Automaták analízise, szintézise és minimalizálása

Formális nyelvek, 11. gyakorlat

Célja: Az automaták analízisének és szintézisének gyakorlása, automata minimalizáció

Fogalmak: Analízis és szintézis, nyelvi egyenlet és egyenletrendszer és megoldása, kiterjesztett automaták, lebontási stratégiák, epszilon-átmenetes nem-determinisztikus automata, epszilon-mentesítés, összefüggővé alakítás, állapotok ekvivalenciája, automata redukció, minimális automata

Feladatok jellege: Egyszerű nyelvi egyenlet, illetve kétváltozós egyenletrendszer megoldása (unicitás ellenőrzése), 3 állapotú automatára az egyenletrendszer felírása és megoldása. 3-4 műveletet tartalmazó reguláris kifejezéshez a kiterjesztett automata alapján epszilon-átmenetes VNDA készítése, majd abból VNDA előállítása. Konkrét VDA összefüggővé alakítása és redukálása.

2008/09 I. félév

Házi feladatok megoldása

1. feladat

Készítsünk VDA-t a következő nyelvtanhoz!

$S \to acA \mid bB \mid \varepsilon$ $\quad B \to S \mid abB \mid a$

$A \to B \mid b \mid C$ $\quad C \to acbC \mid B$

Megoldás: 3NF

$$S \to aK_1 \mid bB \mid \varepsilon$$
$$A \to bF \mid aK_2 \mid aF \mid aK_4 \mid aK_1 \mid bB \mid \varepsilon$$
$$B \to aK_2 \mid aF \mid aK_1 \mid bB \mid \varepsilon$$
$$C \to aK_2 \mid aF \mid aK_4 \mid aK_1 \mid bB \mid \varepsilon$$
$$K_1 \to cA$$
$$K_2 \to bB$$
$$K_3 \to bC$$
$$K_4 \to cK_3$$
$$F \to \varepsilon$$

Házi feladatok megoldása

1. feladat

Készítsünk VDA-t a következő nyelvtanhoz!

$S \to acA \mid bB \mid \varepsilon$ $\quad B \to S \mid abB \mid a$

$A \to B \mid b \mid C$ $\quad C \to acbC \mid B$

Megoldás: VDA

		a	b	c
$\leftrightarrows$	$\{S\}$	$\{K_1\}$	$\{B\}$	$\{\}$
	$\{K_1\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{A\}$
$\leftarrow$	$\{B\}$	$\{K_1, K_2, F\}$	$\{B\}$	$\{\}$
	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\leftarrow$	$\{A\}$	$\{K_1, K_2, K_4, F\}$	$\{B, F\}$	$\{\}$
$\leftarrow$	$\{K_1, K_2, F\}$	$\{\}$	$\{B\}$	$\{A\}$
$\leftarrow$	$\{K_1, K_2, K_4, F\}$	$\{\}$	$\{B\}$	$\{A, K_3\}$
$\leftarrow$	$\{B, F\}$	$\{K_1, K_2, F\}$	$\{B\}$	$\{\}$
$\leftarrow$	$\{A, K_3\}$	$\{K_1, K_2, K_4, F\}$	$\{B, C, F\}$	$\{\}$
$\leftarrow$	$\{B, C, F\}$	$\{K_1, K_2, K_4, F\}$	$\{B\}$	$\{\}$

Házi feladatok megoldása

2. feladat

Készítsük el az alábbi VDA minimális automatáját!

Megoldás:

		a	b
$\rightarrow$	1	7	6
	2	1	2
	3	9	1
$\leftarrow$	4	1	4
$\leftarrow$	5	6	4
$\leftarrow$	6	6	2
	7	9	8
$\leftarrow$	8	8	2
	9	1	8

Összefüggővé alakítás:

$H = \{1, 7, 6, 9, 8, 2\}$. Elhagyjuk 3,4,5-öt.

