2016. szeptember 26/28.

Lineáris algebra (A, B, C)
3. előadás
(vázlat)

A következőkben a k, m, n indexek pozitív egészek; ha ettől eltérnénk, azt külön jelezzük.
KICSERÉLÉSI TÉTEL: Ha $V \leqq \mathbb{R}^n$; $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ V-beli L; $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_m$ G V-ben, akkor
α) $\exists j \in \{1, ..., m\}$: $\mathbf{b}_j, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ L β) $k \leqq m$ (azaz $|\mathrm{L}| \leqq |\mathrm{G}|$).
[Bizonyítás: α): A $k = 1$ eset triviális ($\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$ miatt $V \neq \{\mathbf{0}\}$). $k \geq 2$ esetén pedig tegyük fel, hogy minden j rossz, azaz $\forall j \in \{1, ..., m\}$ $\mathbf{b}_j, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ Ö. Itt az $\mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ L (hisz $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ L), tehát $\mathbf{b}_j$ lineárisan függ $\mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$-tól $j = 1, ..., m$-re. De így $\mathbf{a}_1$ is lineárisan függ $\mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$-tól, hisz a generátorrendszerrel kifejezhető. Így ellentmondás adódott $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ L-lel. β): Az α rész nemcsak az L első elemére érvényes, egymás után alkalmazva (a G mindig ugyanaz, az L pedig az előző eredmény), adódik
$(\mathbf{b}_j =)\mathbf{b}_{j_1}, \mathbf{b}_{j_2}, ..., \mathbf{b}_{j_k}$ L. Az L miatt ez k darab **különböző** elem a G-ből, így $m \geq k$.]
Következményként kapjuk a báziselemszámok összehasonlítását:
TÉTEL: Ha $V \leqq \mathbb{R}^n$; $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$ bázisok V-ben, k pozitív egész, $|\mathrm{B}_1| = k$, akkor B_2 is véges és $|\mathrm{B}_2| = k$.
[Bizonyítás: Ha B_2 végtelen volna, akkor volna benne $k+1$ elemű részrendszer, másrészt ez L, $k + 1 = |\mathrm{L}| \leqq |\mathrm{B}_1| = k$ pedig ellentmondás. A kicserélési tétel β részét L: B_1, G: B_2 szereposztással alkalmazva $|\mathrm{B}_1| \leqq |\mathrm{B}_2|$ adódik, majd felcserélt szerepekkel a fordított egyenlőtlenséget kapjuk.]
Most már rendbe tehetjük a 2. előadás végén szereplő gondolatmenetet is: Az $\mathbb{R}^n$-ben ismerünk n elemű generátorrendszert, így $V = \mathbb{R}^n$ esetére a kicserélési tétel β részét alkalmazva kiderül, hogy egy $\mathbb{R}^n$-beli lineárisan független rendszernek legfeljebb n eleme lehet, így $\mathbb{R}^n$ bármely alterében is igaz, hogy $|\mathrm{L}| \leqq n$. $V = \{\mathbf{0}\}$ esetén $\mathbf{0}$ véges generátorrendszer V-ben. Ha $V \leqq \mathbb{R}^n$ és $V \neq \{\mathbf{0}\}$, akkor van olyan $\mathbf{a} \in V$, hogy $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Így az $\mathbf{a}$ vektorrendszer L, van tehát L V-ben, s tudjuk, hogy minden L elemszáma legfeljebb n, létezik tehát **maximális** elemszámú lineárisan független rendszer V-ben, pl. $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ L. Így bármely $\mathbf{b} \in V$ esetén $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k, \mathbf{b}$ Ö lesz, hisz a maximális k-nál több elemű. Végül a 2/3 oldali tétel szerint $\mathbf{b}$ lineárisan függ az $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$-tól. Ezek szerint $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ nemcsak L, hanem G is. Ugyanezt az ötletet akkor is alkalmazhatjuk, amikor előre adott V-ben egy L, hisz az ezt tartalmazó lineárisan független rendszerek között is létezik maximális elemszámú, s most erről derül ki, hogy G is, tehát B. Összefoglalva:
TÉTEL: $V \leqq \mathbb{R}^n$ esetén V-ben létezik véges generátorrendszer, továbbá V-ben bármely lineárisan független rendszer kiegészíthető V bázisává.
DEFINÍCIÓ: $V \leqq \mathbb{R}^n$ esetén a V altér **dimenziója**:
$$\dim V = \begin{cases} 0, & \text{ha } V = \{\mathbf{0}\}; \\ \text{egy tetszőleges B elemszáma}, & \text{ha } V \neq \{\mathbf{0}\}. \end{cases}$$
Ha $V \leqq \mathbb{R}^n$ és dim $V = k > 0$, akkor $k \leqq n$, továbbá V-ben tetszőleges B, L, illetve G-re $|\mathrm{B}| = k$, $|\mathrm{L}| \leqq k$, $|\mathrm{G}| \geqq k$. Utóbbiaknál egyenlőség természetesen lehet, pl. bázisokra, de mindjárt belátjuk, hogy csak bázisokra. Ha $|\mathrm{G}| = k$, akkor, tudván, hogy G-ből kiválasztható B, mely viszont csak k elemű lehet, G maga B. Az L-re is érvényes hasonló állítás: a $|\mathrm{L}| = k$, akkor, tudván, hogy L kiegészíthető B-sá, mely viszont csak k elemű lehet, L maga B. [Aki a dimenzióról hajlamos megfeledkezni, az inkább úgy olvassa pl. az utolsó állítást, hogy dimenziónyi elemszámú L B is.]
DEFINÍCIÓ: $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ esetén az $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m$ **vektorrendszer rangja** az általuk generált altér dimenziója: $r(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m) = \dim \operatorname{Span}(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m)$ [az r helyén használatos a ρ illetve ϱ is.]

