2016. december 12/14.

Lineáris algebra (A, B, C)
13. előadás
(vázlat)

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetére átmenthetjük a 12/2 oldali tétel bizonyításának ötletét "megnégyszerezve", de 1./ felhasználása nélkül:
$\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{y})$,
$\mathcal{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{y})$,
$\mathcal{A}(\mathbf{x}+i\mathbf{y}, \mathbf{x}+i\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - i\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + i\mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{y})$,
$\mathcal{A}(\mathbf{x}-i\mathbf{y}, \mathbf{x}-i\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + i\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - i\mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{y})$.
Ebből
$\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{y})$,
$-\mathcal{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y}) = -\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{y})$,
$i\mathcal{A}(\mathbf{x}+i\mathbf{y}, \mathbf{x}+i\mathbf{y}) = i\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + i\mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{y})$,
$-i\mathcal{A}(\mathbf{x}-i\mathbf{y}, \mathbf{x}-i\mathbf{y}) = -i\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - i\mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{y})$.
Tehát
$\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) - \mathcal{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y}) + i\mathcal{A}(\mathbf{x}+i\mathbf{y}, \mathbf{x}+i\mathbf{y}) - i\mathcal{A}(\mathbf{x}-i\mathbf{y}, \mathbf{x}-i\mathbf{y}) = 4\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$,
végül

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4}\left\{\mathcal{Q}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \mathcal{Q}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + i\mathcal{Q}(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) - i\mathcal{Q}(\mathbf{x}-i\mathbf{y})\right\}.$$

Sikerült tehát belátni a következőt:

TÉTEL: Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, az $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : V \times V \to \mathbb{C}$ pedig V-n értelmezett bilineáris alak (tehát most nincs feltéve az 1./). Ekkor az $\mathcal{A}$ minden értéke kifejezhető az $\mathcal{A}$-hoz tartozó $\mathcal{Q}$ kvadratikus alak alkalmas értékei segítségével.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén $\mathcal{Q}$ értékei eleve valósak, így lehet előjel szerint vizsgálni a különböző definitségeket a 9/4 oldali mintára. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén ugyanez értelmetlen lehet, hisz itt $\mathcal{Q}$-nak lehetnek **nem valós** értékei! A komplex esetben itt jut szerephez az eddig nem használt 1./:

TÉTEL: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén tetszőleges $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : V \times V \to \mathbb{C}$ bilineáris alakra érvényes:
$\mathcal{A}$ Hermite-féle $\Longleftrightarrow$ az $\mathcal{A}$-hoz tartozó $\mathcal{Q}$ kvadratikus alak minden értéke valós.
[Bizonyítás: $\Longrightarrow$: Ez ugyanúgy triviális, mint 9/1-en a 4.a/ zárójelbe tett része.
$\Longleftarrow$: Fentebb az 1./ felhasználása nélkül beláttuk, hogy

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4}\left\{\mathcal{Q}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \mathcal{Q}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + i\mathcal{Q}(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) - i\mathcal{Q}(\mathbf{x}-i\mathbf{y})\right\}.$$

Ebből azonnal adódik, hogy

$$\mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{4}\left\{\mathcal{Q}(\mathbf{y}+\mathbf{x}) - \mathcal{Q}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + i\mathcal{Q}(\mathbf{y}+i\mathbf{x}) - i\mathcal{Q}(\mathbf{y}-i\mathbf{x})\right\},$$

majd $\mathcal{Q}(\lambda\mathbf{z}) = \mathcal{A}(\lambda\mathbf{z}, \lambda\mathbf{z}) = \lambda\overline{\lambda}\mathcal{A}(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = |\lambda|^2\mathcal{Q}(\mathbf{z})$ alkalmazásával

$$\mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{4}\left\{\mathcal{Q}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \mathcal{Q}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + i\mathcal{Q}(\mathbf{x}-i\mathbf{y}) - i\mathcal{Q}(\mathbf{x}+i\mathbf{y})\right\}.$$

Felhasználva, hogy most $\mathcal{Q}$ értékei valósak,

$$\overline{\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \frac{1}{4}\left\{\mathcal{Q}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \mathcal{Q}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - i\mathcal{Q}(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) + i\mathcal{Q}(\mathbf{x}-i\mathbf{y})\right\} = \mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x}).]$$

