^{n-1}t} + (n-1)\cdot\int_0^t \frac{\cosh^2 x-1}{\cosh^{n+1}x}\,dx = \tanh t\cdot\frac{1}{\cosh^{n-1}t} + (n-1)\cdot\int_0^t \frac{1}{\cosh^{n-1}x}\,dx - (n-1)\cdot\int_0^t \frac{1}{\cosh^{n+1}x}\,dx \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad F_{n+1}(t) = \frac{1}{n}\cdot\tanh t\cdot\frac{1}{\cosh^{n-1}t} + \frac{n-1}{n}\cdot\int_0^t \frac{1}{\cosh^{n-1}x}\,dx \quad\Rightarrow\quad \lim_{t\to+\infty} F_{n+1}(t) = \underbrace{\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\tanh t\cdot\frac{1}{\cosh^{n-1}t}}_{0} +$$
$$+\ \frac{n-1}{n}\cdot\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{1}{\cosh^{n-1}x}\,dx = \frac{n-1}{n}\cdot\lim_{t\to+\infty} F_{n-1}(t) \quad\Rightarrow\quad \lim_{t\to+\infty} F_{n+1}(t) = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\lim_{t\to+\infty}\begin{cases} F_1(t) & (n \text{ ps.})\\ F_2(t) & (n \text{ ptl.})\end{cases},$$
$$F_1(t) = \int_0^t \frac{1}{\cosh x}\,dx = \int_0^t \frac{2}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int_0^t \frac{2\cdot e^x}{1+e^{2x}}\,dx = 2\cdot\left(\operatorname{arc\,tg} e^t - \operatorname{arc\,tg} e^0\right), \qquad F_2(t) = \int_0^t \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \tanh t\ ; \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh^{n+1}x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} F_{n+1}(t) = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\begin{cases} \frac{\pi}{2} & (n \text{ ps.})\\ 1 & (n \text{ ptl.})\end{cases}.$$

7.-8. Az $\ln\circ\sin$ függv. lok. integrálható a $(0,\frac{\pi}{2}]$ intervallumon. Az impr. int.hatósághoz megmutatjuk, hogy $\exists\,\delta>0$ úgy, hogy a $(0,\delta)$-n az $\left|\ln\circ\sin\right|$ fgv. majorálható impr.integrálható függvénnyel (majoráns krit.): $\lim_{x\to0}\sqrt{x}\cdot\ln\sin x = \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}\cdot\sqrt{\sin x}\cdot\ln\sin x = 0 \Rightarrow$

$\exists\,\delta>0\ \ \forall x\in(0,\delta)\ \ \left|\ln\sin x\right| < \frac{1}{\sqrt{x}}$ ☻. $A := \int_0^{\pi/2}\ln\circ\sin = \int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx = \int_0^{\pi/2}\ln\cos(\underbrace{\tfrac{\pi}{2}-x}_{t})\,dx = -\int_{\pi/2}^{0}\ln\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2}\ln\circ\cos$.

$\Rightarrow$ (folytatás a következő oldalon)

$$\Rightarrow A = \int_0^{\pi/2} \ln\circ\cos = \int_0^{\pi/2} \ln\sin(\underbrace{\tfrac{\pi}{2}+x}_{t})\,dx = \int_{\pi/2}^{\pi} \ln\sin t\,dt\ ;\ \Rightarrow 2A = \int_0^{\pi} \ln\sin(2\cdot\tfrac{x}{2})\,dx = \int_0^{\pi}\ln 2\,dx + \int_0^{\pi}\ln\sin\tfrac{x}{2}\,dx + \int_0^{\pi}\ln\cos\tfrac{x}{2}\,dx =$$

$$\Rightarrow \pi\cdot\ln 2 + 2\cdot\int_0^{\pi/2}\ln\sin t\,dt + 2\cdot\int_0^{\pi/2}\ln\cos t\,dt = \pi\cdot\ln 2 + 4A \Rightarrow A = -\tfrac{\pi}{2}\cdot\ln 2,\ \text{azaz}\ \int_0^{\pi/2}\ln\circ\sin = \int_0^{\pi/2}\ln\circ\cos = -\tfrac{\pi}{2}\cdot\ln 2\ .$$