A következőkben adott bázisban koordinátáikkal megadott véges sok vektorból álló vektorrendszerről fogjuk eldönteni, hogy L-e, meghatározzuk a rangját, az általuk generált altérben keresünk bázist, továbbá egy másik vektorról eldöntjük, hogy benne van-e az előbbi vektorrendszer által generált altérben. Mindezeket lineáris egyenletrendszerhez kapcsolva tekintjük át. Legyen adott a következő valós együtthatós, m egyenletből álló, n ismeretlenes lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Itt tehát adottak az a_{ij}, b_i valós számok és keressük az x_j megoldásokat a valós számok körében. Az egyenletek m számának megfelelően választunk $\mathbb{R}^m$-ben egy bázist, pl. az 1/4 oldali ún. triviális (vagy standard) bázis megfelel.
Legyen tehát $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m$ bázis $\mathbb{R}^m$-ben. Az egyenletrendszer adatai segítségével most megadjuk $\mathbb{R}^m$-ben a $\mathbf{b}, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n$ vektorokat a következőképpen:

$$[\mathbf{b}]_\mathbf{e} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},\ [\mathbf{a}_1]_\mathbf{e} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix},\ [\mathbf{a}_2]_\mathbf{e} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix},\ \dots\ ,\ [\mathbf{a}_n]_\mathbf{e} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Látható, hogy $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ akkor és csak akkor megoldása a fenti lineáris egyenletrendszernek, ha $x_1\mathbf{a}_1 + ... + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$ teljesül. Ezt a vektoregyenletet szokás a lineáris egyenletrendszer vektor-alakjának hívni. Maga a megoldhatóság tehát azzal ekvivalens, hogy $\mathbf{b} \in \operatorname{Span}(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n)$.
Az elemi bázistranszformáció kiinduló táblázata a koordinátaoszlopokból (az $\mathbf{e}$ bázisban):

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	...	$\mathbf{a}_n$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{e}_1$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{e}_i$	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{in}	b_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{e}_m$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m