Befejezésül bilineáris alak mátrixának változását vizsgáljuk új bázisra való áttéréskor a 11/4 oldali tétel mintájára a valós esetben:

TÉTEL (ÚJ BÁZISRA VALÓ ÁTTÉRÉS BILINEÁRIS ALAKNÁL): Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett; $\dim V = n > 0$; $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázis V-ben; $\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n$ bázis V-ben. Ekkor $\exists! \tau \in \mathcal{H}om(V, V) : \tau(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i$ $(i = 1, ..., n)$. Legyen $D = [\tau]^{\mathbf{e}}$. Ekkor D invertálható, és tetszőleges tetszőleges $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineáris alak esetén

$$[\mathcal{A}]^{\mathbf{e}'} = D^{\top}[\mathcal{A}]^{\mathbf{e}} D.$$

[Bizonyítás: ${}_j[\mathcal{A}]_k^{\mathbf{e}'} = \mathcal{A}(\mathbf{e}'_j, \mathbf{e}'_k) = \mathcal{A}(\tau(\mathbf{e}_j), \tau(\mathbf{e}_k)) = \mathcal{A}(\sum_{t=1}^n {}_t[D]_j \mathbf{e}_t, \sum_{s=1}^n {}_s[D]_k \mathbf{e}_s) =$
$\sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n {}_t[D]_j {}_s[D]_k \mathcal{A}(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_s) = \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n {}_j[D^{\top}]_t {}_s[D]_k {}_t[\mathcal{A}]_s^{\mathbf{e}} =$
$\sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n {}_j[D^{\top}]_t {}_t[\mathcal{A}]_s^{\mathbf{e}} {}_s[D]_k = {}_j[D^{\top}[\mathcal{A}]^{\mathbf{e}} D]_k.$]

Ez a tétel ad némi magyarázatot arra, hogy miért lehet fontos az olyan D, melyre $D^{-1} = D^{\top}$, (azaz $D^{\top} D = I_n$, elnevezés: D *ortogonális*), ti. ekkor a 11/4 oldali φ lineáris transzformáció és egy $\mathcal{A}$ bilineáris alak mátrixa **ugyanúgy** transzformálódik.

[12/4 folytatása:]

($AX = B$ megoldhatósága:)
$A = [\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B = [\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k] \in \mathbb{R}^{m \times k}$ esetén keressük az $AX = B$ mátrixegyenlet $X \in \mathbb{R}^{n \times k}$ megoldását $X = [\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k]$ alakban:
$AX = B \iff A[\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k] = [\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k] \iff [A\mathbf{x}_1, ..., A\mathbf{x}_k] = [\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k] \iff$
$A\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i$ $(i = 1, ..., k)$.
A fenti alakok esetén az $AX = B$ megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele tehát az, hogy mind a k darab (azonos mátrixú) lineáris egyenletrendszer megoldható legyen, azaz, hogy $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k \in \operatorname{Span}(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)$ teljesüljön.
5/1.
TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ esetén:
(1) $\quad \exists\, A^{(\mathrm{j})} \iff \varrho(A) = m$;
(2) $\quad \exists\, A^{(\mathrm{b})} \iff \varrho(A) = n$;
(3) $\quad \exists\, A^{-1} \Rightarrow \varrho(A) = m = n \Rightarrow \exists\, A^{(\mathrm{b})}, \exists\, A^{(\mathrm{j})}$ és egyenlők $\Rightarrow \exists!\, A^{-1}$.
5/1.
Négyzetes mátrix inverzének numerikus meghatározása elemi bázistranszformációval.
5/1-2.
TÉTEL (Az adjungálás kapcsolata a mátrixműveletekkel):
$A, B \in \mathbb{C}^{m \times n} \Rightarrow (A + B)^* = A^* + B^*$;
$\lambda \in \mathbb{C}, A \in \mathbb{C}^{m \times n} \Rightarrow (\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$;
$A \in \mathbb{C}^{m \times n}, B \in \mathbb{C}^{n \times k} \Rightarrow (AB)^* = B^* A^*$.
—
TÉTEL (**rangtartó átalakítások**): $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, $k \geqq 2$ esetén
$r(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k) = r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k)$, $\qquad r(\lambda \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k) = r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k)$,
$r(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k) = r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k)$, $\qquad r(\mathbf{a}_1 + \lambda \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k) = r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k)$.
5/3.
TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\varrho(A) = r \geqq 1$ esetén $A \rightsquigarrow \begin{bmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
5/3.

