2016. október 24/26.

Lineáris algebra (A, B, C)
7. előadás
(vázlat)

Most már lehetőségünk van arra, hogy egy determináns értékét elemi bázistranszformáció segítségével számoljuk ki.
Ha $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olyan, hogy $\varrho(A) < n$, akkor az oszlopvektorrendszer Ö, tehát $\exists\, \mathbf{a}_j$, ami lineárisan függ a többitől, pl. $\mathbf{a}_j = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + ... + \alpha_{j-1}\mathbf{a}_{j-1} + \alpha_{j+1}\mathbf{a}_{j+1} + ... + \alpha_n \mathbf{a}_n$. Ekkor a j-edik oszlophoz hozzáadhatjuk $k = 1, ..., j-1, j+1, ..., n$-re a k-adik oszlop $-\alpha_k$-szorosát, így a determináns nem változik, viszont a j-edik oszlopba csupa 0 kerül, tehát $\varrho(A) < n$ esetén $|A| = 0$. $\varrho(A) = n$ esetén mindent be tudunk vinni a bázisba, de nem biztos, hogy az eredeti sorrendben. Másrészt most célszerű kiírnunk a bevitt vektorok koordinátáit is, mert így nem rontjuk el az $n \times n$-es alakot, és egy általános elemi bázistranszformációs lépésnél összehasonlíthatjuk a régi (lépés előtti) mátrix és az új (lépés utáni) mátrix determinánsát, mégpedig úgy, hogy közbeiktatunk egy segédmátrixot. Az indexelési nehézségek miatt sem az $\mathbf{a}$, sem az $\mathbf{e}$ vektorokat nem írjuk ki, csupán a koordinátákból adódó mátrixot. Legyen a régi mátrix
$\begin{bmatrix} \beta_{11} & ... & \beta_{1j} & ... & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{i1} & ... & \beta_{ij} & ... & \beta_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & ... & \beta_{nj} & ... & \beta_{nn} \end{bmatrix}$, és tegyük fel, hogy éppen az $\mathbf{a}_j$-t visszük be az $\mathbf{e}_i$ helyére,
feltéve természetesen, hogy $\beta_{ij} \neq 0$. Ezt a nullától különböző β_{ij}-t szokás a lépés generáló elemének hívni, s ha épppen a k-adik lépésről van szó, g_k-val is jelölni.
Képezzünk egy segédmátrixot úgy, hogy a régi mátrix i-edik sorát megszorozzuk a ${\beta_{ij}}^{-1}$ számmal:
$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & ... & \beta_{1j} & ... & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{i1}/\beta_{ij} & ... & 1 & ... & \beta_{in}/\beta_{ij} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & ... & \beta_{nj} & ... & \beta_{nn} \end{bmatrix},$$
tehát a régi mátrix determinánsa a segédmátrix determinánsának β_{ij}-szerese.
Ezután a segédmátrix i-edik sorának j-edik helyén álló 1 segítségével kinullázhatjuk a j-edik oszlop többi elemét, mégpedig determinánstartó átalakításokkal: minden $k \neq i$-re adjuk hozzá a k-adik sorhoz az i-edik sor $-\beta_{kj}$-szeresét. Ekkor épp az új mátrixot kapjuk:
$$\begin{bmatrix} \beta_{11} - \beta_{1j} \cdot \beta_{i1}/\beta_{ij} & ... & 0 & ... & \beta_{1n} - \beta_{1j} \cdot \beta_{in}/\beta_{ij} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{i1}/\beta_{ij} & ... & 1 & ... & \beta_{in}/\beta_{ij} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} - \beta_{nj} \cdot \beta_{i1}/\beta_{ij} & ... & 0 & ... & \beta_{nn} - \beta_{nj} \cdot \beta_{in}/\beta_{ij} \end{bmatrix}.$$
Mivel az új mátrixot a segédmátrixból már determinánstartó átalakításokkal nyertük, ezek determinánsa megegyezik, tehát a régi mátrix determinánsa az új mátrix determinánsának is β_{ij}-szerese, azaz g_k-szorosa. $\varrho(A) = n$ esetén n lépést végzünk, az A

determinánsa $g_1 g_2 \cdot ... \cdot g_n$-szerese az n-edik lépés utáni új mátrix $|\acute{U}|$ determinánsának. Ha az **a**-kat az eredeti sorrendben sikerült bevinni a bázisba, akkor ez az utolsó új mátrix I_n. Egyébként, ha a bevitt elemek sorrendje a bázisban, mondjuk $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, ..., \mathbf{a}_{i_n}$ (itt az $i_1, i_2, ..., i_n$ az $1, 2, ..., n$ egy permutációja), akkor cseréket kell végeznünk, amíg az eredeti sorrendbe nem kerülnek. Tekintsük a $(-1)^{I(i_1,...,i_n)}|\acute{U}|$ szorzatot. Ha most felcserélünk két báziselemet, akkor az inverziószám páratlan számmal változik, s a szorzat első tényezője (-1)-szeresére változik, de a második tényező is így változik a sorcsere miatt, végeredményben a szorzat nem változik; mikor pedig már eljutottunk az eredeti sorrendhez, akkor $(-1)^{I(1,...,n)}|I_n| = (-1)^0 1 = 1$ adódik. Tehát $|\acute{U}| = (-1)^{I(i_1,...,i_n)}$,

