A matematikai analízis elemei VII.

(Lie-csoportok és Lie-algebrák. Lie-csoportok differenciálható ábrázolásai. Lie-csoportok folytonos unitér ábrázolásai.)

Kristóf János

Tartalomjegyzék

NÉV SZERINTI HIVATKOZÁSOK

LOG A matematikai analízis logikai alapjai (0. kötet, I. rész)
ENS A matematikai analízis halmazelméleti alapjai (0. kötet, II. rész)
ALG A matematikai analízis algebrai alapjai (0. kötet, III. rész)
TOP A matematikai analízis topológiai alapjai (0. kötet, IV. rész)
STR Bevezetés a matematikai struktúrák elméletébe (0. kötet, V. rész)
REA Valós és komplex számok/Elemi függvényanalízis (1. kötet, I./II. rész)
ESP Függvényterek és függvényalgebrák (1. kötet, III. rész)
MET Metrikus terek (1. kötet, IV. rész)
LIN Folytonos lineáris és multilineáris operátorok (2. kötet, I. rész)
DIF Differenciálelmélet (2. kötet, II. rész)
MES Additív halmazfüggvények és mértékek (2. kötet, III. rész)
INT Integrálelmélet (2. kötet, IV. rész)
GEO A geometriai integrálelmélet alapjai (2. kötet, V. rész)
CAU Cauchy-feladatok (2. kötet V. rész)
HOL Holomorf függvények (3. kötet, I. rész)
FUN A funkcionálanalízis elemei (3. kötet, II. rész)
GEA Az analitikus geometria elemei (3. kötet, III. rész)
EVT Topologikus vektorterek (4. kötet, I. rész)
CON Kompakt konvex halmazok (4. kötet, II. rész)
ALN Normált algebrák (4. kötet, III. rész)
ORT Ortohálók (4. kötet, IV. rész)
AHA Absztrakt harmonikus analízis (5. kötet, I. rész)
RAD A topologikus integrálelmélet elemei (5. kötet, II. rész)
VAR Differenciálható sokaságok (6. kötet, I. rész)
VEC Vektormezők és kovariáns deriválások (6. kötet, II. rész)
TEN Tenzormezők (6. kötet, III. rész)
RIE Pszeudo-Riemann sokaságok (6. kötet, IV. rész)
INV Integrálás differenciálható sokaságokon (6. kötet, V. rész)
LIE Lie-csoportok és Lie-algebrák (7. kötet, I. rész)
REP Lie-csoportok ábrázolásai (7. kötet, II. rész)

I. rész

Lie-csoportok és Lie-algebrák

1. fejezet

Lie-csoportok

1.1. Lie-csoportok értelmezése

1.1.1. Definíció. *A* $(G, \mathscr{D})$ *párt* **Lie-csoportnak** *nevezzük, ha* G *csoport, és a* $(G, \mathscr{D})$ *pár* C^∞*-osztályú sokaság, és a* $G \times G \to G$ *csoportművelet* C^∞*-osztályú morfizmus a* $(G \times G, \mathscr{D} \times \mathscr{D})$ *szorzatsokaság és a* $(G, \mathscr{D})$ *sokaság között, valamint a* $G \to G$ *csoport-inverzió* C^∞*-osztályú izomorfizmusa a* $(G, \mathscr{D})$ *sokaságnak.*

A szokásos konvenciónak megfelelően, a továbbiakban minden Lie-csoportot egyetlen betűvel, az alaphalmaz szimbólumával jelölünk, és az általános meggondolásokban minden Lie-csoportot multiplikatívan jelölünk, és ha G Lie-csoport, akkor G differenciálható struktúráját, vagyis G térképeinek halmazát a $\mathfrak{Ch}(G)$ szimbólummal jelöljük.

1.1.2. Állítás. *Ha* G *Lie-csoport, akkor minden* $s \in G$ *esetén a*

$$\gamma_G(s) : G \to G; \quad s' \mapsto ss',$$

$$\delta_G(s) : G \to G; \quad s' \mapsto s's^{-1}$$

$$\mathrm{Int}_G(s) : G \to G; \quad s' \mapsto ss's^{-1}$$

leképezések C^∞*-osztályú izomorfizmusok.*

Bizonyítás. (I) A definíció szerint a $\mathrm{p}_G : G \times G \to G$ szorzás-függvény C^∞-osztályú morfizmus, tehát ha $s \in G$, akkor a $\gamma_G(s) = \mathrm{p}_G(s, \cdot) : G \to G$ parciális függvény **VAR** 1.16.10. alapján C^∞-osztályú morfizmus. Mivel minden $s \in G$ esetén $(\gamma_G(s))^{-1} = \gamma_G(s^{-1})$, így a $\gamma_G(s)$ függvény C^∞-osztályú izomorfizmus.

(II) Ha $s \in G$, akkor $\delta_G(s) = \mathrm{i}_G \circ \gamma_G(s) \circ \mathrm{i}_G$, így (I) és **VAR** 1.10.9. alapján a $\delta_G(s)$ függvény is C^∞-osztályú izomorfizmus.

(III) Ha $s \in G$, akkor $\mathrm{Int}_G(s) = \gamma_G(s) \circ \delta_G(s)$, így (I), (II) és **VAR** 1.10.9. alapján az $\mathrm{Int}_G(s)$ függvény is C^∞-osztályú izomorfizmus. ■

1.1.3. Következmény. *Ha* G *Lie-csoport, akkor minden* $s \in G$ *és* $\varphi \in \mathfrak{Ch}(M)$ *esetén* $\varphi \circ \gamma_G(s) \in \mathfrak{Ch}(M)$ *és* $\varphi \circ \delta_G(s) \in \mathfrak{Ch}(M)$*, továbbá* $\varphi \circ \mathrm{i}_G \in \mathfrak{Ch}(M)$*.*

Bizonyítás. Az 1.1.2. állítás és **VAR** 1.7.6. nyilvánvaló következménye. ■

1.1.4. Következmény. *Ha* G *Lie-csoport, akkor minden* $s \in G$ *esetén*

$$(\mathrm{T}_e(\gamma_G(s)))^{-1} = \mathrm{T}_s\left(\gamma_G(s^{-1})\right),$$

$$\left(\mathrm{T}_e\left(\delta_G(s)\right)\right)^{-1} = \mathrm{T}_{s^{-1}}\left(\delta_G(s^{-1})\right),$$
$$\left(\mathrm{T}_e\left(\mathrm{Int}_G(s)\right)\right)^{-1} = \mathrm{T}_e\left(\mathrm{Int}_G(s^{-1})\right),$$
$$\left(\mathrm{T}_s\left(\mathrm{i}_G\right)\right)^{-1} = \mathrm{T}_{s^{-1}}\left(\mathrm{i}_G\right).$$

Bizonyítás. Mind a négy egyenlőség 1.1.2. és **VAR** 1.10.9. következménye, mert minden $s \in G$ esetén fennállnak a következő függvény-egyenlőségek

$$(\gamma_G(s))^{-1} = \gamma_G(s^{-1}), \quad (\delta_G(s))^{-1} = \delta_G(s^{-1}), \quad (\mathrm{Int}_G(s))^{-1} = \mathrm{Int}_G(s^{-1}), \quad (\mathrm{i}_G)^{-1} = \mathrm{i}_G,$$

figyelembe véve, hogy

$$\gamma_G(s)e = s, \quad \delta_G(s)e = s^{-1}, \quad \mathrm{Int}_G(s)e = e, \quad \mathrm{i}_G(s) = s^{-1}. \blacksquare$$

1.1.5. Állítás. *Ha G Lie-csoport, akkor G a sokaság-topológiával ellátva metrizálható topologikus csoport.*

Bizonyítás. Az 1.1.2. állítás alapján G a sokaság-topológiával ellátva topologikus csoport, és mivel minden sokaság-topológia T_1-topológia (**VAR** 1.5.12.), így a topologikus csoportok szeparáltságának kritériumából (**AHA** 2.1.5 Állítás) következik, hogy G szeparált topologikus csoport. Továbbá minden sokaság-topológia M_1-topológia (**VAR** 1.5.22.), így a csoport-topológiák metrizálhatóságának kritériuma (**AHA** 2.2.3 Tétel) szerint a G topologikus csoport metrizálható. ■

1.1.6. Következmény. *Ha G olyan véges dimenziós Lie-csoport, amelynek csak megszámlálható sok összefüggő komponense van, akkor G megszámlálható bázisú lokálisan kompakt csoport.*

Bizonyítás. A G sokaság véges dimenziós és szeparált, ezért **VAR** 1.5.15. szerint G topológiája lokálisan kompakt. Ugyanakkor az **AHA** 2.3.4. állítás szerint G σ-kompakt, és az előző állítás szerint metrizálható, így **TOP** 28.14.1. alapján G topológiája megszámlálható bázisú. ■

1.1.7. Definíció. *Azt mondjuk, hogy G* **Banach–Lie-csoport** *ha G Lie-csoport és a G sokaság Banach-sokaság.*

Természetesen minden végesdimenziós Lie-csoport Banach–Lie-csoport.

1.1.8. Állítás. *Ha $(G, \mathscr{D})$ olyan pár, hogy G csoport, és a $(G, \mathscr{D})$ pár C^∞-osztályú Banach-sokaság, és a $G \times G \to G$ csoportművelet C^∞-osztályú morfizmus a $(G \times G, \mathscr{D} \times \mathscr{D})$ szorzatsokaság és a $(G, \mathscr{D})$ sokaság között, akkor $(G, \mathscr{D})$ Banach–Lie-csoport.*

Bizonyítás. Azt kell igazolni, hogy az

$$\mathrm{i}_G : G \to G; \quad s \mapsto s^{-1}$$

inverzió-függvény is C^∞-osztályú izomorfizmus.

A hipotézis szerint a $\mathrm{p}_G : G \times G \to G$ szorzás-függvény C^∞-osztályú morfizmus a $G \times G$ szorzatsokaság és a G sokaság között, továbbá G Banach-sokaság, valamint $s \in G$ esetén

$$(\partial_2 \mathrm{p}_G)\left(s, s^{-1}\right) = \mathrm{T}_{s^{-1}}\left(\mathrm{p}_G(s, \cdot)\right) = \mathrm{T}_{s^{-1}}\left(\gamma_G(s)\right),$$

és a $\gamma_{_G}(s)$ függvény C^∞-osztályú izomorfizmus G és G között, így az $\mathrm{T}_{s^{-1}}\left(\gamma_{_G}(s)\right) \in \mathscr{L}\left(\mathrm{T}_{s^{-1}}(G);\mathrm{T}_{e_G}(G)\right)$ operátor lineáris homeomorfizmus. Tehát, ha $s \in G$ rögzített elem, akkor az implicitfüggvény-tétel (**VAR** 1.17.1) szerint létezik olyan U nyílt környezete s-nek és létezik olyan V nyílt környezete s^{-1}-nek, hogy létezik egyetlen olyan $g : U \to V$ C^∞-osztályú morfizmus az U és V nyílt részsokaságok között, amelyre minden $s' \in U$ esetén $\mathrm{p}_{_G}(s', g(s')) = \mathrm{p}_{_G}(s, s^{-1}) = e_{_G}$, vagyis $s'g(s') = e_{_G}$. Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{i}_{_G}|_{U,V} = g$, vagyis a $\mathrm{i}_{_G}|_{U,V} : U \to V$ függvény C^∞-osztályú morfizmus az U és V nyílt részsokaságok között. Ekkor az $\mathrm{i}_{_G}|_U : U \to G$ leképezés C^∞-osztályú morfizmus az U nyílt részsokaság és a G sokaság között. Ezért a morfikusság lokalitásának elve (**VAR** 1.11.7.) alapján a $\mathrm{i}_{_G} : G \to G$ inverzió-függvény C^∞-osztályú morfizmus. Mivel $\mathrm{i}_{_G}$ bijekció és $\mathrm{i}_{_G}^{-1} = \mathrm{i}_{_G}$, így ebből kapjuk, hogy G inverzió-függvénye C^∞-osztályú izomorfizmus. ■

1.2. Lie-csoport morfizmusok

1.2.1. Definíció. *Ha G és H Lie-csoportok, akkor azt mondjuk, hogy a $\sigma : G \to H$ függvény* **Lie-csoport morfizmus** *G és H között, ha a σ leképezés C^∞-osztályú morfizmus a G és H sokaságok között, valamint σ csoport-morfizmus a G és H csoportok között. Ha G és H Lie-csoportok, akkor azt mondjuk, hogy a $\sigma : G \to H$ függvény* **Lie-csoport izomorfizmus** *G és H között, ha $\sigma : G \to H$ olyan bijekció, hogy σ Lie-csoport morfizmus G és H között, valamint a $\sigma^{-1} : H \to G$ leképezés Lie-csoport morfizmus H és G között. Azt mondjuk, hogy a G és H Lie-csoportok* **izomorfak**, *ha létezik Lie-csoport morfizmus G és H között.*

A **VAR** 1.10.8. állításból azonnak következik, hogy ha G, H, K Lie-csoportok, és $\sigma : G \to H$ és $\tau : H \to K$ Lie-csoport morfizmusok, akkor $\tau \circ \sigma : G \to K$ szintén Lie-csoport morfizmus. Továbbá, ha G Lie-csoport, akkor **VAR** 1.10.5. alapján az $\mathrm{id}_{_G}$ leképezés Lie-csoport izomorfizmus G és G között. Ezekből következik, hogy ha G Lie-csoport, akkor a G és G közötti izomorfizmusok halmaza részcsoportja a G halmaz teljes permutációcsoportjának.

1.3. Lie-csoportok direkt és féldirekt szorzata

1.3.1. Állítás. *Ha $(G_i)_{i\in I}$ Lie-csoportok nem üres véges rendszere, akkor a $\prod\limits_{i\in I} G_i$ szorzathalmaz a szorzatcsoport-stuktúrával és a C^∞-osztályú szorzatsokaság-struktúrával ellátva Lie-csoport.*

Bizonyítás. Legyen $G := \prod\limits_{i\in I} G_i$. A szorzatcsoport-művelet értelmezése alapján, minden $i \in I$ esetén

$$\mathrm{pr}_i \circ \mathrm{p}_{_G} = \mathrm{p}_{_{G_i}} \circ (\mathrm{pr}_i \times \mathrm{pr}_i)\,,$$

ahol $\mathrm{pr}_i : G \to G_i$ az i-edik projekció. Ha $i \in I$, akkor a $\mathrm{pr}_i : G \to G_i$ függvény C^∞-osztályú morfizmus a G szorzatsokaság és a G_i sokaság között **VAR** 1.16.4., tehát a $\mathrm{pr}_i \times \mathrm{pr}_i : G \times G \to G_i \times G_i$ függvény C^∞-osztályú morfizmus a $G \times G$ és $G_i \times G_i$ szorzatsokaságok között (**VAR** 1.16.8.). Ugyanakkor minden $i \in I$ esetén a $\mathrm{p}_{_{G_i}} : G_i \times G_i \to G_i$ függvény a Lie-csoportok definíciója alapján C^∞-osztályú morfizmus a $G_i \times G_i$ szorzatsokaság és G_i között, ezért **VAR** 1.10.8. szerint a $\mathrm{p}_{_{G_i}} \circ (\mathrm{pr}_i \times \mathrm{pr}_i) : G_i \times G_i \to G$ függvény C^∞-osztályú morfizmus a $G \times G$ szorzatsokaság és G_i között.