A vektoriális szorzat műveleti tulajdonságai, kapcsolata a skalárral való szorzással és az összeadással (tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ geometriai vektorokra és λ skalárra BIZONYÍTHATÓK):
$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \iff \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$;
$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (alternálás vagy antikommutativitás), így $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ esetén $\mathbf{b} \times \mathbf{a} \neq \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (tehát a vektoriális szorzat nem kommutatív);
$\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b})$ (skalár kiemelhetősége);
$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, $(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ (disztributivitás).
—
(Vektoriális szorzat kiszámítása): $[\mathbf{a}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$, $[\mathbf{b}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$ esetén
$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathbf{i} - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)\mathbf{j} + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\mathbf{k}$.
6/1.
KIFEJTÉSI TÉTEL: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$.
—
FELCSERÉLÉSI TÉTEL: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.
—
(Determináns kiszámítását megkönnyítő tételek $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetére):
$|\mathbf{0}| = 0$, de a 0 eredményhez az is elég, ha egyetlen sorban végig 0 van. Ha egyetlen sort megszorzunk λ-val, a definícióból (6/2) leolvasható, hogy a mátrix determinánsa λ-val szorzódik, így $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.

$|A^\top| = |A|$.
—
$|A + B| \overset{\acute{a}lt}{\neq} |A| + |B|$.
6/2.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} + c_{k1} & b_{k2} + c_{k2} & \dots & b_{kn} + c_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

6/2-3.
TÉTEL: Legyen $n \geqq 2$.
a) Ha az $1, 2, ..., n$ számok $i_1, i_2, ..., i_n$ permutációjában két elemet felcserélünk, akkor az inverziószám páratlan számmal változik.
b) Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix valamely két sorát felcseréljük, akkor az így nyert B mátrix determinánsa: $|B| = -|A|$, azaz két sor felcserélése esetén a determináns értéke (-1)-gyel szorzódik.
—
TÉTEL: Ha $n \geqq 2$ és az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak van két megegyező sora, akkor A determinánsa 0.
6/3.
TÉTEL: Ha $n \geqq 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix egyik sorához egy **másik** sorának a λ-szorosát hozzáadjuk, akkor az így keletkezett mátrix determinánsa is $|A|$, tehát az a *rangtartó* átalakítás, amikor egyik sorhoz egy másik sor számszorosát adjuk, egyben **determinánstartó** is!
6/3.

TÉTEL: $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$

6/4.
KÖVETKEZMÉNY: Felső háromszög mátrix (5/2) determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdot \dots \cdot a_{n-1,n-1}a_{nn}.$

(Determináns értékének kiszámítása elemi bázistranszformációval): Ha $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olyan, hogy $\varrho(A) < n$, akkor $|A| = 0$. $\varrho(A) = n$ esetén mindent be tudunk vinni a bázisba, de nem biztos, hogy az eredeti sorrendben. Ha a bevitt elemek sorrendje a bázisban, mondjuk $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, ..., \mathbf{a}_{i_n}$, akkor $|A| = g_1 g_2 \cdot ... \cdot g_n \cdot (-1)^{I(i_1,...,i_n)}$.
7/1-2.
KÖVETKEZMÉNY: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén $|A| \neq 0 \iff \varrho(A) = n \iff \exists\, A^{-1}$.
KIFEJTÉSI TÉTEL: $n \geqq 2,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén
a) Tetszőleges $1 \leqq i \leqq n$ esetén

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij};$$

b) Tetszőleges $1 \leqq j \leqq n$ esetén

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

7/3.
CRAMER-SZABÁLY: $A = [\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n] \in \mathbb{R}^{n\times n},\ |A| \neq 0,\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\exists!\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, melyre $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, továbbá az $\mathbf{x}$ j-edik komponense $(j = 1, ..., n)$

$$x_j = \frac{\det([\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{b}, ..., \mathbf{a}_n])}{\det([\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_j, ..., \mathbf{a}_n])}.$$

