2016. november 28/30.

Lineáris algebra (A, B, C)
11. előadás
(vázlat)

Ígértük, hogy elégséges feltételt adunk SB létezésére a különböző sajátértékű sajátvektorok függetlenségének igazolása révén. Ezt mátrixok sajátvektorainak vizsgálatakor is megtehettük volna, idő hiányában halasztottuk, most viszont a lineáris transzformációkon gyakoroljuk inkább (mátrixokra hasonló a megfogalmazás és a bizonyítás is).

TÉTEL: Legyen $\varphi \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, továbbá $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ sajátvektorai φ-nek, továbbá $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ a megfelelő sajátértékek, melyek **páronként különbözők**. Ekkor $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k$ lineárisan független sajátvektorrendszer.
[Bizonyítás (k szerinti teljes indukcióval): A $k = 1$ eset nyilvánvaló, hisz egy sajátvektor nem lehet nullvektor. Ha már tudjuk, hogy $k-1$-re igaz az állítás (így $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_{k-1}$ L), tegyük fel, hogy $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k$ Ö. Ekkor $\mathbf{u}_k$ lineárisan függ $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_{k-1}$-től: $\mathbf{u}_k = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j \mathbf{u}_j$. Ebből $\varphi(\mathbf{u}_k) = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j \varphi(\mathbf{u}_j)$, tehát $\lambda_k \mathbf{u}_k = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j \lambda_j \mathbf{u}_j$, másrészt $\mathbf{u}_k = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j \mathbf{u}_j$ miatt $\lambda_k \mathbf{u}_k = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j \lambda_k \mathbf{u}_j$. A $\lambda_k \mathbf{u}_k$ kétféle előállításából azt kapjuk, hogy $\mathbf{0} = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j (\lambda_j - \lambda_k) \mathbf{u}_j$. Mivel $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_{k-1}$ L, az adódik, hogy $j = 1, ..., k-1$-re $\alpha_j(\lambda_j - \lambda_k) = 0$, csakhogy itt $\lambda_j - \lambda_k \neq 0$, tehát $j = 1, ..., k-1$-re $\alpha_j = 0$, azaz $\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$, ami ellentmond annak, hogy $\mathbf{u}_k$ sajátvektor.]

KÖVETKEZMÉNY: Ha a $\varphi \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ lineáris transzformációnak n darab **páronként különböző** sajátértéke van (ahol $n = \dim \mathbb{R}^n$), akkor létezik $\mathbb{R}^n$-ben SB, azaz a φ sajátvektoraiból álló bázis.

Sajnos, a fenti eredményben az n darab (azaz dimenziónyi) különböző sajátérték létezése az SB létezésének csupán elégséges feltétele: Tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$-re $\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ definícióval $\varepsilon \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, melynek minden $\mathbf{0}$-tól különböző $\mathbb{R}^n$-beli vektor sajátvektora az 1 sajátértékkel, tehát van SB, viszont az 1 az egyetlen sajátérték.

A 9/1 oldalon szerepelt már olyan megfogalmazás, hogy "legyen V vektortér a $\mathbb{K}$ felett (az 1/3 oldali 10 tulajdonság megfelelőjével)" az euklideszi terek általános tárgyalása céljából. Egyébként viszont a zárthelyik könnyítésére többnyire $\mathbb{R}^n$ szerepelt, ami félrevezető képet is eredményezhet a későbbi tanulmányok szempontjából: $\mathbb{R}^n$-ben nem volt probléma a bázis kereséssel, a bázisok elemszámának összehasonlításával, mivel volt benne **véges** generátorrendszer. Az általánosabb tárgyalás sok nehézséggel jár, de legalább a kezdő lépést tegyük meg irányában, legalább $\mathbb{R}$ felett: Ezentúl legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett (az 1/3 oldali 10 tulajdonság megfelelőjével).

DEFINÍCIÓ: **Az $\mathbb{R}$ feletti V vektortér dimenziója**:

$$\dim V = \begin{cases} 0\,, & \text{ha } V = \{\mathbf{0}\}\,; \\ \text{egy tetszőleges B elemszáma,} & \text{ha } V \neq \{\mathbf{0}\} \text{ és van véges G } V\text{-ben}\,; \\ \infty & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Megjegyezzük, hogy a definíció harmadik része számosságfogalom ismeretében finomítható |B|-ra, azaz báziselemhalmaz számosságára.