$$|A| = g_1 g_2 \cdot ... \cdot g_n \cdot (-1)^{I(i_1,...,i_n)}.$$

KÖVETKEZMÉNY: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ esetén

$$|A| \neq 0 \Longleftrightarrow \varrho(A) = n \Longleftrightarrow \exists\, A^{-1}.$$

Az utolsó sorában majdnem végig 0 mátrix determinánsára vonatkozó tételt könnyű általánosítani arra az esetre, amikor az utolsó sor helyett az i-edik sorról van szó, és benne az egyetlen nullától különböző elem a j-edik helyen áll. $n \geqq 2$ esetén az i-edik sort $n-i$ cserével alulra vihetjük, majd a j-edik oszlopot $n-j$ cserével az utolsó helyre vihetjük. (Az alábbi blokkok közül a $*$ olyanokat jelöl, amelyek 1 oszlopból állnak és tartalmuk közömbös az eredmény szempontjából.)

$$\begin{vmatrix} & E & & * & & F & \\ 0 & ... & 0 & a_{ij} & 0 & ... & 0 \\ & G & & * & & H & \end{vmatrix} = (-1)^{n-i} \begin{vmatrix} & E & & * & & F & \\ & G & & * & & H & \\ 0 & ... & 0 & a_{ij} & 0 & ... & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{n-i}(-1)^{n-j} \begin{vmatrix} E & F & * \\ G & H & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & a_{ij} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} E & F \\ G & H \end{vmatrix} = a_{ij}(-1)^{i+j} \begin{vmatrix} E & F \\ G & H \end{vmatrix}.$$

Az E, F, G, H blokkok (már aminek jut hely) téglalap alakúak, de a végén egymáshoz csúsznak, és egy $(n-1) \times (n-1)$-es mátrixot alkotnak.
Tekintsük **tetszőleges** mátrixra is a megfelelő összecsúszott rész determinánsát az i-edik sor és a j-edik oszlop elhagyásával keletkező mátrix determinánsaként: Az

$$A = \begin{bmatrix} & E & & * & & F & \\ a_{i1} & ... & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & ... & a_{in} \\ & G & & * & & H & \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mátrix i-edik sora j-edik eleméhez tartozó aldeterminánsa
$\text{aldet}_{ij}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} E & F \\ G & H \end{vmatrix}$,
az i-edik sora j-edik eleméhez tartozó **előjelezett** aldeterminánsa pedig
$A_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{i+j} \text{aldet}_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} E & F \\ G & H \end{vmatrix}$.
Ha a mátrix elemeinek helyére beírjuk a helynek megfelelő $(-1)^{i+j}$-t, az ún. sakktábla-szabályt kapjuk, a főátlóban mindenütt $+1$-gyel. Fentiek segítségével tetszőleges $n \times n$-es $(n \geqq 2)$ valós elemű mátrix determinánsát visszavezethetjük n darab $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsának kiszámítására. Választunk egy i-t az $\{1, 2, ..., n\}$-ből, s ezt rögzítjük.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+...+0 & ... & 0+...+a_{ij}+...+0 & ... & 0+...+0+a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & ... & a_{ij} & ... & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} |B_j| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\mathrm{aldet}_{ij}(B_j) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\mathrm{aldet}_{ij}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij},$$

mivel a B_j mátrixok és az A mátrix csak az i-edik sorban különböznek, azt pedig a fenti aldeterminánsok képzése során elhagyjuk. A végeredmény $|A|$ kifejtése az i-edik sor szerint, hasonlóan bizonyítható a j-edik oszlop szerinti kifejtés:
KIFEJTÉSI TÉTEL: $n \geqq 2,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén
a) Tetszőleges $1 \leqq i \leqq n$ esetén

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij};$$

b) Tetszőleges $1 \leqq j \leqq n$ esetén

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

Bizonyítás nélkül mondjuk ki a következő nevezetes tételt ($\det(A) \overset{\mathrm{def}}{=} |A|$).
CRAMER-SZABÁLY: $A = [\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n] \in \mathbb{R}^{n\times n},\ |A| \neq 0,\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\exists!\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, melyre $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, továbbá az $\mathbf{x}$ j-edik komponense ($j = 1, ..., n$)

$$x_j = \frac{\det([\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{b}, ..., \mathbf{a}_n])}{\det([\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_j, ..., \mathbf{a}_n])}.$$

