

Automaták analízise, szintézise és minimalizálása

Formális nyelvek, 11. gyakorlat

Célja: Az automaták analízisének és szintézisének gyakorlása, automata minimalizáció

Fogalmak: Analízis és szintézis, nyelvi egyenlet és egyenletrendszer és megoldása, kiterjesztett automaták, lebontási stratégiák, epsilon-átmenetes nem-determinisztikus automata, epsilon-mentesítés, összefüggővé alakítás, állapotok ekvivalenciája, automata redukció, minimális automata

Feladatok jellege: Egyszerű nyelvi egyenlet, illetve kétváltozós egyenletrendszer megoldása (unicitás ellenőrzése), 3 állapotú automatára az egyenletrendszer felírása és megoldása. 3-4 műveletet tartalmazó reguláris kifejezéshez a kiterjesztett automata alapján epsilon-átmenetes VNDA készítése, majd abból VNDA előállítás. Konkrét VDA összefüggővé alakítása és redukálása.

2008/09 I. félév

Házi feladatok megoldása

1. feladat

Készítsünk VDA-t a következő nyelvtanhoz!

$$S \rightarrow acA \mid bB \mid \varepsilon$$

$$A \rightarrow B \mid b \mid C$$

$$B \rightarrow S \mid abB \mid a$$

$$C \rightarrow acbC \mid B$$

Megoldás: 3NF

$$S \rightarrow aK_1 \mid bB \mid \varepsilon$$

$$A \rightarrow bF \mid aK_2 \mid aF \mid aK_4 \mid aK_1 \mid bB \mid \varepsilon$$

$$B \rightarrow aK_2 \mid aF \mid aK_1 \mid bB \mid \varepsilon$$

$$C \rightarrow aK_2 \mid aF \mid aK_4 \mid aK_1 \mid bB \mid \varepsilon$$

$$K_1 \rightarrow cA$$

$$K_2 \rightarrow bB$$

$$K_3 \rightarrow bC$$

$$K_4 \rightarrow cK_3$$

$$F \rightarrow \varepsilon$$

Házi feladatok megoldása

1. feladat

Készítsünk VDA-t a következő nyelvtanhoz!

$$S \rightarrow acA \mid bB \mid \varepsilon$$

$$A \rightarrow B \mid b \mid C$$

$$B \rightarrow S \mid abB \mid a$$

$$C \rightarrow acbC \mid B$$

Megoldás: VDA

	a	b	c
\Rightarrow {S}	{K ₁ }	{B}	{}
{K ₁ }	{}	{}	{A}
\leftarrow {B}	{K ₁ , K ₂ , F}	{B}	{}
{}	{}	{}	{}
\leftarrow {A}	{K ₁ , K ₂ , K ₄ , F}	{B, F}	{}
\leftarrow {K ₁ , K ₂ , F}	{}	{B}	{A}
\leftarrow {K ₁ , K ₂ , K ₄ , F}	{}	{B}	{A, K ₃ }
\leftarrow {B, F}	{K ₁ , K ₂ , F}	{B}	{}
\leftarrow {A, K ₃ }	{K ₁ , K ₂ , K ₄ , F}	{B, C, F}	{}
\leftarrow {B, C, F}	{K ₁ , K ₂ , K ₄ , F}	{B}	{}

Házi feladatok megoldása

2. feladat

Készítsük el az alábbi VDA minimális automatáját!

Megoldás:

	a	b
\rightarrow 1	7	6
2	1	2
3	9	1
\leftarrow 4	1	4
\leftarrow 5	6	4
\leftarrow 6	6	2
7	9	8
\leftarrow 8	8	2
9	1	8

Összefüggővé alakítás:

$H = \{1, 7, 6, 9, 8, 2\}$. Elhagyjuk 3,4,5-öt.

Redukció:

$$\overset{\circ}{\sim}: \{1, 2, 7, 9\}, \{6, 8\}$$

$$\underset{\sim}{\sim}: \{1, 7, 9\}, \{2\}, \{6, 8\}$$

$$\underset{\sim}{\sim} = \underset{\sim}{\sim} = \sim$$

A redukált automata:

	a	b
\rightarrow {1,7,9}	{1,7,9}	{6,8}
{2}	{1,7,9}	{2}
\leftarrow {6,8}	{6,8}	{2}

Házi feladatok megoldása

3. feladat

Határozzuk meg a palindromák nyelvének ($L = \{u \in T^* \mid u = u^{-1}\}$) maradéknyelveit! (T tetszőleges.)