Tehát minden $i \in I$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ \mathrm{p}_G : G \times G \to G_i$ leképezés C^∞-osztályú morfizmus a $G \times G$ szorzatsokaság és G_i között. Az **VAR** 1.16.6. állítás alapján ebből következik, hogy a $\mathrm{p}_G : G \times G \to G$ szorzás-függvény C^∞-osztályú morfizmus a $G \times G$ szorzatsokaság és G között. ■

1.3.2. Állítás. *Legyenek N és H Lie-csoportok, valamint $\tau : H \to \mathbf{Aut}(N)$; $h \mapsto \tau_h$ olyan csoport-morfizmus, hogy a*

$$N \times H \to N; \quad (n,h) \mapsto \tau_h(n)$$

leképezés C^∞-osztályú morfizmus az $N \times H$ szorzatsokaság és az N sokaság között. Ekkor az $N \times H$ szorzathalmaz a τ által meghatározott féldirekt szorzat-művelettel és a szorzatsokaság struktúrával ellátva Lie-csoport.

Bizonyítás. Jelölje G az N és H csoportok τ szerinti féldirekt szorzatát (**ALG** 13.6.3.), és legyen p_G, p_N és p_H rendre a G, N és H csoportok szorzás-függvényét, valamint i_G, i_N és i_H rendre a G, N és H csoportok inverzió-függvényét. Továbbá, vezessük be a

$$\mathrm{pr}_1 : (N \times H) \times (N \times H) \to N \times H; \quad ((n,h),(n',h')) \mapsto (n,h),$$

$$\mathrm{pr}_2 : (N \times H) \times (N \times H) \to N \times H; \quad ((n,h),(n',h')) \mapsto (n',h'),$$

$$\mathrm{pr}_N : N \times H \to N; \quad (n,h) \mapsto n,$$

$$\mathrm{pr}_H : N \times H \to H; \quad (n,h) \mapsto h$$

projekció-függvényeket, valamint az

$$T : N \times H \to N; \quad (n,h) \mapsto \tau_h(n)$$

leképezést. Az $N \times H$ szorzathalmazt ellátjuk a C^∞-osztályú differenciálható szorzatsokaságstruktúrával, tehát $N \times H$-t C^∞-osztályú sokaságnak tekintjük. Az $(N \times H) \times (N \times H)$ szorzathalmazt ellátjuk a C^∞-osztályú differenciálható szorzatsokaság-struktúrával, tehát $(N \times H) \times (N \times H)$-t C^∞-osztályú sokaságnak tekintjük. A **VAR** 1.16.4. állítás szerint a projekciók mind C^∞-osztályú morfizmusok a megfelelő sokaságok között, és a τ csoport-morfizmusra vonatkozó hipotézis szerint T is C^∞-osztályú morfizmus az $N \times H$ szorzatsokaság és N között.

Ha $(n,h),(n',h') \in N \times H$, akkor p_G definíciója szerint

$$\mathrm{p}_G((n,h),(n',h')) = (n\tau_h(n'), hh') = (\mathrm{p}_N(n, T(n',h)), \mathrm{p}_H(h,h')) .$$

Ez azt jelenti, hogy ha bevezetjük az

$$\alpha : (N \times H) \times (N \times H) \to N \times N; \quad ((n,h),(n',h')) \mapsto (n, T(n',h)),$$

$$\beta : (N \times H) \times (N \times H) \to H \times H; \quad ((n,h),(n',h')) \mapsto (h,h')$$

leképezéseket, akkor

$$\mathrm{pr}_N \circ \mathrm{p}_G = \mathrm{p}_N \circ \alpha, \tag{1}$$

$$\mathrm{pr}_H \circ \mathrm{p}_G = \mathrm{p}_H \circ \beta. \tag{2}$$

Az α függvény első komponens-függvénye $\mathrm{p}_N \circ \mathrm{pr}_1$, amely **VAR** 1.16.4. és **VAR** 1.10.8. szerint C^∞-osztályú morfizmus. A α függvény második komponens-függvénye $T \circ \gamma$, ahol bevezettük a

$$\gamma : (N \times H) \times (N \times H) \to N \times H; \quad ((n,h),(n',h')) \mapsto (n',h)$$

leképezést. A γ függvény első komponens-függvénye $p_N \circ pr_2$, amely **VAR** 1.16.4. és **VAR** 1.10.8. szerint C^∞-osztályú morfizmus. A γ függvény második komponens-függvénye $p_H \circ pr_1$, amely **VAR** 1.16.4. és **VAR** 1.10.8. szerint C^∞-osztályú morfizmus. Ezért **VAR** 1.16.4. alapján a γ függvény C^∞-osztályú morfizmus az $(N \times H) \times (N \times H)$ szorzatsokaság és az $N \times H$ szorzatsokaság között. A hipotézis szerint a T függvény C^∞-osztályú morfizmus az $N \times H$ szorzatsokaság és az N sokaság között, így **VAR** 1.10.8. alapján a $T \circ \gamma$ függvény, vagyis (1) szerint a $pr_N \circ p_G$ komponens -függvény C^∞-osztályú morfizmus az $(N \times H) \times (N \times H)$ szorzatsokaság és az N sokaság között.

A β függvény első komponens-függvénye $p_H \circ pr_1$, amely **VAR** 1.16.4. és **VAR** 1.10.8. szerint C^∞-osztályú morfizmus. A β függvény második komponens-függvénye $p_H \circ pr_2$, amely **VAR** 1.16.4. és **VAR** 1.10.8. szerint C^∞-osztályú morfizmus. Ezért **VAR** 1.16.4. alapján a β függvény C^∞-osztályú morfizmus az $(N \times H) \times (N \times H)$ szorzatsokaság és a $H \times H$ szorzatsokaság között. Mivel H Lie-csoport, így a p_H függvény C^∞-osztályú morfizmus a $H \times H$ szorzatsokaság és H között, ezért **VAR** 1.10.8. az $p_H \circ \beta$ függvény, vagyis (2) szerint a $pr_H \circ p_G$ komponens-függvény C^∞-osztályú morfizmus az $(N \times H) \times (N \times H)$ szorzatsokaság és a H sokaság között.

A két előző bekezdésből **VAR** 1.16.4. alapján következik, hogy a p_G szorzás-függvény C^∞-osztályú morfizmus az $(N \times H) \times (N \times H)$ és $N \times H$ szorzatsokaságok között.

Ha $(n, h) \in N \times H$, akkor az i_G függvényre

$$i_G(n,h) = (n,h)^{-1} = \left(\tau_{h^{-1}}\left(n^{-1}\right), h^{-1}\right) = \left(\left(T \circ (i_N \times i_H)\right)(n,h), \left(i_H \circ pr_H\right)(n,h)\right)$$

teljesül. Mivel N és H Lie-csoportok, így az $i_N : N \to N$ és $i_H : H \to H$ leképezések C^∞-osztályú morfizmusok, tehát **VAR** 1.16.8. alapján az $i_N \times i_H : N \times H \to N \times H$ függvény is C^∞-osztályú morfizmus. Ebből **VAR** 1.10.8. alkalmazásával kapjuk, hogy a $T \circ (i_N \times i_H)$ függvény, vagyis i_G első komponsens-függvénye C^∞-osztályú morfizmus. Ugyanakkor **VAR** 1.10.8. szerint az $i_H \circ pr_H$ függvény, vagyis i_G második komponsens-függvénye C^∞-osztályú morfizmus. Ebből **VAR** 1.16.4. alapján következik, hogy az i_G inverzió-függvény C^∞-osztályú morfizmus. ■

1.4. Lie-részcsoportok

1.4.1. Definíció. *Legyen G Lie-csoport. Azt mondjuk, hogy a H Lie-csoport G-nek* **Lie-részcsoportja**, *ha $H \subseteq G$, és H részcsoportja a G csoportnak és H részsokasága a G sokaságnak.*

1.4.2. Állítás. *Legyen H topologikus csoport, G Lie-csoport és $f : H \to G$ folytonos csoport-morfizmus. Ha f-re teljesül a* (QR) *feltétel, akkor a H csoport a G differenciálható struktúrája f által létesített kvázi-inverz képével ellátva Lie-csoport.*

Bizonyítás. A H halmazt ellátjuk a G differenciálható struktúrája f által létesített kvázi-inverz képével, tehát H C^∞-osztályú sokaság. Azt kell igazolni, hogy a $p_H : H \times H \to H$ szorzás-függvény és az $i_H : H \to H$ inverzió-függvény C^∞-osztályú.

Az $f : H \to G$ függvény C^∞-osztályú (**VAR** 2.4.6.), ezért az $f \times f : H \times H \to G \times G$ függvény is C^∞-osztályú (**VAR** 1.16.8.). Továbbá a $p_G : G \times G \to G$ szorzás-függvény C^∞-osztályú, mert G Lie-csoport, ezért a $p_G \circ (f \times f) : H \times H \to G \times G$ leképezés is C^∞-osztályú. Mivel $f : H \to G$ csoport-morfizmus, így $f \circ p_H = p_G \circ (f \times f)$, tehát az $f \circ p_H : H \times H \to G$ függvény C^∞-osztályú (**VAR** 1.10.9.). Ezért a $p_H : H \times H \to H$ folytonos függvényre és az $f : H \to G$ függvényre alkalmazhatjuk a **VAR** 2.4.9. állítást a következő szereposztással: $M := G$, $N := H$ a H-n adott eredeti topológiával ellátva (ami **VAR** 2.4.4. szerint egyenlő a H sokaság-topológiájával!), $L := H \times H$ a szorzatsokaság-struktúrával ellátva, és $g := \mathrm{p}_H$. Azt kapjuk, hogy az $\mathrm{p}_H : H \times H \to H$ szorzás-függvény C^∞-osztályú.

Az $f : H \to G$ függvény C^∞-osztályú és az $\mathrm{i}_G : G \to G$ inverzió-függvény is C^∞-osztályú, mert G Lie-csoport. Ezért az $\mathrm{i}_G \circ f : H \to G$ függvény C^∞-osztályú (**VAR** 1.10.9.). Mivel $f : H \to G$ csoport-morfizmus, így $f \circ \mathrm{i}_H = \mathrm{i}_G \circ f$, tehát az $f \circ \mathrm{i}_H : H \to G$ leképezés C^∞-osztályú. Ezért az $\mathrm{i}_H : H \to H$ folytonos függvényre és f-re alkalmazhatjuk a **VAR** 2.4.9. állítást a következő szereposztással: $M := G$, $N := H$ a H-n adott eredeti topológiával ellátva (ami **VAR** 2.4.4. szerint egyenlő a H sokaság-topológiájával!), $L := H$, és $g := \mathrm{i}_H$. Azt kapjuk, hogy az $\mathrm{i}_H : H \to H$ inverzió-függvény C^∞-osztályú. ■

Megjegyezzük, hogy az előző tétel bizonyításában fontos szerepe volt annak a ténynek, hogy a G differenciálható struktúrája f által létesített kvázi-inverz képének, mint differenciáható sokaság-struktúrának a topológiája a **VAR** 2.4.4. tétel szerint *egyenlő* H eredeti topológájával. Valóban, ha $\mathscr{T}$ jelöli ezt a sokaság-topológát H felett és $\mathscr{T}_H$ a H eredeti csoport-topológiája, akkor az p_H szorzás-függvény a priori a $\mathscr{T}_H \times \mathscr{T}_H$ és $\mathscr{T}_H$ topológiák szerint folytonos, valamint az i_H inverzió-függvény a $\mathscr{T}_H$ és $\mathscr{T}_H$ topológiák szerint folytonos. Ugyanakkor, a **VAR** 2.4.9. állítás alkalmazhatóságához arra van szükség, hogy a p_H függvény a $\mathscr{T} \times \mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_H$ topológiák szerint legyen folytonos, valamint az i_H függvény a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_H$ topológiák szerint legyen folytonos. Ezt garantálja a $\mathscr{T} = \mathscr{T}_H$ egyenlőség, amit a **VAR** 2.4.4. tétel c) pontjában igazoltunk, jóval általánosabb körülmények között.

1.4.3. Következmény. *Ha H Lie-részcsoportja a G Lie-csoportnak, akkor a H halmaz a részcsoport-művelettel és a részsokaság struktúrával ellátva Lie-csoport.*

Bizonyítás. Nyilvánvalóan következik az előző állításból az $f := \mathrm{in}_{H,G}$ választással. ■

1.4.4. Állítás. *Ha G Lie-csoport és H Lie-részcsoport G-ben, akkor a H részcsoport által meghatározott baloldali ekvivalencia reguláris, és ha a G/H halmazt ellátjuk a faktorsokaság, struktúrával, akkor a $\pi_{G/H} : G \to G/H$ kanonikus szürjekcióra teljesül az, hogy minden $s \in G$ esetén*

$$\operatorname{Ker}\left(\mathrm{T}_s\left(\pi_{G/H}\right)\right) = \operatorname{Im}\left(\mathrm{T}_{e_G}\left(\gamma_G(s)\right)\right).$$

Bizonyítás. ■

1.4.5. Állítás. *Ha G Lie-csoport és H Lie-részcsoport G-ben, akkor a*

$$G \times (G/H) \to G/H; \quad (s, \zeta) \mapsto \gamma_{G/H}(s)\zeta$$

leképezés C^∞-osztályú morfizmus a $G \times (G/H)$ szorzatsokaság és a G/H faktorsokaság között.

Bizonyítás. ■

1.4.6. Állítás. *Ha G Lie-csoport és H Lie-részcsoport G-ben, valamint H invariáns részcsoport G-ben, akkor a G/H halmaz a faktorcsoport-művelettel és a faktorsokaság-struktúrával ellátva Lie-csoport.*

Bizonyítás. ■

2. fejezet

Lie-csoport kanonikus parallelizációja

2.1. Lie-csoport kanonikus parallelizációjának értelmezése

2.1.1. Állítás. *Ha G Lie-csoport, akkor a $\left(\mathrm{T}_e(G), (\mathrm{T}_e(\gamma_G(x)))_{x\in G}\right)$ pár, valamint a $\left(\mathrm{T}_e(G), (\mathrm{T}_e(\delta_G(x^{-1})))_{x\in G}\right)$ pár C^∞-parallelizációja a G sokaságnak.*

Bizonyítás. (I) Minden $x \in G$ esetén legyen $\mathbf{u}(x) := \mathrm{T}_e(\gamma_G(x))$. A **VAR** 6.11.1. definíció szerint azt kell igazolni, hogy minden $x \in G$ esetén $\mathbf{u}(x) : \mathrm{T}_e(G) \to \mathrm{T}_x(G)$ lineáris homeomorfizmus, és minden $\varphi \in \mathfrak{Ch}(G)$ térképre az

$$\mathrm{Im}(\varphi) \to \mathscr{L}(\mathrm{T}_e(G); \mathrm{E}_\varphi); \quad z \mapsto \Theta^{-1}_{\varphi,\varphi^{-1}(z)} \circ \mathbf{u}\left(\varphi^{-1}(z)\right) \tag{1}$$

$$\mathrm{Im}(\varphi) \to \mathscr{L}(\mathrm{E}_\varphi; \mathrm{T}_e(G)); \quad z \mapsto \left(\mathbf{u}\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right)^{-1} \circ \Theta_{\varphi,\varphi^{-1}(z)} \tag{2}$$

függvények C^∞-osztályúak.

