2016. október 10/12.

Lineáris algebra (A, B, C)
5. előadás
(vázlat)

$A=[\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_n]\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $B=[\mathbf{b}_1,...,\mathbf{b}_k]\in\mathbb{R}^{m\times k}$ `esetén keressük az` $AX=B$ `mátrixegyenlet` $X\in\mathbb{R}^{n\times k}$ `megoldását` $X=[\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_k]$ `alakban:`
$AX=B\iff A[\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_k]=[\mathbf{b}_1,...,\mathbf{b}_k]\iff[A\mathbf{x}_1,...,A\mathbf{x}_k]=[\mathbf{b}_1,...,\mathbf{b}_k]\iff$
$A\mathbf{x}_i=\mathbf{b}_i$ $(i=1,...,k)$.
A fenti alakok esetén az $AX=B$ megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele tehát az, hogy mind a k darab (azonos mátrixú) lineáris egyenletrendszer megoldható legyen, azaz, hogy $\mathbf{b}_1,...,\mathbf{b}_k\in\operatorname{Span}(\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_n)$ teljesüljön. Eredményeinket alkalmazzuk abban a különösen érdekes esetben, amikor a B, illetve a D helyén egységmátrix van.
DEFINÍCIÓ: $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ `esetén:`
`az` $A^{(\mathrm{j})}$ `egy jobb oldali inverze az` A`-nak, ha` $A^{(\mathrm{j})}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ `és` $AA^{(\mathrm{j})}=I_m$;
`az` $A^{(\mathrm{b})}$ `egy bal oldali inverze az` A`-nak, ha` $A^{(\mathrm{b})}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ `és` $A^{(\mathrm{b})}A=I_n$;
`az` A^{-1} `kétoldali inverze` A`-nak, ha bal oldali és jobb oldali inverze is` A`-nak.`
Tudjuk, hogy $A=[\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_n]\in\mathbb{R}^{m\times n}$ esetén az $AX=I_m=[\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_m]$ megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele: $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_m\in\operatorname{Span}(\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_n)$. Ez (hisz $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_m$ B $\mathbb{R}^m$-ben) $\iff\operatorname{Span}(\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_m)\subseteqq\operatorname{Span}(\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_n)\iff\mathbb{R}^m\subseteqq\operatorname{Span}(\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_n)\iff$ $\mathbb{R}^m=\operatorname{Span}(\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_n)$, hiszen $\operatorname{Span}(\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_n)\subseteqq\mathbb{R}^m$ nyilvánvaló. Eme trivialitás biztosítja, hogy $\mathbb{R}^m=\operatorname{Span}(\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_n)\iff\dim\mathbb{R}^m=\dim\operatorname{Span}(\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_n)$ [az m dimenziós $\mathbb{R}^m$ m dimenziós alterének egy bázisa L $\mathbb{R}^m$-ben, s 3/1 szerint dimenziónyi elemszámú L bázis is $\mathbb{R}^m$-ben]. Ezzel már be is bizonyítottuk a következő tétel (1) állítását.
TÉTEL: $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ `esetén:`
(1) $\exists\,A^{(\mathrm{j})}\iff\varrho(A)=m$;
(2) $\exists\,A^{(\mathrm{b})}\iff\varrho(A)=n$;
(3) $\exists\,A^{-1}\Rightarrow\varrho(A)=m=n\Rightarrow\exists\,A^{(\mathrm{b})},\exists\,A^{(\mathrm{j})}$ `és egyenlők` $\Rightarrow\exists!\,A^{-1}$.
[Az (1) állítást már bizonyítottuk. Ebből adódik a (2) állítás, mivel $\exists\,A^{(\mathrm{b})}\iff\exists\,(A^\top)^{(\mathrm{j})}$.
A (3) állításból még bizonyítandó rész: $\exists\,A^{(\mathrm{b})},\exists\,A^{(\mathrm{j})}$ esetén vizsgáljuk $A^{(\mathrm{b})}AA^{(\mathrm{j})}$-t:
$A^{(\mathrm{j})}=I_nA^{(\mathrm{j})}=(A^{(\mathrm{b})}A)A^{(\mathrm{j})}=A^{(\mathrm{b})}(AA^{(\mathrm{j})})=A^{(\mathrm{b})}I_m=A^{(\mathrm{b})}$.]
Vizsgáljuk most `négyzetes mátrix inverzének numerikus meghatározását elemi bázistranszformációval` $A=[\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_n]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ `esetén:`
Ha $\varrho(A)<n$ (amikor nem tudunk minden $\mathbf{a}$-t bevinni a bázisba), akkor $\nexists\,A^{-1}$.
Egyébként viszont gondoljunk arra, hogy most az $A\mathbf{x}_i=\mathbf{e}_i$ $(i=1,...,n)$ azonos mátrixú lineáris egyenletrendszereket kell megoldanunk, s ezt egyszerre is tehetjük: csak most egy $\mathbf{b}$ helyett n darab lesz, éspedig $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$. Legyen tehát a kiinduló (dupla) táblázat a következő (mátrixos jelöléssel):

