2016. december 5/7.

Lineáris algebra (A, B, C)
12. előadás
(vázlat)

Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, továbbá V vektortér a $\mathbb{K}$ felett (az 1/3 oldali 10 tulajdonság megfelelőjével). Korábban egy skaláris szorzatnak nevezett $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ függvényre teljesültek a következők minden $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén:
1./ $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}$;
2./ $\langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$; 2'./ $\langle \mathbf{x}, \lambda\mathbf{y} \rangle = \overline{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$;
3./ $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$; 3'./ $\langle \mathbf{z}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle$;
4.a/ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ mindig (valós és) nemnegatív;
4.b/ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
A 9/1 oldalon csak 1./, 2./, 3./, 4.a/ és 4.b/ szerepelt követelményként, a többit ezek felhasználásával igazoltuk. Tekintsük most n tagú lineáris kombinációk skaláris szorzatát (9/4 mintájára majd $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázisban lesz érdekes, de ONB helyett csak B):

$$\langle \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j, \sum_{k=1}^{n} y_k \mathbf{e}_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j \overline{y_k} \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k \rangle$$

könnyedén adódik 2./, 2'./, 3./ és 3'./ felhasználásával. Tehát lineáris kombinációk skaláris szorzatának fenti kiszámolásához 4.a/ és 4.b/ egyáltalán nem kellett, s az 1./ is csak a 2'./ és 3'./ igazolásához kellett korábban. Most az összesen 7 darab követelményből fogunk 4-et kiemelni: a skaláris szorzat olyan általánosításait vizsgáljuk, amelyekre a fenti számolás szintén elvégezhető 2./, 2'./, 3./ és 3'./ megfelelőjének feltételezésével. Az alábbi definícióban a számozás a korábbiakkal való összehasonlítást szolgálja, ne hiányoljuk az 1./-et (majd lesz később meglepően kétarcú szerepben).

DEFINÍCIÓ: Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, továbbá V vektortér a $\mathbb{K}$ felett (az 1/3 oldali 10 tulajdonság megfelelőjével). Az $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : V \times V \to \mathbb{K}$ függvényt V-n értelmezett ($\mathbb{K}$-tól függően valós vagy komplex) bilineáris függvénynek, bilineáris alaknak, vagy bilineáris formának hívjuk, ha teljesülnek a következők minden $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén:
2./ $\mathcal{A}(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda\, \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$; 2'./ $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = \overline{\lambda}\, \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$;
3./ $\mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$; 3'./ $\mathcal{A}(\mathbf{z}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{z}, \mathbf{y})$.

[Az elnevezések használata elég kaotikus, a második és harmadik elnevezéssel néha arra utalnak, ha az értékek nem egyszerűen $\mathbb{K}$-ban, hanem egy $\mathbb{K}$ feletti vektortérben vannak.]
A fenti 4 követelményt szokták röviden úgy fogalmazni, hogy az $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ rögzített $\mathbf{y}$ mellett az első változóban lineáris leképezés, míg rögzített $\mathbf{x}$ mellett a második változóban (a konjugálás miatt) "másodfajú" lineáris leképezés.
Ha az $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : V \times V \to \mathbb{K}$ a V-n értelmezett bilineáris alak, akkor a V-beli $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázis lineáris kombinációit helyettesítve:

$$\mathcal{A}(\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j, \sum_{k=1}^{n} y_k \mathbf{e}_k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j \overline{y_k} \mathcal{A}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k),$$

ami igazán motiválhatja bilineáris alak $\mathbf{e}$ bázisbeli mátrixának bevezetését:

DEFINÍCIÓ: Legyen az $\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) : V\times V \to \mathbb{K}$ a V-n értelmezett bilineáris alak, továbbá $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ bázis V-ben. $[\mathcal{A}]^{\mathbf{e}} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, éspedig minden szóbajövő j,k esetén $(a_{jk} =)\ {}_j[\mathcal{A}]^{\mathbf{e}}_k = \mathcal{A}(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k)$.