Megoldás:

Legyen L a palindromák nyelve.

Tetszőleges $u \in T^*$ -ra $L_u = X_u \cup Y_u$, ahol

$$X_u = \{v \in T^* \mid v = wu^{-1}, w \in L\},$$

$$Y_u = \{v \in T^* \mid u = v^{-1}w, w \in L\}.$$

Legyen ugyanis $v \in L_u$.

Ha $\ell(v) \geq \ell(u)$, akkor mivel $uv \in L$, a palindroma tulajdonság miatt $v \in X_u$.

Ha $\ell(v) < \ell(u)$, akkor mivel $uv \in L$, a palindroma tulajdonság miatt $v \in Y_u$.

Házi feladatok megoldása

4. feladat

Bizonyítsuk be, hogy a palindromák nyelve nem \mathcal{L}_3 -beli a Myhill-Nerode tétel illetve a Kis Bar-Hillel lemma segítségével! ($|T| \geq 2$)

Megoldás (Myhill-Nerode): Feltehető, hogy $a, b \in T$.

$ba^k \in L_{a^k} \Leftrightarrow k = \ell$. Ezek tehát minden k -ra különböznek, így végtelen sok különböző maradéknyelv van.

Megoldás (Kis Bar-Hillel lemma): Legyen L_{Pal} a palindromák nyelve.

Feltehető, hogy $a, b \in T(L_{\text{Pal}})$. Tekintsük a következő szavakat

$$u_n := a^n b a^n, n \in \mathbb{N}, \text{ ekkor } u_n \in L_{\text{Pal}}, \ell(u_n) \geq n.$$

Tekintsük u_n n hosszúságú prefixének egy tetszőleges nemüres y részszavát, tehát $y = a^d$, ahol $0 < d \leq n$. y beiterálásával a következő szavakat kapjuk: $a^{n-d-k} (a^d)^i a^k b a^n = a^{n+(i-1)d} b a^n$, ($i \in \mathbb{N}$). De ezek bármely y részszó esetén $i = 1$ kivételével nem palindromák.

Tehát u_n -nek nem létezik nemüres beiterálható részszava az n hosszú prefixében. Mivel n tetszőleges volt, ezért nem létezik a Kis Bar-Hillel lemma nyelvfüggő konstansa, tehát $L_{\text{Pal}} \notin \mathcal{L}_3$.

Nyelvi egyenletek megoldása

1. feladat:

Oldjuk meg az $a^* b X \cup b c^* = X$ egyenletet! Egyértelmű-e a megoldás?

Megoldás:

$(a^* b)^* b c^*$. A megoldás egyértelmű, mert $\varepsilon \notin L(a^* b)$.

Általában, ha R_1 és R_2 reguláris kifejezések és $\varepsilon \notin L(R_1)$, akkor az $R_1 X \cup R_2 = X$ egyenlet egyértelmű megoldása $X = R_1^* R_2$.

Nyelvi egyenletrendszerek megoldása

2. feladat:

Oldjuk meg az $a^* b X \cup b^* a Y \cup b a = X$
 $b^* a X \cup a^* b Y \cup a b = Y$ egyenletrendszert!
Egyértelmű-e a megoldás?

Megoldás:

Az első egyenletből kifejezzük X -et:

$$X = (a^* b)^* (b a \cup b^* a Y).$$

Behelyettesítve a második egyenletbe:

$$(b^* a (a^* b)^* b^* a \cup a^* b) Y \cup (b^* a (a^* b)^* b a \cup a b) = Y, \text{ amiből}$$

$$Y = (b^* a (a^* b)^* b^* a \cup a^* b)^* (b^* a (a^* b)^* b a \cup a b).$$

$$\text{Hasonlóan: } X = (b^* a (a^* b)^* b^* a \cup a^* b)^* (b^* a (a^* b)^* a b \cup b a).$$

A megoldás egyértelmű.