Konstrukciókban jól lehet használni olyan négyzetes mátrixokat, melyekről könnyű kideríteni, hogy determinánsuk különbözik-e nullától.
TÉTEL (**Vandermonde-determináns és kifejtése**): $n \geqq 2;\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$V_n(a_1, \ldots, a_n) \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & ... & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & ... & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\geqq i>j\geqq 1} (a_i - a_j).$$

[Bizonyítás: n szerinti teljes indució: $n = 2$-re az állítás nyilvánvaló. $n \geqq 3$ esetén $V_n(a_1, \ldots, a_n)$ definíció szerinti alakjában adjuk hozzá rendre az n-edik, $(n-1)$-edik, ..., második oszlophoz az előző oszlop $-a_1$-szeresét:

$$V_n(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & (a_2-a_1)1 & (a_2-a_1)a_2 & \ldots & (a_2-a_1)a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (a_n-a_1)1 & (a_n-a_1)a_n & \ldots & (a_n-a_1)a_n^{n-2} \end{vmatrix}_n =$$

$$\begin{vmatrix} (a_2-a_1)1 & (a_2-a_1)a_2 & \ldots & (a_2-a_1)a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n-a_1)1 & (a_n-a_1)a_n & \ldots & (a_n-a_1)a_n^{n-2} \end{vmatrix}_{n-1} =$$

$$(a_2-a_1) \cdot \ldots \cdot (a_n-a_1) V_{n-1}(a_2, \ldots, a_n) =$$

$$(a_2-a_1) \cdot \ldots \cdot (a_n-a_1) \prod_{n \geqq i > j \geqq 2} (a_i - a_j) = \prod_{n \geqq i > j \geqq 1} (a_i - a_j).]$$

Tudjuk már, hogy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ esetén $|A| \neq 0 \iff \varrho(A) = n \iff \exists\, A^{-1}$.
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ esetén is tudunk kapcsolatot a rang és a négyzetes részmátrixok determinánsa között. ($j \times k$-as **részmátrix**: j sor és k oszlop kiválasztásával a metszéspontokba kerülő elemek alkotta $j \times k$-as mátrix.)
TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és $\varrho(A) = r \geqq 1$ esetén A-nak van olyan $r \times r$-es részmátrixa, melynek determinánsa $\neq 0$, viszont minden $(r+1) \times (r+1)$-es részmátrix determinánsa 0.
[Biz: Mivel a rang r, van r darab oszlop, mely L. Csak ezeket tartva meg, a keletkezett $m \times r$-es mátrix oszloprangja r, így sorrangja is r, van tehát benne r darab sor, mely L. Csak ezeket tartva meg, a keletkezett $r \times r$-es mátrix rangja r, így determinánsa $\neq 0$. Tekintsünk most egy $(r+1) \times (r+1)$-es részmátrixot. Ez $r+1$ oszlopból származik, mely Ö (hisz a rang r), így részmátrixunk $r+1$ oszlopa is Ö, és részmátrixunk determinánsa 0.]
Az elsőként idézett tételt érdemes még átfogalmazni lineáris egyenletrendszerekre, éspedig a homogén esetre (amikor $\mathbf{b} = \mathbf{0}$), mivel nagy szükségünk lesz később nemtriviális ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) megoldásra, ha van ilyen.
TÉTEL: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van nemtriviális megoldása, ha $|A| = 0$.
[Biz: Nemtriviális megoldás létezése azzal ekvivalens, hogy az A oszlopvektorrendszere lineárisan összefüggő.]
A következő váratlan tételre bizonyítási lehetőségeket vázolunk röviden.
SZORZÁSTÉTEL: $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow |AB| = |A||B|$.
[Az utolsó sorában majdnem végig 0 négyzetes mátrix determinánsára vonatkozó tételt a következőképpen is lehetne általánosítani (a $*$ most olyan téglalap alakú blokkot jelöl, melynek tartalma közömbös az eredmény szempontjából): Legyen $C \in \mathbb{R}^{r \times r}$ és $D \in \mathbb{R}^{s \times s}$. Ekkor $\begin{vmatrix} C & * \\ \mathbf{0} & D \end{vmatrix} = |C||D|$ és $\begin{vmatrix} C & \mathbf{0} \\ * & D \end{vmatrix} = |C||D|$. Így $|A||B| = \begin{vmatrix} A & \mathbf{0} \\ -I_n & B \end{vmatrix}$. Most a $-I_n$ elemeit használva determinánstartó átalakításokkal kiirthatjuk B-t, azaz nullmátrix kerül a helyére azon az áron, hogy a felette lévő nullmátrix megváltozik, éspedig épp AB kerül az ő helyére. Viszont sorcserék révén $\begin{vmatrix} A & AB \\ -I_n & \mathbf{0} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} -I_n & \mathbf{0} \\ A & AB \end{vmatrix} = |AB|$.]