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|}
 & \mathbf{a}_1 & \ldots & \mathbf{a}_n & \mathbf{e}_1 & \ldots & \mathbf{e}_n \\
\mathbf{e}_1 & & & & & & \\
\vdots & & A & & & I_n & \\
\mathbf{e}_n & & & & & &
\end{array}$$

Most végezzünk elemi bázistranszformációt a szokásos módon (mindig $\mathbf{a}_\bullet\to\mathbf{e}_{\bullet\bullet}$), a jobb oldali részen lévő $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$-nek persze mindig csak az új koordinátáit számoljuk. [Ha előzetesen nem határoztuk meg a rangot, az sem baj, innen is kiderülhet $\varrho(A)<n$, csak akkor némi felesleges munkát is végeztünk.] Ha $\varrho(A)=n$, akkor minden $\mathbf{a}$-t be tudunk

vinni a bázisba, de nem biztos, hogy az eredeti sorrendben!!! Ekkor még sorcseréket kell végeznünk, hogy a bázisban $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n$ legyen a sorrend.

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|} & \mathbf{a}_1 & ... & \mathbf{a}_n & \mathbf{e}_1 & ... & \mathbf{e}_n \\ \mathbf{a}_1 & & & & & & \\ \vdots & & I_n & & & A^{-1} & \\ \mathbf{a}_n & & & & & & \end{array}$$

Itt az I_n kontrollmátrix jelzi, hogy már jó a sorrend. Aki (egyébként takarékos módon) nem írja ki a bevitt vektorok koordinátáit, esetleg megfeledkezhet a sorcseréről. Aki bízik a memóriájában és a számolásában, nem köteles ellenőrizni. Aki viszont szeretné ellenőrizni, hogy a kapott X mátrix tényleg kétoldali inverze-e a négyzetes A-nak, annak elég AX és XA közül az egyiket kiszámolni, hisz a tétel alapján: Ha egy **négyzetes** mátrixnak van egyik oldali inverze, akkor az másik oldali is!

A négyzetes mátrixok között több olyan mátrix típus van, amely valamilyen számolás elvégzését megkönnyíti.

A következő $n \times n$-es mátrix neve diagonális mátrix: $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix}$. Itt a nemnulla elemek csak a főátlóban lehetnek (egy elem akkor van a főátlóban, ha a sorindexe és az oszlopindexe megegyezik), de a főátlóban is lehetnek nullák tetszőleges számban. Az $n \times n$-es diagonális mátrixokkal könnyű számolni, mert két ilyen diagonális mátrixot úgy lehet összeszorozni, hogy a megfelelő diagonális elemeket összeszorozzuk. Más mátrixoknál ez nem ilyen kellemes, de mégis örülünk, ha az alak legalább félig olyan, mint a diagonálisnál. Egy négyzetes mátrixot felső háromszög mátrixnak szokás hívni, ha a főátlója alatt mindenütt nulla van. Az alsó háromszög mátrixban pedig a főátló felett van mindenütt nulla. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ esetére megemlítünk még néhány speciális fajtát: A szimmetrikus, ha $A^\top = A$; A antiszimmetrikus, ha $A^\top = -A$; A projektor mátrix, ha $A^2 = A$; A nilpotens mátrix, ha van olyan k pozitív egész, melyre $A^k = \mathbf{0}$; A invertálható mátrix, ha van kétoldali inverze.