Így az előbbi kifejezés a következő formában is írható:

$$\mathcal{A}(\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{e}_j, \sum_{k=1}^{n} y_k\mathbf{e}_k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j\overline{y_k}a_{jk},$$

speciálisan

$$\mathcal{A}(\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{e}_j, \sum_{k=1}^{n} x_k\mathbf{e}_k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j\overline{x_k}a_{jk},$$

ugyanez $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ esetén

$$\mathcal{A}(\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{e}_j, \sum_{k=1}^{n} x_k\mathbf{e}_k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_jx_ka_{jk}$$

alakot ölt. Ez ugyanúgy néz ki, mint a 9/4 oldalon a szimmetrikus mátrixhoz rendelt kvadratikus alak, de hol van most a szimmetria? Újabb elnevezésre ad alkalmat, ha az 1./ megfelelője is érvényes egy bilineáris alakra:

DEFINÍCIÓ: Legyen az $\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) : V\times V \to \mathbb{K}$ a V-n értelmezett bilineáris alak. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A}$ **Hermite-féle** bilineáris alak ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ esetén a **szimmetrikus** bilineáris alak kifejezés is használatos), ha $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$ esetén teljesül: 1./ $\mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \overline{\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y})}$.

Vérszemet kapva, menten definiálhatunk a bilineáris alakunkhoz tartozó kvadratikus alakot is, itt azonban nem árt az óvatosság, különösen definitségi kérdéseknél!

DEFINÍCIÓ: Legyen $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, az $\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) : V\times V \to \mathbb{R}$ pedig V-n értelmezett **szimmetrikus** bilineáris alak (tehát most minden $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$ esetén teljesül: 1./ $\mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y})$). Ekkor az $\mathcal{A}$-hoz tartozó $\mathcal{Q}$ **kvadratikus alak**: $\mathcal{Q} : V\to\mathbb{R}; \quad \mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{x})$.

DEFINÍCIÓ: Legyen $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, az $\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) : V\times V \to \mathbb{C}$ pedig V-n értelmezett bilineáris alak. Ekkor az $\mathcal{A}$-hoz tartozó **kvadratikus alak**: $\mathcal{Q} : V\to\mathbb{C}; \quad \mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{x})$.

Meglepő lehet, hogy az 1./ megfelelője az utóbbi definícióban nem szerepel! Valóban nincs rá szükség, majd egész más szerepe lesz a komplex esetnél. Először a valós esetben vizsgáljuk meg, hogy ott viszont mire jó a szimmetria. Tekintsük $V=\mathbb{R}^2$ esetén a triviális bázisban $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, illetve $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixú bilineáris alakokat, előbbi persze szimmetrikus, utóbbi nem! Viszont a $\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} x_jx_ka_{jk}$ kifejezés mindkét esetben mindig nullát szolgáltat. Ha tehát a nem szimmetrikus esetre is kiterjesztenénk a definíciót, különböző bilineáris alakokhoz tartozhatna azonos kvadratikus alak. Szimmetrikus bilineáris alakokra szorítkozva azonban igazolható, hogy a kvadratikus alak értékeiből egyértelműen következtethetünk az őt szolgáltató bilineáris alak értékeire.

TÉTEL: Legyen $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, az $\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) : V\times V \to \mathbb{R}$ pedig V-n értelmezett **szimmetrikus** bilineáris alak (tehát most minden $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$ esetén teljesül: 1./ $\mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y})$). Ekkor az $\mathcal{A}$ minden értéke kifejezhető az $\mathcal{A}$-hoz tartozó $\mathcal{Q}$ kvadratikus alak alkalmas értékei segítségével.

[Bizonyítás: Most $\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \mathcal{A}(\mathbf{y},\mathbf{y})$, tehát $\mathcal{Q}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{Q}(\mathbf{x}) + 2\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \mathcal{Q}(\mathbf{y})$. Ebből $\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ kifejezhető $\mathcal{Q}$ értékeivel.]

A legfontosabb tételek, szövegközi állítások felsorolása, utánuk (ha bizonyítás is volt) a bizonyítás helye: előadás/oldal.

