Műveletek nyelvekkel

Formális nyelvek, 3. gyakorlat

Célja: A formális nyelvek elmélete alapfogalmainak elmélyítése, a műveletek gyakorlása

Fogalmak: Műveletek szavakon, nyelveken, reguláris műveletek, halmazműveletek, homomorfizmus, helyettesítés, párhuzamos kompozíció

Feladatok jellege: A műveletek bemutatása konkrét nyelvekre való alkalmazásukon keresztül, műveletekre vonatkozó azonosságok felismerése, bizonyítása.

2008/09 I. félév

Házi feladatok megoldása

1. feladat

Írjunk programot, mely kirajzolja $n = 4$*-ig*

a. *a Koch szigeteket*

b. *a következőt:* $\omega_0 = F{+}F{+}F{+}F,$

$h(F) = F{+}f{-}FF{+}F{+}FF{+}Ff{+}FF{-}f{+}FF{-}F{-}FF{-}Ff{-}FFF$

$h(f) = ffffff,\ \ h(+) = +,\ \ h(-) = -.$

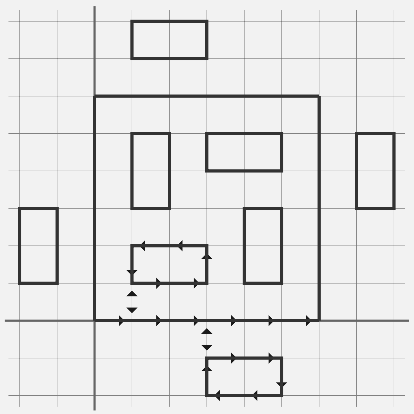
Házi feladatok megoldása

1. feladat

b. $\omega_0 = F{+}F{+}F{+}F,\ \ \omega_i \to \omega_{i+1}$:

$h(F) = F{+}f{-}FF{+}F{+}FF{+}Ff{+}FF{-}f{+}FF{-}F{-}FF{-}Ff{-}FFF$

$h(f) = ffffff,\ \ h(+) = +,\ \ h(-) = -.$



Házi feladatok megoldása

2. feladat

$(L_1L_2)^{-1} = L_2^{-1}L_1^{-1}.$

Megoldás:

$(uv)^{-1} = v^{-1}u^{-1}$, ugyanis ha $u = x_1 \dots x_k$, $v = y_1 \dots y_\ell$, akkor $uv = x_1 \dots x_k y_1 \dots y_\ell$, és $(uv)^{-1} = y_\ell \dots y_1 x_k \dots x_1 = v^{-1}u^{-1}$.

Tehát: $(L_1L_2)^{-1} = \{(uv)^{-1} \mid u \in L_1,\ v \in L_2\} = \{v^{-1}u^{-1} \mid u^{-1} \in L_1^{-1}, v^{-1} \in L_2^{-1}\} = L_2^{-1}L_1^{-1}.$

Megjegyzés: $(u_1 \dots u_n)^{-1} = u_n^{-1} \dots u_1^{-1}$ hasonlóan igazolható.

Következmény: $(L_1L_2 \dots L_n)^{-1} = L_n^{-1} \dots L_2^{-1}L_1^{-1}$

$(L^n)^{-1} = (L^{-1})^n$

$(L^*)^{-1} = (L^{-1})^*.$

Házi feladatok megoldása

3. feladat

x palindrom $\Leftrightarrow x^k$ palindrom ($k \geq 1$).
(x palindrom, ha $x = x^{-1}$)

Megoldás:

"$\Rightarrow$"

x palindrom $\Rightarrow x = x^{-1} \Rightarrow (x^k)^{-1} = (x^{-1})^k = x^k$.

"$\Leftarrow$"

x^k palindrom $\Rightarrow x^k = (x^k)^{-1} \Rightarrow x^k = (x^{-1})^k$.

Tehát speciálisan x^k és $(x^{-1})^k$ első $\ell(x)$ betűje megegyezik, azaz $x = x^{-1}$.

Reguláris kifejezések

A reguláris kifejezések definíciója

Reguláris kifejezések alatt az $(U \cup \{\emptyset, \varepsilon, (,), \cup, ^*\})^*$ halmaz legszűkebb olyan $\mathcal{R}$ részhalmazát, melyre:

- az $\emptyset$ és az ε szimbólum eleme $\mathcal{R}$-nek,
- minden $a \in U$-ra az a szimbólum eleme $\mathcal{R}$-nek,
- ha $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$, akkor $(R_1 \cup R_2)$, $(R_1 R_2)$ és $R_1^* \in \mathcal{R}$.

