2016. szeptember 12/14.

Lineáris algebra (A, B, C)
1. előadás

A középiskolában a vektorok összegének és valós számszorosának (skalárszorosának) koordinátáiról tanultak alapján definiáljuk az oszlopokba rendezett valós számhármasok összegét és valós számszorosát:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{esetén legyen} \quad \mathbf{a}+\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \alpha_1+\beta_1 \\ \alpha_2+\beta_2 \\ \alpha_3+\beta_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

$$\gamma \in \mathbb{R}, \ \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad \text{esetén legyen} \qquad \gamma\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \gamma\alpha_1 \\ \gamma\alpha_2 \\ \gamma\alpha_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Az oszlopos írásmód az alkalmazásokat könnyítheti meg. Az oszlopok elemei vagy komponensei [kerüljük a koordináta szóhasználatot, mert félreérthető] valós számok. A skalárokra a görög betűs jelölés sem lehet következetes, mert lineáris egyenletrendszernél (LER) a latin kisbetűk használata a szokásos.

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ 2x+3y+4z &= 9 \\ 3x+4y+5z &= 12 \end{aligned}$$

esetén

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

jelöléssel olyan x, y, z valós számokat keresünk, melyekre

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{d}$$

teljesül. Ránézésre látszik, hogy $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{d}$, így $x_1 = 1, y_1 = 1, z_1 = 1$ biztosan megoldás. Van azonban más is, pl. $x_2 = 0, y_2 = 3, z_2 = 0$, sőt végtelen sok is van [belátható, hogy $x = z, y = 3-2z$ alakú az összes megoldás], ennek oka az, hogy most $\mathbf{a}+\mathbf{c} = 2\mathbf{b}$. [Az is igaz, hogy az első két egyenlet összeadásával adódik a harmadik.]
A fenti ötlet használható több ismeretlen esetén is:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \end{aligned}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}$$

választással $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{b}$ az átfogalmazás. Az igazi gond az, hogy mit tegyünk 3-nál több, mondjuk n egyenlet esetén (az ismeretlenek száma maradjon 4):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + a_{n4}x_4 &= b_n \end{aligned}$$

Az előbbi mintájára próbálkozhatunk a következő őrültséggel:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{n3} \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ \vdots \\ a_{n4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

A baj az, hogy nem volt szó "hosszú" oszlopok számszorosáról, így a definiálatlan dolgok összege is értelmetlen. A jobb oldalnak viszont tudunk értelmet adni: ez egy (oszlopba) rendezett valós szám n-es, vagyis $\mathbb{R}^n$ egy eleme. Két ilyen rendezett valós szám n-es pontosan akkor egyezik meg, ha az oszlop megfelelő helyein ugyanazok az elemek vagy komponensek állnak (csak koordinátát ne mondjunk, mert az most értelmetlen). A bal oldalra is ilyen n komponensű oszlopokat kellene gyártanunk, az $\mathbb{R}^n$-en kellene műveleteket definiálnunk, a következő műveletek az előzmények alapján természetesek.
DEFINÍCIÓ: `Legyen` n `rögzített pozitív egész szám, továbbá`

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \texttt{esetén legyen} \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \texttt{esetén legyen} \quad \lambda \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \lambda\alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Ezzel látszólag már minden őrültség értelmet kapott, de ez nem egészen igaz: A négytagú összegben nem volt zárójelezés! Persze, ha az imént definiált $\mathbb{R}^n$-beli összeadás asszociatív, akkor nincs baj. A valós számok összeadásának asszociatív voltára hivatkozva:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ esetén } \left(\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (\alpha_1 + \beta_1) + \gamma_1 \\ (\alpha_2 + \beta_2) + \gamma_2 \\ \vdots \\ (\alpha_n + \beta_n) + \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + (\beta_1 + \gamma_1) \\ \alpha_2 + (\beta_2 + \gamma_2) \\ \vdots \\ \alpha_n + (\beta_n + \gamma_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} \right),$$

s ennek mintájára igazolható, hogy $\mathbb{R}^n$-ben egy négytagú összeg is tetszőlegesen zárójelezhető. Ezzel már értelmet nyert az 1/2 oldal tetején lévő egyenlet, azaz egy darab $\mathbb{R}^n$-beli egyenlet a korábbi n darab egyenlet helyett. Itt illik megjegyezni, hogy az $\mathbb{R}^n$-beli összeadás nemcsak asszociatív, hanem kommutatív is, melynek bizonyítására a valós számok összeadásának kommutativitása használható: $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$\text{esetén} \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 + \alpha_1 \\ \beta_2 + \alpha_2 \\ \vdots \\ \beta_n + \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Most nézzük meg, mikor lehet megoldás az $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$: világos, hogy pontosan $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$ esetén (ilyenkor szokás homogén LERről beszélni).

