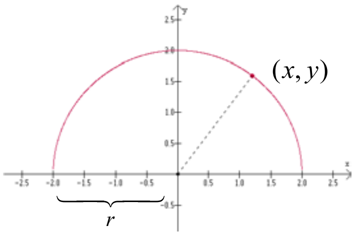
Riemann integrál, alkalmazások (Vázlat) .

I. Területszámítás :

Pl. : (Kör területe) $x^2+y^2=r^2 \quad\Rightarrow\quad y=\sqrt{r^2-x^2}\,,$

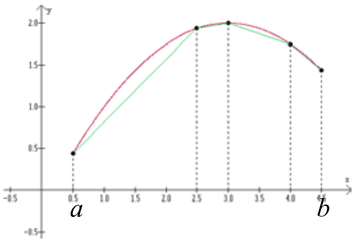


$$T_O = 2\cdot\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\;dx = 2\,r\cdot\int_{-r}^{r}\sqrt{1-(\tfrac{x}{r})^2}\;dx \underbrace{=}_{\substack{\frac{x}{r}=\sin t\,,\quad x=r\cdot\sin t\\ dx=r\cdot\cos t}} 2\,r^2\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\;dt =$$

$$= 2\,r^2\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\;dt = 2\,r^2\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\;dt = 2\,r^2\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot t+\frac{\sin 2t}{4}\right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} = r^2\cdot\pi$$

II. Síkgörbe ívhossza :

f folytonosan differenciálható



Egy adott felbontáshoz tartozó poligon hossza : $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(f(x_k)-f(x_{k-1}))^2} =$

$$= \sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})\cdot\sqrt{1+\left(\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}\right)^2} = \sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})\cdot\sqrt{1+(\,f'(\xi_k))^2}\;,\quad \xi_k\in(x_{k-1},x_k)$$

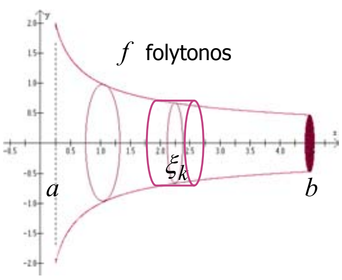
$\Rightarrow$ $\boxed{\textbf{Síkgörbe ívhossza :}\quad I=\int_a^b\sqrt{1+f'^2}\;.}$

Pl. : (Kör kerülete)

$$f(x)=\sqrt{r^2-x^2}\;,\quad f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\;,\qquad K_O = 2\cdot\int_{-r}^{r}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\;dx = 2\,r\cdot\int_{-r}^{r}\frac{\frac{1}{r}}{\sqrt{1-(\frac{x}{r})^2}}\;dx = 2\,r\cdot\left[\arcsin\frac{x}{r}\right]_{x=-r}^{x=r} = 2\,r\cdot\pi\;.$$

III. Forgástest térfogata :

f folytonos



Egy adott felbontáshoz tartozó közelítő térfogat : $\sum_{k=1}^{n}(\,f(\xi_k))^2\cdot\pi\cdot(x_k-x_{k-1})$

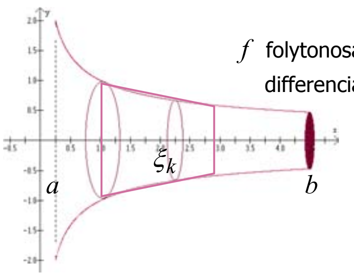
$\Rightarrow$ $\boxed{\textbf{Forgástest térfogata :}\quad I=\pi\cdot\int_a^b f^2\;.}$

Pl. : (Gömb térfogata)

$$f(x)=\sqrt{r^2-x^2}\;,\qquad V_O=\pi\cdot\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\;dx = \pi\cdot\left[r^2\cdot x-\frac{x^3}{3}\right]_{x=-r}^{x=r} = \frac{4\,r^3\cdot\pi}{3}$$

IV. Forgástest palástjának felszíne :

f folytonosan differenciálható



Egy adott felbontáshoz tartozó közelítő palást-felszín :

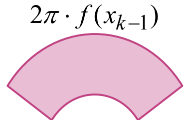
$$\sum_{k=1}^{n}2\,\pi\cdot\frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2}\cdot\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(f(x_k)-f(x_{k-1}))^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}2\,\pi\cdot f(\,\eta_k\,)\cdot(x_k-x_{k-1})\cdot\sqrt{1+\left(\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}\right)^2} \approx \quad (\,\eta_k\in(x_{k-1},x_k)\,)$$

$$\approx\; 2\,\pi\cdot\sum_{k=1}^{n}f(\,\xi_k\,)\cdot(x_k-x_{k-1})\cdot\sqrt{1+(\,f'(\xi_k))^2}\;,\qquad \xi_k\in(x_{k-1},x_k)\;.$$

$\boxed{\textbf{Forgástest palástjának felszíne :}\quad F=2\pi\cdot\int_a^b f\cdot\sqrt{1+f'^2}\;.}$

$2\pi\cdot f(x_{k-1})$



$2\pi\cdot f(x_k)$

Pl. : (Gömb felszíne)

$$F_O = 2\pi\cdot\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\;dx = 2\,\pi\cdot\int_{-r}^{r}r\;dx = 4\,r^2\cdot\pi$$