Ha tekintjük az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények szokásos $\mathbb{R}$ feletti vektorterét [$V = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $f, g \in V$ esetén tetszőleges $x \in \mathbb{R}$-re $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}, f \in V$ esetén tetszőleges $x \in \mathbb{R}$-re $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$], ebben a polinomfüggvények alterét (az 1/4 oldali definíció kiterjesztésével), erről könnyen belátható, hogy nincs véges generátorrendszere (összeadás és skalárral való szorzás során a fokszám nem nőhet), így dimenziója ∞.

Fárasztó és időigényes volna most a korábbi definíciókat és tételeket kiterjeszteni a kicsit általánosabb esetre, de legalább a lineáris leképezéseknél tegyük meg ezt, hiszen itt még hátra van pl. az izomorfizmus vizsgálata egyes vektorterek között, ami így határozottan izgalmasabb lehet.

DEFINÍCIÓ: Legyen V_1 és V_2 vektortér $\mathbb{R}$ felett, $\varphi : V_1 \to V_2$.
φ **vektortérhomomorfizmus** [vagy *homogén lineáris leképezés*, vagy
lineáris leképezés, vagy *műveletttartó leképezés* $+$, $\lambda\cdot$*-ra*], ha
1./ $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_1 \Rightarrow \varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v})$;
2./ $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in V_1 \Rightarrow \varphi(\lambda\mathbf{u}) = \lambda\varphi(\mathbf{u})$.
Ha egy lineáris leképezés, azaz vektortérhomomorfizmus netán bijektív, akkor vektortér-izomorfizmusnak hívjuk.
Az egyértelmű kiterjesztési tétel bizonyítása az általánosabb esetben hasonlóan történhet, de legalább mondjuk ki:

EGYÉRTELMŰ KITERJESZTÉSI TÉTEL: Legyen V_1 és V_2 vektortér az $\mathbb{R}$ felett;
$\dim V_1 = n > 0$; $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázis V_1-ben; $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n$ tetszőleges vektorok V_2-ben. Ekkor $\exists!\, \varphi : V_1 \to V_2$ vektortérhomomorfizmus, melyre $\varphi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i$ $(i = 1, ..., n)$.

DEFINÍCIÓ: Ha $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázis V_1-ben; $\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m$ bázis V_2-ben; $\varphi : V_1 \to V_2$ vektortérhomomorfizmus, akkor a φ mátrixa az $\mathbf{e}; \mathbf{f}$ bázispárban
$[\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{f}} \stackrel{\text{def}}{=} [[\varphi(\mathbf{e}_1)]_{\mathbf{f}}, ..., [\varphi(\mathbf{e}_n)]_{\mathbf{f}}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
A definícióból adódik, hogy tetszőleges $\mathbf{x} \in V_1$ esetén $[\varphi(\mathbf{x})]_{\mathbf{f}} = [\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{f}}[\mathbf{x}]_{\mathbf{e}}$.
Különösen fontosak lesznek azok a lineáris leképezések, amelyeknél $V_1 = V_2 = V$, ezek a V vektortér LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓi. Ilyenkor megállapodunk abban, hogy a mátrix definíciójában mindkét helyre ugyanazt a bázist vesszük: Ha $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázis V-ben, $\varphi : V \to V$ lineáris transzformáció, akkor $[\varphi]^{\mathbf{e}} \stackrel{\text{def}}{=} [\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{e}}$.

