TDK témák

1 Síkgráfok és a sandpile csoport hatásai a feszítőfákon

Egy gráf sandpile csoportja egy kommutatív csoport melynek rendje a feszítőfák száma. Sok érdekes bijekció ill csoporthatás ismert a sandpile csoport elemei és a feszítőfák között.

Különösen érdekes és meglepő eredmények derültek ki az utóbbi időben az ún Bernardi- ill rotor-hatásokról. Mindkét csoporthatás egy felületbe ágyazott gráf sandpile csoportjának hatása a feszítőfákon. Mindkét hatásnak egyszerű (bár kicsit hosszadalmas) kombinatorikus definíciója van, és mindkettő függ még a gráf egy kijelölt pontjától is.

Chan és szerzőtársai ill Baker és Wang azt vizsgálták, hogy a rotor- ill a Bernardi-hatás mikor nem függ a kijelölt ponttól (azaz mikor tartozik egy felületbe ágyazott gráfhoz egy jól definiált rotor- vagy Bernardi-hatás). Mindkét esetben az derült ki, hogy a hatás pontosan akkor nem függ az alapponttól, ha a gráf síkbaágyazott. Bár ezekre az eredményekre már több bizonyítás is ismert, még mindig úgy tűnik, hogy nincs igazán jól megértve a jelenség háttere.

Kicsit más irányból közelítve a problémakörhöz, meg lehet azt is kérdezni hogy ha ismerjük a gráfot, de nem ismerjük a felületbe ágyazást és minden alappont esetén ismerjük a rotor- vagy a Bernardi-hatást, akkor meg tudjuk-e mondani hogy milyen génuszú felületbe van ágyazva a gráf. McDonough megmutatta hogy a rotor-hatás esetén ezt meg tudjuk tenni. Nyitott kérdés maradt viszont hogy a Bernardi-hatás esetén is meghatározzák-e a hatások a génuszt. Ez utóbbi kérdés megválaszolhatónak tűnik.

Ajánlott irodalom:

M. Baker and Y. Wang, *The Bernardi process and torsor structures on spanning trees*, Int. Math. Res. Not. 2017, https://arxiv.org/abs/1406.5084

Alex McDonough, *Determining Genus From Sandpile Torsor Algorithms*, https://arxiv.org/abs/1804.07807

M. Chan, T. Church, and J. Grochow. *Rotor-routing and spanning trees on planar graphs*, Int. Math. Res. Not. 11 (2015) 3225–3244.

M. Chan, D. Glass, M. Macauley, D. Perkinson, C. Werner, and Q. Yang *Sandpiles, Spanning Trees, and Plane Duality* SIAM J. Discrete Math., 29(1), 461?471, 2015

2 Gráfok gonality-je

Egy gráf gonality-je egy viszonylag egyszerűen definiálható mennyiség, ami egy algebrai geometriai fogalom kombinatorikus analógja. A hallgató feladata a téma eredményeinek feldolgozása. E mellett nyitott kérdéseken is lehet gondolkozni, például nyitott hogy mi a ”diszkrét” és a ”folytonos” világbeli gonality viszonya. Ezt a kérdést érdemes lenne számítógépes programmal megvizsgálni.

Ajánlott irodalom:

Dion Gijswijt, Harry Smit and Marieke van der Wegen, *Computing graph gonality is hard*, https://arxiv.org/pdf/1504.06713.pdf

M. Baker. *Specialization of linear systems from curves to graphs.* Algebra and Number Theory, 2(6):613–653, 2008. With an appendix by Brian Conrad.

M. Baker and S. Norine. Harmonic morphisms and hyperelliptic graphs. Int. Math. Res. Not. IMRN (2009), no 15, 2914–2955.

3 Algoritmikus és bonyolultságelméleti kérdések a chip-firing játék kapcsán

A chip-firing játék egy egyszerű egyszemélyes játék egy gráfon. A csúcsokon szét van osztva néhány chip, amiket a “lövés”-nek nevezett művelettel lehet újraosztani: Ha egy csúcson legalább annyi chip van, mint a fokszám, akkor őt “kilőhetjük”, azaz minden szomszédjának átadhatunk egy-egy chipet. Bár ez egy nagyon egyszerűen hangzó játék, sok mindenhez köze van, például a Tutte polinomhoz és tekinthető egyfajta “diszkrét” algebrai geometriának is. A hallgató feladata a játékhoz kapcsolódó bonyolultságelméleti kérdések áttekintése lenne, illetve nyitott kérdések vizsgálata.

Ajánlott irodalom

A. Björner and L. Lovász. *Chip-firing games on directed graphs.* J. Algebraic Combin., 1(4):305–328, 1992.

A. Björner, L. Lovász, and P. W. Shor. *Chip-firing games on graphs.* European J. Combin., 12(4):283–291, 1991.

M. Farrell and L. Levine. *Coeulerian graphs.* Proc. Amer. Math. Soc.

Bálint Hujter, Viktor Kiss, Lilla Tóthmérész, *On the complexity of the chip-firing reachability problem*, Proc. Amer. Math. Soc. 145 (2017), 3343–3356