A mátrixok rangjával kapcsolatos vizsgálatok során kiderül még becslés összeg és szorzat rangjára is. A 5. gyakorlat 6. feladatából következik pl., hogy $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ esetén $\varrho(A+B) \leqq \varrho(A) + \varrho(B)$. A 4/4 oldali tételből következik, hogy $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ esetén $\varrho(AB) \leqq \varrho(A)$. Igaz ennek a párja is: $\varrho(AB) \leqq \varrho(B)$ [biz: $\varrho(AB) = \varrho((AB)^\top) = \varrho(B^\top A^\top) \leqq \varrho(B^\top) = \varrho(B)$].

Mindeddig csak $\mathbb{R}$ feletti vektortereket és mátrixokat néztünk, legfőképpen azért, hogy elkerüljük a komplex számokkal kapcsolatos esetleges nehézségeket. Rövidesen azonban használnunk kell $\mathbb{C}$ (a komplex számtest) feletti mátrixokat is, itt az alkalom hozzászokni. Használjuk egy $a + bi$ alakú ($a, b \in \mathbb{R}$) komplex szám konjugáltját: $\overline{a+bi} = a - bi$. A következő definícióban a mátrixunk elemei komplex számok lesznek, ezért az indexeknél kerüljük az i használatát. (A mátrixműveletek a korábbi mintára definiálandók.)

DEFINÍCIÓ: $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ esetén az A mátrix **adjungált**ja: $A^* \in \mathbb{C}^{n \times m}$, melyre minden szóbajövő j, k-ra ${}_j[A^*]_k = \overline{{}_k[A]_j}$.

A 4/2 oldali tétel mintájára igazolható a következő tétel.

TÉTEL (Az adjungálás kapcsolata a mátrixműveletekkel):

$A, B \in \mathbb{C}^{m \times n} \Rightarrow (A+B)^* = A^* + B^*$;

$\lambda \in \mathbb{C}$, $A \in \mathbb{C}^{m \times n} \Rightarrow (\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$;

$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times k} \Rightarrow (AB)^* = B^* A^*$.

Már a rangtétel bizonyításában is szerepelt az a megjegyzés, hogy oszlopcserétől nem változik meg az oszlopvektorrendszer rangja. Így $\mathbb{R}^n$-ben teljesül $r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, ..., \mathbf{a}_k) = r(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, ..., \mathbf{a}_k)$, sőt $\mathrm{Span}\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, ...\mathbf{a}_k) = \mathrm{Span}\,(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k)$ (tehát az alterek is megegyeznek, nemcsak a dimenziójuk). A csere tehát ún. rangtartó átalakítás. Hasonló tulajdonságú még egy vektor szorzása nullától különböző valós számmal; egy vektorhoz egy másik vektor hozzáadása (de a másik vektor megmarad); egy vektorhoz egy másik vektor számszorosának hozzáadása (a másik vektor megmarad). Mindezek hasonlóan bizonyíthatók (a megfelelő alterek megegyezését igazolva). Az első, második vektorra fogalmazva részletes bizonyítás nélkül összefoglalva:

TÉTEL (**rangtartó átalakítások**): $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, $k \geqq 2$ esetén
$r(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k) = r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k)$, $\quad r(\lambda\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k) = r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k)$,
$r(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k) = r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k)$, $\quad r(\mathbf{a}_1 + \lambda\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k) = r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k)$.