Redukció:

$\overset{0}{\sim}$: $\{1, 2, 7, 9\}$, $\{6, 8\}$

$\overset{1}{\sim}$: $\{1, 7, 9\}$, $\{2\}$, $\{6, 8\}$

$\overset{2}{\sim} = \overset{1}{\sim} = \sim$

A redukált automata:

		a	b
$\rightarrow$	{1,7,9}	{1,7,9}	{6,8}
	{2}	{1,7,9}	{2}
$\leftarrow$	{6,8}	{6,8}	{2}

Házi feladatok megoldása

3. feladat

Határozzuk meg a palindromák nyelvének ($L = \{u \in T^* \mid u = u^{-1}\}$) maradéknyelveit! ($T$ tetszőleges.)

Megoldás:
Legyen L a palindromák nyelve.

Tetszőleges $u \in T^*$-ra $L_u = X_u \cup Y_u$, ahol
$X_u = \{v \in T^* \mid v = wu^{-1}, w \in L\}$,
$Y_u = \{v \in T^* \mid u = v^{-1}w, w \in L\}$.
Legyen ugyanis $v \in L_u$.
Ha $\ell(v) \geq \ell(u)$, akkor mivel $uv \in L$, a palindroma tulajdonság miatt $v \in X_u$.
Ha $\ell(v) < \ell(u)$, akkor mivel $uv \in L$, a palindroma tulajdonság miatt $v \in Y_u$.

Házi feladatok megoldása

4. feladat

Bizonyítsuk be, hogy a palindromák nyelve nem $\mathcal{L}_3$-beli a Myhill-Nerode tétel illetve a Kis Bar-Hillel lemma segítségével! ($|T| \geq 2$)

Megoldás (Myhill-Nerode): Feltehető, hogy $a, b \in T$.
$ba^\ell \in L_{a^k} \Leftrightarrow k = \ell$. Ezek tehát minden k-ra különböznek, így végtelen sok különböző maradéknyelv van.

Megoldás (Kis Bar-Hillel lemma): Legyen L_{Pal} a palindromák nyelve.
Feltehető, hogy $a, b \in T(L_{\text{Pal}})$. Tekintsük a következő szavakat $u_n := a^n ba^n, n \in \mathbb{N}$, ekkor $u_n \in L_{\text{Pal}}$, $\ell(u_n) \geq n$.
Tekintsük u_n n hosszúságú prefixének egy tetszőleges nemüres y részszavát, tehát $y = a^d$, ahol $0 < d \leq n$. y beiterálásával a következő szavakat kapjuk: $a^{n-d-k}(a^d)^i a^k ba^n = a^{n+(i-1)d} ba^n$, $(i \in \mathbb{N})$. De ezek bármely y részszó esetén $i = 1$ kivételével nem palindromák.
Tehát u_n-nek nem létezik nemüres beiterálható részszava az n hosszú prefixében. Mivel n tetszőleges volt, ezért nem létezik a Kis Bar-Hillel lemma nyelvfüggő konstansa, tehát $L_{\text{Pal}} \notin \mathcal{L}_3$.

Nyelvi egyenletek megoldása

1. feladat:

Oldjuk meg az $a^*bX \cup bc^* = X$ egyenletet! Egyértelmű-e a megoldás?

Megoldás:

$(a^*b)^*bc^*$. A megoldás egyértelmű, mert $\varepsilon \notin L(a^*b)$.

Általában, ha R_1 és R_2 reguláris kifejezések és $\varepsilon \notin L(R_1)$, akkor az $R_1X \cup R_2 = X$ egyenlet egyértelmű megoldása $X = R_1^*R_2$.

Nyelvi egyenletrendszerek megoldása

2. feladat:

Oldjuk meg az $\begin{array}{l} a^*bX \cup b^*aY \cup ba = X \\ b^*aX \cup a^*bY \cup ab = Y \end{array}$ egyenletrendszert!
Egyértelmű-e a megoldás?

Megoldás:

Az első egyenletből kifejezzük X-et:

$X = (a^*b)^*(ba \cup b^*aY)$.

Behelyettesítve a második egyenletbe:

$(b^*a(a^*b)^*b^*a \cup a^*b)Y \cup (b^*a(a^*b)^*ba \cup ab) = Y$, amiből

$Y = (b^*a(a^*b)^*b^*a \cup a^*b)^*(b^*a(a^*b)^*ba \cup ab)$.

Hasonlóan: $X = (b^*a(a^*b)^*b^*a \cup a^*b)^*(b^*a(a^*b)^*ab \cup ba)$.