Ezek után elemi bázistranszformációs lépések sorozatát alkalmazzuk a következő megkötésekkel: mindig $\mathbf{a}_\bullet$-t próbálunk bevinni alkalmas $\mathbf{e}_{\bullet\bullet}$ helyére (az indexek ($\bullet$ illetve $\bullet\bullet$) lehetnek különbözők is, lehetnek azonosak is) úgy, hogy minden lépésben újra bázist kapjunk, s ezen új bázisban kiszámoljuk minden vektor új koordinátáit. Tehát $\mathbf{b}$-t nem visszük be, de mindig kiszámoljuk az új koordinátáit. A már bevitt $\mathbf{a}_\bullet$-k koordinátáit nem szükséges kiírni, mert azok bármikor könnyen felírhatók. Az első lépésnél az $\mathbf{e}_i$ helyére akkor vihetjük be az $\mathbf{a}_j$-t, ha $a_{ij} \neq 0$. Csak akkor nem indul el az eljárás, ha minden $a_{ij} = 0$. Ebben az esetben $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$ esetén minden valós szám n-es megoldás, különben meg nincs megoldás. Ha viszont elindul az eljárás, akkor már vigyáznunk kell, nehogy bevitt $\mathbf{a}_\bullet$-t lőjünk ki egy másikkal, mert ez a felesleges lépésen túl adatvesztéssel is jár, ha a bevittet már nem írtuk ki külön. Röviden tehát mindig $\mathbf{a}_\bullet \to \mathbf{e}_{\bullet\bullet}$ (az indexek lehetnek azonosak is, lehetnek különbözők is!). Az eljárás előbb-utóbb véget ér, leáll: elfogyhatnak az $\mathbf{e}$-k, vagy az $\mathbf{a}$-k, de az is lehet, hogy a szóba jövő helyeken csupa 0 áll a táblázatban. A bevitt $\mathbf{a}$-k legyenek a következők: $\mathbf{a}_{i_1},...,\mathbf{a}_{i_r}$, a kint maradtak (ha van ilyen): $\mathbf{a}_{i_{r+1}},...,\mathbf{a}_{i_n}$. Mivel a bevittek szétszórtan lehetnek a megmaradt $\mathbf{e}$-k között, sorcseréket hajtunk végre, hogy előre kerüljenek (az áttekinthetőség kedvéért). Az így utánuk kerülő $\mathbf{e}$-ket nem indexeljük precízen, vesszővel utalunk csupán arra, hogy az index eltérhet a feltüntetettől. A leállás utáni táblázatban a legfontosabb: a leállás után a kint maradt $\mathbf{a}$-k alatt a vesszős $\mathbf{e}$-k soraiban csupa 0 áll:

$$\begin{array}{c|ccc|c|}
 & \mathbf{a}_{i_{r+1}} & \ldots & \mathbf{a}_{i_n} & \mathbf{b} \\
\text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\
\mathbf{a}_{i_1} & d_{11} & \ldots & d_{1,n-r} & d_1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\mathbf{a}_{i_r} & d_{r1} & \ldots & d_{r,n-r} & d_r \\
\mathbf{e}'_{r+1} & 0 & \ldots & 0 & \bullet \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\mathbf{e}'_m & 0 & \ldots & 0 & \bullet
\end{array}$$

Ebből a következők olvashatók le:
$\exists$ megoldás $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{b}$ oszlopában a (vesszős) $\mathbf{e}$-k soraiban csupa 0 áll vagy ez a rész nincs (azaz minden $\bullet = 0$ vagy $r = m$). Ha ez a feltétel teljesül, akkor pl. $x_{i_1} = d_1, ..., x_{i_r} = d_r$, többi $= 0$ egy megoldás. $\mathbf{a}_{i_1},...,\mathbf{a}_{i_r}$ bázis $\mathrm{Span}\,(\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_n)$-ben, $r(\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_n) = r$. A megoldásszám: 0 vagy 1, ha $r = n$; 0 vagy ∞, ha $r < n$.

Az elemi bázistranszformáció kiinduló táblázatából (3/2) most emeljük ki az adatokat tartalmazó részt, s a $[\mathbf{b}]_{\mathbf{e}}$-hez hasonlóan tegyük szögletes zárójelbe:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

A második az $\mathbb{R}^m$ egy eleme, $n = 1$ esetén az első is ilyen, természetes tehát az általánosítás: az eddigi 1 oszlop helyett n oszlop, mindegyikben egy-egy valós szám m-es. Az így kapott téglalap alakú elrendezéseket mátrixoknak hívjuk, az első példában m sor és n oszlop van, ez egy $m \times n$-es mátrix, a másodikra pedig azt mondjuk, hogy $m \times 1$-es mátrix. (A $\times$ jel az elválasztás céljából szerepel, mert nem mindegy, hogy 2×3 vagy 3×2 alakú mátrixunk van.) Tehát:

