Gallai Tibor

Turnamenten olyan irányított gráfot értünk, amiben két csúcs között mindig megy, pontosan az egyik irányban, él. Rédei Lászlótól ered a következő tétel.

Tétel. *Minden véges turnamentben van Hamilton út, tehát olyan irányított út, ami az összes csúcsot tartalmazza.*

Bizonyítás. A tournament csúcsainak n számára vonatkozó indukciót használunk. Az $n = 1$ eset nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy tudjuk az állítást n-re és adott az $n+1$ pontú T turnament. Hagyjuk el az egyik, mondjuk x pontot. Az indukció miatt a maradék turnamentben van Hamilton út, legyen egy ilyen $x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_n$. Ha $x \to x_1$, akkor T-ben kapunk egy x-szel kezdődő Hamilton utat: $x \to x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_n$. Feltehetjük tehát, hogy $x_1 \to x$. Hasonlóan készen vagyunk, ha $x_n \to x$, ekkor T-ben van egy x-szel végződő Hamilton út: $x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_n \to x$. Feltehetjük tehát, hogy $x \to x_n$.

Ha végigmegyünk az $x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_n$ Hamilton úton, kell lennie olyan x_i pontnak, amire $x_i \to x$ de $x \to x_{i+1}$ teljesül. De ekkor

$$x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_i \to x \to x_{i+1} \to \cdots \to x_n$$

Hamilton út T-ben.

Gallai alábbi tétele Rédei tételét $k = 1$ esetként tartalmazza.

Tétel. (Gallai) *Ha G véges irányított gráf, amiben a független pontok száma legfeljebb k, akkor G lefedhető k diszjunkt irányított úttal.*

Egy pontból álló utakat is megengedünk.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy adott a G irányított gráf, amiben a független csúcsok maximális száma k. G-nek mindenképpen van diszjunkt utakból álló lefedése: vehetjük az egypontú utakat.

A következő állítást fogjuk bizonyítani a gráf szögpontjainak számára vonatkozó indukcióval: ha adva van G egy diszjunkt lefedése irányított utakkal, S az utak kezdőpontjainak halmaza, $|S| > k$, akkor van egy másik diszjunkt lefedés irányított utakkal, amire a kezdőpontok T halmaza S valódi részhalmaza. Ha ezt be tudjuk bizonyítani, akkor készen vagyunk, hiszen a második lefedés kevesebb utat tartalmaz, mint az első, így az állítást ismételten használva addig csökkenthetjük az utak számát, amíg el nem érjük k-t.

Legyen tehát $S = \{x_1, \ldots, x_m\}$, az x_i-ből kiinduló út P_i. Mivel $m > k$, S-ben van él, mondjuk $x_1 \to x_2$. Ha az x_1-ből kiinduló P_1 útnak x_1-en kívül nincs más pontja, x_1-et első csúcsként P_2-höz csatolva G egy kívánt lefedést kapunk a $T = \{x_1, x_3, \ldots, x_m\}$ halmazzal. Feltehetjük tehát, hogy P_1 tartalmaz további csúcsokat, legyen az x_1 utáni első csúcs y. Ekkor tehát $x_1 \to x_2$ és $x_1 \to y$ is teljesül.

Legyen G' az az irányított gráf, ami G-ből x_1 elhagyásával keletkezik és tekintsük benne az $S' = \{y, x_2, \ldots, x_m\}$ halmazt. Van G'-nek diszjunkt utakból való lefedése, amiben az utak kezdőpontjai S' elemei: $P_1', P_2, \ldots, P_m$, ahol P_1' P_1-ből x_1 lecsippentésével adódik.

Jegyezzük meg, hogy G'-nek eggyel kevesebb csúcsa van, mint G-nek, továbbá G'-ben sem lehet k-nál több pontból álló független halmaz. Ezért alkalmazhatjuk az indukciót: van G'-nek diszjunkt utakból álló lefedése, ahol az utak kezdőpontjai S'-nek egy T' valódi részhalmazát adják.

Most eseteket vizsgálunk.

Ha $y \in T'$, akkor csatoljuk a belőle induló út elejéhez x_1-et. Ezzel G pontjainak lefedését kapjuk, az utak kezdőpontjai S részhalmazát adják és mivel számuk $|T'| < |S'|$, a részhalmaz valódi.

Ha $y \notin T'$, de $x_2 \in T'$, akkor csatoljuk x_1-et az x_2-ből kiinduló út elejéhez. Ezzel ismét G csúcsainak egy utakkal való fedését kaptuk, az utak kezdőpontjai $y \notin T'$ miatt S elemei, és $|T'| < |S'| = |S|$ miatt valódi részhalmazt alkotnak.

Végül, ha $y \notin T'$ és $x_2 \notin T'$, akkor T' elemszáma legalább 2-vel kisebb m-nél, S elemszámánál, így, ha az utak rendszeréhez hozzátesszük x_1-et, mint egypontú utat, még mindig legfeljebb $m - 1$, S bizonyos elemeiből kiinduló utat kapunk.