Automatához reguláris kifejezés (Automataanalízis)

VDA által elfogadott nyelv meghatározása az állapotok maradéknyelveire felírt nyelvi egyenletrendszer segítségével

3. feladat:
(már volt, 9. gyak. 1.HF.)

	a	b	c
→ q ₀	q ₁	q ₂	q ₃
q ₁	q ₄	q ₂	q ₄
q ₂	q ₀	q ₄	q ₃
← q ₃	q ₄	q ₃	q ₄
q ₄	q ₄	q ₄	q ₄

Megoldás: Az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} X &:= L(\mathcal{A}, q_0), Y := L(\mathcal{A}, q_1), \\ Z &:= L(\mathcal{A}, q_2), V := L(\mathcal{A}, q_3), \\ L(\mathcal{A}, q_4) &= \emptyset \end{aligned}$$

$$X = aY \cup bZ \cup cV$$

$$Y = bZ$$

$$Z = aX \cup cV$$

$$V = bV \cup \varepsilon \quad X = ?$$

$$V = b^*$$

$$X = ab(aX \cup cb^*) \cup b(aX \cup cb^*) \cup cb^*,$$

$$X = (aba \cup ba)X \cup (abc \cup bc \cup c)b^*,$$

$$X = (aba \cup ba)^*(abc \cup bc \cup c)b^*.$$

Véges determinisztikus automaták általánosításai I.

PDA, NDA

Parciális determinisztikus automata (PDA)

Nem feltétlenül mindenütt definiált VDA. $\mathcal{A} = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$. $\delta(q, t)$ (és így $\delta(q, u)$ is) nem feltétlenül értelmezett minden párra. Egy PDA elfogad egy u szót, ha $\delta(q_0, u)$ értelmezett és $\delta(q_0, u) \in F$.

Véges, nondeterminisztikus automata (NDA)

Adott állapotból, adott betűt olvasva több állapotba is kerülhet az automata. $\mathcal{A} = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$. Most tehát $\delta : Q \times T \rightarrow 2^Q$ állapotok egy halmazát rendeli egy állapot-betű párhoz.

$$0. \delta(q, \varepsilon) = q,$$

$$1. \delta(q, u) \text{ már értelmezett, ha } \ell(u) = 1,$$

$$2. \delta(q, vt) = \bigcup_{q' \in \delta(q, v)} \delta(q', t) \quad (t \in T, v \in T^+).$$

Az NDA elfogad egy u szót, ha $\delta(q_0, u) \cap F \neq \emptyset$.

Véges determinisztikus automaták általánosításai II.

ε NDA

Véges, ε -átmenetes, nondeterminisztikus automata (ε NDA)

Továbbra is nondeterminisztikus, azaz adott állapotból, adott betűt olvasva több állapotba is kerülhet az automata, de most megengedjük az ε -átmeneteket is, ekkor az olvasófej nem mozdul, az automata viszont más állapotba kerülhet. $\mathcal{A} = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$. Most tehát $\delta : Q \times (T \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^Q$ állapotok egy halmazát rendeli egy állapot-betű vagy állapot-epszilon párhoz.

$\Delta(q, u)$ értelmezése: Legyen $u = u_1 \cdots u_n$ az u szónak egy olyan felbontása, melyre $\ell(u_i) \leq 1$ ($1 \leq i \leq n$).

$\delta(q, u_1 \cdots u_n)$ -t az eddigiekhez hasonlóan rekurzív definícióval értelmezzük, azaz

$$1. \delta(q, u) \text{ már meghatározott, ha } \ell(u) \leq 1,$$

$$2. \delta(q, u_1 \cdots u_{n-1} u_n) = \bigcup_{q' \in \delta(q, u_1 \cdots u_{n-1})} \delta(q', u_n)$$

$$\Delta(q, u) = \bigcup \{ \delta(q, u_1 \cdots u_n) \mid u = u_1 \cdots u_n, \ell(u_i) \leq 1 \ (1 \leq i \leq n), n \in \mathbb{N} \}.$$

Az ε NDA elfogad egy u szót, ha $\Delta(q_0, u) \cap F \neq \emptyset$.