—
TÉTEL (**Vandermonde-determináns és kifejtése**): $n \geqq 2;\ a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$V_n(a_1, \dots, a_n) \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\geqq i>j\geqq 1} (a_i - a_j).$$

7/4.
TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\varrho(A) = r \geqq 1$ esetén A-nak van olyan $r \times r$-es részmátrixa, melynek determinánsa $\neq 0$, viszont minden $(r+1)\times(r+1)$-es részmátrix determinánsa 0.
7/4.
TÉTEL: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van nemtriviális megoldása, ha $|A| = 0$.

7/4.
SZORZÁSTÉTEL: $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow |AB| = |A||B|$.
7/4, 8/1.
TÉTEL: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A diagonalizálható $\mathbb{R}$ felett $\Longleftrightarrow$ létezik $\mathbb{R}^n$-ben az A sajátvektoraiból álló bázis (röviden: SB).
8/3.
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ esetén λ_0 (jobb oldali) sajátértéke A-nak $\Longleftrightarrow |A - I_n\lambda_0| = 0$.
8/3.
TÉTEL: $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $A \sim_{\mathbb{R}} B$ esetén $k_A(\lambda) = k_B(\lambda)$.
8/4.
$||\mathbf{x}|| \geqq 0$. $\quad ||\mathbf{x}|| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$. $\quad ||\lambda\mathbf{x}|| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{x}||$.
9/2.
$||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| \overset{?}{\leqq} ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$.
9/2 (Cauchy-e. feltételezésével).
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0 \Longleftrightarrow ||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2$.
9/2.
CAUCHY-EGYENLŐTLENSÉG: Legyen V valós vagy komplex euklideszi tér. Ekkor tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$-re $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| \leqq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||$. Itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ lineárisan összefüggő.
9/2.
TÉTEL: $n > 0$-ra tetszőleges n-dimenziós euklideszi térben létezik ortonormált bázis.
9/3.
TÉTEL (**a valós szimmetrikus mátrixok spektráltétele**): $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén
A szimmetrikus $\Longleftrightarrow \exists$ SONB $\mathbb{R}^n$-ben és A minden sajátértéke valós.
—

	$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$-ra	elnevezés
$\forall\lambda_k > 0$:	$Q(\mathbf{x}) > 0$	Q pozitív definit
$\forall\lambda_k < 0$:	$Q(\mathbf{x}) < 0$	Q negatív definit
$\forall\lambda_k \geqq 0$:	$Q(\mathbf{x}) \geqq 0$	Q pozitív szemidefinit
$\forall\lambda_k \leqq 0$:	$Q(\mathbf{x}) \leqq 0$	Q negatív szemidefinit
$\exists\lambda_j > 0$ és $\exists\lambda_k < 0$:	$Q(\mathbf{u}_j) > 0, Q(\mathbf{u}_k) < 0$	Q indefinit

9/4.
TÉTEL: Legyen az $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **karakterisztikus sorozata**:

$$\Delta_0 = 1; \quad \Delta_1 = a_{11}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \dots; \quad \Delta_n = |A|.$$

Az A-hoz tartozó Q pozitív definit $\Longleftrightarrow \forall j \in \{0, 1, \dots, n\}$-re $\Delta_j > 0$.

Az A-hoz tartozó Q negatív definit $\Longleftrightarrow \forall j \in \{0, 1, \dots, [n/2]\}$-re $\Delta_{2j} > 0$ és $\forall j \in \{0, 1, \dots, [(n-1)/2]\}$-re $\Delta_{2j+1} < 0$.
—
TÉTEL: Legyen $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ha λ és μ az A különböző sajátértékei, továbbá $\mathbf{x} \in W_\lambda$, $\mathbf{y} \in W_\mu$, akkor $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$.
10/1.