DEFINÍCIÓ: Legyen V_1 és V_2 vektortér $\mathbb{R}$ felett; $\mathcal{H}om(V_1, V_2)$ jelölje a V_1-ből V_2-be képező vektortérhomomorfizmusok halmazát.
$\varphi, \psi \in \mathcal{H}om(V_1, V_2)$ esetén legyen $\varphi + \psi : V_1 \to V_2$ úgy, hogy $\mathbf{u} \in V_1$-re $(\varphi+\psi)(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}) + \psi(\mathbf{u})$. $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\varphi \in \mathcal{H}om(V_1, V_2)$ esetén legyen $\lambda\varphi : V_1 \to V_2$ úgy, hogy $\mathbf{u} \in V_1$-re $(\lambda\varphi)(\mathbf{u}) = \lambda(\varphi(\mathbf{u}))$.
Könnyen látható, hogy az imént definiált összeg és számszoros is $\mathcal{H}om(V_1, V_2)$-ben van, továbbá azt is, hogy $\mathcal{H}om(V_1, V_2)$ vektortér az $\mathbb{R}$ felett a fenti műveletekre.

DEFINÍCIÓ: Legyen V_1 és V_2 vektortér $\mathbb{R}$ felett; $\varphi \in \mathcal{H}om(V_1, V_2)$.
φ **képtere**: $\mathcal{I}m\,\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{v}' \mid \mathbf{v}' \in V_2\ \exists \mathbf{u} \in V_1\ \varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{v}'\}$;
φ **magtere**: $\mathcal{K}er\,\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in V_1\ \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}'\}$.
Könnyen igazolható, hogy $\mathcal{I}m\,\varphi \leqq V_2$ és $\mathcal{K}er\,\varphi \leqq V_1$. Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{I}m\,\varphi = V_2 \Leftrightarrow \varphi$ szürjektív. Mivel $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{y}) \Leftrightarrow \varphi(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{0}' \Leftrightarrow \mathbf{x}-\mathbf{y} \in \mathcal{K}er\,\varphi$, ezért az is igaz, hogy φ injektív $\Leftrightarrow \mathcal{K}er\,\varphi = \{\mathbf{0}\}$.

TÉTEL: Legyen V_1 és V_2 véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett. Ekkor
$$V_1 \cong V_2 \Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2.$$

[Bizonyítás: Legyen $\dim V_1 = n$. Az $n = 0$ eset triviális mindkét irányban. Tegyük fel, hogy $n > 0$.
$\Rightarrow$: $\exists\, \varphi \in \mathcal{H}om(V_1, V_2)$, mely bijektív. Legyen $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázis V_1-ben. *Állítás:* $\varphi(\mathbf{e}_1), ..., \varphi(\mathbf{e}_n)$ bázis V_2-ben. [[biz: G: Legyen $\mathbf{v}' \in V_2$. φ szürjektivitása miatt $\exists \mathbf{u} \in V_1 : \mathbf{v}' = \varphi(\mathbf{u})$. Ezt a bázissal felírva: $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + ... + u_n\mathbf{e}_n$, így a két műveletttartást felhasználva $\mathbf{v}' = \varphi(u_1\mathbf{e}_1 + ... + u_n\mathbf{e}_n) = u_1\varphi(\mathbf{e}_1) + ... + u_n\varphi(\mathbf{e}_n)$. L: Tegyük fel, hogy

$\alpha_1\varphi(\mathbf{e}_1)+...+\alpha_n\varphi(\mathbf{e}_n)=\mathbf{0}'$, azaz $\varphi(\alpha_1\mathbf{e}_1+...+\alpha_n\mathbf{e}_n)=\mathbf{0}'=\varphi(\mathbf{0})$. A φ injektivitása miatt $\alpha_1\mathbf{e}_1+...+\alpha_n\mathbf{e}_n=\mathbf{0}$, így már minden $\alpha_i=0$.]]
$\Leftarrow$: Legyen $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ bázis V_1-ben, $\mathbf{f}_1,...,\mathbf{f}_n$ bázis V_2-ben. Az egyértelmű kiterjesztési tétel alapján $\exists!\,\varphi\in\mathcal{H}om(V_1,V_2)$, melyre $\varphi(\mathbf{e}_i)=\mathbf{f}_i$ $(i=1,...,n)$. *Állítás:* φ bijektív. [[biz: *szürjektivitás:* Legyen $\mathbf{v}'\in V_2$. Ezt felírhatjuk V_2 bázisával: $\mathbf{v}'=\beta_1\mathbf{f}_1+...+\beta_n\mathbf{f}_n=\beta_1\varphi(\mathbf{e}_1)+...+\beta_n\varphi(\mathbf{e}_n)=\varphi(\beta_1\mathbf{e}_1+...+\beta_n\mathbf{e}_n)$. *injektivitás:* Tudjuk már, hogy φ injektív $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}er\,\varphi=\{\mathbf{0}\}$. Tegyük fel, hogy $\mathbf{x}\in\mathcal{K}er\,\varphi$, így $\varphi(\mathbf{x})=\mathbf{0}'$. $\mathbf{x}$ felírása a bázissal $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+...+x_n\mathbf{e}_n$. Tehát $\mathbf{0}'=\varphi(x_1\mathbf{e}_1+...+x_n\mathbf{e}_n)=x_1\varphi(\mathbf{e}_1)+...+x_n\varphi(\mathbf{e}_n)=x_1\mathbf{f}_1+...+x_n\mathbf{f}_n$, így már minden $x_i=0$.]] Így a φ már vektortérizomorfizmus.]