A megoldás egyértelmű.

Automatához reguláris kifejezés (Automataanalízis)

VDA által elfogadott nyelv meghatározása az állapotok maradéknyelveire felírt nyelvi egyenletrendszer segítségével

3. feladat:
(már volt, 9. gyak. 1.HF.)

	a	b	c
$\rightarrow q_0$	q_1	q_2	q_3
q_1	q_4	q_2	q_4
q_2	q_0	q_4	q_3
$\leftarrow q_3$	q_4	q_3	q_4
q_4	q_4	q_4	q_4

Megoldás: Az egyenletrendszer:

$(X := L(\mathcal{A}, q_0), Y := L(\mathcal{A}, q_1),$
$Z := L(\mathcal{A}, q_2), V := L(\mathcal{A}, q_3),$
$L(\mathcal{A}, q_4) = \emptyset)$

$X = aY \cup bZ \cup cV$
$Y = bZ$
$Z = aX \cup cV$
$V = bV \cup \varepsilon$ $\qquad X = ?$

$V = b^*$

$X = ab(aX \cup cb^*) \cup b(aX \cup cb^*) \cup cb^*,$

$X = (aba \cup ba)X \cup (abc \cup bc \cup c)b^*,$

$X = (aba \cup ba)^*(abc \cup bc \cup c)b^*.$

Véges determinisztikus automaták általánosításai I.

PDA, NDA

Parciális determinisztikus automata (PDA)

Nem feltétlenül mindenütt definiált VDA. $\mathcal{A} = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$. $\delta(q, t)$ (és így $\delta(q, u)$ is) nem feltétlenül értelmezett minden párra. Egy PDA elfogad egy u szót, ha $\delta(q_0, u)$ értelmezett és $\delta(q_0, u) \in F$.

Véges, nemdeterminisztikus automata (NDA)

Adott állapotból, adott betűt olvasva több állapotba is kerülhet az automata. $\mathcal{A} = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$. Most tehát $\delta : Q \times T \longrightarrow 2^Q$ állapotok egy halmazát rendeli egy állapot-betű párhoz.
0. $\delta(q, \varepsilon) = q$,
1. $\delta(q, u)$ már értelmezett, ha $\ell(u) = 1$,
2. $\delta(q, vt) = \bigcup_{q' \in \delta(q,v)} \delta(q', t) \quad (t \in T, v \in T^+)$.

Az NDA elfogad egy u szót, ha $\delta(q_0, u) \cap F \neq \emptyset$.

Véges determinisztikus automaták általánosításai II.

εNDA

Véges, ε-átmenetes, nemdeterminisztikus automata (εNDA)

Továbbra is nemdeterminisztikus, azaz adott állapotból, adott betűt olvasva több állapotba is kerülhet az automata, de most megengedjük az ε-átmeneteket is, ekkor az olvasófej nem mozdul, az automata viszont más állapotba kerülhet. $\mathcal{A} = \langle Q, T, \delta, q_0, F\rangle$. Most tehát $\delta : Q \times (T \cup \{\varepsilon\}) \longrightarrow 2^Q$ állapotok egy halmazát rendeli egy állapot-betű vagy állapot-epszilon párhoz.
$\Delta(q, u)$ értelmezése: Legyen $u = u_1 \cdots u_n$ az u szónak egy olyan felbontása, melyre $\ell(u_i) \leq 1 \quad (1 \leq i \leq n)$.
$\delta(q, u_1 \cdots u_n)$-t az eddigiekhez hasonlóan rekurzív definícióval értelmezzük, azaz
1. $\delta(q, u)$ már meghatározott, ha $\ell(u) \leq 1$,
2. $\delta(q, u_1 \cdots u_{n-1} u_n)) = \bigcup_{q' \in \delta(q, u_1 \cdots u_{n-1})} \delta(q', u_n)$

$\Delta(q, u) = \bigcup\{\delta(q, u_1 \cdots u_n) \mid u = u_1 \cdots u_n,\ \ell(u_i) \leq 1\ (1 \leq i \leq n), n \in \mathbb{N}\}$.
Az εNDA elfogad egy u szót, ha $\Delta(q_0, u) \cap F \neq \emptyset$.