Ha hangsúlyozni akarjuk, hogy a reguláris kifejezés a T ábécé betűiből építkezik, akkor a T **feletti reguláris kifejezések** $\mathcal{R}(T)$ halmazáról beszélünk.

Megjegyzés: Gyakran használatos „$\cup$” helyett a „+” jelölés is.

Reguláris kifejezések

A reguláris kifejezések értelmezése

- $R = \emptyset$ az $L = \emptyset$ nyelvet,
- $R = \varepsilon$ az $L = \{\varepsilon\}$ nyelvet,
- $R = a$ az $L = \{a\}$ nyelvet reprezentálja.

  Ha R_1 illetve R_2 az L_1 illetve L_2 nyelvet reprezentálja, akkor
- $(R_1 \cup R_2)$ az $L_1 \cup L_2$ nyelvet,
- $(R_1 R_2)$ az $L_1 L_2$ nyelvet,
- R_1^* az L_1^* nyelvet reprezentálja.

Az R reguláris kifejezés által reprezentált nyelvet $L(R)$-rel jelöljük.

A zárójeleket akkor írjuk ki, ha szükségesek (műveletek prioritási sorrendje: *, konkatenáció, unió). $R^+ = RR^*$ és használhatjuk a természetes egész kitevőket, amivel az adott reguláris kifejezés kitevõszörös önmagával vett konkatenációját rövidítjük. (Például $(a^*b)^3 = a^*ba^*ba^*b$.)

Reguláris kifejezések

Példák

1. Feladat: Írjuk le szavakkal és/vagy formulákkal az alábbi reguláris kifejezések által meghatározott nyelveket!

a.	$0(0 \cup 1)^*1$	$\{0u1 \mid u \in \{0,1\}^*\}$
b.	$((a \cup b)^* a (a \cup b)^*)^+$	$\{uav \mid u, v \in \{a,b\}^*\}$
c.	$(\varepsilon \cup 1)^* 0^* 001(111)^*$	$\{1^n 0^{k+2} 1^{3m+1} \mid n,k,m \in \mathbb{N}\}$

2. Feladat: Alkossunk reguláris kifejezéseket a következő nyelvekhez!

a.	$\{u \in \{0,1\}^* \mid u$ legalább egy 1-est tartalmaz$\}$	$(0 \cup 1)^* 1 (0 \cup 1)^*$
b.	$\{u \in \{c,d\}^* \mid u$ második betűje c, vagy pontosan két d-t tartalmaz$\}$	$(c \cup d)c(c \cup d)^* \cup c^*dc^*dc^*$
c.	$\{a^{2n+1}b \mid n \in \mathbb{N}\}^*$	$((a^2)^*ab)^*$
d.	$\{u \in \{0,1\}^* \mid u$ páros sok 1-est tartalmaz$\}$	$(0^*10^*1)^*0^*$

Műveletek nyelvek között

Tartalmazási problémák

3. Feladat:
$L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
$L_2 = \{a^{2n+1} b \mid n \geq 0\}$

1. $\{a^n b^n a^n b | n \geq 0\} \overset{?}{\subseteq} L_1 L_2$ $\quad \not\subseteq$
2. $\{a^n b^n a^{2n+1} b | n \geq 0\} \overset{?}{\subseteq} L_1 L_2$ $\quad \subseteq$
3. $\{(a^n b^n)^n | n \geq 0\} \overset{?}{\subseteq} L_1^* = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} L_1^i$ $\quad \subseteq$
4. $\{(ab)^n | n \geq 0\} \overset{?}{\subseteq} L_2^+ = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} L_2^i$ $\quad \not\subseteq$

Műveleti tulajdonságok

Monotonitási tulajdonságok, a konkatenáció unióra való disztributívitása

1. $\{L_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\{L'_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\forall \lambda \in \Lambda :\ L_\lambda \subseteq L'_\lambda \Rightarrow \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda \subseteq \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} L'_\lambda$
2. $\Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$, $L_i \subseteq L'_i \Rightarrow L_1 L_2 \cdots L_n \subseteq L'_1 L'_2 \cdots L'_n$
3. $L \subseteq L' \Rightarrow L^* \subseteq (L')^*$
4. $(\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda) L = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda L$
5. **Nem igaz!** $L_1(L_2 \cap L_3) = L_1 L_2 \cap L_1 L_3$
   Pl. $L_1 = \{a, \varepsilon\}, L_2 = \{a, a^2\}, L_3 = \{a^3, a^4\}$