Ha $x \in G$, akkor a $\gamma_G(x)$ függvény C^∞-osztályú izomorfizmus (1.1.2.), így $\mathrm{T}_e(\gamma_G(x))$ lineáris homeomorfizmus a $\mathrm{T}_e(G)$ és $\mathrm{T}_x(G)$ normálható terek között.

Legyen $\varphi \in \mathfrak{Ch}(G)$. Az $\mathbf{u}$ leképezés definíciója szerint az (1) függvény megegyezik az

$$\mathrm{Im}(\varphi) \to \mathscr{L}(\mathrm{T}_e(G); \mathrm{E}_\varphi); \quad z \mapsto \Theta^{-1}_{\varphi,\varphi^{-1}(z)} \circ \mathrm{T}_e\left(\gamma_G\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right)$$

leképezéssel, ami a 4.2.1. lemma alapján C^∞-osztályú.

A (2) függvény simaságának vizsgálatához először megjegyezzük, hogy minden $x \in G$ elemre

$$\mathrm{T}_e\left(\mathrm{Int}_G(x^{-1})\right) \circ \mathrm{T}_x(\delta_G(x)) \overset{(1)}{=} \mathrm{T}_x\left(\mathrm{Int}_G(x^{-1}) \circ \delta_G(x)\right) \overset{(2)}{=} \mathrm{T}_x\left(\gamma_G(x^{-1})\right) \overset{(3)}{=} (\mathrm{T}_e(\gamma_G(x)))^{-1},$$

ahol

– az $\overset{(1)}{=}$ egyenlőségnél a **VAR** 1.10.9. állítást alkalmaztuk;

– a $\overset{(2)}{=}$ egyenlőségnél felhasználtuk azt, hogy $\mathrm{Int}_G(x^{-1}) = \gamma_G(x^{-1}) \circ \delta_G(x^{-1})$ és $\delta_G(x^{-1}) = (\delta_G(x))^{-1}$;

– a $\overset{(3)}{=}$ egyenlőségnél az 1.1.4. állításra hivatkoztunk.

Ebből minden $z \in \mathrm{Im}(\varphi)$ vektorra az $x := \varphi^{-1}(z)$ választással kapjuk, hogy

$$\left(\mathbf{u}\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right)^{-1} \circ \Theta_{\varphi,\varphi^{-1}(z)} = \left(\mathrm{T}_e\left(\gamma_G\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right)\right)^{-1} \circ \Theta_{\varphi,\varphi^{-1}(z)} =$$

$$= \mathrm{T}_e\left(\mathrm{Int}_G\left(\left(\varphi^{-1}(z)\right)^{-1}\right)\right) \circ \mathrm{T}_{\varphi^{-1}(z)}\left(\delta_G\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right) \circ \Theta_{\varphi,\varphi^{-1}(z)}.$$

Vezessük be a következő leképezéseket:

$$\alpha : \mathrm{Im}(\varphi) \to \mathscr{L}\left(\mathrm{T}_e(G); \mathrm{T}_e(G)\right); \quad z \mapsto \mathrm{T}_e\left(\mathrm{Int}_G\left(\left(\varphi^{-1}(z)\right)^{-1}\right)\right);$$

$$\beta : \mathrm{Im}(\varphi) \to \mathscr{L}\left(\mathrm{E}_\varphi; \mathrm{T}_e(G)\right); \quad z \mapsto \mathrm{T}_{\varphi^{-1}(z)}\left(\delta_G\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right) \circ \Theta_{\varphi,\varphi^{-1}(z)},$$

$$\mathbf{b} : \mathscr{L}\left(\mathrm{T}_e(G); \mathrm{T}_e(G)\right) \times \mathscr{L}\left(\mathrm{E}_\varphi; \mathrm{T}_e(G)\right) \to \mathscr{L}\left(\mathrm{E}_\varphi; \mathrm{T}_e(G)\right); \quad (u,v) \mapsto u \circ v.$$

Az előzőek szerint a (2) leképezés egyenlő az

$$\mathrm{Im}(\varphi) \to \mathscr{L}\left(\mathrm{E}_\varphi; \mathrm{T}_e(G)\right); \quad z \mapsto \mathbf{b}(\alpha(z), \beta(z))$$

függvénnyel, ezért elegendő azt igazolni, hogy az α, β és $\mathbf{b}$ függvények C^∞-osztályúak. Mivel az $\mathrm{i}_G : G \to G$ inverzió C^∞-osztályú izomorfizmus, tehát **VAR** 1.7.6. alapján $\varphi \circ \mathrm{i}_G \in \mathfrak{Ch}(G)$, így φ helyett erre a térképre alkalmazva az 4.2.1. Lemmát kapjuk, hogy az

$$\mathrm{Im}(\varphi) \to \mathscr{L}\left(\mathrm{T}_e(G); \mathrm{T}_e(G)\right); \quad z \mapsto \mathrm{T}_e\left(\mathrm{Int}_G\left(\left(\varphi \circ \mathrm{i}_G\right)^{-1}(z)\right)\right)$$

leképezés C^∞-osztályú. Ugyanakkor minden $z \in \mathrm{Im}(\varphi)$ esetén

$$\mathrm{T}_e\left(\mathrm{Int}_G\left(\left(\varphi \circ \mathrm{i}_G\right)^{-1}(z)\right)\right) = \mathrm{T}_e\left(\mathrm{Int}_G\left(\mathrm{i}_G^{-1}\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right)\right) = \mathrm{T}_e\left(\mathrm{Int}_G\left(\left(\varphi^{-1}(z)\right)^{-1}\right)\right) = \alpha(z),$$

tehát az α leképezés C^∞-osztályú. A β leképezés 4.2.1. alapján C^∞-osztályú. Végül, a $\mathbf{b}$ leképezés folytonos bilineáris operátor, így C^∞-osztályú.

(II) Vezessük be a

$$\tau : G \to \mathscr{L}\left(\mathrm{T}_e(G); \mathrm{T}_e(G)\right); \quad x \mapsto \Big(\mathrm{T}_e\left(\gamma_G(x)\right)\Big)^{-1} \circ \mathrm{T}_e\left(\delta_G(x^{-1})\right)$$

leképezést. Világos, hogy minden $x \in G$ esetén a $\tau(x) : \mathrm{T}_e(G) \to \mathrm{T}_e(G)$ leképezés lineáris homeomorfizmus, továbbá $\Big(\mathrm{T}_e\left(\gamma_G(x)\right)\Big)^{-1} = \mathrm{T}_x\left(\gamma_G(x^{-1})\right)$ miatt írható, hogy

$$\tau(x) = \mathrm{T}_x\left(\gamma_G(x^{-1})\right) \circ \mathrm{T}_e\left(\delta_G(x^{-1})\right) = \mathrm{T}_e\left(\gamma_G(x^{-1}) \circ \delta_G(x^{-1})\right) = \mathrm{T}_e\left(\mathrm{Int}_G(x^{-1})\right). \quad (3)$$

Az $\mathrm{i}_G : G \to G$ inverzió C^∞-osztályú függvény, és a 4.2.1. Lemma szerint a

$$G \to \mathscr{L}\left(\mathrm{T}_e(G); \mathrm{T}_e(G)\right); \quad x \mapsto \mathrm{T}_e\left(\mathrm{Int}_G(x)\right)$$

leképezés C^∞-osztályú, így ezek kompozíciója is C^∞-osztályú, ami a (3) egyenlőség alapján azt jelenti, hogy a $\tau : G \to \mathscr{L}\left(\mathrm{T}_e(G); \mathrm{T}_e(G)\right)$ leképezés C^∞-osztályú. Ugyanakkor, világos, hogy minden $x \in G$ esetén

$$(\tau(x))^{-1} = \left(\mathrm{T}_e\left(\mathrm{Int}_G(x^{-1})\right)\right)^{-1} = \mathrm{T}_e\left(\mathrm{Int}_G(x)\right),$$

így ismét 4.2.1. alapján kapjuk, hogy a $G \to \mathscr{L}\left(\mathrm{T}_e(G); \mathrm{T}_e(G)\right);\ x \mapsto (\tau(x))^{-1}$ leképezés is C^∞-osztályú. Mivel pedig a definíció szerint minden $x \in G$ pontra

$$\mathrm{T}_e\left(\delta_G(x^{-1})\right) = \mathrm{T}_e\left(\gamma_G(x)\right) \circ \tau(x),$$

és (I) szerint a $\left(\mathrm{T}_e(G), \left(\mathrm{T}_e\left(\gamma_G(x)\right)\right)_{x \in G}\right)$ pár C^∞-parallelizációja a G sokaságnak, így **VAR** 6.11.15. alapján a $\left(\mathrm{T}_e(G), \left(\mathrm{T}_e\left(\delta_G(x^{-1})\right)\right)_{x \in G}\right)$ pár is C^∞-parallelizációja a G sokaságnak. ■

2.1.2. Definíció. *Ha G Lie-csoport, akkor az* $\left(\mathrm{T}_e(G), (\mathrm{T}_e\left(\gamma_G(x)\right))_{x\in G}\right)$ *párt* (*illetve a* $\left(\mathrm{T}_e(G), (\mathrm{T}_e\left(\delta_G(x^{-1})\right))_{x\in G}\right)$ *párt*) *a G Lie-csoport* **kanonikus baloldali** (*illetve* **kanonikus jobboldali**) **parallelizációjának** *nevezzük.*

A **VAR** 6.11.9. c) állítás szerint teljesül az, hogy ha G Lie-csoport, akkor a

$$\mathrm{C}^\infty(G;\mathrm{T}_e(G)) \to {}^\infty\mathfrak{T}(G); \quad f \mapsto \xi_f := \left(\mathrm{T}_e\left(\gamma_G(x)\right) f(x)\right)_{x\in G}$$

leképezés olyan lineáris bijekció, amelynek az inverze a

$$^\infty\mathfrak{T}(G) \to \mathrm{C}^\infty(G;\mathrm{T}_e(G));$$

$$\xi \mapsto f_\xi := \left(\left(\mathrm{T}_e\left(\gamma_G(x)\right)\right)^{-1}\xi(x)\right)_{x\in G} = \left(\mathrm{T}_x\left(\gamma_G\left(x^{-1}\right)\right)\xi(x)\right)_{x\in G}$$

leképezés.

2.1.3. Állítás. *Legyen G Lie-csoport és $\psi \in \mathfrak{Ch}(G)$ olyan térkép, amelyre $e \in \mathrm{Dom}(\psi)$. Ekkor minden $f \in \mathrm{C}^\infty(G;\mathrm{T}_e(G))$ és $\varphi \in \mathfrak{Ch}(G)$ esetén teljesül az, hogy minden $z \in \mathrm{Im}(\varphi)$ vektorra*

$$\left(\xi_f\right)_\varphi(z) = \left(\partial_2\left(\varphi\circ \mathrm{p}_G \circ (\varphi\times\psi)^{-1}\right)\right)(z,\psi(e))\left(\Theta_{\psi,e}^{-1}\circ f\circ\varphi^{-1}\right)(z).$$

Bizonyítás.

■

2.2. Lie-csoport kanonikus baloldali kovariáns deriválása

2.2.1. Definíció. *Ha G Lie-csoport, akkor a G kanonikus baloldali parallelizációja által generált G feletti kovariáns deriválást a G Lie-csoport* **kanonikus baloldali kovariáns deriválásának** *nevezzük, és a ${}^G\boldsymbol{\nabla}$ vagy egyszerűen $\boldsymbol{\nabla}$ szimbólummal jelöljük* (*ha világos, hogy melyik G Lie-csoportról van szó*).

Ebben a pontban megvizsgáljuk Lie-csoport baloldali kovariáns deriválásának néhány érdekes tulajdonságát.

2.3. Lie-csoport exponenciális függvénye

3. fejezet

Lie-algebrák

3.1. Lie-algebrák alaptulajdonságai

3.1.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a* $(\mathfrak{g}, +, ., [\cdot,\cdot])$ *négyes* **Lie-algebra** *a* K *test felett, ha a* $(\mathfrak{g}, +, .)$ *hármas vektortér a* K *test felett, és*

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}; \quad (x, y) \mapsto [x, y]$$

olyan alternáló K*-bilineáris operátor, amelyre minden* $x, y, z \in \mathfrak{g}$ *esetén fennáll az*

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = \mathbf{0}$$

Jacobi-egyenlőség.

Példák. (Lie-algebrákra)

1) Ha $\mathfrak{g}$ vektortér a K test felett, és minden $x, y \in \mathfrak{g}$ esetén $[x, y] := \mathbf{0}$, akkor a $\mathfrak{g}$ vektortér, ellátva a $[\cdot,\cdot]$ művelettel nyilvánvalóan olyan Lie-algebra, amelyben a Lie-szorzás kommutatív (vagyis kommutatív Lie-algebra). Megfordítva, ha $\mathfrak{g}$ kommutatív Lie-algebra a K test felett, akkor minden $x, y \in \mathfrak{g}$ esetén a Lie-szorzás antiszimmetrikussága folytán $[x, y] = -[y, x] = -[x, y]$, így $2[x, y] = \mathbf{0}$, tehát ha $\mathrm{Char}(K) \neq 2$, akkor $[x, y] = \mathbf{0}$. Vagyis nem 2 karakterisztikájú test feletti Lie-algebra pontosan akkor kommutatív, ha a Lie-szorzása az azonosan $\mathbf{0}$ függvény.