Ha adott egy nullmátrixtól különböző mátrixunk, akkor véges sok rangtartó átalakítással (oszlopokra is, sorokra is szabad) szép alakra hozhatjuk: Keresünk egy nemnulla elemet, s ha szükséges, sorcserével és oszlopcserével a bal felső sarokba visszük. Ezután az első oszlopot megszorozzuk a bal felső sarokban lévő szám reciprokával, majd az első oszlop alkalmas számszorosát hozzáadva a többi oszlophoz, az első sort a második elemétől kezdve végig nullává változtatjuk, majd ugyanezt megtesszük az első oszloppal, azután ugyanezt végezzük az első sor és első oszlop elhagyásával megmaradó mátrixon (ha ez nullmátrix, akkor máris szép az alak), és így tovább. Jelentse a $\rightsquigarrow$ jel azt, hogy az előtte lévő mátrix véges sok rangtartó (és mérettartó) átalakítás segítségével az utána lévő mátrixszá alakítható. Tehát:

TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\varrho(A) = r \geqq 1$ esetén $A \rightsquigarrow \begin{bmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Bizonyítás nélkül közöljük ezen tételnek egy különösen hasznos változatát:
$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\varrho(A) = r \geqq 1$ esetén vegyünk egy I_m egységmátrixot a soros átalakítások kezdőmátrixaként, egy I_n egységmátrixot az oszlopos átalakításokhoz ($m = n$ esetén két I_m-et); ezután az $A \rightsquigarrow \begin{bmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ átalakítássorozatból rendre hajtsuk végre az első soros átalakítást az I_m-en, a következő sorosat már az I_m-ből kapott mátrixon és így tovább, az utolsó eredmény legyen S; az első oszlopos átalakítást az I_n-en hajtjuk végre, a következőt az I_n-ből kapott mátrixon és így tovább, az utolsó eredmény legyen P. Ekkor S és P invertálható mátrixok, melyekre

$$SAP = \begin{bmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Emlékeztető:

Geometriai vektorok hajlásszöge: $\gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in [0, \pi]$. A párhuzamosság definíciója természetes, de az egysíkúsággal vigyázni kell! Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, ...$ geometriai vektorok egysíkúak, ha elhelyezhetők (felrajzolhatók) egy síkban. Geometriai vektorokra igazolható:
$\mathbf{a}_1$ Ö $\Longleftrightarrow \mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$; $\quad \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ Ö $\Longleftrightarrow \mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}_2$; $\quad \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ Ö $\Longleftrightarrow \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ egysíkúak;
$\mathbf{a}_1$ L $\Longleftrightarrow \mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$; $\quad \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ L $\Longleftrightarrow \mathbf{a}_1 \nparallel \mathbf{a}_2$; $\quad \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ L $\Longleftrightarrow \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ nem egysíkúak;
$k \geqq 4 \Rightarrow \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ Ö.

DEFINÍCIÓ: Geometriai vektorok skaláris szorzata: $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

A skaláris szorzat műveleti tulajdonságai, kapcsolata a skalárral való szorzással és az összeadással (tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ geometriai vektorokra és $\lambda \in \mathbb{R}$-re BIZONYÍTHATÓK):
$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ (kommutativitás); $\quad \mathbf{ab} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$;
$\lambda(\mathbf{ab}) = (\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b})$ (skalár kiemelhetősége); $\quad (\mathbf{ab})\mathbf{c} \overset{ált}{\neq} \mathbf{a}(\mathbf{bc})$, $\quad \mathbf{cc} = |\mathbf{c}|^2 \geqq 0$;