Véges determinisztikus automaták általánosításai III.

Szóátmenetes NDA, reguláris kifejezés átmenetes NDA

Szóátmenetes, nondeterminisztikus automata

$$\mathcal{A} = \langle Q, T, \delta : Q \times T^* \rightarrow 2^Q, q_0, F \rangle$$

Ugyanúgy, mint az előbb, csak itt most nincs a felbontás részzavaira az $\ell(u_i) \leq 1$ megkötés.

Reguláris kifejezés átmenetes, nondeterminisztikus automata

$$\mathcal{A} = \langle Q, T, \delta : Q \times \mathcal{R}(T) \rightarrow 2^Q, q_0, F \rangle$$

$\Delta(q, u)$ értelmezése: $u = u_1 \cdots u_n$ az u szó tetszőleges felbontása.

$\delta(q, u_1 \cdots u_n)$ rekurzív definíciója:

$$1. \delta(q, u_1) = \bigcup \{ \delta(q, R) \mid u_1 \in L(R) \},$$

$$2. \delta(q, u_1 \cdots u_{n-1} u_n) = \bigcup \{ \delta(q, R) \mid q \in \delta(q, u_1 \cdots u_{n-1}), u_n \in L(R) \}.$$

$\Delta(q, u) = \bigcup \{ \delta(q, u_1 \cdots u_n) \mid u = u_1 \cdots u_n \}$. A reg. kif. átmenetes, nondet. automata elfogad egy u szót, ha $\Delta(q_0, u) \cap F \neq \emptyset$.

Ezen általánosított automatákkal is az \mathcal{L}_3 -beli nyelveket fogadhatjuk el.

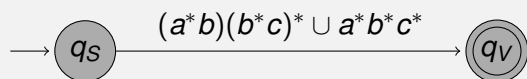
Reguláris kifejezéshez VDA készítése (Automataszintézis)

ε NDA készítésére reguláris kifejezéshez

4. feladat: Legyen $R = (a^*b)(b^*c)^* \cup a^*b^*c^*$. Készítsünk olyan \mathcal{A} VDA-t, hogy $L(\mathcal{A}) = L(R)$!

Megoldás:

0. lépés: Adott R_0 reguláris kifejezéshez kiindulunk egy $\mathcal{A} = \langle \{q_S, q_V\}, T, \delta, q_S, \{q_V\} \rangle$ általánosított automatából, ahol $\delta(q_S, R_0) = \{q_V\}$ az egyetlen átmenet.



Reguláris kifejezéshez VDA készítése (Automataszintézis)

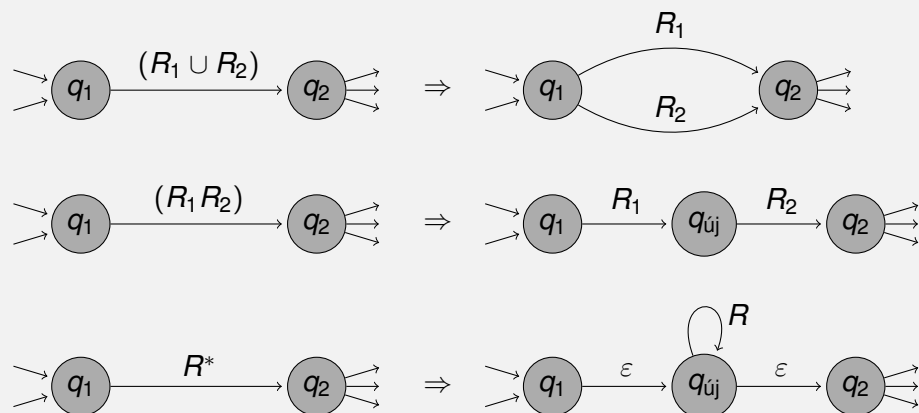
ε NDA készítésére reguláris kifejezéshez