2) Legyen A (asszociatív) algebra a K test felett. Ekkor az A vektortér az

$$[\cdot,\cdot]_A : A \times A \to A; \quad (a, b) \mapsto ab - ba$$

leképezéssel ellátva Lie-algebra K felett, mert

– a $[\cdot,\cdot]_A$ függvény K-bilineáris leképezés, mert A szorzásának összeadásra vonatkozó disztributivitása miatt minden $a, b \in A$ esetén az

$$A \to A; \quad x \mapsto ax - xa$$

$$A \to A; \quad x \mapsto xb - bx$$

leképezések additívak, és minden $\lambda \in K$ esetén

$$[\lambda.a, b]_A = (\lambda.a)b - b(\lambda.a) = \lambda.(ab) - \lambda.(ba) = \lambda.(ab - ba) = \lambda.[a, b]_A,$$

$$[a, \lambda.b]_A = a(\lambda.b) - (\lambda.b)a = \lambda.(ab) - \lambda.(ba) = \lambda.(ab - ba) = \lambda.[a, b]_A.$$

- a $[\cdot,\cdot]_A$ függvény alternáló, mert minden $a \in A$ esetén $[a,a]_A = aa - aa = \mathbf{0}$;
- minden $a,b,c \in A$ esetén A szorzásának asszociativitása miatt

$$[a,[b,c]_A]_A + [b,[c,a]_A]_A + [c,[a,b]_A]_A =$$

$$= a(bc-cb) - (bc-cb)a + b(ca-ac) - (ca-ac)b + c(ab-ba) - (ab-ba)c =$$

$$= a(bc)-a(cb)-(bc)a+(cb)a+b(ca)-b(ac)-(ca)b+(ac)b+c(ab)-c(ba)-(ab)c+(ba)c =$$

$$= a(bc)-(ab)c+(cb)a-c(ba)+b(ca)-(bc)a+(ac)b-a(cb)+c(ab)-(ca)b+(ba)c-b(ac) = \mathbf{0},$$

tehát teljesül a Jacobi-egyenlőség.

3) A 2) példa fontos speciális esete az, amikor E vektortér a K test felett, és $A := \mathbf{L}(E)$ az E vektortér teljes operátoralgebrája. Az így nyert Lie-algerát $\mathfrak{gl}(E)$ fogja jelölni. Ha K test és $n \in \mathbb{N}$, akkor $\mathfrak{gl}\,(K^n))$ helyett a $\mathfrak{gl}(n,K)$ jelölést is alkalmazzuk. (Ennek a jelölésnek az az oka, hogy ha $n \in N$, akkor a $\mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$ Lie-csoport Lie-algebrája kanonikusan azonosul a $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ Lie-algebrával.)

A Lie-csoportok szempontjából legfontosabb példát Lie-algebrákra a következő állítás szolgáltatja.

3.1.2. Állítás. *Ha M C^∞-osztályú sokaság, akkor az M feletti C^∞-osztályú vektormezők vektortere a $[\cdot,\cdot]$ kommutátor-művelettel ellátva Lie-algebra.*

Bizonyítás. C^∞-osztályú vektormezők kommutátora **VAR** 6.5.1. szerint C^∞-osztályú. A **VAR** 6.5.3. állítás alapján a kommutátor rendelkezik a szükséges algebrai tulajdonságokkal. ■

Megjegyezzük, hogy az imént értelmezett Lie-algebra általában *végtelen dimenziós*, még akkor is, ha M tiszta véges dimenziós sokaság. Később látni fogjuk, hogy Lie--csoportok esetén természetes módon kijelölhető ennek a Lie-algebrának egy nemtriviális Lie-részalgebrája, amely véges dimenziós, ha a Lie-csoport véges dimenziós.

3.2. Lie-algebra morfizmusok

3.2.1. Definíció. *Ha $\mathfrak{g}$ és $\mathfrak{h}$ Lie-algebrák, akkor azt mondjuk, hogy az $u : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ leképezés* **Lie-algebra morfizmus** *a $\mathfrak{g}$ és $\mathfrak{h}$ Lie-algebrák között, ha u olyan lineáris operátor, amelyre minden $x,y \in \mathfrak{g}$ esetén $[u(x),u(y)]_\mathfrak{h} = u\left([x,y]_\mathfrak{g}\right)$. Ha $\mathfrak{g}$ és $\mathfrak{h}$ Lie-algebrák, akkor azt mondjuk, hogy az $u : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ leképezés* **Lie-algebra izomorfizmus** *a $\mathfrak{g}$ és $\mathfrak{h}$ Lie-algebrák között, ha u olyan bijekció, amely Lie-algebra morfizmus a $\mathfrak{g}$ és $\mathfrak{h}$ Lie-algebrák között, valamint az $u^{-1} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ leképezés Lie-algebra morfizmus a $\mathfrak{h}$ és $\mathfrak{g}$ Lie-algebrák között. Azt mondjuk, hogy a $\mathfrak{g}$ és $\mathfrak{h}$* **Lie-algebrák izomorfak***, ha létezik izomorfizmus a $\mathfrak{g}$ és $\mathfrak{h}$ Lie-algebrák között.*

3.3. Lie-algebrák lineáris ábrázolásai

3.3.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy U* **lineáris ábrázolása a $\mathfrak{g}$ Lie-algebrának az E vektortérben***, ha $U : \mathfrak{g} \to \mathbf{L}(E)$ olyan lineáris operátor, amelyre minden $x,y \in \mathfrak{g}$ esetén*

$$U([x,y]) = U(x) \circ U(y) - U(y) \circ U(x),$$

vagyis U Lie-algebra morfizmus a $\mathfrak{g}$ és $\big(\mathbf{L}(E), [\cdot,\cdot]_{\mathbf{L}(E)}\big)$ Lie-algebrák között.

3.3.2. Állítás. *Legyen* $\mathfrak{g}$ *Lie-algebra, és minden* $x \in \mathfrak{g}$ *esetén*

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}; \quad y \mapsto [x, y].$$

Ekkor minden $x \in \mathfrak{g}$ *esetén* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *lineáris operátor, és a*

$$\mathfrak{g} \to \mathbf{L}(\mathfrak{g}); \quad x \mapsto \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$$

leképezés ábrázolása a $\mathfrak{g}$ *Lie-algebrának a* $\mathfrak{g}$ *vektortérben.*

Bizonyítás. Minden $x \in \mathfrak{g}$ esetén $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x) := [x, \cdot]$ lineáris operátora $\mathfrak{g}$-nek, mert Lie-algebra kommutátora a második változóban lineáris. Továbbá, a $\mathfrak{g} \to \mathbf{L}(\mathfrak{g}; \mathfrak{g})$; $x \mapsto \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ leképezés lineáris, mert Lie-algebra kommutátora az első változóban lineáris.

Legyenek $x, y, z \in \mathfrak{g}$. Ekkor

$$(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x) \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(y) - \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(y) \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x))\,(z) = [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \overset{(*)}{=} [[x, y], z] = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}([x, y])(z),$$

ahol a $(*)$ egyenlőségnél felhasználtuk azt, hogy a kommutátor antiszimmetrikussága és a Jacobi-egyenlőség miatt

$$[x, [y, z]] - [y, [x, z]] = [x, [y, z]] + [y, [z, x]] = -[z, [x, y]] = [[x, y], z]. \blacksquare$$

3.3.3. Definíció. *A* $\mathfrak{g}$ **Lie-algebra adjungált ábrázolásának** *nevezzük és* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$*-vel jelöljük a*

$$\mathfrak{g} \to \mathbf{L}(\mathfrak{g}); \quad x \mapsto [x, \cdot]$$

leképezést.

4. fejezet

Lie-csoport Lie-algebrája

4.1. Invariáns vektormezők

4.1.1. Definíció. *Legyen G Lie-csoport. Azt mondjuk, hogy a $\xi \in \mathfrak{T}(G)$ vektormező* **balinvariáns** (*illetve* **jobbinvariáns**), *ha minden $s \in G$ esetén a $\gamma_G(s) : G \to G$ (illetve $\delta_G(s) : G \to G$) C^∞-osztályú izomorfizmus összeköti ξ-t önmagával, vagyis $\mathrm{D}_\xi \gamma_G(s) = \xi \circ \gamma_G(s)$ (illetve $\mathrm{D}_\xi \delta_G(s) = \xi \circ \delta_G(s)$). A G feletti balinvariáns (illetve jobbinvariáns) vektormezők halmazát $\mathfrak{T}_\mathrm{s}(G)$ (illetve $\mathfrak{T}_\mathrm{d}(G)$) jelöli. Ha $r \in \mathbb{N}$ vagy $r = \infty$, akkor a G feletti C^r-osztályú balinvariáns (illetve jobbinvariáns) vektormezők halmazát ${}^r\mathfrak{T}_\mathrm{s}(G)$ (illetve ${}^r\mathfrak{T}_\mathrm{d}(G)$) jelöli.*

4.1.2. Állítás. *Legyen G Lie-csoport, és minden $\xi \in \mathfrak{T}(G)$ vektormezőre*

$$\check{\xi} := \left(\mathrm{T}_{x^{-1}}(\mathrm{i}_G)\,\xi(x^{-1})\right)_{x \in G}.$$

Ekkor minden $\xi \in \mathfrak{T}(G)$ esetén $\check{\xi} \in \mathfrak{T}(G)$ és a

$$V : \mathfrak{T}(G) \to \mathfrak{T}(G); \quad \xi \mapsto \check{\xi}$$

leképezés olyan lineáris bijekció, amely egyenlő a saját inverzével, és teljesül rá az, hogy

$$V\langle \mathfrak{T}_\mathrm{s}(G)\rangle = \mathfrak{T}_\mathrm{d}(G), \quad V\langle \mathfrak{T}_\mathrm{d}(G)\rangle = \mathfrak{T}_\mathrm{s}(G),$$

valamint $r \in \mathbb{N}$ vagy $r = \infty$ esetén

$$V\langle {}^r\mathfrak{T}(G)\rangle = {}^r\mathfrak{T}(G),$$

$$V\langle {}^r\mathfrak{T}_\mathrm{s}(G)\rangle = {}^r\mathfrak{T}_\mathrm{d}(G), \quad V\langle {}^r\mathfrak{T}_\mathrm{d}(G)\rangle = {}^r\mathfrak{T}_\mathrm{s}(G).$$

Bizonyítás. Legyen $\xi \in \mathfrak{T}(G)$. Ha $x \in G$, akkor $\xi(x^{-1}) \in \mathrm{T}_{x^{-1}}(G)$ és $\mathrm{T}_{x^{-1}}(\mathrm{i}_G) : \mathrm{T}_{x^{-1}}(G) \to \mathrm{T}_x(G)$ leképezés, így $\check{\xi}(x) = \mathrm{T}_{x^{-1}}(\mathrm{i}_G)\,\xi(x^{-1}) \in \mathrm{T}_x(G)$, vagyis $\check{\xi}$ vektormező G felett.

Triviális, hogy a $V : \mathfrak{T}(G) \to \mathfrak{T}(G);\ \xi \mapsto \check{\xi}$ leképezés lineáris operátor, és ha $\xi \in \mathfrak{T}(G)$, akkor minden $x \in G$ esetén

$$\check{\check{\xi}}(x) = \mathrm{T}_{x^{-1}}(\mathrm{i}_G)\,\check{\xi}(x^{-1}) = \mathrm{T}_{x^{-1}}(\mathrm{i}_G)\left(\mathrm{T}_x(\mathrm{i}_G)\,\xi(x)\right) =$$

$$= \mathrm{T}_x(\mathrm{i}_G \circ \mathrm{i}_G)\,\xi(x) = \mathrm{T}_x(\mathrm{id}_G)\,\xi(x) = \xi(x),$$

vagyis $\check{\check{\xi}} = \xi$, ami azt jelenti, hogy $V \circ V = \mathrm{id}_{\mathfrak{T}(G)}$, azaz V lineáris bijekció és $V^{-1} = V$.

Megmutatjuk, hogy ha $\xi \in \mathfrak{T}(G)$ és $\varphi \in \mathfrak{Ch}(G)$, akkor

$$(\check{\xi})_{\varphi} = \xi_{\check{\varphi}}, \tag{$*$}$$

ahol $\check{\varphi} := \varphi \circ \mathrm{i}_G$, ami 1.1.3. szerint szintén térképe G-nek. Valóban, $z \in \mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Im}(\check{\varphi})$ esetén

$$\left(\varphi^{-1}(z)\right)^{-1} = \mathrm{i}_G\left(\varphi^{-1}(z)\right) = \left(\varphi \circ \mathrm{i}_G\right)^{-1}(z) = \check{\varphi}^{-1}(z),$$

valamint

$$\mathrm{T}_{\check{\varphi}^{-1}(z)}\left(\mathrm{i}_G\right) = \Theta_{\varphi,\varphi^{-1}(z)} \circ \left(\mathrm{D}\left(\varphi \circ \mathrm{i}_G \circ \check{\varphi}^{-1}\right)\right)(z) \circ \Theta^{-1}_{\check{\varphi},\check{\varphi}^{-1}(z)} = \Theta_{\varphi,\varphi^{-1}(z)} \circ \Theta^{-1}_{\check{\varphi},\check{\varphi}^{-1}(z)},$$

hiszen $\varphi \circ \mathrm{i}_G \circ \check{\varphi}^{-1} = \check{\varphi} \circ \check{\varphi}^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{Im}(\varphi)}$, tehát $\left(\mathrm{D}\left(\varphi \circ \mathrm{i}_G \circ \check{\varphi}^{-1}\right)\right)(z) = \mathrm{id}_{\mathrm{E}_\varphi}$, ezért

$$(\check{\xi})_{\varphi}(z) = \Theta^{-1}_{\varphi,\varphi^{-1}(z)}\left(\check{\xi}\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right) = \Theta^{-1}_{\varphi,\varphi^{-1}(z)}\left(\mathrm{T}_{(\varphi^{-1}(z))^{-1}}\left(\mathrm{i}_G\right)\xi\left(\left(\varphi^{-1}(z)\right)^{-1}\right)\right) =$$

$$= \Theta^{-1}_{\varphi,\varphi^{-1}(z)}\left(\mathrm{T}_{\check{\varphi}^{-1}(z)}\left(\mathrm{i}_G\right)\xi\left(\check{\varphi}^{-1}(z)\right)\right) =$$

$$= \left(\Theta^{-1}_{\varphi,\varphi^{-1}(z)} \circ \mathrm{T}_{\check{\varphi}^{-1}(z)}\left(\mathrm{i}_G\right) \circ \Theta_{\check{\varphi},\check{\varphi}^{-1}(z)}\right)\left(\Theta^{-1}_{\check{\varphi},\check{\varphi}^{-1}(z)}\xi\left(\check{\varphi}^{-1}(z)\right)\right) = \Theta^{-1}_{\check{\varphi},\check{\varphi}^{-1}(z)}\xi\left(\check{\varphi}^{-1}(z)\right) = \xi_{\check{\varphi}}(z).$$

A $(*)$ egyenlőségből azonnal következik, hogy ha $r \in \mathbb{N}$ vagy $r = \infty$, akkor minden $\xi \in {}^r\mathfrak{T}(G)$ esetén $\check{\xi} \in {}^r\mathfrak{T}(G)$, így $V = V^{-1}$ miatt $V\langle {}^r\mathfrak{T}(G)\rangle = {}^r\mathfrak{T}(G)$.