ÖSSZEFOGLALÁS (az $\mathbb{R}^n$-beli komponensenkénti összeadás $(+)$ és valós számmal való szorzás $(\lambda\cdot)$ tulajdonságai):
I./1. $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, azaz $\forall\,\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$-hez hozzá van rendelve egy $\mathbf{a}+\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$;
I./2. $\forall\,\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{b}+\mathbf{a} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$ (kommutativitás);
I./3. $\forall\,\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n \quad (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} = \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ (asszociativitás);
I./4. $\exists\,\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n : \forall\,\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{0}+\mathbf{a} = \mathbf{a}\,(=\mathbf{a}+\mathbf{0})$ („nullvektor” létezése);
I./5. $\forall\,\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n\ \exists(-\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^n : (-\mathbf{a})+\mathbf{a} = \mathbf{0}\,(=\mathbf{a}+(-\mathbf{a}))$ („ellentett” létezése);
II./1. $\lambda\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, azaz $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$-hez hozzá van rendelve egy $\lambda\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$;
II./2. $\forall\,\lambda,\mu \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \quad (\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$ („asszociativitás”);
II./3. $\forall\,\lambda,\mu \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \quad (\lambda+\mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$ (első disztibutivitás);
II./4. $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \quad \lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$ (második disztributivitás);
II./5. $\forall\,\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \quad 1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.
1/1-3.
TÉTEL: $\mathbf{b}_1,...,\mathbf{b}_k$ B $V(\leqq \mathbb{R}^n)$-ben, $\mathbf{a} \in V \Rightarrow \exists!\,\alpha_1,...,\alpha_k \in \mathbb{R} : \mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{b}_1+...+\alpha_k\mathbf{b}_k$.
2/1.
TÉTEL: Ha $V \leqq \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{b}_1,...,\mathbf{b}_k \in V$ olyan, hogy $\forall\mathbf{a} \in V\ \ \exists!\,\alpha_1,...,\alpha_k \in \mathbb{R} : \mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{b}_1+...+\alpha_k\mathbf{b}_k$, akkor $\mathbf{b}_1,...,\mathbf{b}_k$ bázis V-ben.
2/1.
TÉTEL (ELEMI BÁZISTRANSZFORMÁCIÓ): Legyen $V \leqq \mathbb{R}^n$; $\mathbf{b}_1,...,\mathbf{b}_k$ bázis V-ben; $\mathbf{a} \in V$; $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{b}_1+...+\alpha_k\mathbf{b}_k$; i rögzített, $1 \leqq i \leqq k$. Ekkor
$\mathbf{b}_1,...,\mathbf{b}_{i-1},\mathbf{a},\mathbf{b}_{i+1},...,\mathbf{b}_k$ bázis V-ben $\iff$ $\alpha_i \neq 0$.
2/1.
TÉTEL: Legyen $k \geqq 1$; $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,...,\mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$. Ekkor az $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+...+\mathbf{a}_k$ egy tetszőleges zárójelezése $= ((...((\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)+\mathbf{a}_3)+...)+\mathbf{a}_{k-1})+\mathbf{a}_k$.
2/2.
TÉTEL: $\forall\,\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n\,\exists!\,\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}+\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
2/2.
TÉTEL: $k \geqq 2$, $\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén
$\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_k$ Ö $\iff \exists\,\mathbf{a}_i$, ami lineárisan függ az $\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_{i-1},\mathbf{a}_{i+1},...,\mathbf{a}_k$ vr-től.
2/3.
TÉTEL: $\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_k,\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_k$ L és $\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_k,\mathbf{b}$ Ö esetén $\mathbf{b}$ lineárisan függ az $\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_k$-tól.
2/3.
TÉTEL: Tetszőleges $\emptyset \neq A$ „$\subseteqq$” $\mathbb{R}^n$ esetén $W(A) \leqq \mathbb{R}^n$, továbbá A „$\subseteqq$” $W(A)$.
2/3.
TÉTEL: $\{W_1 \leqq \mathbb{R}^n,\ W_2 \leqq \mathbb{R}^n\} \Rightarrow W_1 \cap W_2 \leqq \mathbb{R}^n$.
2/3.
TÉTEL: $\emptyset \neq A$ „$\subseteqq$” $\mathbb{R}^n$ esetén $\mathrm{Span}\,(A) = W(A)$.
2/4.
TÉTEL: Ha $V \leqq \mathbb{R}^n$; $V \neq \{\mathbf{0}\}$ és V-ben van véges generátorrendszer, akkor létezik bázis V-ben, sőt bármely véges generátorrendszerből kiválasztható bázis.
2/4.
KICSERÉLÉSI TÉTEL: Ha $V \leqq \mathbb{R}^n$; $\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_k$ V-beli L; $\mathbf{b}_1,...,\mathbf{b}_m$ G V-ben, akkor
$\alpha)\quad \exists j \in \{1,...,m\} : \mathbf{b}_j,\mathbf{a}_2,...,\mathbf{a}_k$ L $\qquad \beta)\quad k \leqq m$ (azaz $|\mathrm{L}| \leqq |\mathrm{G}|$).
3/1.