EGYÉRTELMŰ KITERJESZTÉSI TÉTEL: Legyen $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázis $\mathbb{R}^n$-ben; $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n$ tetszőleges vektorok $\mathbb{R}^m$-ben. Ekkor $\exists!\,\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vektortérhomomorfizmus, melyre $\varphi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i\ (i = 1, ..., n)$.
10/1.
A 10/1 oldali definícióból adódik, hogy $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén $[\varphi(\mathbf{x})]_{\mathbf{f}} = [\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{f}}[\mathbf{x}]_{\mathbf{e}}$.
TÉTEL: Legyen $\varphi \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, továbbá $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ sajátvektorai φ-nek, továbbá $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ a megfelelő sajátértékek, melyek **páronként különbözők**. Ekkor $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k$ lineárisan független sajátvektorrendszer.
11/1.
KÖVETKEZMÉNY: Ha a $\varphi \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ lineáris transzformációnak n darab **páronként különböző** sajátértéke van (ahol $n = \dim \mathbb{R}^n$), akkor létezik $\mathbb{R}^n$-ben SB, azaz a φ sajátvektoraiból álló bázis.
TÉTEL: Legyen V_1 és V_2 véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett. Ekkor
$$V_1 \cong V_2 \Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2.$$
11/2.
DIMENZIÓÖSSZEFÜGGÉS: Legyen V_1 és V_2 vektortér $\mathbb{R}$ felett, $\varphi \in \mathcal{H}om(V_1, V_2)$.
Ha V_1 véges dimenziós, akkor $\dim \mathcal{I}m\,\varphi + \dim \mathcal{K}er\,\varphi = \dim V_1$.
11/3.
SZORZÁSTÉTEL: Legyen V_1, V_2 és V_3 vektortér $\mathbb{R}$ felett, dimenziójuk rendre n, m, s (pozitív egészek); $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázis V_1-ben; $\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m$ bázis V_2-ben; $\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_s$ bázis V_3-ban; $\varphi \in \mathcal{H}om(V_1, V_2)$, $\psi \in \mathcal{H}om(V_2, V_3)$. Ekkor
$$[\psi\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{g}} = [\psi]^{\mathbf{f};\mathbf{g}}[\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{f}}.$$
11/3.
TÉTEL (ÚJ BÁZISRA VALÓ ÁTTÉRÉS): Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett; $\dim V = n > 0$; $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázis V-ben; $\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n$ bázis V-ben. Ekkor $\exists!\tau \in \mathcal{H}om(V, V) : \tau(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i$ $(i = 1, ..., n)$. Legyen $D = [\tau]^{\mathbf{e}}$. Ekkor D invertálható, és tetszőleges $\varphi \in \mathcal{H}om(V, V)$ esetén
$$[\varphi]^{\mathbf{e}'} = D^{-1}[\varphi]^{\mathbf{e}}D.$$
11/4.
TÉTEL: Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, az $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : V \times V \to \mathbb{R}$ pedig V-n értelmezett **szimmetrikus** bilineáris alak (tehát most minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ esetén teljesül: 1./ $\mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$). Ekkor az $\mathcal{A}$ minden értéke kifejezhető az $\mathcal{A}$-hoz tartozó $\mathcal{Q}$ kvadratikus alak alkalmas értékei segítségével.
12/2.
TÉTEL: Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, az $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : V \times V \to \mathbb{C}$ pedig V-n értelmezett bilineáris alak (tehát most nincs feltéve az 1./). Ekkor az $\mathcal{A}$ minden értéke kifejezhető az $\mathcal{A}$-hoz tartozó $\mathcal{Q}$ kvadratikus alak alkalmas értékei segítségével.
13/1.
TÉTEL: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén tetszőleges $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : V \times V \to \mathbb{C}$ bilineáris alakra érvényes:
$\mathcal{A}$ Hermite-féle $\Longleftrightarrow$ az $\mathcal{A}$-hoz tartozó $\mathcal{Q}$ kvadratikus alak minden értéke valós.
13/1.
TÉTEL (ÚJ BÁZISRA VALÓ ÁTTÉRÉS BILINEÁRIS ALAKNÁL): Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett; $\dim V = n > 0$; $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázis V-ben; $\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n$ bázis V-ben. Ekkor $\exists!\tau \in \mathcal{H}om(V, V) : \tau(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i$ $(i = 1, ..., n)$. Legyen $D = [\tau]^{\mathbf{e}}$. Ekkor D invertálható, és tetszőleges tetszőleges $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineáris alak esetén
$$[\mathcal{A}]^{\mathbf{e}'} = D^{\top}[\mathcal{A}]^{\mathbf{e}}D.$$
13/2.