Véges determinisztikus automaták általánosításai III.

Szóátmenetes NDA, reguláris kifejezés átmenetes NDA

Szóátmenetes, nemdeterminisztikus automata

$\mathcal{A} = \langle Q, T, \delta : Q \times T^* \rightarrow 2^Q, q_0, F\rangle$
Ugyanúgy, mint az előbb, csak itt most nincs a felbontás részszavaira az $\ell(u_i) \leq 1$ megkötés.

Reguláris kifejezés átmenetes, nemdeterminisztikus automata

$\mathcal{A} = \langle Q, T, \delta : Q \times \mathcal{R}(T) \rightarrow 2^Q, q_0, F\rangle$
$\Delta(q, u)$ értelmezése: $u = u_1 \cdots u_n$ az u szó tetszőleges felbontása.
$\delta(q, u_1 \cdots u_n)$ rekurzív definíciója:
1. $\delta(q, u_1) = \bigcup\{\delta(q, R) \mid u_1 \in L(R)\}$,
2. $\delta(q, u_1 \cdots u_{n-1} u_n) = \bigcup\{\delta(q, R) \mid q \in \delta(q, u_1 \cdots u_{n-1}), u_n \in L(R)\}$.

$\Delta(q, u) = \bigcup\{\delta(q, u_1 \cdots u_n) \mid u = u_1 \cdots u_n\}$. A reg. kif. átmenetes, nemdet. automata elfogad egy u szót, ha $\Delta(q_0, u) \cap F \neq \emptyset$.

Ezen általánosított automatákkal is az $\mathcal{L}_3$-beli nyelveket fogadhatjuk el.

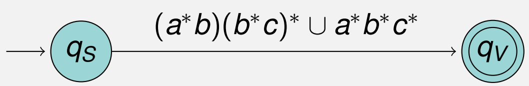
Reguláris kifejezéshez VDA készítése (Automataszintézis)

εNDA készítésére reguláris kifejezéshez

4. feladat: Legyen $R = (a^*b)(b^*c)^* \cup a^*b^*c^*$. Készítsünk olyan $\mathcal{A}$ VDA-t, hogy $L(\mathcal{A}) = L(R)$!

Megoldás:

0. lépés: Adott R_0 reguláris kifejezéshez kiindulunk egy $\mathcal{A} = \langle\{q_S, q_V\}, T, \delta, q_S, \{q_V\}\rangle$ általánosított automatából, ahol $\delta(q_S, R_0) = \{q_V\}$ az egyetlen átmenet.



Reguláris kifejezéshez VDA készítése (Automataszintézis)

εNDA készítésére reguláris kifejezéshez

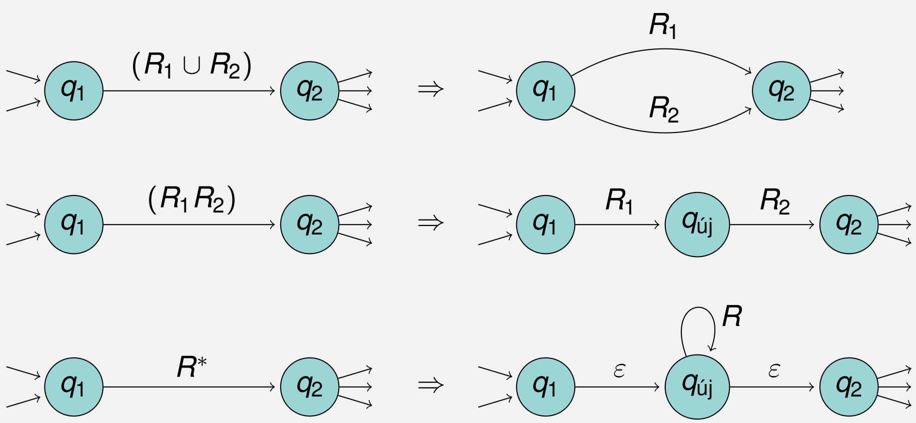
1. lépés: R_0 felépítése szerint, véges sok lépésben lebontjuk az automatát εNDA-vá. Legyen $\mathcal{A} = \langle Q, T, \delta, q_S, \{q_V\}\rangle$ az aktuális és $\mathcal{A}' = \langle Q', T, \delta', q_S, \{q_V\}\rangle$ a $q_2 \in \delta(q_1, R)$ átmenet lebontásával kapott új automata. Azaz legyen $\delta'(q_1, R) = \delta(q_1, R) \setminus \{q_2\}$. Továbbá,