$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{ab}+\mathbf{ac},\ (\mathbf{b}+\mathbf{c})\mathbf{a} = \mathbf{ba}+\mathbf{ca}$ (disztributivitás).
[[A bizonyítás az alábbi segédtételek révén történhet.
1.St.: $|\mathbf{e}| = 1$, $\mathbf{a}$ tetszőleges $\Rightarrow \exists!\, \mathbf{a}_p, \mathbf{a}_m\, :\, \mathbf{a}_p \parallel \mathbf{e},\ \mathbf{a}_m \perp \mathbf{e},\ \mathbf{a} = \mathbf{a}_p + \mathbf{a}_m$.
2.St.: $|\mathbf{e}| = 1$, $\mathbf{a}$ tetszőleges $\Rightarrow \mathbf{a}_p = (\mathbf{ea})\mathbf{e}$.
3.St.: $|\mathbf{e}| = 1$, $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ tetszőleges $\Rightarrow\ (\mathbf{b}+\mathbf{c})_p = \mathbf{b}_p + \mathbf{c}_p,\ (\mathbf{b}+\mathbf{c})_m = \mathbf{b}_m + \mathbf{c}_m$.
Az $\mathbf{a}$-val párhuzamos $\mathbf{e}$-t véve, a 3. Segédtételt és (háromszor) a 2. Segédtételt alkalmazva először $(\mathbf{e}(\mathbf{b}+\mathbf{c}))\mathbf{e} = (\mathbf{eb})\mathbf{e} + (\mathbf{ec})\mathbf{e}$, majd $\mathbf{e}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{eb}+\mathbf{ec}$ adódik, amit alkalmas skalárral kell még megszoroznunk. Végiggondolandó közben, hogy mely disztributivitásokat használtuk fel (jogosan?)!]]
A (több tagra is igazolható) disztributivitás és a skalár kiemelhetőségének felhasználásával a skaláris szorzat kiszámítható a koordinátákból. A középiskolában már megszokott jelöléssel: Ha $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ páronként egymásra merőleges egységvektorok (és ún. jobbrendszert alkotnak, bár erre most nincs szükség), akkor ezek bázist alkotnak a geometriai vektorok körében, és

$$[\mathbf{a}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix},\ [\mathbf{b}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix},$$

azaz

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k} \text{ és } \mathbf{b} = \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}$$

esetén

$$\mathbf{ab} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3,$$

továbbá

$$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{aa} = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \text{ és } |\mathbf{b}|^2 = \mathbf{bb} = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2.$$

Ha még feltesszük, hogy $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, akkor a hajlásszögüket kiszámíthatjuk az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ rendszerbeli koordinátákból:

$$\cos\gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}$$

DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ nem egysíkú geometriai vektorok ebben a sorrendben jobbrendszert alkotnak, ha – közös kezdőponttal felrajzolva őket, a kezdőpontban az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ síkjára emelt merőlegesen (mint forgástengelyen) – a $\mathbf{c}$-t tartalmazó féltérből nézve pozitív irányú, 0° és 180° közötti forgatással vihetjük át az $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$-t a $\mathbf{b}/|\mathbf{b}|$-be.
DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ geometriai vektorok VEKTORIÁLIS szorzata:
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ VEKTOR („$\mathbf{a}$ kereszt $\mathbf{b}$”):
1./ $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b})$;
2./ $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \mathbf{b}$;
3./ $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \neq 0$ esetén $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jobbrendszer.
A vektoriális szorzat műveleti tulajdonságai, kapcsolata a skalárral való szorzással és az összeadással (tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ geometriai vektorokra és λ skalárra BIZONYÍTHATÓK):
$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \iff \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$;
$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (alternálás vagy antikommutativitás), így $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ esetén $\mathbf{b} \times \mathbf{a} \neq \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (tehát a vektoriális szorzat nem kommutatív);
$\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b})$ (skalár kiemelhetősége);
$\mathbf{a} \times (\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, $(\mathbf{b}+\mathbf{c}) \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ (disztributivitás).
[[A disztibutivitás bizonyítása a korábbi három segédtétel felhasználásával történhet, kiegészítve azzal, hogy $|\mathbf{e}| = 1$ esetén tetszőleges $\mathbf{a}$-ra $\mathbf{a}_m = (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e}$, ezt pedig az $\mathbf{e}$ irányából nézve $+90°$-os forgatással átvihetjük $\mathbf{e} \times \mathbf{a}$-ba (ezzel kerülhető el a bizonyítandó állítás felhasználása).]]