DEFINÍCIÓ: Legyenek adottak az m és n pozitív egész számok, továbbá minden $i \in \{1,...,m\}$ és $j \in \{1,...,n\}$ esetére az a_{ij} valós számok. Az $\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$ táblázatot egy $\mathbb{R}$ feletti mátrixnak nevezzük, s A-val jelöljük, részletesebben $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, vagy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$, az A mátrix i-edik sora j-edik elemének jelölése: a_{ij} vagy ${}_i[A]_j$. Az A és a B mátrixok egyenlők, ha alakjuk azonos (mondjuk $m \times n$-es) és a megfelelő elemeik megegyeznek, azaz minden „szóbajövő" i, j párra ($1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq n$) teljesül, hogy ${}_i[A]_j = {}_i[B]_j$. Az $\mathbb{R}$ feletti $m \times n$-es mátrixok halmazát $\mathbb{R}^{m\times n}$-mel jelöljük ($\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m\times 1}$).

Az $\mathbb{R}^m$-beli komponensenkénti összeadás és valós számmal való szorzás (1/2) mintájára természetes módon kínálkoznak $m \times n$-es mátrixok esetén a megfelelő elemek összeadásával, illetve az összes elemnek egy valós számmal szorzásával a következő műveletek:
DEFINÍCIÓ: $+ : \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$, $\quad A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ esetén $A + B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ és minden szóbajövő i, j-re ${}_i[A + B]_j = {}_i[A]_j + {}_i[B]_j$;
$\lambda\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$, $\quad \lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ esetén $\lambda A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ és minden szóbajövő i, j-re ${}_i[\lambda A]_j = \lambda\, {}_i[A]_j$.
Az $\mathbb{R}^{m\times n}$-re is teljesül az 1/3 oldali 10 tulajdonság megfelelője a fenti $+$, $\lambda\cdot$ műveletekre nézve, így $\mathbb{R}^{m\times n}$-et is $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek mondjuk, s itt is bevezethetjük a korábbi $\mathbf{0}$, L, G, B stb. fogalmát. Pl. az I./4-et teljesítő ún. **nullmátrix**: $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$. Az $\mathbb{R}^m$ triviális bázisa mintájára most is könnyen találhatunk bázist: mn darab különböző olyan mátrix megfelel, ahol egy helyen 1, az összes többi helyen 0 áll. Így pl. $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ bázis.

Mátrixszorzás

Most szorozni próbálunk mátrixokat, itt azonban nem a természetesség, hanem az alkalmazhatóság a fő szempont. Az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszerhez hozzárendelhetjük a következő mátrixokat:
$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.
Most úgy szeretnénk mátrixszorzást definiálni, hogy a fenti lineáris egyenletrendszer ekvivalens legyen az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mátrixegyenlettel. Ha sikerül, akkor ez lesz a lineáris egyenletrendszer mátrix-alakja. Ezek szerint nem éppen azonos alakú mátrixokat kívánunk szorozgatni: a tervezett bal oldalon egy $m \times n$-es és egy $n \times 1$-es mátrix van, a jobb oldalon pedig egy $m \times 1$-es mátrix, s az A mátrix i-edik sorának elemeit rendre összeszorozzuk az $\mathbf{x}$ (egyetlen) oszlopának elemeivel: az elsőt az elsővel, a másodikat a másodikkal, ..., az utolsót az utolsóval [egyik sem fogy el hamarabb, mindkettőből n darab van!], végül a kapott szorzatokat összeadjuk, ez lesz a $\mathbf{b}$ (egyetlen) oszlopának i-edik eleme. Ha ezt látjuk, akkor már a további általánosítás természetes: 1 oszlop helyett k oszlop szerepeltetésénél csak az „(egyetlen)"-t kell mindkétszer kicserélni „j-edik"-re:
DEFINÍCIÓ: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ esetén $AB \in \mathbb{R}^{m\times k}$ úgy, hogy minden szóbajövő i, j-re (most $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq k$)

$${}_i[AB]_j = {}_i[A]_1\, {}_1[B]_j + {}_i[A]_2\, {}_2[B]_j + \dots + {}_i[A]_n\, {}_n[B]_j = \sum_{\ell=1}^{n} {}_i[A]_\ell\, {}_\ell[B]_j.$$

Ez az ún. sor–oszlop szorzás: a szorzatmátrix i-edik sora j-edik elemét úgy kapjuk, hogy a bal oldali mátrix i-edik sorának és a jobb oldali mátrix j-edik oszlopának megfelelő elemeit összeszorozzuk, s a kapott szorzatokat összeadjuk.