1. ha $R = (R_1 \cup R_2)$, akkor legyen $Q' = Q$ és $\delta'(q_1, R_1) = \delta(q_1, R_1) \cup \{q_2\}$, $\delta'(q_1, R_2) = \delta(q_1, R_2) \cup \{q_2\}$.
2. ha $R = (R_1R_2)$, akkor legyen $Q' = Q \cup \{q_{új}\}$ és $\delta'(q_1, R_1) = \delta(q_1, R_1) \cup \{q_{új}\}$, $\delta'(q_{új}, R_2) = \{q_2\}$.
3. ha $R = R_1^*$, akkor legyen $Q' = Q \cup \{q_{új}\}$ és $\delta'(q_1, \varepsilon) = \delta(q_1, \varepsilon) \cup \{q_{új}\}$, $\delta'(q_{új}, R_1) = \{q_{új}\}$, $\delta'(q_{új}, \varepsilon) = \{q_{új}\}$.

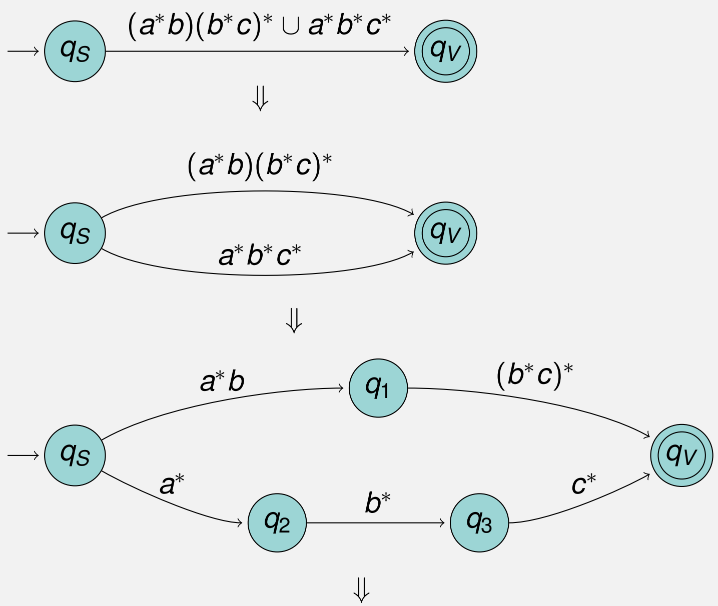
Ekkor $L(\mathcal{A}') = L(\mathcal{A})$. Végül, ha már minden reguláris kifejezés $T \cup \{\varepsilon\}$-nak eleme, akkor egy εNDA-t kapunk.

Reguláris kifejezéshez VDA készítése (Automataszintézis)

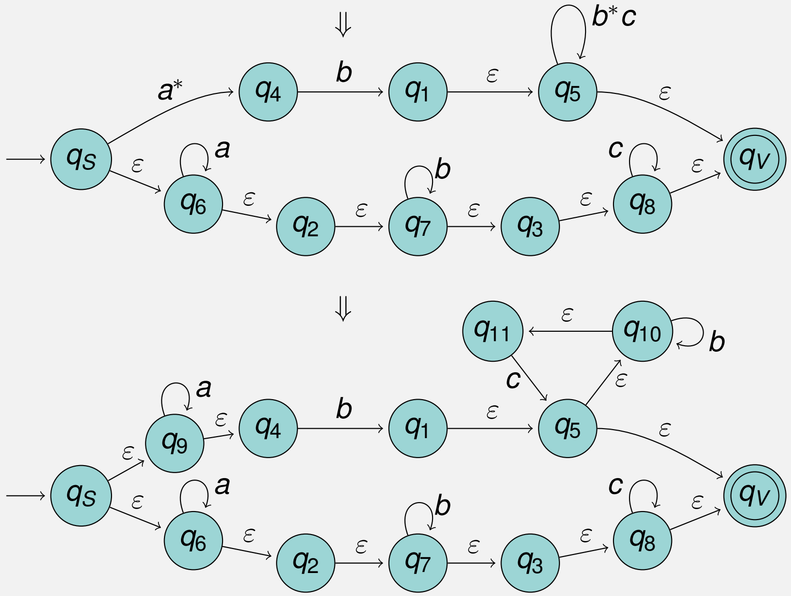
εNDA-vá alakítás lépései



Reguláris kifejezéshez VDA készítése (Automataszintézis)