9. Az $f(x) := \frac{x\cdot\ln x}{(1+x^2)^2}$ függvény lokálisan integrálható $\mathbf{R}^+$-on. Az impropius integrálhatóság eldöntéséhez az $F(s) := \int_1^s \frac{x\cdot\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$ integrálfüggvényt vizsgáljuk. A $+\infty$-ben F-nek létezik véges határértéke, u.i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot x\cdot\ln x}{(1+x^2)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\cdot\frac{x^4}{(1+x^2)^2} = 0\cdot 1 = 0$ miatt $\exists K>0$, hogy $\forall x\in(K,+\infty)$ $\left|\frac{x\cdot\ln x}{(1+x^2)^2}\right| < \frac{1}{x^2}$, s így (a majoráns kritérium szerint) f az $[1,+\infty)$ intervallumon impropius integrálható.

$$F(s) = \int_1^s \frac{x\cdot\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx \underset{\substack{x=\frac{1}{t}\\ dx=-1/t^2\,dt}}{=} \int_1^{1/s}\frac{(1/t)\cdot(-\ln t)}{(1+(1/t)^2)^2}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int_1^{1/s}\frac{t\cdot\ln t}{(1+t^2)^2}\,dt = F\left(\tfrac{1}{s}\right)$$

miatt F-nek a 0 helyen is létezik véges határértéke, hiszen a kompozíció határértéke szerint $\lim\limits_{s\to+0}F(s) = \lim\limits_{s\to+0}F(\frac{1}{s}) = \lim\limits_{t\to+\infty}F(t)$, (ez utóbbi határérték létezését és végességét már beláttuk).

$$\Rightarrow\ f \text{ tehát impropius integrálható } \mathbf{R}^+\text{-on, és } \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{s\to+\infty}F(s) - \lim_{s\to+0}F(s) = 0\ .$$

10.
$$F(s) := \int_0^s \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx \underset{\substack{t=\operatorname{arc\,tg} x\\ dx=1/\cos^2 t\,dt}}{=} \int_0^{\operatorname{arc\,tg} s}\frac{t}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^{3/2}}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\operatorname{arc\,tg} s}\underbrace{t}_{u}\cdot\underbrace{\cos t}_{v'}\,dt = \left[t\cdot\sin t + \cos t\right]_{t=0}^{t=\operatorname{arc\,tg} s} =$$
$$= \operatorname{arc\,tg} s\cdot\sin(\operatorname{arc\,tg} s) + \cos(\operatorname{arc\,tg} s) - 1\ ;$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx = \lim_{s\to+\infty}F(s) = \lim_{s\to+\infty}\left(\operatorname{arc\,tg} s\cdot\sin(\operatorname{arc\,tg} s) + \cos(\operatorname{arc\,tg} s) - 1\right) = \frac{\pi}{2} - 1\ .$$

II. Igaz-e, hogy az f függvény impropius értelemben integrálható, ha :

11. $f(x) := \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}$, $D(f) = \mathbf{R}$; Az f függvény folytonos, így lokálisan integrálható $\mathbf{R}$-en. Elég nagy $|x|$-ekre $|f(x)| < \frac{2}{x^2}$, hiszen $\left|x^2\cdot f(x)\right| = \frac{x^4}{x^4-x^2+1} \to 1$, ha $x\to+\infty$. A majoráns kritérium szerint : ($\frac{2}{\mathrm{id}^2}$ impropius integrálható a $(-\infty,-c]$ és $[c,+\infty)$ intervallumokon, bármely $c>0$ esetén) $\Rightarrow$ f impropius integrálható $\mathbf{R}$-en.

Megj.: Hasonlóképpen bizonyítható, hogy ha egy rac.törtfüggvény nevezőjének legfeljebb csak negatív zérushelyei vannak, és a nevezőben álló polinom fokszáma legalább 2-vel nagyobb, mint a számláló fokszáma, akkor a rac. törtfüggvény $\mathbf{R}^+$-on impropius integrálható.