Tegyük fel, hogy $\xi \in \mathfrak{T}_{\mathrm{s}}(G)$. Minden $s \in G$ esetén $\delta_G(s) \circ \mathrm{i}_G = \mathrm{i}_G \circ \gamma_G(s)$, így kihasználva ξ balinvarianciáját kapjuk, hogy minden $x \in G$ elemre

$$\left(\mathrm{D}_{\check{\xi}}\ \delta_G(s)\right)(x) = \mathrm{T}_x\left(\delta_G(s)\right)\check{\xi}(x) = \mathrm{T}_x\left(\delta_G(s)\right)\left(\mathrm{T}_{x^{-1}}\left(\mathrm{i}_G\right)\xi(x^{-1})\right) =$$

$$= \mathrm{T}_{x^{-1}}\left(\delta_G(s) \circ \mathrm{i}_G\right)\xi(x^{-1}) = \mathrm{T}_{x^{-1}}\left(\mathrm{i}_G \circ \gamma_G(s)\right)\xi(x^{-1}) =$$

$$= \mathrm{T}_{sx^{-1}}\left(\mathrm{i}_G\right)\left(\mathrm{T}_{x^{-1}}\left(\gamma_G(s)\right)\xi(x^{-1})\right) = \mathrm{T}_{sx^{-1}}\left(\mathrm{i}_G\right)\left(\left(\mathrm{D}_{\xi}\ \gamma_G(s)\right)(x^{-1})\right) =$$

$$= \mathrm{T}_{sx^{-1}}\left(\mathrm{i}_G\right)\left(\left(\xi \circ \gamma_G(s)\right)(x^{-1})\right) = \mathrm{T}_{sx^{-1}}\left(\mathrm{i}_G\right)\xi(sx^{-1}) = \check{\xi}(xs^{-1}) = \left(\check{\xi} \circ \delta_G(s)\right)(x),$$

tehát $\mathrm{D}_{\check{\xi}}\ \delta_G(s) = \check{\xi} \circ \delta_G(s)$, vagyis $\check{\xi} \in \mathfrak{T}_{\mathrm{d}}(G)$.

Tegyük fel, hogy $\xi \in \mathfrak{T}_{\mathrm{d}}(G)$. Minden $s \in G$ esetén $\gamma_G(s) \circ \mathrm{i}_G = \mathrm{i}_G \circ \delta_G(s)$, így kihasználva ξ jobbinvarianciáját kapjuk, hogy minden $x \in G$ elemre

$$\left(\mathrm{D}_{\check{\xi}}\ \gamma_G(s)\right)(x) = \mathrm{T}_x\left(\gamma_G(s)\right)\check{\xi}(x) = \mathrm{T}_x\left(\gamma_G(s)\right)\left(\mathrm{T}_{x^{-1}}\left(\mathrm{i}_G\right)\xi(x^{-1})\right) =$$

$$= \mathrm{T}_{x^{-1}}\left(\gamma_G(s) \circ \mathrm{i}_G\right)\xi(x^{-1}) = \mathrm{T}_{x^{-1}}\left(\mathrm{i}_G \circ \delta_G(s)\right)\xi(x^{-1}) =$$

$$= \mathrm{T}_{x^{-1}s^{-1}}\left(\mathrm{i}_G\right)\left(\mathrm{T}_{x^{-1}}\left(\delta_G(s)\right)\xi(x^{-1})\right) = \mathrm{T}_{x^{-1}s^{-1}}\left(\mathrm{i}_G\right)\left(\left(\mathrm{D}_{\xi}\ \delta_G(s)\right)(x^{-1})\right) =$$

$$= \mathrm{T}_{x^{-1}s^{-1}}\left(\mathrm{i}_G\right)\left(\left(\xi \circ \delta_G(s)\right)(x^{-1})\right) = \mathrm{T}_{x^{-1}s^{-1}}\left(\mathrm{i}_G\right)\xi(x^{-1}s^{-1}) = \check{\xi}(sx) = \left(\check{\xi} \circ \gamma_G(s)\right)(x),$$

tehát $\mathrm{D}_{\check{\xi}}\ \gamma_G(s) = \check{\xi} \circ \gamma_G(s)$, vagyis $\check{\xi} \in \mathfrak{T}_{\mathrm{s}}(G)$.

Ezekből $V = V^{-1}$ alapján következik, hogy $V\langle\mathfrak{T}_{\mathrm{s}}(G)\rangle = \mathfrak{T}_{\mathrm{d}}(G)$ és $V\langle\mathfrak{T}_{\mathrm{d}}(G)\rangle = \mathfrak{T}_{\mathrm{s}}(G)$. Ha $r \in \mathbb{N}$ vagy $r = \infty$, akkor ${}^r\mathfrak{T}_{\mathrm{s}}(G) = {}^r\mathfrak{T}(G) \cap \mathfrak{T}_{\mathrm{s}}(G)$ és ${}^r\mathfrak{T}_{\mathrm{d}}(G) = {}^r\mathfrak{T}(G) \cap \mathfrak{T}_{\mathrm{d}}(G)$, ezért

$$V\langle {}^r\mathfrak{T}_{\mathrm{s}}(G)\rangle = V\langle {}^r\mathfrak{T}(G)\rangle \cap V\langle\mathfrak{T}_{\mathrm{s}}(G)\rangle = {}^r\mathfrak{T}(G) \cap \mathfrak{T}_{\mathrm{d}}(G) = {}^r\mathfrak{T}_{\mathrm{d}}(G),$$

és hasonlóan

$$V\langle {}^r\mathfrak{T}_{\mathrm{d}}(G)\rangle = V\langle {}^r\mathfrak{T}(G)\rangle \cap V\langle\mathfrak{T}_{\mathrm{d}}(G)\rangle = {}^r\mathfrak{T}(G) \cap \mathfrak{T}_{\mathrm{s}}(G) = {}^r\mathfrak{T}_{\mathrm{s}}(G),$$

amit bizonyítani kellett. ■

4.1.3. Állítás. *Ha G Lie-csoport, akkor akkor a G feletti C^∞-osztályú balinvariáns (illetve jobbinvariáns) vektormezők halmaza olyan lineáris altere a ${}^\infty\mathfrak{T}(G)$ vektortérnek, amely zárt a vektormezők kommutátorára nézve.*

Bizonyítás. Ha $\zeta, \eta \in \mathfrak{T}_\mathrm{s}(G)$, akkor minden $s \in G$ esetén a $\gamma_{\scriptscriptstyle G}(s) : G \to G$ C^∞-osztályú morfizmus összeköti a ζ vektormezőt ζ-val és az η vektormezőt η-val, így **VAR** 6.6.4. miatt $\gamma_{\scriptscriptstyle G}(s)$ összeköti a $[\zeta, \eta]$ vektormezőt $[\zeta, \eta]$-val, vagyis $[\zeta, \eta] \in \mathfrak{T}_\mathrm{s}(G)$.

Ha $\zeta, \eta \in \mathfrak{T}_\mathrm{d}(G)$, akkor minden $s \in G$ esetén a $\delta_{\scriptscriptstyle G}(s) : G \to G$ C^∞-osztályú morfizmus összeköti a ζ vektormezőt ζ-val és az η vektormezőt η-val, így **VAR** 6.6.4. miatt $\delta_{\scriptscriptstyle G}(s)$ összeköti a $[\zeta, \eta]$ vektormezőt $[\zeta, \eta]$-val, vagyis $[\zeta, \eta] \in \mathfrak{T}_\mathrm{s}(G)$. ■

4.2. Lie-csoport Lie-algebrájának értelmezése

4.2.1. Lemma. *Ha G Lie-csoport, akkor minden $\varphi \in \mathfrak{Ch}(G)$ térképre az*

$$\mathrm{Im}(\varphi) \to \mathscr{L}(\mathrm{T}_e(G); \mathrm{E}_\varphi); \quad z \mapsto \Theta^{-1}_{\varphi, \varphi^{-1}(z)} \circ \mathrm{T}_e\left(\gamma_{\scriptscriptstyle G}\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right),$$

$$\mathrm{Im}(\varphi) \to \mathscr{L}(\mathrm{E}_\varphi; \mathrm{T}_e(G)); \quad z \mapsto \mathrm{T}_{\varphi^{-1}(z)}\left(\delta_{\scriptscriptstyle G}\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right) \circ \Theta_{\varphi, \varphi^{-1}(z)},$$

$$\mathrm{Im}(\varphi) \to \mathscr{L}\left(\mathrm{T}_e(G); \mathrm{T}_e(G)\right); \quad z \mapsto \mathrm{T}_e\left(\mathrm{Int}_{\scriptscriptstyle G}\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right)$$

leképezések C^∞*-osztályúak.*

Bizonyítás. (I) Legyen $z \in \mathrm{Im}(\varphi)$ rögzített pont. Vegyünk olyan $\varphi_* \in \mathfrak{Ch}(G)$ térképet, amelyre $e \in \mathrm{Dom}(\varphi_*)$, és jelölje p a $G \times G \to G$ szorzás-függvényt. A Lie-csoportok definíciója szerint a p függvény C^∞-osztályú, ugyanakkor $\varphi \times \varphi_* \in \mathfrak{Ch}(G \times G)$, ezért a $\varphi \circ p \circ (\varphi \times \varphi_*)^{-1} : \mathrm{E}_\varphi \times \mathrm{E}_{\varphi_*} \rightarrowtail \mathrm{E}_\varphi$ függvény C^∞-osztályú. Nyilvánvaló, hogy

$$\Omega := \mathrm{Dom}\left(\varphi \circ p \circ (\varphi \times \varphi_*)^{-1}\right) = (\varphi \times \varphi_*)\left\langle (\mathrm{Dom}(\varphi) \times \mathrm{Dom}(\varphi_*)) \cap \overset{-1}{p}\langle \mathrm{Dom}(\varphi)\rangle \right\rangle,$$

amiből azonnal látszik, hogy $(z, \varphi_*(e)) \in \Omega$, hiszen $(z, \varphi_*(e)) = (\varphi \times \varphi_*)\left(\varphi^{-1}(z), e\right)$ és $(\varphi^{-1}(z), e) \in \mathrm{Dom}(\varphi) \times \mathrm{Dom}(\varphi_*)$ olyan pár, amelyre $\varphi^{-1}(z) \cdot e = \varphi^{-1}(z) \in \mathrm{Dom}(\varphi)$, vagyis $(\varphi^{-1}(z), e) \in \overset{-1}{p}\langle \mathrm{Dom}(\varphi)\rangle$. Ezért az Ω, $\mathrm{Im}(\varphi)$ és $\mathrm{Im}(\varphi_*)$ halmazok nyíltsága folytán léteznek olyan $U \subseteq \mathrm{E}_\varphi$ és $U_* \subseteq \mathrm{E}_{\varphi_*}$ nyílt halmazok, hogy $z \in U \subseteq \mathrm{Im}(\varphi)$ és $\varphi_*(e) \in U_* \subseteq \mathrm{Im}(\varphi_*)$ és $U \times U_* \subseteq \Omega$. Ekkor a $\varphi \circ p \circ (\varphi \times \varphi_*)^{-1}$ függvény C^∞-osztályú az $U \times U_*$ halmazon, ezért a **DIF** 8.4.13. állítás b) pontja szerint a

$$\partial_2\left(\varphi \circ p \circ (\varphi \times \varphi_*)^{-1}\right) : U \times U_* \to \mathscr{L}\left(\mathrm{E}_{\varphi_*}; \mathrm{E}_\varphi\right)$$

parciális deriváltfüggvény is C^∞-osztályú. Ebből következik, hogy az

$$U \to \mathscr{L}\left(\mathrm{E}_{\varphi_*}; \mathrm{E}_\varphi\right); \quad z' \mapsto \left(\partial_2\left(\varphi \circ p \circ (\varphi \times \varphi_*)^{-1}\right)\right)(z', \varphi_*(e))$$

parciális függvény is C^∞-osztályú. A parciális derivált definíciója szerint minden $z' \in U$ esetén

$$\left(\partial_2\left(\varphi \circ p \circ (\varphi \times \varphi_*)^{-1}\right)\right)(z', \varphi_*(e)) = \left(\mathrm{D}\left(\left(\varphi \circ p \circ (\varphi \times \varphi_*)^{-1}\right)(z', \cdot)\right)\right)(\varphi_*(e)),$$

ugyanakkor nyilvánvaló, hogy minden $(z', z'') \in U \times U_*$ esetén

$$\left(\left(\varphi \circ p \circ (\varphi \times \varphi_*)^{-1}\right)(z', \cdot)\right)(z'') = \varphi\left(\varphi^{-1}(z') \cdot \varphi_*^{-1}(z'')\right) = \left(\varphi \circ \gamma_{\scriptscriptstyle G}\left(\varphi^{-1}(z')\right) \circ \varphi_*^{-1}\right)(z''),$$

vagyis minden $z' \in U$ pontra $\left(\varphi \circ p \circ (\varphi \times \varphi_*)^{-1}\right)(z', \cdot) = \varphi \circ \gamma_{_G}\left(\varphi^{-1}(z')\right) \circ \varphi_*^{-1}$ az U_* halmazon, amely környezete $\varphi_*(e)$-nek, ezért

$$\left(\mathrm{D}\left(\left(\varphi \circ p \circ (\varphi \times \varphi_*)^{-1}\right)(z', \cdot)\right)\right)(\varphi_*(e)) = \left(\mathrm{D}\left(\varphi \circ \gamma_{_G}\left(\varphi^{-1}(z')\right) \circ \varphi_*^{-1}\right)\right)(\varphi_*(e)).$$

Az érintő-operátor értelmezése alapján minden $z' \in U$ pontra

$$\left(\mathrm{D}\left(\varphi \circ \gamma_{_G}\left(\varphi^{-1}(z')\right) \circ \varphi_*^{-1}\right)\right)(\varphi_*(e)) = \Theta^{-1}_{\varphi, \varphi^{-1}(z')} \circ \mathrm{T}_e\left(\gamma_{_G}\left(\varphi^{-1}(z')\right)\right) \circ \Theta_{\varphi_*, e},$$

tehát az

$$U \to \mathscr{L}\left(\mathrm{E}_{\varphi_*}; \mathrm{E}_\varphi\right); \quad z' \mapsto \Theta^{-1}_{\varphi, \varphi^{-1}(z')} \circ \mathrm{T}_e\left(\gamma_{_G}\left(\varphi^{-1}(z')\right)\right) \circ \Theta_{\varphi_*, e}$$

leképezés C^∞-osztályú. Ezt komponálva a szintén C^∞-osztályú

$$\mathscr{L}\left(\mathrm{E}_{\varphi_*}; \mathrm{E}_\varphi\right) \to \mathscr{L}\left(\mathrm{T}_e(G); \mathrm{E}_\varphi\right); \quad u \mapsto u \circ \Theta^{-1}_{\varphi_*, e}$$

folytonos lineáris operátorral kapjuk, hogy az

$$U \to \mathscr{L}\left(\mathrm{T}_e(G); \mathrm{E}_\varphi\right); \quad z' \mapsto \Theta^{-1}_{\varphi, \varphi^{-1}(z')} \circ \mathrm{T}_e\left(\gamma_{_G}\left(\varphi^{-1}(z')\right)\right)$$

leképezés C^∞-osztályú. Mivel U környezete z-nek, így az

$$\mathrm{Im}(\varphi) \to \mathscr{L}(\mathrm{T}_e(G); \mathrm{E}_\varphi); \quad z' \mapsto \Theta^{-1}_{\varphi, \varphi^{-1}(z')} \circ \mathrm{T}_e\left(\gamma_{_G}\left(\varphi^{-1}(z')\right)\right)$$

leképezés végtelenszer differenciálható a z-pontban, amiből következik, hogy ez a függvény C^∞-osztályú.