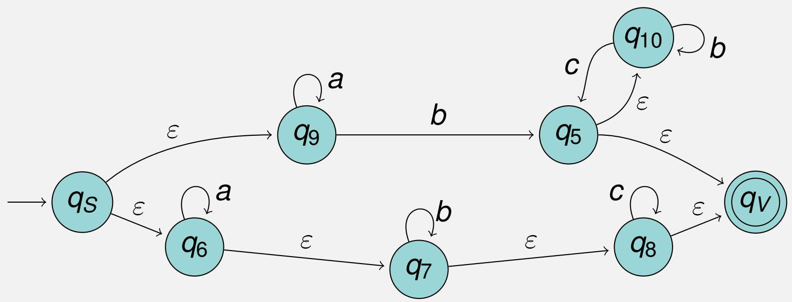
Reguláris kifejezéshez VDA készítése (Automataszintézis)



Reguláris kifejezéshez VDA készítése (Automataszintézis)

Egyszerűsítési lehetőség: Ha $\delta(q,t)=\{q'\}$ és $\delta(q',t')=\{q''\}$ ($t,t' \in T \cup \{\varepsilon\}$, legalább az egyikük ε) az egyetlen átmenet q'-be illetve q'-ből, akkor q' elhagyható, és legyen $\delta(q,tt')=\{q''\}$.

Például adott esetben $q_1, q_4, q_2, q_3, q_{11}$ elhagyható.



Reguláris kifejezéshez VDA készítése (Automataszintézis)

2. lépés: εNDA-ból NDA

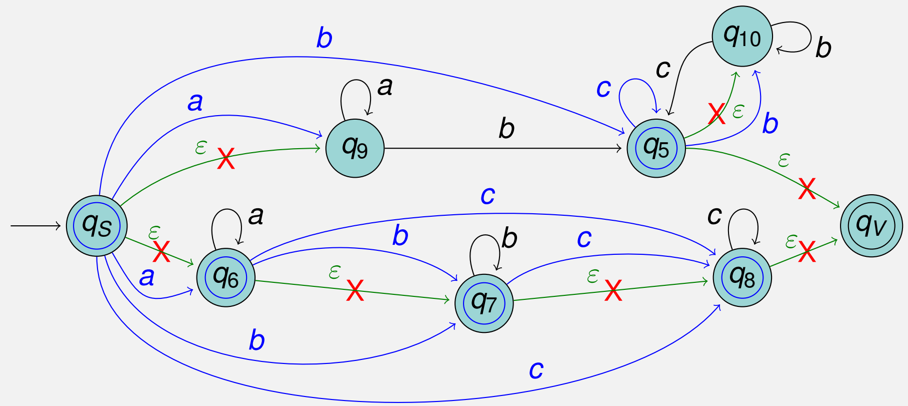
Adott $\mathcal{A}$ εNDA-val ekvivalens $\mathcal{A}'$ NDA készítése:

$\mathcal{A}=\langle Q,T,\delta,q_0,F\rangle$, $\mathcal{A}'=\langle Q,T,\delta',q_0,F'\rangle$, tehát ugyanazok az állapotaik és a kezdõállapotuk. Legyen $q''\in\delta'(q',t)$, akkor és csak akkor ha létezik $q\in Q$, hogy eljuthatunk $\mathcal{A}$-ban q'-ből q-ba ε-átmenetekkel és $q''\in\delta(q,t)$. (Azaz létezik $q\in\Delta(q',\varepsilon)$ melyre $q''\in\delta(q,t)$.)