12. $f(x) := \frac{1}{\ln x}$, $D(f) = (0,1)$; Mivel $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{\ln x}{x-1} = 1$, így $\exists\,\delta>0$ $\forall x\in(1-\delta,1)$ $\frac{\ln x}{x-1} < 2$, $\Rightarrow$ $\forall x\in(1-\delta,1)$ $\frac{1}{\ln x} < \frac{1}{2\cdot(x-1)}$. A $G(s) := \int_a^s \frac{1}{x-1}\,dx$ $(a\in(1-\delta,1))$ függvényre $\lim\limits_{s\to 1-0}G(s) = \lim\limits_{s\to 1-0}\left(\ln|s-1| - \ln|a-1|\right) = -\infty$, s emiatt az f függvény $F(s) := \int_a^s \frac{1}{\ln x}\,dx$ integrálfüggvényének 1-beli határértékére is $\lim\limits_{s\to 1-0}F(s) = \lim\limits_{s\to 1-0}\int_a^s\frac{1}{\ln x}\,dx \le \lim\limits_{s\to 1-0}\frac{1}{2}\cdot\int_a^s\frac{1}{x-1}\,dx = \lim\limits_{s\to 1-0}\frac{1}{2}\cdot G(s) = -\infty$, így f nem impropius integrálható.

13. $f(x) := \frac{\cos x}{x}$, $D(f) = [\,\frac{\pi}{2}, +\infty\,)$; A Cauchy-kritériumot alkalmazzuk : $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$, $u, v \in [\frac{\pi}{2}, +\infty)$ $\left| \int_u^v f \right| = \left| \int_u^v \frac{\cos x}{x}\, dx \right| =$

$= \left| \left[\frac{1}{x} \cdot \sin x \right]_u^v + \int_u^v \frac{\sin x}{x^2}\, dx \right| \le \frac{1}{v} + \frac{1}{u} + \left| \int_u^v \frac{1}{x^2}\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$, ha u és v elég nagy; $\Rightarrow$ f improprius integrálható.

14. $f(x) := \frac{\sin^2 x}{x}$, $D(f) = \mathbf{R}^+$; Az $F(s) := \int_a^s \frac{\sin^2 x}{x}\, dx$ $(\,a \in \mathbf{R}^+)$ integrálfüggvény határértékét vizsgáljuk a $+\infty$ -ben :

$F(s) = \int_a^s \frac{1 - \cos 2x}{2x}\, dx = \underbrace{\int_a^s \frac{1}{2x}\, dx}_{G_1(s)} - \underbrace{\int_a^s \frac{\cos 2x}{2x}\, dx}_{G_2(s)}$, $\lim_{s \to +\infty} G_1(s) = +\infty$ és $\lim_{s \to +\infty} G_2(s) = \lim_{s \to +\infty} \frac{1}{2} \cdot \int_{2a}^{2s} \frac{\cos t}{t}\, dt \in \mathbf{R}$;

$\Rightarrow$ $\lim_{s \to +\infty} F(s) = +\infty$, $\Rightarrow$ f nem improprius nem integrálható.

15. $f(x) := \left| \frac{\sin x}{x} \right|$, $D(f) = \mathbf{R}^+$; $\forall x \in \mathbf{R}^+$ $0 \le \frac{\sin^2 x}{x} \le \left| \frac{\sin x}{x} \right|$, $\Rightarrow$ f nem improprius integrálható.

16. $f(x) := \frac{\ln x}{1 - x^2}$, $D(f) = (\,0,\,1\,)$; Teljesül a majoráns kritérium : $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} \cdot \ln x}{1 - x^2} = 0$ $\Rightarrow$ $\exists\, \delta > 0$ $\forall x \in (0, \delta)$ $\left| \frac{\ln x}{1 - x^2} \right| < \frac{1}{\sqrt{x}}$,

$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ improprius integrálható $(0, \delta)$ -n ; és $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{1 - x} = -1$ $\Rightarrow$ $\exists\, \delta > 0$ $\forall x \in (1 - \delta, 1)$ $\left| \frac{\ln x}{1 - x^2} \right| = \left| \frac{\ln x}{1 - x} \right| \cdot \frac{1}{1 + x} < \frac{2}{1 + x}$,

$x \mapsto \frac{2}{1 + x}$ impr.int.ható $(1 - \delta, 1)$ -en (hiszen $[1 - \delta, 1]$ -en Riemann-integrálható) ; $\Rightarrow$ f improprius integrálható $(\,0,\,1\,)$ -en.