DIMENZIÓÖSSZEFÜGGÉS: Legyen V_1 és V_2 vektortér $\mathbb{R}$ felett, $\varphi\in\mathcal{H}om(V_1,V_2)$.
Ha V_1 véges dimenziós, akkor $\dim\mathcal{I}m\,\varphi+\dim\mathcal{K}er\,\varphi=\dim V_1$.
(Itt φ rangja: $r(\varphi)=\dim\mathcal{I}m\,\varphi$; φ defektusa: $d(\varphi)=\dim\mathcal{K}er\,\varphi$.)

[Bizonyítás: Legyen $\dim V_1=n$. Az $n=0$ eset most is triviális. Tegyük fel, hogy $n>0$. Legyen $k=\dim\mathcal{K}er\,\varphi$. $0<k<n$ esetén veszünk egy $\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_k$ bázist $\mathcal{K}er\,\varphi$-ben, ez L a V_1-ben, így kiegészíthető bázissá: $\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_k,\mathbf{b}_1,...,\mathbf{b}_{n-k}$ bázis V_1-ben. *Állítás:* $\varphi(\mathbf{b}_1),...,\varphi(\mathbf{b}_{n-k})$ bázis $\mathcal{I}m\,\varphi$-ben. [biz: G: $\mathcal{I}m\,\varphi$ elemei $\varphi(\mathbf{u})$ alakúak, ahol $\mathbf{u}\in V_1$. $\mathbf{u}$-t a bázissal felírva és beírva: $\varphi(\mathbf{u})=\varphi(\alpha_1\mathbf{a}_1+...+\alpha_k\mathbf{a}_k+\beta_1\mathbf{b}_1+...+\beta_{n-k}\mathbf{b}_{n-k})=\alpha_1\varphi(\mathbf{a}_1)+...+\alpha_k\varphi(\mathbf{a}_k)+\beta_1\varphi(\mathbf{b}_1)+...+\beta_{n-k}\varphi(\mathbf{b}_{n-k})=\beta_1\varphi(\mathbf{b}_1)+...+\beta_{n-k}\varphi(\mathbf{b}_{n-k})$. L: Tegyük fel, hogy $\gamma_1\varphi(\mathbf{b}_1)+...+\gamma_{n-k}\varphi(\mathbf{b}_{n-k})=\mathbf{0}'$. Ekkor $\varphi(\gamma_1\mathbf{b}_1+...+\gamma_{n-k}\mathbf{b}_{n-k})=\mathbf{0}'$, tehát $\gamma_1\mathbf{b}_1+...+\gamma_{n-k}\mathbf{b}_{n-k}\in\mathcal{K}er\,\varphi$, így $\gamma_1\mathbf{b}_1+...+\gamma_{n-k}\mathbf{b}_{n-k}=\delta_1\mathbf{a}_1+...+\delta_k\mathbf{a}_k$ alakú, emiatt már minden $\gamma_i=0$.] A $k=0$ esetben $\mathbf{a}$-k nélkül ugyanígy dolgozhatunk a V_1 tetszőleges $\mathbf{b}_1,...,\mathbf{b}_n$ bázisával. A $k=n$ esetben $\mathcal{K}er\,\varphi=V_1$, így $\mathcal{I}m\,\varphi=\{\mathbf{0}'\}$.]