Megjegyzés: A már jól ismert rekurzív eljárással meghatározható azon állapotok $H(q)$ halmaza ahova egy adott q állapotból ε-átmenetekkel eljuthatunk. ($H_i(q)$ ahova i lépésben eljuthatunk, a $H_0(q), H_1(q), \ldots$ sorozat stabilizálódik.)

$\mathcal{A}'$-ben akkor lesz egy q állapot elfogadó, ha $\mathcal{A}$-ban q-ból eljuthatunk ε-átmenetekkel elfogadó állapotba. ($q\in F' \Leftrightarrow \Delta(q,\varepsilon)\cap F\neq\emptyset$)

Reguláris kifejezéshez VDA készítése (Automataszintézis)



Reguláris kifejezéshez VDA készítése (Automataszintézis)

3. lépés: NDA-hoz VDA

$\mathcal{A} = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ NDA-hoz $\mathcal{A}' = \langle Q', T, \delta', q_0', F' \rangle$ VDA

Ötlet: $\mathcal{A}'$ végigköveti $\mathcal{A}$ lehetséges működéseit! A determinisztikussá tett automata állapotainak halmaza a nemdeterminisztikus automata állapothalmazának hatványhalmaza, azaz $Q' := 2^Q$

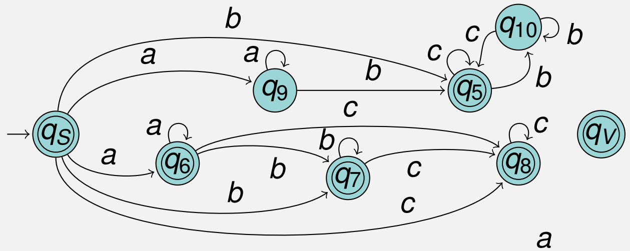
A $\{q_1, \dots q_s\}$ állapothoz és a t betűhöz a VDA állapotátmenet-függvénye a nemdeterminisztikus automata állapotátmenet-függvényének a q_i állapotokhoz és t betűhöz tartozó képeinek (azaz: állapotok halmazainak) unióját rendelje, azaz:

$$\delta'(\{q_1, \dots q_s\}, t) := \bigcup_{i=1}^{s} \delta(q_i, t).$$

A kezdőállapot $q_0' := \{q_0\}$, az elfogadó állapotok F' halmaza, pedig azon állapotokból álljon, melyek tartalmaznak F-beli állapotot.

Megjegyzés: A gyakorlatban, csak a kezdőállapotból elérhető állapotokra határozzuk meg az átmeneteket.

Reguláris kifejezéshez VDA készítése (Automataszintézis)



		a	b	c
$\leftrightarrows$	$\{q_S\}$	$\{q_6, q_9\}$	$\{q_5, q_7\}$	$\{q_8\}$
$\leftarrow$	$\{q_6, q_9\}$	$\{q_6, q_9\}$	$\{q_5, q_7\}$	$\{q_8\}$
$\leftarrow$	$\{q_5, q_7\}$	$\{\}$	$\{q_7, q_{10}\}$	$\{q_5, q_8\}$
$\leftarrow$	$\{q_8\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{q_8\}$
	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\leftarrow$	$\{q_7, q_{10}\}$	$\{\}$	$\{q_7, q_{10}\}$	$\{q_5, q_8\}$
$\leftarrow$	$\{q_5, q_8\}$	$\{\}$	$\{q_{10}\}$	$\{q_5, q_8\}$
	$\{q_{10}\}$	$\{\}$	$\{q_{10}\}$	$\{q_5\}$
$\leftarrow$	$\{q_5\}$	$\{\}$	$\{q_{10}\}$	$\{q_5\}$

Házi feladat

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!
   $a^*b^*X \cup (ba)^*bY \cup b^* = X$
   $ba^*X \cup bY \cup a^*b^* = Y$
2. Határozzuk meg *reguláris kifejezéssel* az alábbi véges determinisztikus automata által elfogadott nyelvet!

		a	b
$\rightarrow$	q_0	q_1	q_2
$\leftarrow$	q_1	q_3	q_4
	q_2	q_3	q_4
$\leftarrow$	q_3	q_0	q_3
	q_4	q_4	q_4

3. Készítsünk VDA-t a következő reguláris kifejezéshez!
   $(a^*b)^*c \cup ab^*c^* \cup a^*$.