1. lépés: R_0 felépítése szerint, véges sok lépésben lebontjuk az automatát ε NDA-vá. Legyen $\mathcal{A} = \langle Q, T, \delta, q_S, \{q_V\} \rangle$ az aktuális és $\mathcal{A}' = \langle Q', T, \delta', q_S, \{q_V\} \rangle$ a $q_2 \in \delta(q_1, R)$ átmenet lebontásával kapott új automata. Azaz legyen $\delta'(q_1, R) = \delta(q_1, R) \setminus \{q_2\}$. Továbbá,

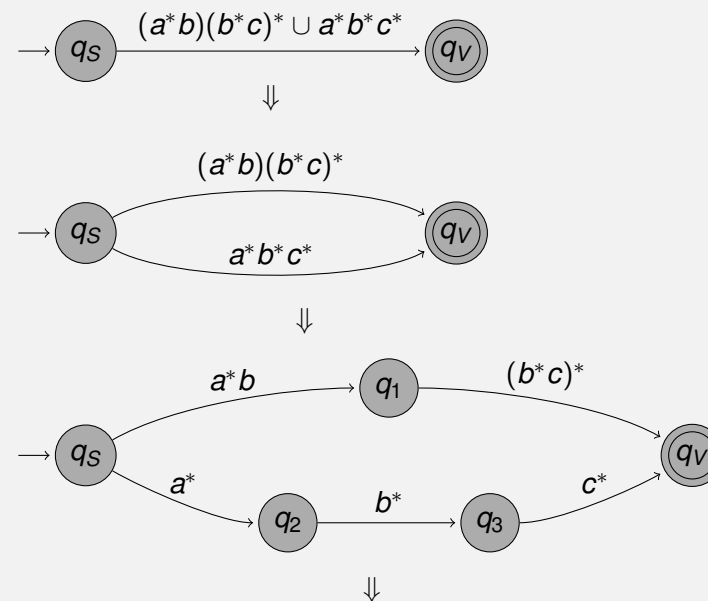
1. ha $R = (R_1 \cup R_2)$, akkor legyen $Q' = Q$ és $\delta'(q_1, R_1) = \delta(q_1, R_1) \cup \{q_2\}$, $\delta'(q_1, R_2) = \delta(q_1, R_2) \cup \{q_2\}$.
 2. ha $R = (R_1 R_2)$, akkor legyen $Q' = Q \cup \{q_{új}\}$ és $\delta'(q_1, R_1) = \delta(q_1, R_1) \cup \{q_{új}\}$, $\delta'(q_{új}, R_2) = \{q_2\}$.
 3. ha $R = R_1^*$, akkor legyen $Q' = Q \cup \{q_{új}\}$ és $\delta'(q_1, \varepsilon) = \delta(q_1, \varepsilon) \cup \{q_{új}\}$, $\delta'(q_{új}, R_1) = \{q_{új}\}$, $\delta'(q_{új}, \varepsilon) = \{q_{új}\}$.
- Ekkor $L(\mathcal{A}') = L(\mathcal{A})$. Végül, ha már minden reguláris kifejezés $T \cup \{\varepsilon\}$ -nak eleme, akkor egy ε NDA-t kapunk.

Reguláris kifejezéshez VDA készítése (Automataszintézis)

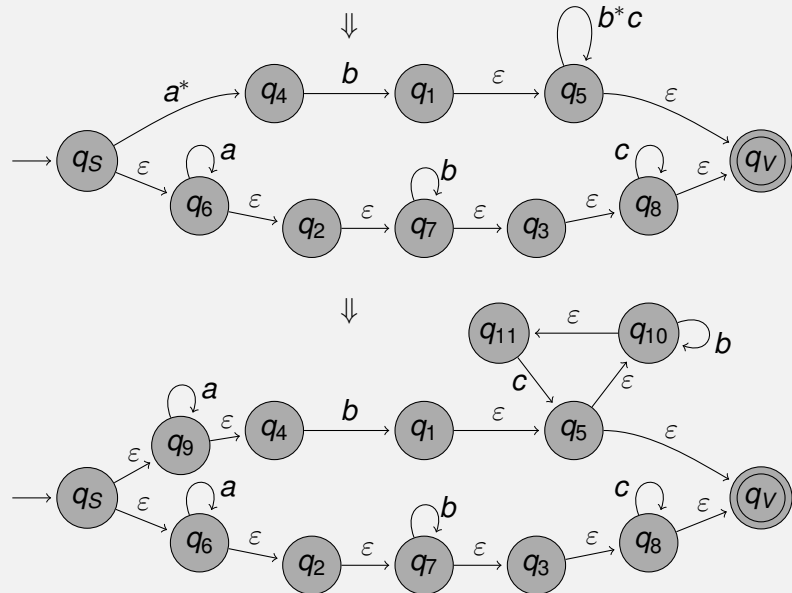
ε NDA-vá alakítás lépései



Reguláris kifejezéshez VDA készítése (Automataszintézis)