(II) Legyen $z \in \mathrm{Im}(\varphi)$ rögzített pont. Vegyünk olyan $\varphi_* \in \mathfrak{Ch}(G)$ térképet, amelyre $e \in \mathrm{Dom}(\varphi_*)$, és jelölje p a $G \times G \to G$ szorzás-függvényt. A Lie-csoportok definíciója szerint a p függvény C^∞-osztályú, ugyanakkor $\varphi \times \check{\varphi} \in \mathfrak{Ch}(G \times G)$, ahol $\check{\varphi} := \varphi \circ \mathrm{i}_{_G}$, ami 1.1.3. szerint szintén térképe G-nek. Ezért a $\varphi_* \circ p \circ (\varphi \times \check{\varphi})^{-1} : \mathrm{E}_\varphi \times \mathrm{E}_\varphi \rightarrowtail \mathrm{E}_{\varphi_*}$ függvény C^∞-osztályú. Nyilvánvaló, hogy

$$\Omega := \mathrm{Dom}\left(\varphi_* \circ p \circ (\varphi \times \check{\varphi})^{-1}\right) = (\varphi \times \check{\varphi})\left\langle (\mathrm{Dom}(\varphi) \times \mathrm{Dom}(\check{\varphi})) \cap \overset{-1}{p}\langle \mathrm{Dom}(\varphi_*)\rangle \right\rangle,$$

amiből látható, hogy $(z, z) \in \Omega$, mert $(z, z) = (\varphi \times \check{\varphi})\left(\varphi^{-1}(z), \check{\varphi}^{-1}(z)\right)$ és $\varphi^{-1}(z) \in \mathrm{Dom}(\varphi)$, valamint $\check{\varphi}^{-1}(z) \in \mathrm{Dom}(\check{\varphi})$ olyan pontok, hogy $\varphi^{-1}(z)\check{\varphi}^{-1}(z) = e \in \mathrm{Dom}(\varphi_*)$, vagyis $(\varphi \times \check{\varphi})\left(\varphi^{-1}(z), \check{\varphi}^{-1}(z)\right) \in \overset{-1}{p}\langle \mathrm{Dom}(\varphi_*)$. Ezért $\mathrm{Im}(\varphi)$ $(= \mathrm{Im}(\check{\varphi}))$ és Ω nyíltsága miatt vehetjük z-nek olyan U nyílt környezetét E_φ-ben, hogy $U \subseteq \mathrm{Im}(\varphi)$ és $U \times U \subseteq \Omega$. Ekkor a $\varphi_* \circ p \circ (\varphi \times \check{\varphi})^{-1}$ függvény $U \times U$ halmazra vett leszűkítése is C^∞-osztályú, így a **DIF** 8.4.13. állítás b) pontja szerint az

$$U \times U \to \mathrm{E}_{\varphi_*}; \quad (z', z'') \mapsto \left(\partial_1\left(\varphi_* \circ p \circ (\varphi \times \check{\varphi})^{-1}\right)\right)(z', z'')$$

függvény is C^∞-osztályú. Ezért ezt a függvényt jobbról komponálva a C^∞-osztályú $U \to \mathrm{E}_\varphi \times \mathrm{E}_\varphi;\ z' \mapsto (z', z')$ függvénnyel kapjuk, hogy az

$$U \to \mathscr{L}\left(\mathrm{E}_\varphi; \mathrm{E}_{\varphi_*}\right);$$

$$z' \mapsto \left(\partial_1\left(\varphi_* \circ p \circ (\varphi \times \check{\varphi})^{-1}\right)\right)(z', z') = \left(\mathrm{D}\left(\left(\varphi_* \circ p \circ (\varphi \times \check{\varphi})^{-1}\right)(\cdot, z')\right)\right)(z')$$

függvény C^∞-osztályú. Könnyen látható, hogy minden $(z', z'') \in U \times U$ esetén

$$\left(\varphi_* \circ p \circ (\varphi \times \check{\varphi})^{-1}\right)(z'', z') = \varphi_*\left(\varphi^{-1}(z'')\check{\varphi}^{-1}(z')\right) = \varphi_*\left(\varphi^{-1}(z'')\left(\varphi^{-1}(z')\right)^{-1}\right) =$$

$$= \left(\varphi_* \circ \delta_G \left(\varphi^{-1}(z')\right) \circ \varphi^{-1}\right)(z''),$$

vagyis minden $z' \in U$ esetén $\left(\varphi_* \circ p \circ (\varphi \times \check{\varphi})^{-1}\right)(\cdot, z') = \varphi_* \circ \delta_G\left(\varphi^{-1}(z')\right) \circ \varphi^{-1}$ teljesül az U halmazon, amely környezete z'-nek, ezért minden $z' \in U$ pontra

$$\left(\mathrm{D}\left(\left(\varphi_* \circ p \circ (\varphi \times \check{\varphi})^{-1}\right)(\cdot, z')\right)\right)(z') = \left(\mathrm{D}\left(\varphi_* \circ \delta_G\left(\varphi^{-1}(z')\right) \circ \varphi^{-1}\right)\right)(z').$$

Mivel U környezete z-nek, ebből következik, hogy az

$$U \to \mathscr{L}\left(\mathrm{E}_\varphi; \mathrm{E}_{\varphi_*}\right); \quad z' \mapsto \left(\mathrm{D}\left(\varphi_* \circ \delta_G\left(\varphi^{-1}(z')\right) \circ \varphi^{-1}\right)\right)(z')$$

függvény végtelenszer differenciálható a z pontban. Ezért az

$$\mathrm{Im}(\varphi) \to \mathscr{L}\left(\mathrm{E}_\varphi; \mathrm{E}_{\varphi_*}\right); \quad z \mapsto \left(\mathrm{D}\left(\varphi_* \circ \delta_G\left(\varphi^{-1}(z)\right) \circ \varphi^{-1}\right)\right)(z)$$

leképezés C^∞-osztályú. Ezt balról komponálva a

$$\mathscr{L}\left(\mathrm{E}_\varphi; \mathrm{E}_{\varphi_*}\right) \to \mathscr{L}\left(\mathrm{E}_\varphi; \mathrm{T}_e(G)\right); \quad u \mapsto \Theta_{\varphi_*, e} \circ u$$

folytonos lineáris operátorral, kapjuk, hogy az

$$\mathrm{Im}(\varphi) \to \mathscr{L}\left(\mathrm{E}_\varphi; \mathrm{T}_e(G)\right); \quad z \mapsto \Theta_{\varphi_*, e} \circ \left(\mathrm{D}\left(\varphi_* \circ \delta_G\left(\varphi^{-1}(z)\right) \circ \varphi^{-1}\right)\right)(z)$$

függvény C^∞-osztályú. Ugyanakkor az érintő-operátor definíciója szerint minden $z \in \mathrm{Im}(\varphi)$ pontra

$$\Theta_{\varphi_*, e} \circ \left(\mathrm{D}\left(\varphi_* \circ \delta_G\left(\varphi^{-1}(z)\right) \circ \varphi^{-1}\right)\right)(z) = \mathrm{T}_{\varphi^{-1}(z)}\left(\delta_G\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right) \circ \Theta_{\varphi, \varphi^{-1}(z)},$$

tehát az

$$\mathrm{Im}(\varphi) \to \mathscr{L}(\mathrm{E}_\varphi; \mathrm{T}_e(G)); \quad z \mapsto \mathrm{T}_{\varphi^{-1}(z)}\left(\delta_G\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right) \circ \Theta_{\varphi, \varphi^{-1}(z)}$$

leképezés C^∞-osztályú.

(III) Legyen $\varphi \in \mathfrak{Ch}(G)$ rögzítve. Mivel a

$$\mathbf{b} : \mathscr{L}(\mathrm{T}_e(G); \mathrm{E}_\varphi) \times \mathscr{L}(\mathrm{E}_\varphi; \mathrm{T}_e(G)) \to \mathscr{L}\left(\mathrm{T}_e(G); \mathrm{T}_e(G)\right); \quad (u, v) \mapsto v \circ u$$

leképezés folytonos bilineáris operátor, így **DIF** 6.5.1. szerint C^∞-osztályú. Ugyanakkor az

$$\mathrm{Im}(\varphi) \to \mathscr{L}(\mathrm{T}_e(G); \mathrm{E}_\varphi) \times \mathscr{L}(\mathrm{E}_\varphi; \mathrm{T}_e(G));$$
$$z \mapsto \left(\Theta^{-1}_{\varphi, \varphi^{-1}(z)} \circ \mathrm{T}_e\left(\gamma_G\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right),\ \mathrm{T}_{\varphi^{-1}(z)}\left(\delta_G\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right) \circ \Theta_{\varphi, \varphi^{-1}(z)}\right)$$

leképezés komponens-függvényei (I) és (II) alapján C^∞-osztályúak, ezért **DIF** 8.4.8. alapján ez a függvény is C^∞-osztályú. Ebből következik, hogy ezek kompozíciója, vagyis az

$$\mathrm{Im}(\varphi) \to \mathscr{L}\left(\mathrm{T}_e(G); \mathrm{T}_e(G)\right);$$
$$z \mapsto \mathbf{b}\left(\Theta^{-1}_{\varphi, \varphi^{-1}(z)} \circ \mathrm{T}_e\left(\gamma_G\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right),\ \mathrm{T}_{\varphi^{-1}(z)}\left(\delta_G\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right) \circ \Theta_{\varphi, \varphi^{-1}(z)}\right)$$

leképezés is C^∞-osztályú. De minden $z \in \mathrm{Im}(\varphi)$ esetén

$$\mathbf{b}\left(\Theta^{-1}_{\varphi, \varphi^{-1}(z)} \circ \mathrm{T}_e\left(\gamma_G\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right),\ \mathrm{T}_{\varphi^{-1}(z)}\left(\delta_G\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right) \circ \Theta_{\varphi, \varphi^{-1}(z)}\right) =$$
$$= \left(\mathrm{T}_{\varphi^{-1}(z)}\left(\delta_G\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right) \circ \Theta_{\varphi, \varphi^{-1}(z)}\right) \circ \left(\Theta_{\varphi, \varphi^{-1}(z)} \circ \mathrm{T}_e\left(\gamma_G\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right)\right) =$$
$$= \mathrm{T}_{\varphi^{-1}(z)}\left(\delta_G\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right) \circ \mathrm{T}_e\left(\gamma_G\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right) = \mathrm{T}_e\left(\delta_G\left(\varphi^{-1}(z) \circ \gamma_G\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right)\right) =$$
$$= \mathrm{T}_e\left(\mathrm{Int}_G\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right),$$

így az

$$\mathrm{Im}(\varphi) \to \mathscr{L}\left(\mathrm{T}_e(G); \mathrm{T}_e(G)\right); \quad z \mapsto \mathrm{T}_e\left(\mathrm{Int}_G\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right)$$

leképezés C^∞-osztályú. ■

4.2.2. Definíció. *Ha G Lie-csoport, akkor minden $v \in \mathrm{T}_e(G)$ esetén legyen*

$$\xi_v^G := \left(\mathrm{T}_e\left(\gamma_{_G}(x)\right) v\right)_{x \in G} \in \mathfrak{T}(G),$$

és ha világos, hogy melyik G Lie-csoportról van szó, akkor ξ_v^G helyett azt írjuk, hogy ξ_v.

4.2.3. Állítás. *Legyen G Lie-csoport. Ha $v \in \mathrm{T}_e(G)$, akkor ξ_v C^∞-osztályú balinvariáns vektormező G felett, és a*

$$\mathrm{T}_e(G) \to {}^\infty\mathfrak{T}_{\mathrm{s}}(G); \quad v \mapsto \xi_v$$

leképezés olyan lineáris bijekció a $\mathrm{T}_e(G)$ érintőtér és a G feletti C^∞-osztályú balinvariáns vektormezők vektortere között, amelynek inverze a

$${}^\infty\mathfrak{T}_{\mathrm{s}}(G) \to \mathrm{T}_e(G); \quad \zeta \mapsto \zeta(e)$$

leképezés.

Bizonyítás. Minden $x \in G$ esetén $\gamma_{_G}(x)e = xe = x$ miatt $\mathrm{T}_e\left(\gamma_{_G}(x)\right) : \mathrm{T}_e(G) \to \mathrm{T}_x(G)$ függvény, így minden $v \in \mathrm{T}_e(G)$ érintővektorra $\mathrm{T}_e\left(\gamma_{_G}(x)\right) v \in \mathrm{T}_x(G)$, tehát $\xi_v \in \mathfrak{T}(G)$. Ha $s \in G$ és $v \in \mathrm{T}_e(G)$, akkor minden $x \in G$ pontra

$$\left(\mathrm{D}_{\xi_v}\gamma_{_G}(s)\right)(x) = \mathrm{T}_x\left(\gamma_{_G}(s)\right)\xi_v(x) = \mathrm{T}_x\left(\gamma_{_G}(s)\right)\left(\mathrm{T}_e\left(\gamma_{_G}(x)\right) v\right) =$$

$$= \left(\mathrm{T}_x\left(\gamma_{_G}(s)\right) \circ \mathrm{T}_e\left(\gamma_{_G}(x)\right)\right) v = \mathrm{T}_e\left(\gamma_{_G}(s) \circ \gamma_{_G}(x)\right) v = \mathrm{T}_e\left(\gamma_{_G}(sx)\right) v =$$
$$= \xi_v(sx) = \left(\xi \circ \gamma_{_G}(s)\right)(x),$$

tehát $\mathrm{D}_{\xi_v}\gamma_{_G}(s) = \xi \circ \gamma_{_G}(s)$, ami azt jelenti, hogy ξ_v balinvariáns vektormező a G sokaság felett.