Ekkor a megfelelő $\mathbb{R}^n$-beli egyenlet jobb oldalán egy csupa nullából álló rendezett valós szám n-es szerepel. Ez az 1/2 oldalon definiált összeadásnál mindent helyben hagy:

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad \text{esetén} \qquad \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}.$$

A csupa nullából álló rendezett valós szám n-es tehát úgy viselkedik itt, mint a középiskolában a vektoroknál a nullvektor! Ha erre bevezetjük a $\mathbf{0} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$ jelölést, $\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ helyett pedig azt írjuk, hogy $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, akkor az előbbi észrevétel sokkal kisebb helyet foglal el: $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$. Rögtön vérszemet is kaphatunk, könnyen ellenőrizhető, hogy egy rendezett valós szám n-es komponenseinek ellentettjeiból álló n-es eljátssza az ellentett szerepét:

$$\begin{bmatrix}-\alpha_1\\ -\alpha_2\\ \vdots\\ -\alpha_n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},$$

az $\mathbf{a}$ ellentettjének szokásos $(-\mathbf{a})$ jelölésével ez röviden így néz ki: $(-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Itt természetesen vetődik fel a kapcsolat a -1-gyel való szorzással, látjuk, hogy $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ esetén $(-1)\mathbf{a} = (-\mathbf{a})$. Vizsgálhatjuk tovább, mi minden vihető át a középiskolai vektorismeretekből, pl. az összeadás és a skalárral való szorzás (mindkét) disztributív kapcsolata itt is érvényes, csak most a bizonyításnál a valós számok összeadásának és szorzásának disztributív kapcsolatára lehet hivatkozni. A valós számok szorzásának asszociativitását is használhatjuk egy „asszociativitás"-szerű kapcsolat igazolásához. A rövid $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$ jelölések felhasználásával érdemes rendszerezni az eddigieket.

ÖSSZEFOGLALÁS (`az` $\mathbb{R}^n$`-beli komponensenkénti összeadás` $(+)$ `és valós számmal való szorzás` $(\lambda\cdot)$ `tulajdonságai`):

I./1. $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, azaz $\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$-hez hozzá van rendelve egy $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$;

I./2. $\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{b} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ (kommutativitás);

I./3. $\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (asszociativitás);

I./4. $\exists\, \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n : \forall\, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}\,(= \mathbf{a} + \mathbf{0})$ („nullvektor" létezése);

I./5. $\forall\, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n\ \exists (-\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^n : (-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = \mathbf{0}\,(= \mathbf{a} + (-\mathbf{a}))$ („ellentett" létezése);

II./1. $\lambda\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, azaz $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$-hez hozzá van rendelve egy $\lambda\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$;

II./2. $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \quad (\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$ („asszociativitás");

II./3. $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \quad (\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ (első disztibutivitás);

II./4. $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \quad \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ (második disztributivitás);

II./5. $\forall\, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \quad 1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

A középiskolai vektorműveletek tulajdonságaira gondolva, azt, hogy az $\mathbb{R}^n$-beli összeadás és valós számmal való szorzás rendelkezik a fenti 10 tulajdonsággal, úgy fogjuk mondani, hogy $\mathbb{R}^n$ **vektortér** [vagy lineáris tér] $\mathbb{R}$ felett. Ezentúl, ha $\mathbb{R}^n$-et írunk, az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}^n$ vektortérre gondolunk a komponensenkénti műveletekkel, elemeit pedig **vektor**oknak fogjuk hívni. Szükségünk lesz majd arra, hogy az $\mathbb{R}^n$ egy adott W részhalmazáról el tudjuk dönteni, hogy rendelkezik-e a fenti tulajdonságokkal $\mathbb{R}$ felett az $\mathbb{R}^n$-beli műveletek megszorításaira nézve. A megszorításokkal kapcsolatok gondokat a következő egyszerű definícióval kerüljük el:

DEFINÍCIÓ: W altere $\mathbb{R}^n$-nek [jelölése: $W \leqq \mathbb{R}^n$], ha teljesülnek:
1. $\emptyset \neq W \subseteqq \mathbb{R}^n$ 2. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in W$ 3. $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in W \Rightarrow \lambda\mathbf{a} \in W$.
Az alterek egyéb tulajdonságainak vizsgálatáról később lesz szó, most a 10 kiemelt tulajdonsággal kapcsolatban megjegyezzük, hogy pl. ! kínálkozik I./4-be és I./5-be, hisz bárki be tudja bizonyítani, hogy az 1/3 oldalon megadotton kívül nincs más elem a kívánt tulajdonsággal. Mivel valós számok szorzata csak úgy lehet 0, hogy valamelyik tényező 0, $\mathbb{R}^n$-ben a komponensenkénti összeadás és skalárral való szorzás definiciójából az is rögtön leolvasható, hogy $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ vagy $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Most összeadást és skalárral való szorzást tartalmazó kifejezéseket szeretnénk vizsgálni, nem szeretnénk azonban a zárójelezéssel bajlódni (most a gyakorlatok igényei fontosabbak), majd később az I./3. felhasználásával pótlólag igazoljuk, hogy az összeg tetszőlegesen zárójelezhető. Kényelmi szempontból még megállapodunk a következőben: $\mathbf{a}\lambda = \lambda\mathbf{a}$.
DEFINÍCIÓ: Legyen $k \geqq 1$; $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ [vektorrendszer, rövidítve: vr; a „rendszer" arra utal, hogy a vektorok között lehetnek egyenlők, akár mind egyenlő lehet]; $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$. Az $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ vr $\lambda_1, ..., \lambda_k$ együtthatós LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + ... + \lambda_k\mathbf{a}_k$. Az eredmény egy $\mathbb{R}^n$-beli vektor. Az $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ vr TRIVIÁLIS LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA: $0\mathbf{a}_1 + ... + 0\mathbf{a}_k$. Bármely vr triviális lineáris kombinációja $= \mathbf{0}$.
DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ $\mathbb{R}^n$-beli vr LINEÁRISAN ÖSSZEFÜGGŐ (rövidítve: Ö), ha $\exists\ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$, nem mind 0, melyekre $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + ... + \lambda_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ (azaz, ha a vektorrendszernek létezik nullvektort adó nemtriviális lineáris kombinációja).
DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ $\mathbb{R}^n$-beli vr LINEÁRISAN FÜGGETLEN (rövidítve: L), ha $\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k \in \mathbb{R}; \mu_1\mathbf{a}_1 + \mu_2\mathbf{a}_2 + ... + \mu_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0} \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k = 0\}$ (azaz, ha a vektorrendszernek CSAK a triviális lineáris kombinációja ad nullvektort).
A második fogalom az előző tagadásaként adódik, azért részleteztük mégis, mert veszélyes: sokan hajlamosak $\Rightarrow$ helyett $\Leftarrow$-t gondolni, pedig utóbbi mindössze annyi, hogy a triviális lineáris kombináció nullvektor.
Most már láthatjuk a hasznát az eddigieknek: tetszőleges rögzített n pozitív egész esetén $\mathbb{R}^n$-ben találhatunk n elemű lineárisan független vektorrendszert. Olyan példát választunk, ahol a számolás triviális, szinte látszik.

Legyen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ a következő: $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, ..., \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

Tegyük fel, hogy $\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n \in \mathbb{R};\ \mu_1\mathbf{e}_1 + \mu_2\mathbf{e}_2 + ... + \mu_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}\}$. A komponensenkénti összeadás és skalárral való szorzás szerint ekkor $\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, ebből pedig következik, hogy $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_n = 0$. Beláttuk tehát, hogy $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ L. Sőt, még azt is észrevehetjük, hogy $\mathbb{R}^n$ minden elemét elállítják lineáris kombinációjukként (az együtthatók a komponensekből adódnak). Ennek alapján ezt a speciális tulajdonságú vektorrendszert bázisnak hívjuk, s majd $\mathbb{R}^n$ **triviális bázis**aként emlegetjük. Általánosabban:
DEFINÍCIÓ: $V \leqq \mathbb{R}^n$ esetén legyen $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k \in V$. A $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k$ BÁZIS (rövidítve: B) V-ben, ha L és a V minden vektorát előállítják lineáris kombinációjukként.

A vektorokra a középiskolai analógia alapján használtuk az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, ...$ jelölést [kézírásban aláhúzás javasolt], a későbbi alkalmazó tárgyakban majd $a, b, c, ...$ szerepel, ez azonban most még sok félreértést okozhatna.