SZORZÁSTÉTEL: Legyen V_1, V_2 és V_3 vektortér $\mathbb{R}$ felett, dimenziójuk rendre n,m,s (pozitív egészek); $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ bázis V_1-ben; $\mathbf{f}_1,...,\mathbf{f}_m$ bázis V_2-ben; $\mathbf{g}_1,...,\mathbf{g}_s$ bázis V_3-ban; $\varphi\in\mathcal{H}om(V_1,V_2)$, $\psi\in\mathcal{H}om(V_2,V_3)$. Ekkor

$$[\psi\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{g}}=[\psi]^{\mathbf{f};\mathbf{g}}[\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{f}}.$$

[Bizonyítás: Emlékezzünk vissza a definícióra: $[\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{f}}\overset{\text{def}}{=}[[\varphi(\mathbf{e}_1)]_{\mathbf{f}},...,[\varphi(\mathbf{e}_n)]_{\mathbf{f}}]\in\mathbb{R}^{m\times n}$. Így minden szóbajövő i-re

$$\varphi(\mathbf{e}_i)=\sum_{j=1}^{m}{}_j[\varphi]_i^{\mathbf{e};\mathbf{f}}\mathbf{f}_j.$$

A másik két esetre felírva ennek megfelelőjét, azt kapjuk, hogy

$$\psi(\mathbf{f}_j)=\sum_{t=1}^{s}{}_t[\psi]_j^{\mathbf{f};\mathbf{g}}\mathbf{g}_t,\quad(\psi\varphi)(\mathbf{e}_i)=\sum_{t=1}^{s}{}_t[\psi\varphi]_i^{\mathbf{e};\mathbf{g}}\mathbf{g}_t,$$

$$(\psi\varphi)(\mathbf{e}_i)=\psi(\varphi(\mathbf{e}_i))=\psi\left(\sum_{j=1}^{m}{}_j[\varphi]_i^{\mathbf{e};\mathbf{f}}\mathbf{f}_j\right)=\sum_{j=1}^{m}{}_j[\varphi]_i^{\mathbf{e};\mathbf{f}}\psi(\mathbf{f}_j)=\sum_{j=1}^{m}{}_j[\varphi]_i^{\mathbf{e};\mathbf{f}}\sum_{t=1}^{s}{}_t[\psi]_j^{\mathbf{f};\mathbf{g}}\mathbf{g}_t=$$

$$\sum_{t=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{m}{}_j[\varphi]_i^{\mathbf{e};\mathbf{f}}\,{}_t[\psi]_j^{\mathbf{f};\mathbf{g}}\right)\mathbf{g}_t=\sum_{t=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{m}{}_t[\psi]_j^{\mathbf{f};\mathbf{g}}\,{}_j[\varphi]_i^{\mathbf{e};\mathbf{f}}\right)\mathbf{g}_t.$$

A bázissal való felírás egyértelműségét felhasználva, a $\mathbf{g}_t$ együtthatóit vizsgálva:
${}_t[\psi\varphi]_i^{\mathbf{e};\mathbf{g}}=\sum_{j=1}^{m}{}_t[\psi]_j^{\mathbf{f};\mathbf{g}}\,{}_j[\varphi]_i^{\mathbf{e};\mathbf{f}}$, ez pedig épp a szorzatmátrix t-edik sorának i-edik eleme.]

Lineáris transzformációk esetén most azt nézzük meg, hogyan változik a mátrix, ha a bázist változtatjuk.