17. $f(x) := \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}$, $D(f) = (0, \frac{\pi}{2})$; Mivel f folytonosan kiterjeszthető a $(0, \frac{\pi}{2}]$ -re, az $F(s) := \int_a^s f$ $(\; a \in (0, \frac{\pi}{2})\;)$

integrálfüggvényre $\exists \lim_{\pi/2} F \in \mathbf{R}$. A 0-beli véges határérték létezését a majoráns kritérium teljesülésével bizonyítjuk : a 0 helynek valamely

jobb oldali (pontozott) környezetében $|\, f \,|$ -et az $\frac{1}{\mathrm{id}^{\alpha}}$ $(\; \alpha < 1\;)$ improprius integrálható függvénnyel majoráljuk. Ez lehetséges, u.i.

$\lim_{x \to +0} \left| x^{\alpha} \cdot f(x) \right| = \lim_{x \to +0} \frac{x^{\alpha} \cdot \ln(\sin x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\alpha - 1/2} \cdot (\sin x)^{\alpha - 1/2} \cdot \ln(\sin x) = 0$, ha $\alpha > \frac{1}{2}$; s emiatt pl. $\alpha := \frac{2}{3} < 1$

esetén $\exists\, \delta > 0$, hogy $\forall x \in (0, \delta)$ $\left| f(x) \right| < \frac{1}{x^{\alpha}}$; $\Rightarrow$ f improprius integrálható a $(0, \frac{\pi}{2})$ intervallumon.

18. $f(x) := x^2 \cdot \cos(\,\mathrm{e}^x\,)$, $D(f) = [\,0, +\infty\,)$; A $+\infty$ -beli véges hat.ért. létezését a Cauchy-kritériummal bizonyítjuk : $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$,

$u, v \in [0, +\infty)$ $\left| \int_u^v f \right| = \left| \int_u^v \underbrace{x^2 \cdot \cos(\mathrm{e}^x)\, dx}_{t = \mathrm{e}^x,\ x = \ln t,\ dx = dt/t} \right| = \left| \int_{\mathrm{e}^u}^{\mathrm{e}^v} \underbrace{\frac{\ln^2 t}{t}}_{w} \cdot \underbrace{\cos t}_{\substack{z' \\ z = \sin t}}\, dt \right| = \left| \left[\frac{\ln^2 t}{t} \cdot \sin t \right]_{\mathrm{e}^u}^{\mathrm{e}^v} - \int_{\mathrm{e}^u}^{\mathrm{e}^v} \frac{2 \ln t - \ln^2 t}{t^2} \cdot \sin t\, dt \right| \le \frac{v^2}{\mathrm{e}^v} + \frac{u^2}{\mathrm{e}^u} +$

$+ \left| \int_{\mathrm{e}^u}^{\mathrm{e}^v} \frac{\ln^2 t}{t^2}\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$, ha u és v elég nagy ($t \mapsto \frac{\ln^2 t}{t^2}$ impr.int.ható, u.i. $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ majoráns, ha t elég nagy); $\Rightarrow$ f impr. integrálható.

III. Igaz-e, hogy az $f : (\,0,\,1\,] \to \mathbf{R}^+$ függvény improprius értelemben integrálható, ha :

19. (a) f differenciálható, (b) $\exists \lim_0 f = +\infty$, (c) $\exists \lim_0 \left(\frac{1}{f}\right)' = A \in \mathbf{R}^+$? (a) $\Rightarrow$ f folytonos, így lokálisan integrálható $(0{,}1]$ -en.

(b) $\Rightarrow$ $\exists \lim_0 \frac{1}{f} = 0$. A l'Hospital szabály szerint (c) miatt : $\exists \lim_{x \to 0} \frac{1/f(x)}{x} = A$, így $\exists\, \delta > 0$ $\forall x \in (0, \delta)$ $0 < \frac{1/f(x)}{x} < 2A$, azaz

$0 < \frac{1}{2A} \cdot \frac{1}{x} < f(x)$. Az $\frac{1}{\mathrm{id}}$ fgv. nem impr. integrálható $(0{,}1]$ -en, a majoráns kritérium alapján így f sem improprius integrálható.