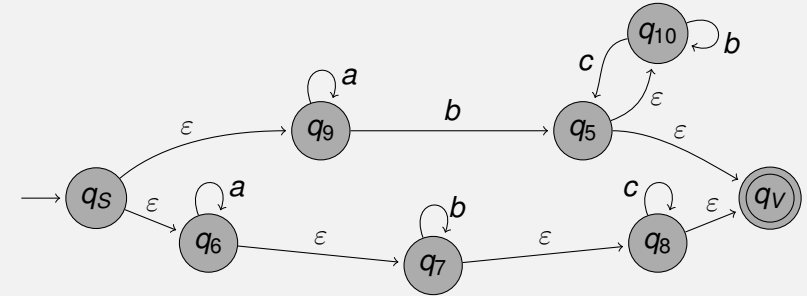
Reguláris kifejezéshez VDA készítése (Automataszintézis)



Reguláris kifejezéshez VDA készítése (Automataszintézis)

Egyszerősítési lehetőség: Ha $\delta(q, t) = \{q'\}$ és $\delta(q', t') = \{q''\}$ ($t, t' \in T \cup \{\varepsilon\}$, legalább az egyikük ε) az egyetlen átmenet q' -be illetve q' -ből, akkor q' elhagyható, és legyen $\delta(q, tt') = \{q''\}$.

Például adott esetben $q_1, q_4, q_2, q_3, q_{11}$ elhagyható.



Reguláris kifejezéshez VDA készítése (Automataszintézis)

2. lépés: ε NDA-ból NDA

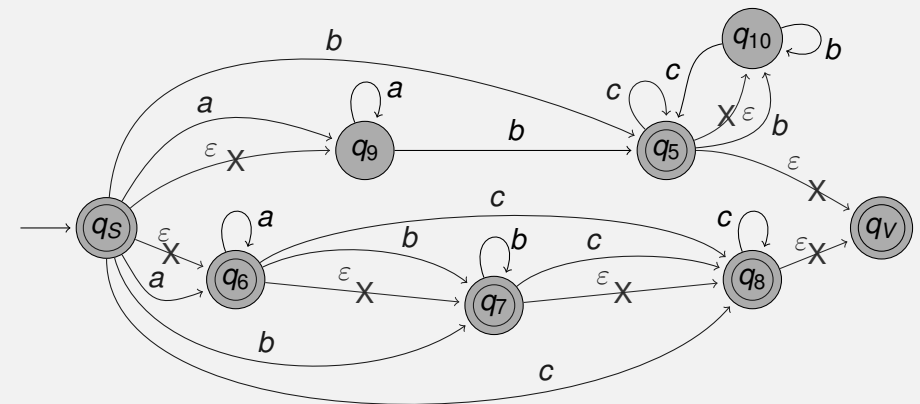
Adott \mathcal{A} ε NDA-val ekvivalens \mathcal{A}' NDA készítése:

$\mathcal{A} = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$, $\mathcal{A}' = \langle Q, T, \delta', q_0, F' \rangle$, tehát ugyanazok az állapotaik és a kezdőállapotuk. Legyen $q'' \in \delta'(q', t)$, akkor és csak akkor ha létezik $q \in Q$, hogy eljuthatunk \mathcal{A} -ban q' -ből q -ba ε -átmenetekkel és $q'' \in \delta(q, t)$. (Azaz létezik $q \in \Delta(q', \varepsilon)$ melyre $q'' \in \delta(q, t)$.)