LINEÁRIS ALGEBRA (A, B, C) tematika (BSc)
I. éves nappali programtervező informatikus hallgatóknak
2016-2017. évi tanév I. félév

Összeadás és valós számmal való szorzás $\mathbb{R}^n$-ben, altér $\mathbb{R}^n$-ben. Lineáris kombináció. Lineárisan összefüggő ill. lineárisan független vektorrendszerek. Bázis $\mathbb{R}^n$ altereiben, bázis lineáris kombinációi. Elemi bázistranszformáció. Vektorok koordinátái adott bázisban. Az elemi bázistranszformáció táblázatai. Lineáris függés, lineáris kombinációk altere. Alterek metszete, vektorrendszer által generált altér, kapcsolat lineáris kombinációk alterével. Generátorrendszer, alterek által generált altér. Bázis kiválasztása véges generátorrendszerből. Kicserélési tétel, dimenzió. $\mathbb{R}^n$ adott dimenziójú alteréből vett véges vektorrendszerek vizsgálata lineáris függetlenség ill. generálás szempontjából, lineárisan független rendszer kiegészítése bázissá. Vektorrendszer rangja. Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának eldöntése, egy megoldás keresése, megoldásszám meghatározása elemi bázistranszformációval.

Mátrixok. Mátrixok összeadása és skalárral való szorzása, $\mathbb{R}^{m\times n}$. Mátrixok szorzása, műveleti tulajdonságok, egységmátrix. Mátrix transzponáltja, műveleti tulajdonságai. Mátrixok partícionálása, műveletek blokkokra bontott mátrixokkal. Lineáris egyenletrendszer mátrix alakja. Lineáris egyenletrendszer általános megoldásának numerikus meghatározása. Mátrix rangja. $AX = B$, $YC = D$ alakú mátrixegyenletek vizsgálata: megoldhatóság feltétele. Mátrix bal oldali inverze, jobb oldali inverze, négyzetes mátrix inverze, numerikus meghatározása. Speciális mátrixok. $\mathbb{C}$ feletti mátrixok. Mátrix adjungáltja. Rangtartó átalakítások.

Vektoriális szorzat, vegyes szorzat, tulajdonságaik (biz. nélkül). Permutációk inverziói. Determináns, alapvető tulajdonságai. Négyzetes mátrix determinánsának meghatározása elemi bázistranszformációval. Négyzetes mátrix rangjának, inverze létezésének és determinánsának kapcsolata. Kifejtési tétel. Cramer-szabály (biz. nélkül). Vandermonde-determináns. Rang és $\neq 0$ determinánsú négyzetes részmátrixok kapcsolata. Determinánsfeltétel homogén lineáris egyenletrendszer nemtriviális megoldásának létezésére. Szorzástétel.

$\mathbb{R}$ felett hasonló mátrixok, $\mathbb{R}$ felett diagonalizálható mátrixok. Mátrix jobb oldali ill. bal oldali sajátvektorai, sajátértékei. SB keresése, SB és diagonalizálhatóság. Sajátalterek. Mátrix karakterisztikus polinomja. Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja.

Valós és komplex euklideszi terek, példák. Euklideszi norma. Cauchy-egyenlőtlenség. Schmidt-féle ortogonalizációs eljárás.

Valós szimmetrikus mátrixok, általuk meghatározott kvadratikus alak definitsége, a különböző sajátalterek ortogonalitása.

Lineáris leképezések, megadásuk (egyértelmű kiterjesztési tétel). Lineáris leképezés mátrixa adott bázisban. $\mathcal{H}om(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Lineáris leképezések szorzása. Képtér, magtér. Lineáris transzformációk, mátrixuk adott bázisban. Sajátvektor, sajátérték. Karakterisztikus polinom. Különböző sajátértékű sajátvektorok függetlensége, elégséges feltétel SB létezésére. Izomorfizmus és dimenzió. Képtér, magtér, rang és defektus kapcsolata (dimenzióösszefüggés). Szorzat mátrixa. Lineáris transzformáció mátrixának változása új bázisra való áttéréskor.

Bilineáris alakok.