További műveletek

Prefix, suffix:

4. Feladat: $L = L((a^2)^* ab)$,
 a. $\mathrm{Pre}(L) = ?$ $\quad a^* \cup (a^2)^* ab$
 b. $\mathrm{Suf}(L) = ?$ $\quad a^* b \cup \varepsilon$

***Homomorfizmus**:*
Konkatenációtartó szót szóba vivő leképezés. (Ilyenkor elég a betűk képét megadni.)

5. Feladat: $L = \{(ab)^n b^{2n+1} \mid n \geq 0\}$, $h(a) = xyy, h(b) = yy$
$h(L) = \{(xy^4)^n y^{4n+2} \mid n \geq 0\}$

További műveletek (jegyzetben):

Helyettesítés, párhuzamos kompozíció

Példák formális nyelvek megadására

- Felsorolással:
$L_1 = \{ab, ba, abba, ca\}$
- Formulával:
$L_2 = \{u \mid u \in \{a, b\}^* \wedge \ell_a(u) = \ell_b(u)\}$
- Reguláris kifejezéssel:
$L_3 = L((ab \cup (ba)^*)^*)$
- Felsoroló algoritmussal:
$L_4 = T^*$
Lexikografikusan felsoroljuk T^* elemeit. Például ha $T = \{0, 1\}$, akkor $T^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \ldots\}$
- Generatív nyelvtanokkal (grammatikákkal) (bővebben köv. órán):

Pl. volt BNF:
$\langle$azonosító$\rangle$ ::=$\langle$betű$\rangle\langle$az.vég$\rangle$
$\langle$betű$\rangle$ ::=$a \mid b \mid c \mid \cdots \mid z$
$\langle$az.vég$\rangle$ ::= $\mid \{\langle$betű$\rangle \mid \langle$sz.jegy$\rangle\}\langle$az.vég$\rangle$
$\langle$sz.jegy$\rangle$ ::=$0 \mid 1 \mid \cdots \mid 9$

Nyelvtan:
$S \to AC$
$A \to a \mid b \mid c \mid \cdots \mid z$
$C \to AC \mid BC \mid \varepsilon$
$B \to 0 \mid 1 \mid \cdots \mid 9$

$L_5 = \{$levezethető terminális sorozatok (szavak)$\}$

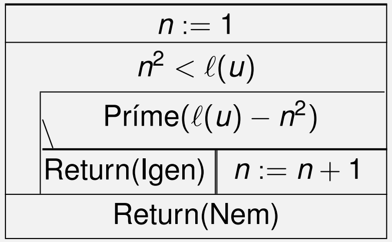
- Matematikai gépek, automaták segítségével (félév második felében)

Példák formális nyelvek megadására

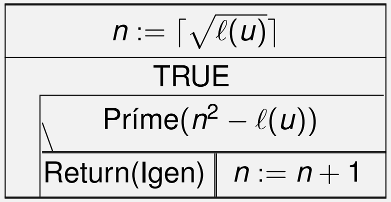
Rekurzív és parciálisan rekurzív nyelvek

Milyen $T = \{a\}$ ábécé feletti nyelvet írnak le az alábbi algoritmusok? Melyik rekurzív illetve parciálisan rekurzív?

A1(u)



A2(u)



A1(u) által generált nyelv:
$L_5 = \{a^j \mid j = n^2 + p, p \text{ prím}\}$

Rekuzív nyelv

A2(u) által generált nyelv:
$L_6 = \{a^j \mid j = n^2 - p, p \text{ prím}\}$

Parciálisan rekurzív nyelv

Házi feladat

1. $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\},\ L_2 = \{ab\}.\quad L_2^* \overset{?}{\subseteq} L_1^*.$
2. $L^* = L^* L^*.$
3. $(L^*)^* = L^*.$
4. $(L_1 \cup L_2)^* = (L_1^* L_2^*)^*.$
5. Igaz-e minden L nyelvre és h homomorfizmusra?
   $h(L^{-1}) \overset{?}{=} h(L)^{-1}.$
6. Adjunk reguláris kifejezést a legfeljebb 3 darab a-t tartalmazó $\{a, b\}^*$-beli szavakra!