Megjegyzés: A már jól ismert rekurzív eljárással meghatározható azon állapotok $H(q)$ halmaza ahova egy adott q állapotból ε -átmenetekkel eljuthatunk. ($H_i(q)$ ahova i lépésben eljuthatunk, a $H_0(q), H_1(q), \dots$ sorozat stabilizálódik.)

\mathcal{A}' -ben akkor lesz egy q állapot elfogadó, ha \mathcal{A} -ban q -ból eljuthatunk ε -átmenetekkel elfogadó állapotba. ($q \in F' \Leftrightarrow \Delta(q, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset$)

Reguláris kifejezéshez VDA készítése (Automataszintézis)



Reguláris kifejezéshez VDA készítése (Automataszintézis)

3. lépés: NDA-hoz VDA

$\mathcal{A} = \langle Q, T, \delta, q_0, F \rangle$ NDA-hoz $\mathcal{A}' = \langle Q', T, \delta', q'_0, F' \rangle$ VDA

Ötlet: \mathcal{A}' végigköveti \mathcal{A} lehetséges működéseit! A determinisztikussá tett automata állapotainak halmaza a nemdeterminisztikus automata állapothalmazának hatványhalmaza, azaz $Q' := 2^Q$

A $\{q_1, \dots, q_s\}$ állapothoz és a t betűhöz a VDA

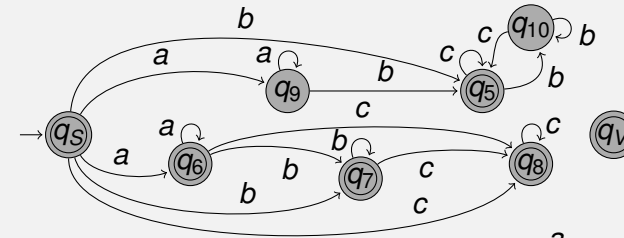
állapotátmenet-függvénye a nemdeterminisztikus automata állapotátmenet-függvényének a q_i állapotokhoz és t betűhöz tartozó képeinek (azaz: állapotok halmazainak) unióját rendelje, azaz:

$$\delta'(\{q_1, \dots, q_s\}, t) := \bigcup_{i=1}^s \delta(q_i, t).$$

A kezdőállapot $q'_0 := \{q_0\}$, az elfogadó állapotok F' halmaza, pedig azon állapotokból álljon, melyek tartalmaznak F -beli állapotot.

Megjegyzés: A gyakorlatban, csak a kezdőállapotból elérhető állapotokra határozzuk meg az átmeneteket.

Reguláris kifejezéshez VDA készítése (Automataszintézis)



		a	b	c
\Leftrightarrow	$\{q_5\}$	$\{q_6, q_9\}$	$\{q_5, q_7\}$	$\{q_8\}$
\leftarrow	$\{q_6, q_9\}$	$\{q_6, q_9\}$	$\{q_5, q_7\}$	$\{q_8\}$
\leftarrow	$\{q_5, q_7\}$	$\{\}$	$\{q_7, q_{10}\}$	$\{q_5, q_8\}$
\leftarrow	$\{q_8\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{q_8\}$
	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
\leftarrow	$\{q_7, q_{10}\}$	$\{\}$	$\{q_7, q_{10}\}$	$\{q_5, q_8\}$
\leftarrow	$\{q_5, q_8\}$	$\{\}$	$\{q_{10}\}$	$\{q_5, q_8\}$
	$\{q_{10}\}$	$\{\}$	$\{q_{10}\}$	$\{q_5\}$
\leftarrow	$\{q_5\}$	$\{\}$	$\{q_{10}\}$	$\{q_5\}$

Házi feladat

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$a^*b^*X \cup (ba)^*bY \cup b^* = X$$

$$ba^*X \cup bY \cup a^*b^* = Y$$

2. Határozzuk meg *reguláris kifejezéssel* az alábbi véges determinisztikus automata által elfogadott nyelvet!

	a	b
\rightarrow q_0	q_1	q_2
\leftarrow q_1	q_3	q_4
q_2	q_3	q_4
\leftarrow q_3	q_0	q_3
q_4	q_4	q_4

3. Készítsünk VDA-t a következő reguláris kifejezéshez!

$$(a^*b)^*c \cup ab^*c^* \cup a^*.$$