Megmutatjuk, hogy $v \in \mathrm{T}_e(G)$ esetén a ξ_v vektormező C^∞-osztályú. Ehhez legyen $\varphi \in \mathfrak{Ch}(G)$ rögzítve, és tekintsük a

$$(\xi_v)_\varphi : \mathrm{Im}(\varphi) \to \mathrm{E}_\varphi; \quad z \mapsto \Theta^{-1}_{\varphi,\varphi^{-1}(z)}\left(\xi_v\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right)$$

függvényt, amelyről azt kell igazolni, hogy C^∞-osztályú. A ξ_v vektormező definíciója szerint minden $z \in \mathrm{Im}(\varphi)$ esetén $(\xi_v)_\varphi(z) = \Theta^{-1}_{\varphi,\varphi^{-1}(z)}\left(\mathrm{T}_e\left(\gamma_{_G}\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right) v\right)$, tehát azt kell bizonyítani, hogy az

$$\mathrm{Im}(\varphi) \to \mathrm{E}_\varphi; \quad z \mapsto \Theta^{-1}_{\varphi,\varphi^{-1}(z)}\left(\mathrm{T}_e\left(\gamma_{_G}\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right) v\right)$$

leképezés C^∞-osztályú. Mivel az

$$\mathscr{L}(\mathrm{T}_e(G); \mathrm{E}_\varphi) \to \mathrm{E}_\varphi; \quad u \mapsto u(v)$$

leképezés folytonos lineáris operátor, tehát C^∞-osztályú, így elég volna azt igazolni, hogy az

$$\mathrm{Im}(\varphi) \to \mathscr{L}(\mathrm{T}_e(G); \mathrm{E}_\varphi); \quad z \mapsto \Theta^{-1}_{\varphi,\varphi^{-1}(z)} \circ \mathrm{T}_e\left(\gamma_{_G}\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right)$$

leképezés C^∞-osztályú, amit az előző lemma a) pontjában igazoltunk.

Ezzel megmutattuk, hogy minden $v \in \mathrm{T}_e(G)$ esetén a ξ_v balinvariáns vektormező C^∞-osztályú, tehát $\xi_v \in {}^\infty\mathfrak{T}_{\mathrm{s}}(G)$.

Vezessük be az

$$A : \mathrm{T}_e(G) \to {}^\infty\mathfrak{T}_{\mathrm{s}}(G); \quad v \mapsto \xi_v$$
$$B : {}^\infty\mathfrak{T}_{\mathrm{s}}(G) \to \mathrm{T}_e(G); \quad \zeta \mapsto \zeta(e)$$

leképezéseket, amelyek a definíciók szerint nyilvánvalóan lineáris operátorok.
Ha $v \in \mathrm{T}_e(G)$, akkor **VAR** 1.10.6. szerint

$$(B \circ A)(v) = \xi_v(e) = \mathrm{T}_e\left(\gamma_G(e)\right) v = \mathrm{T}_e\left(\mathrm{id}_G\right) v = \mathrm{id}_{\mathrm{T}_e(G)} v = v,$$

tehát $B \circ A = \mathrm{id}_{\mathrm{T}_e(G)}$.
Ha $\zeta \in {}^{\infty}\mathfrak{T}_{\mathrm{s}}(G)$, akkor

$$(A \circ B)(\zeta) = \xi_{\zeta(e)},$$

és ζ balinvarianciája miatt minden $x \in G$ elemre

$$\xi_{\zeta(e)}(x) = \mathrm{T}_e\left(\gamma_G(x)\right) \zeta(e) = \left(\mathrm{D}_\zeta \gamma_G(x)\right)(e) = \left(\zeta \circ \gamma_G(x)\right)(e) = \zeta(x),$$

vagyis $\xi_{\zeta(e)} = \zeta$, ami azt jelenti, hogy $A \circ B = \mathrm{id}_{{}^{\infty}\mathfrak{T}_{\mathrm{s}}(G)}$.
Tehát az A és B leképezések olyan lineáris bijekciók, amelyekre $A^{-1} = B$. ■

4.2.4. Tétel. *Lie-csoport felett minden balinvariáns és minden jobbinvariáns vektormező* C^∞*-osztályú.*

Bizonyítás. Legyen G Lie-csoport és $\zeta \in \mathfrak{T}_{\mathrm{s}}(G)$. Ekkor $v := \zeta(e) \in \mathrm{T}_e(G)$ olyan érintővektor, hogy ζ balinvarianciája miatt minden $x \in G$ pontra

$$\xi_v(x) = \mathrm{T}_e\left(\gamma_G(x)\right) v = \mathrm{T}_e\left(\gamma_G(x)\right) \zeta(e) = \left(\mathrm{D}_\zeta\, \gamma_G(x)\right)(e) = (\zeta \circ \gamma_G(x))(e) = \zeta(x),$$

tehát $\xi_v = \zeta$, és az előző állítás szerint ξ_v C^∞-osztályú vektormező G felett, tehát $\zeta \in {}^{\infty}\mathfrak{T}_{\mathrm{s}}(G)$.
Legyen G Lie-csoport és $\zeta \in \mathfrak{T}_{\mathrm{d}}(G)$. Ekkor 4.1.2. szerint $\check{\zeta} \in \mathfrak{T}_{\mathrm{s}}(G)$, így (I) alapján $\check{\zeta} \in {}^{\infty}\mathfrak{T}_{\mathrm{s}}(G)$, ezért ismét a 4.1.2. állítást alkalmazva kapjuk, hogy $\zeta = \check{\check{\zeta}} \in {}^{\infty}\mathfrak{T}_{\mathrm{d}}(G)$. ■

4.2.5. Tétel. *Ha G Lie-csoport, akkor a $\mathrm{T}_e(G)$ vektortér a*

$$\mathrm{T}_e(G) \times \mathrm{T}_e(G) \to \mathrm{T}_e(G); \quad (v, w) \mapsto \left[\xi_v, \xi_w\right](e)$$

leképezéssel ellátva Lie-algebra.

Bizonyítás. A G Lie-csoport feletti balinvariáns vektormezők halmaza az előző tétel és 4.1.3. szerint Lie-részalgebrája a ${}^{\infty}\mathfrak{T}_{\mathrm{s}}(G)$ Lie-algebrának (3.1.2.). Ugyanakkor, 4.2.3. szerint az

$$A : \mathrm{T}_e(G) \to {}^{\infty}\mathfrak{T}_{\mathrm{s}}(G); \quad v \mapsto \xi_v$$

leképezés lineáris bijekció, és a definíció szerint minden $v, w \in \mathrm{T}_e(G)$ esetén

$$[v, w] = \left[\xi_v, \xi_w\right](e) = A^{-1}\left([A(v), A(w)]\right),$$

így a $\mathrm{T}_e(G)$ vektortér ezzel a Lie-szorzattal ellátva Lie-algebra (és az A leképezés izomorfizmus az így értelmezett $\mathrm{T}_e(G)$ Lie-algebra és a ${}^{\infty}\mathfrak{T}_{\mathrm{s}}(G)$ Lie-algebra között). ■

4.2.6. Definíció. *Ha G Lie-csoport, akkor a $\mathrm{T}_e(G)$ vektorteret az előző tételben értelmezett Lie-szorzással ellátva a G* **Lie-csoport Lie-algebrájának** *nevezzük.*

4.3. A $\mathbf{G}(A)$ csoport Lie-algebrája

Ha A egységelemes Banach-algebra, akkor az A invertálható elemeinek $\mathbf{G}(A)$ halmaza *nyílt* az A Banach-térben (**ALN** 14.5.3.), ezért a $\mathbf{G}(A)$ halmaz a lineáris differenciálható struktúrával (**VAR** 1.3.3.) ellátva C^∞-osztályú, tiszta, A-típusú, elemi sokaság, amelynek az $\mathrm{in}_{\mathbf{G}(A),A} : \mathbf{G}(A) \to A$ kanonikus injekció globális térképe.

4.3.1. Állítás. *Ha A egységelemes Banach-algebra, akkor az A invertálható elemeinek $\mathbf{G}(A)$ csoportja a lineáris differenciálható struktúrával ellátva Banach–Lie-csoport.*

Bizonyítás. ■

4.4. Lie-csoport morfizmus által generált Lie-algebra morfizmus

4.4.1. Állítás. *Legyenek G és H Lie-csoportok, valamint $\mathfrak{g}$ (illetve $\mathfrak{h}$) a G (illetve H) Lie-csoport Lie-algebrája. Ha $\sigma : G \to H$ Lie-csoport morfizmus a G és H Lie-csoportok között, akkor a $\mathrm{T}_{e_G}(\sigma) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ leképezés folytonos Lie-algebra morfizmus a $\mathfrak{g}$ és $\mathfrak{h}$ normálható Lie-algebrák között.*

Bizonyítás. Azt kell igazolni, hogy a $\mathrm{T}_{e_G}(\sigma) : \mathrm{T}_{e_G}(G) \to \mathrm{T}_{e_H}(H)$ folytonos lineáris operátor megtartja a $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ és $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}}$ Lie-szorzatokat.

Ehhez először megjegyezzük, hogy a definíciók szerint nyilvánvaló, hogy minden $s \in G$ esetén

$$\gamma_H(\sigma(s)) \circ \sigma = \sigma \circ \gamma_G(s),$$

és a $\gamma_H(\sigma(s)) : H \to H$, $\gamma_G(s) : G \to G$ és $\sigma : G \to H$ leképezések C^∞-osztályú morfizmusok, ezért $\sigma(e_G) = e_H$ miatt **VAR** 1.10.9. alapján

$$\mathrm{T}_{e_H}(\gamma_H(\sigma(s))) \circ \mathrm{T}_{e_G}(\sigma) = \mathrm{T}_{e_G}(\gamma_H(\sigma(s)) \circ \sigma) = \mathrm{T}_{e_G}(\sigma \circ \gamma_G(s)) = \mathrm{T}_s(\sigma) \circ \mathrm{T}_{e_G}(\gamma_G(s)).$$

Mivel minden $x \in \mathfrak{g}$ és $s \in G$ esetén

$$\mathrm{T}_{e_H}(\gamma_H(\sigma(s)))\left(\mathrm{T}_{e_G}(\sigma)x\right) = \xi^H_{\mathrm{T}_{e_G}(\sigma)x}(\sigma(s)),$$

$$\mathrm{T}_s(\sigma)\left(\mathrm{T}_{e_G}(\gamma_G(s))\,x\right) = \mathrm{T}_s(\sigma)\left(\xi^G_x(s)\right) = \left(\mathrm{D}_{\xi^G_x}\sigma\right)(s),$$

így minden $x \in \mathfrak{g}$ vektorra $\mathrm{D}_{\xi^G_x}\sigma = \xi^H_{\mathrm{T}_{e_G}(\sigma)x} \circ \sigma$, vagyis σ összeköti a ξ^G_x és $\xi^H_{\mathrm{T}_{e_G}(\sigma)x}$ vektormezőket. Ezért **VEC** 6.6.4. alkalmazásával kapjuk, hogy minden $x, y \in \mathfrak{g}$ esetén a $\sigma : G \to H$ C^∞-osztályú morfizmus összeköti a $\left[\xi^G_x, \xi^G_y\right]$ és $\left[\xi^H_{\mathrm{T}_{e_G}(\sigma)x}, \xi^H_{\mathrm{T}_{e_G}(\sigma)y}\right]$ vektormezőket, tehát minden $s \in G$ elemre

$$\mathrm{T}_s(\sigma)\left(\left[\xi^G_x, \xi^G_y\right](s)\right) = \left[\xi^H_{\mathrm{T}_{e_G}(\sigma)x}, \xi^H_{\mathrm{T}_{e_G}(\sigma)y}\right](\sigma(s)).$$

Ebből az $s := e_G$ választással és a $\mathfrak{g}$ és $\mathfrak{h}$ Lie-algebrák Lie-szorzásának definíciójának alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\left[\mathrm{T}_{e_G}(\sigma)x, \mathrm{T}_{e_G}(\sigma)y\right]_{\mathfrak{h}} = \left[\xi^H_{\mathrm{T}_{e_G}(\sigma)x}, \xi^H_{\mathrm{T}_{e_G}(\sigma)y}\right](e_H) = \left[\xi^H_{\mathrm{T}_{e_G}(\sigma)x}, \xi^H_{\mathrm{T}_{e_G}(\sigma)y}\right](\sigma(e_G)) =$$

$$= \mathrm{T}_{e_G}(\sigma)\left(\left[\xi^G_x, \xi^G_y\right](e_G)\right) = \mathrm{T}_{e_G}(\sigma)\left([x,y]_{\mathfrak{g}}\right),$$

amit bizonyítani kellett. ■

4.4.2. Definíció. *Legyenek G és H Lie-csoportok, valamint $\mathfrak{g}$ (illetve $\mathfrak{h}$) a G (illetve H) Lie-csoport Lie-algebrája. Ha $\sigma : G \to H$ Lie-csoport morfizmus a G és H Lie-csoportok között, akkor a $\mathfrak{g}$ és $\mathfrak{h}$ normálható Lie-algebrák közötti $\mathrm{T}_{e_G}(\sigma) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ folytonos Lie-algebra morfizmust a σ* **Lie-csoport morfizmus által generált Lie-algebra morfizmusnak** *nevezzük.*

II. rész

Lie-csoportok ábrázolásai

5. fejezet

Lie-csoportok differenciálható ábrázolásai

5.1. Lie-csoportok differenciálható ábrázolásainak értelmezése

5.1.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy γ* C^r**-osztályú ábrázolása a** *G* **Lie-csoportnak az** *M* C^r**-osztályú sokaságban**, *ha γ ábrázolása a G csoportnak az M halmazban* (**ALG** 13.2.3) és

$$G \times M \to M; \quad (s, x) \mapsto \gamma(s)x$$

C^r-osztályú függvény a $G \times M$ szorzatsokaság és az M sokaság között.

5.1.2. Állítás. *Ha G Lie-csoport, akkor γ_G, δ_G és Int_G C^∞-osztályú ábrázolásai a G Lie-csoportnak a G sokaságban.*

Bizonyítás. Jelölje p_G a G csoport szorzását, és vezessük be az

$$\mathrm{c}_G : G \times G \to G \times G; \quad (s, s') \mapsto (s', s)$$

leképezést, amelynek komponens-függvényei a $G \times G \to G$ második és első projekció, így c_G **VAR** 1.16.4. és **VAR** 1.16.6. szerint C^∞-osztályú függvény.

(I) A definíciók szerint nyilvánvaló, hogy minden $s, x \in G$ esetén

$$\gamma_G(s)x = sx = \mathrm{p}_G(s, x)$$

tehát a $G \times G \to G$; $(s, x) \mapsto \gamma_G(s)x$ leképezés egyenlő p_G-vel, amely a Lie-csoportok definíciója szerint C^∞-osztályú. Ezért γ_G C^∞-osztályú ábrázolása a G Lie-csoportnak a G sokaságban.

(II) A definíciók szerint nyilvánvaló, hogy minden $s, x \in G$ esetén

$$\delta_G(s)x = xs^{-1} = \mathrm{p}_G(x, s^{-1}) = \mathrm{p}_G\left(\mathrm{c}_G(s^{-1}, x)\right) = \mathrm{p}_G\left(\mathrm{c}_G\left(\mathrm{i}_G(s), x\right)\right),$$

tehát a $G \times G \to G$; $(s, x) \mapsto \delta_G(s)x$ leképezés egyenlő a $\mathrm{p}_G \circ \mathrm{c}_G \circ (\mathrm{i}_G \times \mathrm{id}_G)$ leképezéssel, amely **VAR** 1.16.8. és **VAR** 1.10.9. szerint C^∞-osztályú. Ezért δ_G C^∞-osztályú ábrázolása a G Lie-csoportnak a G sokaságban.