TÉTEL: Ha $V \leqq \mathbb{R}^n$; $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$ bázisok V-ben, k pozitív egész, $|\mathrm{B}_1| = k$, akkor B_2 is véges és $|\mathrm{B}_2| = k$.
3/1.
TÉTEL: $V \leqq \mathbb{R}^n$ esetén V-ben létezik véges generátorrendszer, továbbá V-ben bármely lineárisan független rendszer kiegészíthető V bázisává.
3/1.
(Lineáris egyenletrendszer:)
$\exists$ megoldás $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{b}$ oszlopában a (vesszős) $\mathbf{e}$-k soraiban csupa 0 áll vagy ez a rész nincs (azaz minden $\bullet = 0$ vagy $r = m$). Ha ez a feltétel teljesül, akkor pl. $x_{i_1} = d_1, ..., x_{i_r} = d_r$, többi $= 0$ egy megoldás. $\mathbf{a}_{i_1}, ..., \mathbf{a}_{i_r}$ bázis $\mathrm{Span}\,(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)$-ben, $r(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n) = r$. A megoldásszám: 0 vagy 1, ha $r = n$; 0 vagy ∞, ha $r < n$.
3/3.
TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ esetén $I_m A = A$ és $AI_n = A$.
4/1.
TÉTEL (A transzponálás kapcsolata az eddigi műveletekkel):
$A, B \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow (A+B)^\top = A^\top + B^\top$;
$\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow (\lambda A)^\top = \lambda A^\top$;
$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times k} \Rightarrow (AB)^\top = B^\top A^\top$.
4/2.
TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{m\times n_1}$, $B \in \mathbb{R}^{n_2\times k_2}$, $C \in \mathbb{R}^{k_3\times s}$ esetén

$$\exists\,(AB)C \Longleftrightarrow \underbrace{\{n_1 = n_2 \text{ és } k_2 = k_3\}} \Longleftrightarrow \exists\,A(BC)$$
$$\Downarrow$$
$$(AB)C = A(BC).$$

4/2.
TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{m\times n_1}$, $B \in \mathbb{R}^{n_2\times k_2}$, $C \in \mathbb{R}^{n_3\times k_3}$ esetén

$$\exists\,A(B+C) \Longleftrightarrow \underbrace{\{n_1 = n_2 = n_3 \text{ és } k_2 = k_3\}} \Longleftrightarrow \exists\,AB + AC$$
$$\Downarrow$$
$$A(B+C) = AB + AC.$$

4/2.
TÉTEL: $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times k} \Rightarrow \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
4/2.
(Lineáris egyenletrendszer általános megoldása:) Tetszőleges $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_r \\ \mathbf{x}''_{n-r} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$-re

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Longleftrightarrow A_2\mathbf{x} = \mathbf{d} \Longleftrightarrow [I_r, D] \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_r \\ \mathbf{x}''_{n-r} \end{bmatrix} = \mathbf{d} \Longleftrightarrow \mathbf{x}'_r = \mathbf{d} - D\mathbf{x}''_{n-r},$$

amivel megkaptuk az általános megoldást: $\mathbf{x}''_{n-r}$ komponensei a szabad (vagy független) változók, $\mathbf{x}'_r$ komponensei a kötött (vagy függő) változók.
4/4.
TÉTEL: Legyenek $C = [\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n]$ és $D = [\mathbf{d}_1, ..., \mathbf{d}_k]$ ebben a sorrendben összeszorozható $\mathbb{R}$ feletti mátrixok. Ekkor $\varrho_O(CD) \leqq \varrho_O(C)$.
4/4.
TÉTEL: Tetszőleges $\mathbb{R}$ feletti A mátrixra $\varrho_O(A) = \varrho_S(A)$ [ezentúl $= \varrho(A)$, az A **rangja**; a ϱ helyett használatos ρ vagy akár r is].
4/4.

[Folyt. köv.]