TÉTEL (ÚJ BÁZISRA VALÓ ÁTTÉRÉS): Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett; $\dim V = n > 0$; $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázis V-ben; $\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n$ bázis V-ben. Ekkor $\exists ! \tau \in \mathcal{H}om(V,V) : \tau(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i$ $(i = 1, ..., n)$. Legyen $D = [\tau]^{\mathbf{e}}$. Ekkor D invertálható, és tetszőleges $\varphi \in \mathcal{H}om(V,V)$ esetén

$$[\varphi]^{\mathbf{e}'} = D^{-1}[\varphi]^{\mathbf{e}} D.$$

[Bizonyítás: Mivel $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ is, és $\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n$ is bázis V-ben, az egyértelmű kiterjesztési tételt két szereposztásban is használhatjuk, így $\exists !\ \tau, \gamma \in \mathcal{H}om(V,V) : \tau(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i$, $\gamma(\mathbf{e}'_i) = \mathbf{e}_i$ $(i = 1, ..., n)$. Így $\gamma(\tau(\mathbf{e}_i)) = \gamma(\mathbf{e}'_i) = \mathbf{e}_i$ minden i-re, tehát $\gamma\tau = \varepsilon$, ahol ε a V identitása: $\varepsilon(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ $\forall \mathbf{v} \in V$-re. A szorzástételt használva (minden bázis helyébe $\mathbf{e}$-t írva): $[\gamma]^{\mathbf{e}}[\tau]^{\mathbf{e}} = [\gamma\tau]^{\mathbf{e}} = [\varepsilon]^{\mathbf{e}} = I_n$, tehát $D = [\tau]^{\mathbf{e}}$ invertálható. $\varphi \in \mathcal{H}om(V,V)$ esetén minden szóbajövő i-re

$$\varphi(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} {}_j[\varphi]_i^{\mathbf{e}} \mathbf{e}_j, \quad \varphi(\mathbf{e}'_i) = \sum_{j=1}^{n} {}_j[\varphi]_i^{\mathbf{e}'} \mathbf{e}'_j, \quad \varphi(\tau(\mathbf{e}_i)) = \sum_{j=1}^{n} {}_j[\varphi]_i^{\mathbf{e}'} \tau(\mathbf{e}_j),$$

$$\gamma(\varphi(\tau(\mathbf{e}_i))) = \gamma\left(\sum_{j=1}^{n} {}_j[\varphi]_i^{\mathbf{e}'} \tau(\mathbf{e}_j)\right) = \sum_{j=1}^{n} {}_j[\varphi]_i^{\mathbf{e}'} \gamma(\tau(\mathbf{e}_j)) = \sum_{j=1}^{n} {}_j[\varphi]_i^{\mathbf{e}'} \mathbf{e}_j.$$

Tehát

$$[\varphi]^{\mathbf{e}'} = [\gamma\varphi\tau]^{\mathbf{e}} = [\gamma]^{\mathbf{e}}[\varphi]^{\mathbf{e}}[\tau]^{\mathbf{e}} = D^{-1}[\varphi]^{\mathbf{e}} D.]$$

Ez a tétel magyarázza meg, miért olyan használható fogalom a mátrixok hasonlósága. Korlátja viszont az $\mathbb{R}$, ami adott a V-vel együtt; viszont ugyanilyen tétel igazolható $\mathbb{C}$ feletti vektorterekre is. Bebizonyítható, hogy minden $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hasonló a $\mathbb{C}$ felett egy blokk-diagonális mátrixhoz, melyben a diagonálisbeli blokkok $\begin{bmatrix} \gamma & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \gamma & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & \gamma \end{bmatrix}$ alakúak (a méret és $\gamma \in \mathbb{C}$ változhat, hisz a γ-k épp a sajátértékek eme speciális felső háromszög mátrixban), amelyekkel még mindig tűrhetően lehet számolni. A fenti blokk neve Jordan blokk, az ilyenekből összerakott, A-hoz $\mathbb{C}$ felett hasonló blokk-diagonális mátrix az A Jordan-féle normálalakja. A "tűrhetően lehet számolni" kifejezés arra utal, hogy egy blokkdiagonális mátrix N-edik hatványát a diagonálisbeli blokkok N-edik hatványra emelésével számolhatjuk ki, ahol most alkalmazható a binomiális tétel, mert felcserélhető mátrixok összegét kell hatványozni: ha az iménti Jordan-blokk $k \times k$-as, akkor $\begin{bmatrix} \gamma & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \gamma & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}$, ahol az első tag γI_k, így felcserélhető a második taggal.