(III) A definíciók szerint nyilvánvaló, hogy minden $s, x \in G$ esetén

$$\mathrm{Int}_G(s)x = sxs^{-1} = \mathrm{p}_G\left(s, xs^{-1}\right) = \mathrm{p}_G\left(s, \delta_G(s)x\right),$$

tehát a $G \times G \to G$; $(s,x) \mapsto \mathrm{Int}_G(s)x$ leképezés egyenlő a $\mathrm{p}_G \circ f$ függvénnyel, ahol bevezettük a

$$f : G \times G \to G \times G; \quad (s,x) \mapsto (s, \delta_G(s)x)$$

leképezést. Az f függvény első komponens-függvénye egyenlő a $G \times G \to G$ első projekció-függvénnyel, ezért C^∞-osztályú (**VAR** 1.16.4.), és f második komponens-függvénye egyenlő a $G \times G \to G$; $(s,x) \mapsto \delta_G(s)x$ leképezéssel, amely (II) szerint C^∞-osztályú. Ezért az f függvény C^∞-osztályú (**VAR** 1.16.6.), így **VAR** 1.10.9. alapján a $\mathrm{p}_G \circ f$ függvény C^∞-osztályú, ami azt jelenti, hogy Int_G C^∞-osztályú ábrázolása a G Lie-csoportnak a G sokaságban. ■

5.1.3. Állítás. *Legyen γ C^r-osztályú ábrázolása a G Lie-csoportnak az M C^r-osztályú sokaságban. Ha a G vagy M sokaság véges dimenziós, akkor minden $x \in M$ esetén a*

$$G \to M; \quad s \mapsto \gamma(s)x$$

orbitális függvény C^r-osztályú szubimmerzió.

Bizonyítás. ■

6. fejezet

Lie-csoportok lineáris ábrázolásai

6.1. Lie-csoport adjungált ábrázolása

6.1.1. Állítás. *Legyen γ a G Lie-csoport C^r-osztályú ábrázolása az M sokaságban. Ha $x \in M$ olyan pont, hogy minden $s \in G$ esetén $\gamma(s)x = x$, akkor a*

$$G \to \mathscr{L}\left(\mathrm{T}_x(M); \mathrm{T}_x(M)\right); \quad s \mapsto \mathrm{T}_x(\gamma(s))$$

leképezés C^{r-1}-osztályú lineáris ábrázolása a G Lie-csoportnak a $\mathrm{T}_x(M)$ normálható térben.

Bizonyítás. Jelölje V a szóbanforgó $G \to \mathscr{L}\left(\mathrm{T}_x(M); \mathrm{T}_x(M)\right)$ leképezést. Ha $s, t \in G$, akkor **VAR** 1.10.9. szerint

$$V(st) = \mathrm{T}_x(\gamma(st)) = \mathrm{T}_x(\gamma(s) \circ \gamma(t)) = \mathrm{T}_{\gamma(t)x}(\gamma(s)) \circ \mathrm{T}_x(\gamma(t)) =$$
$$= \mathrm{T}_x(\gamma(s)) \circ \mathrm{T}_x(\gamma(t)) = V(s) \circ V(t),$$

továbbá **VAR** 1.10.6. szerint

$$V(e) = \mathrm{T}_x(\gamma(e)) = \mathrm{T}_x\left(\mathrm{id}_M\right) = \mathrm{id}_{\mathrm{T}_x(M)},$$

ezért V lineáris ábrázolása a G csoportnak a $\mathrm{T}_x(M)$ vektortérben.

A V ábrázolás simaságának vizsgálatához vezessük be az

$$f : G \times \mathrm{T}_x(M) \to \mathrm{T}_x(M); \quad (s, v) \mapsto \mathrm{T}_x(\gamma(s))v$$

függvényt. Azt kell igazolni, hogy az f függvény C^{r-1}-osztályú. Nyilvánvaló, hogy a $\{\varphi \times \mathrm{id}_{\mathrm{T}_x(M)} | \varphi \in \mathfrak{Ch}(G)\}$ halmaz atlasza a $G \times \mathrm{T}_x(M)$ szorzatsokaságnak, így elég azt belátni, hogy minden $\varphi \in \mathfrak{Ch}(G)$ esetén az

$$f \circ \left(\varphi \times \mathrm{id}_{\mathrm{T}_x(M)}\right)^{-1} : \mathrm{Im}(\varphi) \times \mathrm{T}_x(M) \to \mathrm{T}_x(M); \quad (z, v) \mapsto \mathrm{T}_x\left(\gamma\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right) v$$

leképezés C^{r-1}-osztályú. A továbbiakban $\varphi \in \mathfrak{Ch}(G)$ rögzített térkép lesz, és veszünk olyan $\psi \in \mathfrak{Ch}(M)$ térképet, amelyre $x \in \mathrm{Dom}(\psi)$. Az érintő-operátor definíciója szerint minden $(z, v) \in \mathrm{Im}(\varphi) \times \mathrm{T}_x(M)$ esetén

$$\mathrm{T}_x\left(\gamma\left(\varphi^{-1}(z)\right)\right) v = \Theta_{\psi,x}\left(\left(\mathrm{D}\left(\psi \circ \gamma\left(\varphi^{-1}(z)\right) \circ \psi^{-1}\right)\right)(\psi(x))\left(\Theta_{\psi,x}^{-1} v\right)\right).$$

Ebből látható, hogy minden $(z, v) \in \mathrm{Im}(\varphi) \times \mathrm{T}_x(M)$ esetén

$$\left(f \circ \left(\varphi \times \mathrm{id}_{\mathrm{T}_x(M)}\right)^{-1}\right)(z, v) = \mathbf{b}(\alpha(z, v), \beta(z, v)),$$

ahol bevezettük a

$$\mathbf{b} : \mathscr{L}(\mathrm{E}_\psi; \mathrm{T}_x(M)) \times \mathrm{E}_\psi \to \mathrm{T}_x(M); \quad (u, z) \mapsto u(z),$$

$$\alpha : \mathrm{Im}(\varphi) \times \mathrm{T}_x(M) \to \mathscr{L}(\mathrm{E}_\psi; \mathrm{T}_x(M)); \quad (z, v) \mapsto \Theta_{\psi,x} \circ \mathrm{D}\left(\psi \circ \gamma\left(\varphi^{-1}(z)\right) \circ \psi^{-1}\right)(\psi(x)),$$

$$\beta : \mathrm{Im}(\varphi) \times \mathrm{T}_x(M) \to \mathrm{E}_\psi; \quad (z, v) \mapsto \Theta_{\psi,x}^{-1} v$$

függvényeket. A $\mathbf{b}$ függvény folytonos bilineáris operátor, ugyanakkor β egyenlő a $\mathrm{Im}(\varphi) \times \mathrm{T}_x(M) \to \mathrm{T}_x(M)$ második projekció és a $\Theta_{\psi,x}^{-1} : \mathrm{T}_x(M) \to \mathrm{E}_\psi$ lineáris homeomorfizmus kompozíciójával, tehát β egy $\mathrm{T}_x(M) \times \mathrm{T}_x(M) \to \mathrm{E}_\psi$ folytonos lineáris operátor leszűkítése az $\mathrm{Im}(\varphi) \times \mathrm{T}_x(M)$ nyílt halmazra. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{b}$ és β mindketten C^∞-osztályú függvények (ld. **DIF** 6.5.1., és **DIF** 6.2.3., és **DIF** 6.2.5.). Ezért **DIF** 8.4.4. szerint ahhoz, hogy az $f \circ \left(\varphi \times \mathrm{id}_{\mathrm{T}_x(M)}\right)^{-1}$ függvény C^{r-1}-osztályú legyen elegendő, hogy az α függvény C^{r-1}-osztályú. Mivel az

$$\mathscr{L}\left(\mathrm{E}_\psi; \mathrm{E}_\psi\right) \to \mathscr{L}(\mathrm{E}_\psi; \mathrm{T}_x(M)); \quad u \mapsto \Theta_{\psi,x} \circ u$$

leképezés lineáris homeomorfimus, tehát C^∞-diffeomorfizmus, így az α függvény pontosan akkor C^{r-1}-osztályú, ha az

$$\mathrm{Im}(\varphi) \times \mathrm{T}_x(M) \to \mathscr{L}\left(\mathrm{E}_\psi; \mathrm{E}_\psi\right); \quad (z, v) \mapsto \mathrm{D}\left(\psi \circ \gamma\left(\varphi^{-1}(z)\right) \circ \psi^{-1}\right)(\psi(x))$$

függvény C^{r-1}-osztályú. Ez a leképezés egyenlő az $\mathrm{Im}(\varphi) \times \mathrm{T}_x(M) \to \mathrm{E}_\varphi$ első projekció és a

$$h : \mathrm{Im}(\varphi) \to \mathscr{L}\left(\mathrm{E}_\psi; \mathrm{E}_\psi\right); \quad z \mapsto \mathrm{D}\left(\psi \circ \gamma\left(\varphi^{-1}(z)\right) \circ \psi^{-1}\right)(\psi(x))$$

függvény kompozíciójával, ezért elég azt igazolni, hogy a $h : \mathrm{E}_\varphi \rightarrowtail \mathscr{L}\left(\mathrm{E}_\psi; \mathrm{E}_\psi\right)$ függvény C^{r-1}-osztályú.

Ennek bizonyításához legyen $z \in \mathrm{Im}(\varphi)$ rögzítve. Most felhasználjuk azt, hogy a γ ábrázolás C^r-osztályú, ezért a

$$g : G \times M \to M; \quad (s, x') \mapsto \gamma(s)x'$$

függvény C^r-osztályú a $G \times M$ szorzatsokaság és az M sokaság között. Mivel $\varphi \in \mathfrak{Ch}(G)$ és $\psi \in \mathfrak{Ch}(M)$, így ebből következik, hogy a $\psi \circ g \circ (\varphi \times \psi)^{-1} : \mathrm{E}_\varphi \times \mathrm{E}_\psi \rightarrowtail \mathrm{E}_\psi$ függvény C^r-osztályú. Könnyen látható, hogy $(z, \psi(x)) \in \mathrm{Dom}\left(\psi \circ g \circ (\varphi \times \psi)^{-1}\right)$, hiszen $(z, \psi(x)) \in \mathrm{Im}(\varphi) \times \mathrm{Im}(\psi)$ olyan pár, hogy $g(\varphi^{-1}(z), x) = \gamma\left(\varphi^{-1}(z)\right) x = x \in \mathrm{Dom}(\psi)$. Ezért a $\mathrm{Dom}\left(\psi \circ g \circ (\varphi \times \psi)^{-1}\right)$ halmaz nyíltsága alapján létezik z-nek olyan U nyílt környezete E_φ-ben és létezik $\psi(x)$-nek olyan W nyílt környezete E_ψ-ben, hogy $U \times W \subseteq \mathrm{Dom}\left(\psi \circ g \circ (\varphi \times \psi)^{-1}\right)$, következésképpen **DIF** 8.4.13. alapján az

$$U \times W \to \mathscr{L}\left(\mathrm{E}_\psi; \mathrm{E}_\psi\right);$$

$$(z', z'') \mapsto \left(\partial_2\left(\psi \circ g \circ (\varphi \times \psi)^{-1}\right)\right)(z', z'') = \left(\mathrm{D}\left(\left(\psi \circ g \circ (\varphi \times \psi)^{-1}\right)(z', \cdot)\right)\right)(z'')$$

leképezés C^{r-1}-osztályú. Minden $(z', z'') \in U \times W$ esetén

$$\left(\left(\psi \circ g \circ (\varphi \times \psi)^{-1}\right)(z', \cdot)\right)(z'') = \left(\psi \circ g \circ (\varphi \times \psi)^{-1}\right)(z', z'') =$$

$$= \psi\left(\gamma\left(\varphi^{-1}(z')\right)\psi^{-1}(z'')\right) = \left(\psi \circ \gamma\left(\varphi^{-1}(z')\right) \circ \psi^{-1}\right)(z''),$$

tehát minden $z' \in U$ esetén $\left(\psi \circ g \circ (\varphi \times \psi)^{-1}\right)(z', \cdot) = \psi \circ \gamma\left(\varphi^{-1}(z')\right) \circ \psi^{-1}$ teljesül a W halmazon, így az

$$U \times W \to \mathscr{L}\left(\mathrm{E}_\psi; \mathrm{E}_\psi\right); \quad (z', z'') \mapsto \left(\mathrm{D}\left(\psi \circ \gamma\left(\varphi^{-1}(z')\right) \circ \psi^{-1}\right)\right)(z'')$$

leképezés C^{r-1}-osztályú. Ebből következik, hogy az

$$U \to \mathscr{L}\left(\mathrm{E}_\psi; \mathrm{E}_\psi\right); \quad z' \mapsto \left(\mathrm{D}\left(\psi \circ \gamma\left(\varphi^{-1}(z')\right) \circ \psi^{-1}\right)\right)(\psi(x))$$

parciális függvény is C^{r-1}-osztályú (**DIF** 8.4.14.). Mivel U környezete z-nek, így a magasabb rendű folytonos differenciálhatóság lokalitása folytán a h függvény C^{r-1}-osztályú. ■

6.1.2. Következmény. *Ha G Lie-csoport, akkor a*

$$G \to \mathscr{L}\left(\mathrm{T}_e(G); \mathrm{T}_e(G)\right); \quad s \mapsto \mathrm{T}_e\left(\mathrm{Int}_G(s)\right)$$

leképezés C^∞-osztályú lineáris ábrázolása a G Lie-csoportnak a $\mathrm{T}_e(G)$ normálható térben.

Bizonyítás. A 5.1.2. állítás és az előző állítás nyilvánvaló következménye az $M := G$, $\gamma := \mathrm{Int}_G$ és $x := e$ választással. ■

6.1.3. Definíció. *Ha G Lie-csoport, akkor G* **adjungált ábrázolásának** *nevezzük és az Ad_G szimbólummal jelöljük a*

$$G \to \mathbf{GL}\left(\mathrm{T}_e(G)\right); \quad s \mapsto \mathrm{T}_e\left(\mathrm{Int}_G(s)\right)$$

leképezést.

Tehát ha G Lie-csoport, akkor minden $s \in G$ esetén

$$\mathrm{Ad}_G(s) := \mathrm{T}_e\left(\mathrm{Int}_G(s)\right)$$

és Ad_G a G Lie-csoportnak C^∞-osztályú lineáris ábrázolása a $\mathrm{T}_e(G)$ normálható térben.

7. fejezet

Lie-csoportok folytonos unitér ábrázolásai